

L'indivisibilità del fotone: STEM 2020

Jacopo Tissino

22 aprile 2020

Iniziamo con un quiz: **cos'è la luce?**

- a) Un'onda.
- b) Una particella.
- c) Sia un'onda che una particella.
- d) Né un'onda né una particella.
- e) Mi astengo.

La domanda, posta in questo modo vago (e provocatorio), rischia di allontanarsi dall'ambito di ricerca della Fisica: non siamo generalmente interessati a descrivere *l'essenza fondamentale* di un oggetto, bensì cerchiamo di fornire modelli che ne descrivano il comportamento e che siano in grado di predire i risultati degli esperimenti che facciamo. Questo approccio all'investigazione spesso riesce a darci grande chiarezza sul come pensare agli oggetti fisici.

Tenendo questo in mente, cerchiamo di rispondere alla domanda. Innanzitutto, dobbiamo chiarire qual'è l'oggetto fisico che vogliamo descrivere.

Partiamo dalla descrizione più intuitiva: la luce è quello che vediamo con gli occhi. Vedremo che, investigando questo fenomeno nel dettaglio, questa definizione risulterà restrittiva e ci porterà a ridefinire quella che vediamo con gli occhi come *luce visibile* — quindi, c'è anche della “luce invisibile”.

Per ora, tuttavia, partiamo dalle prime teorie della luce, che volevano descrivere solo quella visibile.

1 Teorie della luce

1.1 Newton versus Huygens

Lo storico dibattito è quello fra Newton e Huygens.

Newton (1642–1726/1727), il più famoso dei due, proponeva una **teoria corpuscolare** della luce.

Secondo questa teoria, la luce è composta di corpuscoli molto leggeri che viaggiano ad una velocità finita.

Quali fenomeni voleva spiegare Newton con questa teoria? Riflessione e rifrazione, innanzitutto: lui ha dimostrato che facendo passare la luce per un prisma si può scomporla nelle sue componenti cromatiche, e — qui la chiave! — questo processo è reversibile: con un altro prisma è possibile ricomporre la luce bianca.

La luce, dunque, viene deviata quando passa per un'interfaccia, e di quanto viene deviata dipende dal suo colore.

La riflessione invece è ciò che accade per uno specchio: la luce “rimbalza” ad un angolo uguale a quello di incidenza.

La teoria di Newton ha delle spiegazioni per questi fenomeni, seppur non completamente soddisfacenti. Newton la mette in pratica per costruire telescopi: il telescopio Newtoniano utilizza solo specchi invece che lenti, eliminando quindi l’aberrazione cromatica che le caratterizza.

La teoria corpuscolare ha dietro l’apparato della nuovissima meccanica Newtoniana: la luce viene descritta come un insieme di piccole particelle con massa molto ridotta che si muovono molto velocemente rispettando le leggi di Newton: inerzia, $\vec{F} = m\vec{a}$ e azione-reazione.

Un vantaggio della teoria corpuscolare è il fatto che non richiede un *etere luminifero* (portatore della luce).

La teoria di Huygens è **ondulatoria**: vede la luce come un’onda che si propaga in un qualche tipo di etere, in modo simile a come si comportano le onde nell’acqua poco profonda.

Questa teoria spiega, al contrario di quella corpuscolare, il fatto che all’interfaccia fra due mezzi ci siano sia riflessione che rifrazione: nella meccanica ondulatoria questo è un fatto naturale e atteso.

Nel contesto della meccanica ondulatoria, si può derivare la legge di Snell, che governa l’angolo al quale la luce viene diffratta.

Iniziamo però con i preliminari della teoria ondulatoria: guardiamo il caso monodimensionale per semplicità, guardare il problema in più dimensioni è utile ed interessante ma le caratteristiche principali si possono evincere già da qui.

La caratteristica principale delle onde è la periodicità: partiamo da quella che si chiama onda *monocromatica*, il caso più semplice, che ha un periodo ben definito. Le equazioni che ora scriviamo potrebbero descrivere, ad esempio, la variazione del livello dell’acqua lungo una linea che tracciamo in uno stagno: chiamiamola A . A può assumere un valore positivo o negativo, se vale 0 significa che il livello è quello che avrebbe lo stagno senza perturbazioni.

Se fissiamo un istante temporale t_0 e “fotografiamo” l’onda, la formula che la descrive è

$$A(x) \Big|_{t=t_0} = A_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right). \quad (1)$$

A_0 è l’ampiezza massima che raggiunge l’onda, l’altezza dei picchi e la profondità delle valli. λ è una lunghezza caratteristica dell’onda, detta *lunghezza d’onda*: è la distanza fra due picchi vicini, o fra due valli vicine; se x — la posizione spaziale lungo la linea — varia aumentando o diminuendo di esattamente λ l’ampiezza non cambia. Questo è dovuto al fatto che la funzione seno ha una periodicità di 2π .

Il termine φ si chiama *fase*, ed esprime il fatto che nel punto che chiamiamo $x = 0$ l’onda può essere in un massimo, un minimo, o a qualunque punto della sua evoluzione. Visto che φ è arbitrario, è arbitraria anche la scelta di un seno piuttosto che un coseno: cambiando φ di $\pi/2$ possiamo passare dall’uno all’altro.

Se vogliamo includere la dipendenza dal tempo, otterremo una formula di questo tipo:

$$A(x, t) = A_0 \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right). \quad (2)$$

Abbiamo inserito un tempo caratteristico T , chiamato *periodo*: se fissiamo la posizione x e guardiamo solo un punto, l’onda torna al punto dov’era prima dopo un tempo T . C’è un meno perché stiamo assumendo che l’onda avanzi verso destra, ovvero verso le x positive: se x aumenta di un poco, per mantenerci nella stessa posizione (“viaggiando con l’onda”, ovvero tornando allo stesso valore dell’argomento del seno) dobbiamo aumentare un poco anche t , ovvero aspettare un poco.

Se aspettiamo un tempo T l’onda si è spostata di una lunghezza λ : quindi, la sua velocità è $v = \lambda/T$. Spesso questo si scrive introducendo la *frequenza*, $f = 1/T$, misurata in $\text{Hz} = 1/\text{s}$.

Così, scriviamo

$$v = \lambda f. \quad (3)$$

Esercizio 1 (Legge di Snell):

Da impostare a lezione, senza finire il conto. I fronti d'onda arrivano paralleli, il vettore d'onda ha un angolo θ_{in} dalla normale. $v = \lambda f$ deve valere sia dentro che fuori dal vetro: visto che f è la stessa, abbiamo

$$\frac{\lambda_{\text{out}}}{\lambda_{\text{in}}} = \frac{n_{\text{in}}}{n_{\text{out}}}, \quad (4)$$

dove definiamo l'indice di rifrazione con $v = c/n$.

Se D è la distanza fra le creste misurata lungo l'interfaccia, abbiamo

$$\frac{\lambda_i}{D} = \sin(\theta_i), \quad (5)$$

per $i = \text{in, out}$.

Da qui si ricava

$$n_{\text{in}} \sin(\theta_{\text{in}}) = n_{\text{out}} \sin(\theta_{\text{out}}). \quad (6)$$

Abbiamo menzionato prima il fatto che la teoria ondulatoria prevede che questo fenomeno di rifrazione avvenga simultaneamente a quello della riflessione. La teoria permette di dare delle precise stime su quanta luce viene riflessa e quanta viene trasmessa. Non entriamo nel dettaglio — chi è interessata può trovare una discussione più completa in diversi testi di ottica, ad esempio Vistnes [Vis18]. Menzioniamo solo le quantità in gioco: la luce trasmette energia, ma come la quantifichiamo? Immaginiamo di avere un sensore in grado di rilevare questa energia. Questo sensore avrà una certa area, e lo terremo acceso per un certo tempo. Se l'onda luminosa è costante nel tempo, l'energia che rileveremo tenendo il detector acceso per un tempo $2T$ sarà due volte quella che avremmo rilevato in un tempo T . Allo stesso modo, se raddoppiamo l'area del sensore l'energia che rileviamo raddoppierà.

Per questo motivo, quantifichiamo l'energia della luce usando l'**intensità**, che è definita come l'energia per unità di tempo e per unità di area:

$$I = \frac{E}{At}, \quad (7)$$

e si misura in $\text{J/m}^2/\text{s} = \text{W/m}^2$.

In termini di intensità possiamo definire i coefficienti di riflessione e trasmissione: se l'intensità dell'onda incidente è I_{in} , l'intensità dell'onda riflessa è I_r mentre quella dell'onda trasmessa (ovvero rifratta) è I_t , allora definiamo

$$\mathcal{R} = \frac{I_r}{I_{\text{in}}} \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = \frac{I_t}{I_{\text{in}}}, \quad (8)$$

che dovranno soddisfare $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

Un altro fenomeno spiegato dalla teoria ondulatoria è la diffrazione: se illuminiamo una fessura, e restringiamo la fessura, l'immagine luminosa inizialmente si restringe, ma a un certo punto inizia ad allargarsi.

Abbiamo definito la velocità della luce, ma quanto vale numericamente?

Esercizio 2 (Esperimento di Michelson, velocità della luce):

L'apparato che lo scienziato americano Michelson ha utilizzato nel 1880 [Mic80] per misurare la velocità della luce permette una misura molto accurata. Per una descrizione dell'apparato e una figura vedere Wikipedia [Con19].

Alcuni parametri di una singola misura di Michelson: distanza fra gli specchi $D = 605.40$ m; variazione lineare della posizione: $d = 114.85$ mm, raggio $r = 8.7392$ m; rivoluzioni al secondo: $n = 257.36$ Hz.

Qual'è la velocità della luce che dovrebbe calcolare Michelson?

Formula corretta:

$$c_{\text{exp}} = \frac{2 \times 2\pi \times 2Dn}{\arctan(d/r)} \approx 0.994c. \quad (9)$$

1.2 Maxwell e Einstein

Nei primi anni 1860, James Clerk Maxwell riesce a unificare tutte le osservazioni riguardanti i fenomeni elettrici e magnetici nelle sue celebri 4 equazioni: queste descrivono i due *campi vettoriali* elettrico \vec{E} e magnetico \vec{B} . Ad ogni punto nello spazio per ogni istante temporale sono assegnati questi due vettori, e inoltre abbiamo la carica elettrica Q e la corrente elettrica \vec{J} .

Le quattro equazioni si possono dividere in due gruppi: due equazioni sono identità che pongono dei vincoli su come si comportano e come interagiscono i campi elettrico e magnetico, le altre due invece coinvolgono la carica Q e la corrente \vec{J} e descrivono come queste generino i campi elettrico e magnetico, rispettivamente.

Se si scrive le equazioni di Maxwell ponendo $Q = \vec{J} = 0$, ovvero nel vuoto, si trova un'equazione che descrive un'onda che viaggia proprio alla velocità c di cui abbiamo parlato prima. Questo fa sospettare che la luce sia un fenomeno elettromagnetico!

È proprio così: non entriamo nei dettagli, ma si può dimostrare sperimentalmente che agitando della carica elettrica avanti e indietro si può generare luce.

Qui entra in gioco l'unificazione di cui parlavamo: la *luce visibile* di cui abbiamo iniziato a parlare all'inizio è solo una tipologia particolare di una classe più grande di fenomeni che possiamo chiamare *luce*: la **radiazione elettromagnetica**.

Radiazione è un termine generale per descrivere qualcosa che si diffonde nello spazio portando energia.

Inserire tabella/grafico con le varie lunghezze d'onda della luce.

A fine 1800 la questione della luce sembrava risolta, ma ben presto si scoprì un effetto che metteva i bastoni fra le ruote: l'*effetto fotoelettrico*.

Detta in sintesi, la questione è questa: se si manda della luce su certi materiali si può "eccitare" i loro elettroni, ovvero strapparli agli atomi dei quali facevano parte. La parte che non funziona con la teoria ondulatoria di Maxwell è il fatto che, mantenendo la stessa intensità di luce ma aumentandone la *frequenza* l'energia cinetica degli elettroni strappati aumenta.

Questo non sembra avere senso: stiamo mandando la stessa quantità di energia, e gli elettroni uscenti ne hanno di più? (Non c'è violazione della conservazione dell'energia: gli elettroni sono più energetici ma ce ne sono di meno)

Si scopre così che a ogni frequenza si può associare una energia caratteristica, e la relazione che lega energia e frequenza è *lineare*! La relazione è

$$E = hf, \quad (10)$$

dove E è l'energia caratteristica, f è la frequenza della luce, mentre

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}, \quad (11)$$

è la costante di proporzionalità, che si chiama **costante di Planck**. Nota interessante: il valore è esatto dal 2018. Questo numero è così importante che definiamo le nostre unità di misura a partire da esso.

Cosa vuol dire “energia caratteristica”? L'ipotesi avanzata da Einstein e Planck per spiegare l'effetto fotoelettrico e altri fenomeni, come la radiazione di corpo nero, fu quella che la luce fosse suddivisa in quanti indivisibili, che poi furono chiamati **fotoni**, caratterizzati proprio da un'energia data da $E = hf$.

Il grande scienziato Millikan nella sua *Nobel lecture* del 1924 [Mil24] parla così della teoria della luce quantizzata:

“It may be said then without hesitation that it is not merely the Einstein equation which is having extraordinary success at the moment, but the Einstein conception as well.

But until it can account for the facts of interference and the other effects which have seemed thus far to be irreconcilable with it, we must withhold our full assent.”

Era chiaro, dunque, che la teoria corpuscolare non poteva spiegare del tutto i fenomeni osservati, che hanno caratteristiche ondulatorie.

Non entreremo nel *come*, ma questo problema si è effettivamente risolto qualche anno dopo con la teoria dell'elettrodinamica quantistica (QED), che ad oggi è la teoria accettata. Così per chiudere in bellezza (non da dire a lezione), ecco la Lagrangiana della QED:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi. \quad (12)$$

2 Note di probabilità

Un *evento* A è qualcosa che possiamo misurare, ovvero qualcosa per cui è possibile determinare se è avvenuto o meno. Possiamo assegnare **probabilità** agli eventi: cosa questo significhi esattamente è un'importante questione filosofica.¹

Un'interpretazione diffusa è quella frequentista: la probabilità è la frazione di casi in cui avviene l'evento A diviso per i casi totali:

$$\mathbb{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_A}{N_{\text{TOT}}}, \quad (13)$$

dove N_A è il numero di volte che ho visto l'evento A , mentre N_{TOT} è il numero di volte in cui ho ripetuto l'esperimento.

2.1 Probabilità condizionata

Un concetto importante in statistica e probabilità è quello di **condizionamento**: qual'è la probabilità che avvenga l'evento B , se so che è avvenuto A ? Questo si denota con $\mathbb{P}(B|A)$, ed è semplice da calcolare in linea teorica: quello che abbiamo effettivamente fatto è di ridurre il nostro insieme totale di casi considerati da N_{TOT} a N_A : quindi, avremo

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{N_{BA}}{N_A} = \frac{N_{BA}/N_{\text{TOT}}}{N_A/N_{\text{TOT}}} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}, \quad (14)$$

¹ Io propendo per la scuola Bayesiana per la quale la probabilità di un evento riflette la nostra credenza soggettiva che un evento possa accadere: la possiamo calcolare come la quota alla quale saremmo disposti a scommettere sull'evento, aspettandoci di guadagnare.

dove con $BA = AB$ si intende l'evento che avvengano sia A che B .

3 Il nostro esperimento

Questa sezione è presa principalmente dall'introduzione di Thorn et al. [Tho+04].

L'effetto fotoelettrico è molto suggestivo dell'esistenza del quanto di luce — il **fotone** — ma non è una prova conclusiva. Si può dimostrare che l'effetto potrebbe essere anche spiegato assumendo che il campo elettromagnetico sia un'onda classica, mentre il *detector* è quantizzato, ovvero composto di particelle.

L'obiettivo che ci poniamo in queste ore è di comprendere e replicare un esperimento di Grangier del 1986, che dà un'evidenza sperimentale molto forte per il fatto che la luce sia effettivamente composta di particelle.

L'idea di base dell'esperimento è di ridurre molto l'intensità di un fascio di luce e farlo passare per un *beam splitter* — entreremo più nel dettaglio, per ora diciamo semplicemente che è un pezzo di plexiglass costruito in modo tale che la luce incidente abbia un'eguale probabilità di andare dritta o di deviare di un angolo retto quando lo incontra.

Mettiamo dei sensori corrispondenti alle due uscite, e andiamo a verificare che se vediamo il fotone da una parte, non lo vedremo dall'altra.

Ci sono diversi problemi con questa prima grezza descrizione dell'esperimento, ma iniziamo con le basi: quali sono le componenti dell'apparato sperimentale?

3.1 Laser

Questo è uno strumento che Grangier non aveva a disposizione, ma che ci facilita molto la vita. Un LASER — Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — sfrutta le proprietà di come la luce interagisce con gli atomi, si può dire “risuonando” con gli elettroni, per amplificare una frequenza di luce ben precisa.

Riescono a emettere dunque quello che, nel modello classico ondulatorio, è proprio l'*onda piana* che abbiamo visto, descritta dalla sinusoide.

3.2 Beamsplitter

Un beam-splitter sono essenzialmente due prismi incollati insieme. L'interfaccia interna fra di essi soddisfa le proprietà che abbiamo visto nella sezione 1.1; i beamsplitter tendenzialmente sono fatti in modo tale che i coefficienti siano molto vicini a

$$\mathcal{R} = \mathcal{T} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Visto che da entrambi i lati dell'interfaccia c'è lo stesso materiale, la legge di Snell si applica in modo molto semplice visto che $n_1 = n_2$, dunque non c'è deflessione.

3.3 Detector e fotomoltiplicatori

Come facciamo a rilevare i fotoni? In genere, i sensori che utilizziamo si basano sull'effetto fotoelettrico, ovvero sul fatto che il fotone che arriva ha dell'energia, e la può utilizzare per spostare della carica elettrica. Finché abbiamo molta luce, come quando facciamo una fotografia, questo va bene. Se abbiamo un po' meno luce, possiamo allungare il tempo di esposizione, oppure avere una grande superficie che consideriamo.

Il problema è sempre il fatto che l'energia di un singolo fotone è molto piccola, quindi la strategia è generalmente quella di aspettare che ne arrivino tanti, anche se ne rileviamo una piccola frazione va bene.

Questo non va bene per noi! Se vogliamo investigare le proprietà del singolo fotone dobbiamo riuscire a rilevare una significativa porzione di essi.

Il modo di risolvere questo problema è tramite una *valanga*. Il nostro sensore è un sistema instabile, quando arriva un fotone lo destabilizza come un calcio su un nevaio: non saremmo in grado di vedere il singolo fotone, ma riusciamo facilmente a vedere la valanga. Il nome del sensore è proprio "**fotodiodo a valanga**".

Le valanghe in montagna sono irreversibili; nel caso dell'elettronica invece c'è un modo di resettare tutto. Questo si può fare velocemente, ma non è istantaneo: dopo ogni fotone rilevato c'è una finestra temporale nella quale, se ne arriva un altro, non lo sapremo.

Inoltre, una caratteristica dei sistemi instabili è che ogni tanto scattano per qualche perturbazione ambientale, senza che ci sia stato un fotone. I conteggi dovuti a questo vanno sotto il nome di **dark count**.

È importante che questo dark count sia basso rispetto ai conteggi veri.

3.4 SPDC

Questa è forse la parte più complessa dell'apparato, dal punto di vista della fisica necessaria a spiegarne il funzionamento.

Esistono dei particolari cristalli, chiamati **cristalli nonlineari**, che esibiscono il fenomeno della Spontaneous Parametric Down-Conversion.

Quando illuminiamo questi cristalli con una luce come quella di un laser, quasi la totalità della luce passa attraverso il cristallo, ma se guardiamo in una direzione ad un angolo di qualche grado da quella del laser vedremo della luce che arriva ad esattamente *metà* della frequenza del laser, ovvero metà dell'energia, ovvero il doppio della lunghezza d'onda. Se guardiamo dall'altra parte del cristallo, rileveremo un fenomeno esattamente simmetrico.

Quello che succede, in termini quantistici, è che i fotoni del laser interagiscono con gli elettroni del cristallo e, talvolta, un fotone viene trasformato in due fotoni, ognuno con metà dell'energia del fotone iniziale.

Per fugare dubbi di circolarità: la descrizione che diamo di questo fenomeno è quantistica perché è quella che funziona, ma non abbiamo bisogno di assumere la teoria quantistica della luce perché il nostro apparato sperimentale funzioni. Se mettiamo dei detector agli angoli corretti, vedremo che rilevano fotoni contemporaneamente alla frequenza giusta da un lato e dall'altro molto di più di quello che accade se li spostiamo ad un angolo poco più in là.

3.5 Com'è fatto il nostro apparato sperimentale

Il nostro apparato è costruito in modo tale da permetterci di avere un "insieme universo" ben definito nel calcolare le probabilità: se prendessimo il laser e lo puntassimo direttamente al beam splitter, potremmo vedere un certo numero di conteggi da una parte e dall'altra, e potremmo controllare quante volte abbiamo visto una coincidenza, ovvero un evento nel quale i detector sono scattati nello stesso momento (entro un margine di errore — entreremo nel dettaglio sulle coincidenze).

Tuttavia, senza controlli non sapremmo valutare se queste coincidenze siano quelle attese o meno: questo perché i nostri detector hanno un certo rate di dark count, e non scattano sempre quando c'è un fotone. Senza sapere quanto è grande l'insieme universo, il numero totale di fotoni che avrebbero potuto essere stati visti, non possiamo sapere se il numero di coincidenze che vediamo sia compatibile con quello atteso per la teoria classica.

da finire

Esercizio 3 (Rate atteso di conteggi):

Il laser che useremo avrà una potenza di circa 50 mW e la luce emessa avrà una lunghezza d'onda di circa 500 nm.

Mettiamo un filtro attenuatore che attenui la luce di un fattore 10000, inoltre la SPDC capita solo a un fotone su 10^7 . Quant'è il numero di fotoni al secondo che ci aspettiamo di vedere nel gate, se il detector ha un'efficienza del 10 %?

(I numeri sono molto spannometrici, da aggiornare eventualmente)

Riferimenti bibliografici

- [Con19] Wikipedia Contributors. *Fizeau–Foucault Apparatus*. In: *Wikipedia*. Page Version ID: 930651496. Wikimedia Foundation, 13 dic. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fizeau%E2%80%93Foucault_apparatus&oldid=930651496 (visitato il 11/04/2020) (cit. a p. 4).
- [Mic80] A. A. Michelson. "Experimental Determination of the Velocity of Light". In: (1880). URL: <https://www.gutenberg.org/files/11753/11753-h/11753-h.htm> (visitato il 11/04/2020) (cit. a p. 4).
- [Mil24] R. A. Millikan. "Robert A. Millikan's Nobel Lecture". 1924. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1923/millikan/lecture/> (visitato il 21/04/2020) (cit. a p. 5).
- [Tho+04] J. J. Thorn et al. "Observing the Quantum Behavior of Light in an Undergraduate Laboratory". In: *American Journal of Physics* 72.9 (13 ago. 2004), pp. 1210–1219. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.1737397](https://doi.org/10.1119/1.1737397). URL: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1737397> (visitato il 25/03/2020) (cit. a p. 6).
- [Vis18] Arnt Inge Vistnes. "Reflection, Transmission and Polarization". In: *Physics of Oscillations and Waves: With Use of Matlab and Python*. A cura di Arnt Inge Vistnes. Undergraduate Texts in Physics. Cham: Springer International Publishing, 2018, pp. 293–334. ISBN: 978-3-319-72314-3. DOI: [10.1007/978-3-319-72314-3_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-72314-3_10). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72314-3_10 (visitato il 21/04/2020) (cit. a p. 3).