Домашнее задание 4 (линал)

Андрей Зотов

Июнь 2023

Задача 1

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (в стандартном базисе).

Решение. Пусть $e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T$ стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. По определению i-й столбец матрицы A (линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) в стандартном базисе состоит из координат вектора $Ae_i = \varphi(e_i)$ в стандартном базисе. При этом нам известно, что $Av_i = u_i$ $(i = 1,2,3)$, а также даны координаты u_i и v_i в стандартном базисе. Например, при $i = 1$ имеем:

$$v_1 = e_1 + 2e_3, u_1 = e_1 + e_3 \Rightarrow A(e_1 + 2e_3) = e_1 + e_3 \Leftrightarrow Ae_1 + 2Ae_3 = e_1 + e_3$$

Далее расписывая таким же образом соотношения $Av_i = u_i$ для $i = 2,3$ получаем систему:

$$\begin{cases} Ae_1 + 2Ae_3 = e_1 + e_3 \\ Ae_1 + Ae_2 - Ae_3 = e_2 + e_3 \\ 2Ae_1 + 3Ae_3 = 2e_3 \end{cases} \tag{1}$$

Наша задача разрешить систему (1) относительно Ae_i через линейные комбинации e_i (коэффициенты при e_i будут столбцами искомой матрицы). Видно, что полученная система линейна относительно Ae_i, поэтому можем составить расширенную матрицу $(V|U)$ этого уравнения и привести ее левую часть V к каноническому ступенчатому виду. Не трудно заметить, что V и U - это матрицы 3×3, для которых формально верно следующее матричное произведение: $V(Ae_1, Ae_2, Ae_3)^T = U(e_1, e_2, e_3)^T$ и по сути строки матрицы V - это координаты векторов v_i в стандартном базисе, а строки матрицы U - это координаты векторов u_i в стандартном базисе. И в случае, если матрица V обратима, то с помощью метода Гаусса мы можем получить соотношение $E(Ae_1, Ae_2, Ae_3)^T = V^{-1}U(e_1, e_2, e_3)^T$ или что тоже самое алгоритмически $(V|U) \to (E|V^{-1}U)$. При этом в i-й строке матрицы $V^{-1}U$ будут координаты Ae_i в стандартном базисе, т.е. искомая матрица $A = (V^{-1}U)^T$ Таким образом:

$$(V|U) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E|V^{-1}U)$$

Т.е. в стандартном базисе матрица оператора φ будет $A = (V^{-1}U)^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2

Ответ: $A' = A(\varphi, f, g) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, $g = \{g_1, g_2\}$, $s_2 = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ стандартный базис в $\mathbb{R}^2$, а $s_3 = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$ стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, тогда

$$A' = A(\varphi, f, g) = C^{-1}_{s_2\to g} A(\varphi, s_3, s_2) C_{s_3\to f}$$

где $C_{s_2\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (по определению матрицы перехода $s_2 \to g$ в ее i-м столбце стоят координаты базисного вектора g_i в стандартном базисе s_2), т.е. $C^{-1}_{s_2\to g} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Аналогично $C_{s_3\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. И по условию $A(\varphi, s_3, s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 13/6 & 5/6 \\ 5/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T$ стандартный базис в $\mathbb{R}^2$. Тогда по условию $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = 3(e_1 + e_2)$ и $\varphi(-e_1 + 2e_2) = -\varphi(e_1) + 2\varphi(e_2) = 0.5(-e_1 + 2e_2)$. Если обозначить $Ae_i = \varphi(e_i),\ i = 1,2$, то получим систему как в задаче 1:

$$\begin{cases} Ae_1 + Ae_2 = 3e_1 + 3e_2 \\ -2Ae_1 + 4Ae_2 = -e_1 + 2e_2 \end{cases} \tag{2}$$

Решаем систему (2) относительно Ae_i так же как в задаче 1 - приведением методом Гаусса к каноническому ступенчатому виду расширенной матрицы системы (2):

$$(V|U) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5/6 & 4/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/6 & 5/3 \\ 0 & 1 & 5/6 & 4/3 \end{array}\right) = (E|V^{-1}U)$$

Транспонированная правая часть и есть матрица оператора φ в стандартном базисе:

$$A = (V^{-1}U)^T = \begin{pmatrix} 13/6 & 5/3 \\ 5/6 & 4/3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 13/6 & 5/6 \\ 5/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4

Ответ: собственные значения $\lambda \in \{0, 1\}$; базис пространства $V_{\lambda=0}$ состоит из одного собственного вектора $v_1 = (1,2,3)^T$, т.е. $V_{\lambda=0} = \langle (1,2,3)^T \rangle$; базис пространства $V_{\lambda=1}$ тоже состоит из одного собственного вектора $v_2 = (1,1,1)^T$, т.е. $V_{\lambda=1} = \langle (1,1,1)^T \rangle$. Матрицу линейного оператора диагонализировать нельзя - не существует базиса, в котором она имеет диагональный вид.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения линейного оператора с матрицей A, т.е. корни характеристического многочлена $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda + 7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda + 7) + 90 + 90 - 12(\lambda + 7) + 27(\lambda - 4) + 25(\lambda - 4) =$$

$$= (\lambda - 4)^2(\lambda + 7) + 180 + 40\lambda - 292 = \lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda \in \{0,1\}$$

Нашли два собственных значения, поэтому рассмотрим два случая.

1. Для пространства $V_{\lambda=0} = \{v = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | Av = 0\}$ найдем базис (или собственные вектора соответствующие собственному значению $\lambda = 0$):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

В каноническом ступенчатом виде имеем одну свободную переменную x_3, поэтому $\dim V_{\lambda=0} = 1$ и ФСР обеспечивает один базисный (собственный) вектор $(1/3, 2/3, 1)^T$ $(x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/3, x_2 = 2/3)$. Можем умножить этот вектор на 3 - от этого его свойство быть базисным (собственным) не измениться, т.е. получим базисный (собственный) вектор $(1,2,3)^T \Rightarrow V_{\lambda=0} = \langle (1,2,3)^T \rangle$.

2. Для пространства $V_{\lambda=1} = \{v = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | Av = v\} = \{v = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | (A-E)v = 0\}$ найдем базис (или собственные вектора соответствующие собственному значению $\lambda = 1$):

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

В каноническом ступенчатом виде имеем одну свободную переменную x_3, поэтому $\dim V_{\lambda=1} = 1$ (что и ожидалось, т.к. кратность корня $\lambda = 1$ ровно 1) и ФСР обеспечивает один базисный (собственный) вектор $(1,1,1)^T$ $(x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1)$. Т.е. $V_{\lambda=1} = \langle (1,1,1)^T \rangle$.

Т.к. оказалось, что $\dim V_{\lambda=0} + \dim V_{\lambda=1} = 2 < 3$, то матрицу A нельзя диагонализировать. Для существования диагонального вида линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ требуется наличие 3-х линейно независимых собственных векторов - однако в данном случае их может быть только 2.

Задача 5

Ответ: матрица имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда, учитывая, что матрица $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$ имеет треугольный вид, то характеристический многочлен будет $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, т.е. собственные значения матрицы A будут $\lambda \in \{1,2,3\}$. Таким образом имеется 3 разных собственных значения у матрицы размером $3 \times 3 \Rightarrow$ существует базис из собственных векторов, в котором она имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем этот базис (собственные вектора, соответствующие трем собственным значениям $\lambda \in \{1,2,3\}$).

1. $\lambda = 1 \Rightarrow V_{\lambda=1} = \{v \in \mathbb{R}^3 | (A-E)v = 0\}$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Одна свободная переменная $x_1 \Rightarrow \dim V_{\lambda=1} = 1$. ФСР: $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow$ собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $V_{\lambda=1} = \langle v_1 \rangle$.

2. $\lambda = 2 \Rightarrow V_{\lambda=2} = \{v \in \mathbb{R}^3 | (A-2E)v = 0\}$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Одна свободная переменная $x_2 \Rightarrow \dim V_{\lambda=2} = 1$. ФСР: $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_3 = 0 \Rightarrow$ собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $V_{\lambda=2} = \langle v_2 \rangle$.

3. $\lambda = 3 \Rightarrow V_{\lambda=3} = \{v \in \mathbb{R}^3 | (A-3E)v = 0\}$:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Одна свободная переменная $x_3 \Rightarrow \dim V_{\lambda=3} = 1$. ФСР: $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow$ собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $V_{\lambda=3} = \langle v_3 \rangle$.

Задача 6

Ответ: через 1000 дней клад будет состоять из $5 \cdot 2^{999} \cdot (3^{1000}+1)$ золотых монет, $5 \cdot 2^{998} \cdot (3^{1000}-1)$ серебряных и $5 \cdot 2^{999} \cdot (3^{1000}-1)$ бронзовых.

Решение. Будем считать наборы из трех видов монет $(x_1, x_2, x_3)^T$ (x_1 - число золотых монет, x_2 - серебряных, x_3 - бронзовых) элементами векторного пространства $\mathbb{R}^3$, т.е. на этих наборах определены операции сложения и умножения на скаляр $\in \mathbb{R}$ в соответствии с аксиомами векторного пространства. Также считаем преобразование φ, которое происходит с кладом за сутки действием линейного оператора на наборах из трех видов монет, т.е. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям линейного оператора.

По условию задачи нам известно действие оператора φ на векторах стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi((1,0,0)^T) = (4,1,2)^T;$$

$$\varphi((0,1,0)^T) = (0,2,0)^T;$$

$$\varphi((0,0,1)^T) = (2,1,4)^T.$$

Поэтому матрица оператора φ в стандартном базисе будет

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом требуется вычислить действие матрицы A, примененной 1000 раз к начальному вектору (начальное состояние клада) $(5,0,0)^T$, т.е. найти вектор $= A^{1000}(5,0,0)^T$.

Если существует базис $v = \{v_1, v_2, v_3\}$, в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид D, тогда $A^{1000} = CD^{1000}C^{-1}$, где матрица C - это матрица перехода от стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ к базису v, т.е. столбцы матрицы C - это координаты v_i в стандартном базисе. Проверим существует ли такой базис.

Найдем корни характеристического многочлена матрицы A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda-4)^2(\lambda-2) - 4(\lambda-2) \equiv ((\lambda-4)^2-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda-4-2)(\lambda-4+2)(\lambda-2) \equiv (\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda \in \{2, 6\}$$

Найдем базис из собственных векторов:

1. $\lambda = 2 \Rightarrow V_{\lambda=2} = \{v \in \mathbb{R}^3 | (A-2E)v = 0\}$, поэтому ищем ФСР для $V_{\lambda=2}$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили две свободные переменные x_2 и x_3, т.е. $\dim V_{\lambda=2} = 2$ и ФСР дает два собственных вектора (базис в $V_{\lambda=2}$):

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (0,1,0)^T$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow v_2 = (-1,0,1)^T$$

Таким образом $V_{\lambda=2} = \langle (0,1,0)^T, (-1,0,1)^T \rangle$.

2. $\lambda = 6 \Rightarrow V_{\lambda=6} = \{v \in \mathbb{R}^3 | (A-6E)v = 0\}$, поэтому ищем ФСР для $V_{\lambda=6}$:

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Получили одну свободную переменную x_3, т.е. $\dim V_{\lambda=6} = 1$ и ФСР дает один собственный вектор (базис в $V_{\lambda=6}$):

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0.5 \Rightarrow v_3 = (1, 0.5, 1)^T$$

Чтобы избавиться от дробных компонент умножим v_3 на 2, т.е. новое значение будет $v_3 = (2,1,2)^T$, т.е. $V_{\lambda=6} = \langle (2,1,2)^T \rangle$

Таким образом искомый базис существует: $v = \{(0,1,0)^T, (-1,0,1)^T, (2,1,2)^T\}$. И следовательно матрицы D и C имеют вид:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем C^{-1} методом Гаусса:

$$(C|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right) = (E|C^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Если обозначить $x = 3^{1000}$, то получим

$$A^{1000} = 2^{1000} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2x \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2x \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{998} \begin{pmatrix} 2x+2 & 0 & 2x-2 \\ x-1 & 4 & x-1 \\ 2x-2 & 0 & 2x+2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{1000}(5,0,0)^T = 5 \cdot 2^{998} \cdot (2x+2, x-1, 2x-2)^T = 5 \cdot 2^{999} \cdot (3^{1000}+1, \frac{3^{1000}-1}{2}, 3^{1000}-1)^T$$

Таким образом через 1000 дней клад будет состоять из $5 \cdot 2^{999} \cdot (3^{1000}+1)$ золотых монет, $5 \cdot 2^{998} \cdot (3^{1000}-1)$ серебряных и $5 \cdot 2^{999} \cdot (3^{1000}-1)$ бронзовых.

Задача 7

Ответ:
$\lambda = 0$, если $x = 0$;
$\lambda \in \{0, a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\}$, если $x \neq 0$ и $n > 1$;
$\lambda = a_1^2$, если $x \neq 0$ и $n = 1$.

Решение. Пусть $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и матрица $A = x^T x$ матрица линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в стандартном базисе $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Заметим, что для любого $i = 1, \ldots, n$ верно, что $\varphi(e_i) = Ae_i = x^T x e_i = a_i x^T$, т.е. $\operatorname{Im} \varphi = \langle x^T \rangle$. Поэтому

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Тогда рассмотрим 3 случая:

1. $x = 0 \Rightarrow A \equiv 0$ (нулевая матрица), т.е. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$ и следовательно $\lambda = 0$ единственное собственное значение A.

2. $x \neq 0, n > 1 \Rightarrow$ (согласно (3)) $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$, т.е. $\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im} \varphi = n - 1$, а это значит, что $\dim V_{\lambda=0} = \dim \ker \varphi = n - 1$. И т.к. $n > 1$, то $\lambda = 0$ - это собственное значение A и ему соответствует базис из $n-1$ собственных векторов в $V_{\lambda=0}$. Т.к. $\dim V_{\lambda=0} = n-1$, то если существует собственное значение матрицы A отличное от нуля, то оно ровно одно (иначе бы в $\mathbb{R}^n$ нашелся бы базис, состоящий из больше чем n собственных линейно независимых векторов, а это невозможно). Найдем это ненулевое собственное значение.

Ранее мы выяснили, что $Ae_i = a_i x^T$, поэтому, если $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ некий произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, то $Ay = A(y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n) = (y_1a_1 + y_2a_2 + \cdots + y_na_n)x^T$. Поэтому $Ax^T = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^T$, т.е. $\lambda = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ является единственным собственным значением A отличным от нуля (если бы сумма квадратов a_i давала ноль, то $x = 0$, а мы рассматриваем случай когда $x \neq 0$).

Таким образом в случае $n > 1$ и $x \neq 0$, у матрицы A ровно 2 собственных значения $\lambda \in \{0, a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\}$.

3. $x \neq 0, n = 1$ - в этом случае матрица A состоит из одного элемента a_1^2 и имеет, очевидно, одно единственное собственное значение $\lambda = a_1^2$.