# Домашнее задание 2 (матан)

Андрей Зотов

Июль 2023

## Задача 1

**Ответ:** a) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{const}$; b) $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + \mathrm{const}$; c) $\frac{\ln^3 x}{3} + \mathrm{const}$; d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{const}$.

**Решение.**
a)

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\,d(\cos x) = -\int (1-y^2)\,dy\Big|_{y=\cos x} = -\int dy + \int y^2\,dy =$$

$$= \left(-y + \frac{y^3}{3} + \mathrm{const}\right)\Big|_{y=\cos x} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{const};$$

b)

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx = x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + \mathrm{const};$$

c)

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x\,d(\ln x) = \int y^2\,dy\Big|_{y=\ln x} = \left(\frac{y^3}{3} + \mathrm{const}\right)\Big|_{y=\ln x} = \frac{\ln^3 x}{3} + \mathrm{const};$$

d)

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \langle \cos x = 2\cdot\cos^2\frac{x}{2} - 1\rangle = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\cos^2 y}\Big|_{y=\frac{x}{2}} = (\operatorname{tg} y + \mathrm{const})\Big|_{y=\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{const}\,.$$

## Задача 2

**Ответ:** a) $\ln 4 - \frac{3}{4}$; b) $-2\pi$.

**Решение.**
a)

$$\int\limits_1^2 x\ln x\,dx = \int\limits_1^2 \ln x\;d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \langle\text{по частям}\rangle = \ln x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\,d(\ln x) = \ln 4 - \int\limits_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \ln 4 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4};$$

b)

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\int\limits_0^{2\pi} x\,d(\cos x) = \langle\text{по частям}\rangle = -\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\cos x\,dx\right) = -\left(2\pi - \sin x\Big|_0^{2\pi}\right) = -2\pi.$$

## Задача 3

**Ответ:** -1.

**Решение.** Т.к. в знаменателе стоит $\ln x$, то имеет смысл рассматривать данный предел только как предел справа, т.е. при $x \to +0$. Очевидно, что $\ln x \to -\infty$ при $x \to +0$. Кроме того $e^t > 1$ при $t > 0 \Rightarrow \frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}$ при $t > 0$ и поэтому:

$$\int\limits_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt \geq \int\limits_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln|x| = -\ln x,\ \forall x \in (0;1]$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+0} \int\limits_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt \geq -\lim_{x\to+0} \ln x = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt = +\infty$$

Таким образом имеем неопределенность вида $\frac{+\infty}{-\infty}$ и следовательно можно воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt}{\ln x} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(-\int\limits_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)'}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0} e^x = -1.$$

## Задача 4

**Ответ:** $\pi ab$.

**Решение.** Рассматриваемая фигура - это эллипс симметричный относительно осей $Ox$ и $Oy$, поэтому часть фигуры, которая располагается в первом квадранте ($x >= 0, y >= 0$) будет составлять $\frac{1}{4}$ от полной площади $S$. При этом функция, график которой образует границу этой фигуры в первом квадранте, имеет вид $y(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{bx}{a}\right)^2} = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Таким образом (учитывая, что $y(a) = 0$):

$$\frac{S}{4} = \int\limits_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = ab\int\limits_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = ab\int\limits_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt\Big|_{t=\frac{x}{a}}$$

Заметим, что интеграл справа - это площадь $\dfrac{1}{4}$ круга с радиусом $R = 1$ (разбиралось на лекции)

$$\Downarrow$$

$$\frac{S}{4} = ab\frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \pi ab.$$

## Задача 5

**Ответ:** $\Gamma = \frac{8}{27} \cdot (10^{3/2} - 1)$.

**Решение.** Т.к. $y = f(x) = x^{3/2}$, то $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \Rightarrow (f'(x))^2 = \frac{9}{4}x$. Поэтому длина дуги на отрезке $[0;4]$ будет:

$$\Gamma = \int\limits_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}t\right)}\,dt = \frac{4}{9}\int\limits_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}t\right)}\,d\left(1 + \frac{9}{4}t\right) = \frac{4}{9}\int\limits_1^{10} \sqrt{z}\,dz\Big|_{z=1+\frac{9}{4}t} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1).$$