

Домашнее задание 4

20.06.2023

1. В пространстве \mathbb{R}^3 заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ при $i = 1, 2, 3$.

2. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^2.$$

Найти матрицу отображения φ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2 .

3. Найдите в стандартных базисах матрицу линейного оператора $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, который сжимает плоскость в 2 раза вдоль прямой $y = -2x$ и одновременно растягивает плоскость в 3 раза вдоль прямой $y = x$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в стандартном базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно ли эту матрицу диагонализировать в каком-нибудь базисе?

5. Найдите диагональный вид данной матрицы и базис, в котором данная матрица имеет этот вид.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Если на Поле чудес закопать золотую монету, то через сутки можно откопать четыре золотых, одну серебряную и две бронзовые. Если закопать серебряную монету, то через сутки можно откопать две серебряных монеты. Если же закопать бронзовую монету, то через сутки можно откопать две золотых, одну серебряную и четыре бронзовые. Буратино закопал 5 золотых монет и забыл про них на 1000 дней. Сколько каких денег он найдёт когда откопает свой клад через 1000 дней?

Указание: представьте преобразование за один день в виде умножения на матрицу A , а данную матрицу – в виде CDC^{-1} , где D – диагональная матрица (по диагонали – собственные значения A), при этом C состоит из собственных векторов по столбцам (порядок собственных векторов должен соответствовать порядку собственных значений). После этого $A^n = CDC^nC^{-1}$.

7. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Найдите собственные значения $n \times n$ матрицы $x^T x$, где x – матрица-строка (a_1, a_2, \dots, a_n) .