Домашнее задание 5 (тервер)

Андрей Зотов

Октябрь 2023

Задача 1

Ответ: $\frac{0.6}{\sqrt{0.56}} \approx 0.80$.

Решение.

По определению $\rho_{X,Y} = \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}\,X\,\mathbb{E}\,Y}{\sigma_X \sigma_Y}$. Поэтому требуется знать распределения величин X, Y и XY. Эти распределения имеют вид:

X	0	1	**Y**	0	1	**XY**	0	1
P	0.6	0.4	**P**	0.7	0.3	**P**	0.7	0.3

Отсюда $\mathbb{E}\,X = 0.4$, $\mathbb{E}\,Y = 0.3$, $\mathbb{E}(XY) = 0.3$, $\mathbb{E}\,X^2 = 0.4$, $\mathbb{E}\,Y^2 = 0.3$ и поэтому:

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}\,X^2 - (\mathbb{E}\,X)^2 = 0.4 - 0.4^2 = 0.24;$$

$$\mathbf{Var}(Y) = \mathbb{E}\,Y^2 - (\mathbb{E}\,Y)^2 = 0.3 - 0.3^2 = 0.21;$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.24},\ \sigma_Y = \sqrt{0.21}.$$

Таким образом:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}\,X\,\mathbb{E}\,Y}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.3 - 0.4 \cdot 0.3}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.21}} = \frac{0.18}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.21}} = \frac{0.6}{\sqrt{0.56}} \approx 0.80.$$

Задача 2

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.45$.

Решение.

а) Т.к. $Y \sim U(-1,1)$, то $\mathbb{E}\,Y = 0$, $\mathbf{Var}(Y) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$ и т.к. X и Y независимы, то $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\,X\,\mathbb{E}\,Y = 0$, поэтому

$$\mathbf{Cov}(Z,Y) = \mathbb{E}(ZY) - \mathbb{E}\,Z\,\mathbb{E}\,Y = \mathbb{E}(2XY + Y^2) = \mathbb{E}\,Y^2 = \mathbf{Var}(Y) + (\mathbb{E}\,Y)^2 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

б) По определению $\rho_{Z,Y} = \frac{\mathbf{Cov}(Z,Y)}{\sigma_Z \sigma_Y}$. Ранее мы нашли, что $\mathbf{Cov}(Z,Y) = \frac{1}{3}$. Также понятно, что $\sigma_Y = \sqrt{\mathbf{Var}(Y)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что X и Y независимы, а также, что $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}(Y) = \frac{1}{3}$ ($X \sim U(-1,1)$) получаем, что $\mathbf{Var}(Z) = \mathbf{Var}(2X+Y) = 4\,\mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, т.е. $\sigma_Z = \sqrt{\frac{5}{3}}$. Поэтому:

$$\rho_{Z,Y} = \frac{\mathbf{Cov}(Z,Y)}{\sigma_Z \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.45.$$

Задача 3

Ответ: а) $\mathbb{E}(X|Y=1)=1$, $\mathbb{E}(X|Y=3)=2$; б) 0.6; в) $\frac{1}{2}+\frac{Y}{2}$.

Решение.

а) Заметим, что $P(Y=1)=0.6$, поэтому

$$\mathbb{E}(X|Y=1)=\sum_{x\in\{0,2,3\}} x\cdot P(X=x|Y=1)=\sum_{x\in\{0,2,3\}} x\cdot\frac{P(X=x,Y=1)}{P(Y=1)}=$$

$$=\frac{1}{P(Y=1)}\cdot(2\cdot P(X=2,Y=1)+3\cdot P(X=3,Y=1))=\frac{3\cdot 0.2}{0.6}=1.$$

И т.к. $P(Y=3)=0.4$, то аналогично получаем:

$$\mathbb{E}(X|Y=3)=\frac{2\cdot P(X=2,Y=3)+3\cdot P(X=3,Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{2\cdot 0.4+3\cdot 0}{0.4}=2.$$

б) Т.к. $P(Y=1)=0.6$, то $\mathbb{E}(X|Y)$ принимает значение $\mathbb{E}(X|Y=1)$ с вероятностью 0.6.

в) Т.к. при $Y=1$ получаем $\frac{1}{2}+\frac{Y}{2}=1=\mathbb{E}(X|Y=1)$ и при $Y=3$ получаем $\frac{1}{2}+\frac{Y}{2}=2=\mathbb{E}(X|Y=3)$, то $\mathbb{E}(X|Y)=\frac{1}{2}+\frac{Y}{2}$.

Задача 4

Ответ: $\sin Y(Y^2+4Y+8)$

Решение.

Учитывая независимость X,Y и то, что $\mathbb{E}\,X=2$, $\mathbb{E}\,X^2=\mathbf{Var}(X)+(\mathbb{E}\,X)^2=4+4=8$ (т.к. $X\sim N(2,4)$) получаем

$$\mathbb{E}((X+Y)^2\sin Y|Y)=\sin Y\,\mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2|Y)=\sin Y(\mathbb{E}(X^2|Y))+2Y\,\mathbb{E}(X|Y)+\mathbb{E}(Y^2|Y))=$$

$$=\sin Y(\mathbb{E}\,X^2+2Y\,\mathbb{E}\,X+Y^2)=\sin Y(Y^2+4Y+8).$$

Задача 5

Ответ: а) $\frac{1}{100}$; б) $\le\frac{1}{99^2}\approx 0.0001$.

Решение.

а) Пусть T время обработки запроса. Тогда $\mathbb{E}\,T=1$ секунда. Т.к. величина T неотрицательна, то по неравенству Маркова для искомой вероятности получаем:

$$P(T\ge 100)\le\frac{\mathbb{E}\,T}{100}=\frac{1}{100}$$

Т.е. искомая вероятность не может быть больше $\frac{1}{100}$. При этом это значение может достигаться в случае, когда распределение T имеет вид

T	0	100
P	0.99	0.01

, т.е. когда в 99% случаев запрос обрабатывается мгновенно ($T=0$) и в 1% случаев за $T=100$ секунд.

б) Согласно неравенству Чебышева $P(|T-\mathbb{E}\,T|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathbf{Var}(T)}{\varepsilon^2}$. Т.к. $T\ge 0$, то $|T-1|\ge 99\Leftrightarrow T\ge 100$, поэтому

$$P(T\ge 100)\le\frac{1}{99^2}\approx 0.0001.$$

Задача 6

Ответ: 60 минут.

Решение.
Пусть T - время решения задачи. Тогда $\mathbb{E}\,T = 40$ и $P(T \leq 30) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(T > 30) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Также известно, что $\mathbb{E}(T|T \leq 30) = 20$.

По определению $\mathbb{E}(T|T \leq 30) = \frac{\mathbb{E}(T \cdot I_{T\leq 30})}{P(T\leq 30)}$ и $\mathbb{E}(T|T > 30) = \frac{\mathbb{E}(T \cdot I_{T>30})}{P(T>30)}$, где $I_{T\leq 30}, I_{T>30}$ - индикаторы соответствующих событий. Поэтому:

$$\mathbb{E}(T|T \leq 30)P(T \leq 30) + \mathbb{E}(T|T > 30)P(T > 30) = \mathbb{E}(T \cdot I_{T\leq 30}) + \mathbb{E}(T \cdot I_{T>30}) = \mathbb{E}(T \cdot I_{T\leq 30} + T \cdot I_{T>30}) = \mathbb{E}\,T$$

Или то же самое после подстановки числовых значений:

$$20 \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{E}(T|T > 30) \cdot \frac{1}{2} = 40.$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{E}(T|T > 30) = 60.$$

Что и требовалось найти.

Задача 7

Ответ: $50 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 33.4$.

Решение.
Пусть событие A_i = «i-й сайт не взломан». Пусть событие H_j^i = «i-й сайт не был взломан j-м хакером». Тогда $A_i = \bigcap\limits_{j=1}^{20} H_j^i$ и т.к. каждый хакер выбирает цель независимо, то при фиксированном i события H_i^j независимы в совокупности, т.е. $P(A_i) = \prod\limits_{j=1}^{20} P(H_j^i)$. Если j-й хакер не атаковал i-й сайт, значит он атаковал любой из 50 кроме i-го, т.е. любой из 49 сайтов. А т.к. j-й хакер атакует любой сайт равновероятно, то $P(H_j^i) = \frac{49}{50}$. Отсюда $P(A_i) = \left(\frac{49}{50}\right)^{20}$.

Пусть X - число не взломанных сайтов. Тогда если I_{A_i} - индикатор события A_i, то

$$X = \sum_{i=1}^{50} I_{A_i} \Rightarrow \mathbb{E}\,X = \sum_{i=1}^{50} \mathbb{E}\,I_{A_i} = \sum_{i=1}^{50} P(A_i) = 50 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 33.4.$$