Домашнее задание 1 (линал)

Андрей Зотов

Июнь 2023

Задача 1

Ответ: $y,\ t \in \mathbb{R}$ (свободные переменные); $x = -2y - t - 1,\ z = t$ (главные переменные).

Решение. Составим расширенную матрицу СЛУ и решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -6 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 2 & 4 & -8 & 10 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили матрицу канонического ступенчатого вида, из которого следует, что решение СЛУ будет $y, t \in \mathbb{R}$ (свободные переменные) и $x = -2y - t - 1,\ z = t$ (главные переменные).

Задача 2

Ответ: искомый многочлен: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда a, b, c, d будут корнями СЛУ:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcccc} a & + & b & + & c & + & d & = & f(1) & = & 1 \\ -a & + & b & - & c & + & d & = & f(-1) & = & 13 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & f(2) & = & 7 \\ -27a & + & 9b & - & 3c & + & d & = & f(-3) & = & 17 \end{array}\right.$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 13 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 36 & 24 & 28 & 44 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 9 & 6 & 7 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -52 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -26 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Получили матрицу канонического ступенчатого вида, из которого следует, что СЛУ имеет единственное решение $a = 1,\ b = 2,\ c = -7,\ d = 5$. Т.е.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5.$$

Задача 3

Ответ: $\begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$

Решение. Вычислим $(2A)^2$: $(2A)^2 = 4A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^2 = 4\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix}$

Вычислим $3((BA)^T - E)^2$:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(BA)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(BA)^T - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$3((BA)^T - E)^2 = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = 3\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$(2A)^2 - 3((BA)^T - E)^2 = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Ответ: все матрицы вида $\lambda\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть X искомая матрица, тогда

$$X\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}X \tag{1}$$

Отсюда следует, что X имеет размер 2×2. Тогда будем искать X в виде

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

И из выражения (1) получаем, что x, y, z, t являются решениями системы:

$$\begin{cases} -x + 3z = -x + 2y \\ 2y + 5t = 3z + 5t \\ -y + 3t = 3x + 5y \\ 2x + 5z = -z + 2t \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3z = 2y \\ 2y = 3z \\ 6y + 3x - 3t = 0 \\ 6z + 2x - 2t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Если поделить на 3 третье уравнение и на 2 четвертое, а также исключить второе уравнение т.к. оно эквивалентно первому, то система (2) будет равносильна

$$\begin{cases} 3z = 2y \\ 2y + x - t = 0 \\ 3z + x - t = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Учитывая, что $3z = 2y$, полуаем, что третье уравнение избыточное, т.е. система (3) равносильна

$$\begin{cases} 3z = 2y \\ 2y + x - t = 0 \end{cases} \tag{4}$$

А система (4), очевидно, равносильна

$$\begin{cases} x, t \in \mathbb{R} \text{ (свободные переменные)} \\ y = \frac{t-x}{2} \\ z = \frac{t-x}{3} \end{cases}$$

Таким образом $X = \begin{pmatrix} x & \frac{t-x}{2} \\ \frac{t-x}{3} & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t/2 \\ t/3 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x/2 \\ -x/3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{t}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \frac{x}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, t \in \mathbb{R}$.
Что равносильно

$$X = \lambda \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

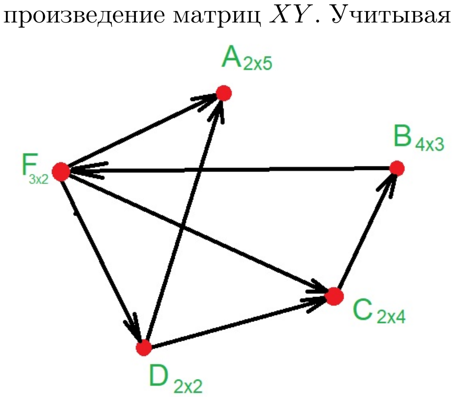
Задача 5

Ответ: два варианта:

$$CBFDA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 137 & 16 & 65 & -34 & -6 \end{pmatrix};$$

$$DCBFA = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим ориентированный граф G, вершины которого будут данные матрицы A, B, C, D, F. При этом наличие ориентированного ребра из вершины X в вершину Y будет означать, что имеет смысл произведение матриц XY. Учитывая размеры всех матриц, получим ориентированный граф G (см. рисунок).



Тогда решение задачи будет равносильно нахождению путей в графе G, которые содержат каждую вершину ровно один раз. Найдем все такие пути.

Очевидно, если такие пути существуют, то они заканчиваются вершиной A, т.к. у вершины A нет исходящих ребер, т.е. такие пути не могут начинаться с вершины A. Поэтому возможны 4 случая:

1. Путь начинается с вершины B. Далее путь продолжается единственным образом в вершину F. Затем путь можно продолжить либо в вершину A, либо в вершину D, либо в вершину C, но A - это тупик, а из вершины C можно попасть только в вершину B, из которой мы начали, поэтому путь продолжается единственным образом в вершину D. Далее опять возможны два варианта продолжения: либо в A, либо в C, поэтому единственное продолжение это вершина C. Но как уже было замечено из вершины C путь можно продолжить только в вершину B, с которой мы начали, при этом вершина A осталась не посещенной. Таким образом путь не может начинаться с вершины B.

2. Путь начинается с вершины C. Далее путь продолжается единственны образом в вершину B. Затем следует единственное продолжение в вершину F. Далее возможны варианты продолжения: A (тупик и вершина D останется не посещенной), C (с этой вершины начали) и D, поэтому единственное продолжение это вершина D. И завершаем единственным продолжением в вершину A. Таким образом возможен путь (или перемножение матриц в этом порядке): C, B, F, D, A.

3. Путь начинается с вершины D. Далее либо A (тупик), либо C, поэтому продолжаем в C. Затем единственное продолжение в B. Далее единственное продолжение в F. И далее завершение пути в A. Таким образом возможен путь (или перемножение матриц в этом порядке): D, C, B, F, A.

4. Путь начинается с вершины F. Далее либо A (тупик), либо D, либо C, но, как и продолжение в A продолжение в D не образует требуемый путь, т.к. в A можно попасть только из F и D и следовательно попав в D обязательно нужно двигаться в A (в F мы уже побывали), а тогда вершины B и C никогда не будут посещены. Таким образом единственное продолжение из F будет продолжение в C. Далее единственное продолжение в B. И затем единственное продолжение в вершину F, из которой мы стартовали. Таким образом путь не может начинаться с вершины F.

В итоге существует только два возможных порядка перемножения матриц $CBFDA$ и $DCBFA$. Найдем результаты этих перемножений.

Вычислим $CBFDA$:

$$P_1 = CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 F = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 28 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CBFDA = P_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 137 & 16 & 65 & -34 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычислим $DCBFA$:

$$Q_1 = DC = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = Q_1 B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = Q_2 F = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$DCBFA = Q_3 A = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$