Домашнее задание 3

Андрей Зотов

Май 2023

Задача 1

Ответ:

- а) Максимальная длина простого цикла в графе G равняется 4. Всего имеется 16 различных простых циклов максимальной длины 4.
- б) Да, верно.
- в) Минимум 2 ребра надо удалить из графа G, чтобы он стал несвязным.

Решение. а) Всего в графе G имеется 6 различных подграфов, которые образуют простые циклы: $ABD, DBC, ABCD, CEH, HEF, CEFH$. Два из этих подграфов - $ABCD, CEFH$ - самые большие и образуют простые циклы длины 4. Каждый из подграфов длины 4 дает 8 разных простых циклов (стартовую вершину цикла можно выбрать 4-мя способами и направление 2-мя способами $\Rightarrow 4 * 2 = 8$ разных простых циклов получается из одного подграфа). Таким образом в графе G имеется 16 разных простых циклов максимальной длины 4.

б) Не трудно заметить, что, во-первых, граф G связный, а во-вторых, для любого ребра графа G существует цикл (а иногда и не один), в который входит это ребро. А т.к. удаление любого ребра из цикла не может нарушить связность графа, который содержит этот цикл, то удаление любого ребра не может нарушить связность графа G.

в) Учитывая п. б) искомое минимальное кол-во ребер не может быть меньше двух, при этом если из графа G удалить 2 ребра, например CB и CD, то граф распадется на 2 компоненты связности, т.е. 2 и есть искомое минимальное кол-во ребер.

Задача 2

Ответ: 200 дорог в государстве.

Решение. Пусть города будут множеством вершин V, а дороги множеством ребер E некоего графа G. Тогда по лемме о рукопожатиях $\sum_{v_i \in V} \deg v_i = 2|E|$. При этом по условию задачи $\forall v_i \in V \;\; \deg v_i = 4$ и $|V| = 100$, т.е. $4 * 100 = 2|E|$. Поэтому кол-во дорог будет $|E| = 200$.

Задача 3

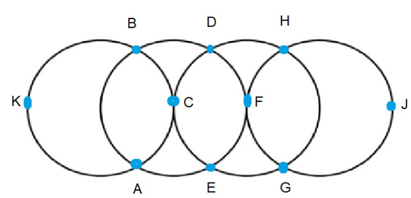
Ответ:

- а) Можно.
- б) Нельзя.

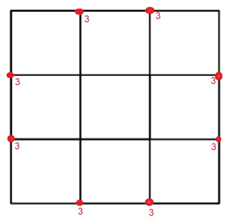
Решение. а) Рассмотрим картинку а) как граф G, где точки пересечения - это вершины графа G, а дуги это ребра графа G. Получившийся граф G очевидно связен. Тогда требование задачи будет выполнимо тогда и только тогда, когда у графа G существует эйлеров путь. Т.к. все вершины графа G имеют четную степень 4, то по критерию эйлеров путь существуют (причем он является также эйлеровым циклом).

Хотя критерий верен и для графов с кратными ребрами мы без ущерба для рассуждения можем избавиться от кратных ребер в G, добавив две вершины (J и K) степени 2 на крайние левую и правую дуги нашей фигуры (на наличие эйлерова цикла, очевидно, это не повлияет). В итоге имеем граф $ABCDEFGHJK$, который изображен на картинке ниже. Эйлеров цикл (т.е. путь, вдоль которого можно вести карандаш, не отрывая от бумаги и проходя по каждой линий по одному разу) в нем будет, например, таким:

$$K, B, D, H, J, G, F, H, G, E, C, D, F, E, A, B, C, A, K$$



б) Аналогично а) рассмотрим картинку б) как связный граф и заметим, что в нем будет 8 вершин нечетной степени 3 (см. рисунок ниже). Поэтому согласно критерию (в графе должно быть не больше двух вершин нечетной степени), в таком графе эйлеров путь не существует, а значит и нарисовать картинку б), не отрывая карандаш от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу невозможно.



Задача 4

Ответ: одна вершина имеет степень 3.

Решение. Т.к. у дерева ровно три вершины имеют степень 1, то в дереве не существует вершин, у которых степень больше 3-х. Докажем это.

Допустим это не так, пусть в дереве есть вершина A, из которой выходит $n > 3$ ребер, связывающих разные вершины $B_1, B_2, \ldots B_n$ (кратные ребра не рассматриваем). Если из исходного дерева удалить вершину A и все ребра, которые из нее выходят, то можно рассмотреть n подграфов, где i-й подграф состоит из вершин, для которых существует путь в вершину B_i. Каждый такой подграф связен по построению. При этом каждый из n подграфов является деревом (т.к. связный подграф дерева - это тоже дерево). Любые два из этих n поддеревьев не связаны между собой, т.к. иначе существовал бы цикл в исходном дереве, проходящий через вершину A, что невозможно (в дереве нет циклов).

Таким образом в каждом из n изолированных друг от друга поддеревьев либо существует хотя бы один лист (т.е. вершина со степенью 1), либо поддерево состоит из одной единственной вершины B_i - в обоих случаях такие вершины имеют степень 1 в исходном дереве. Поэтому в исходном дереве существует минимум $n > 3$ листьев, а это невозможно, т.к. листьев по условию ровно 3. Противоречие.

Таким образом в рассматриваемом дереве у вершин могут быть степени только 1, 2 или 3.

Если в рассматриваемом дереве x - кол-во вершин степени 3 и 3 вершины степени 1, тогда кол-во вершин степени 2 будет $2022-3-x$. При этом число ребер дерева будет $|E| = |V|-1 = 2022-1 = 2021$ и по лемме о рукопожатиях имеем:

$$2 * |E| = 2 * 2021 = 4042 = \sum_{v_i \in V} \deg v_i = 1 * 3 + 2 * (2022 - 3 - x) + 3 * x$$

Что равносильно

$$3x - 2x + 3 + 2 * 2019 = 4042$$

А это в свою очередь равносильно

$$x = 1$$

Таким образом, если такое дерево существует, то в нем ровно 3 вершины степени 1, ровно 2018 вершин степени 2 и ровно одна вершина имеет степень 3. Такой граф действительно существует - его изображение на картинке ниже.

Задача 5

Доказательство. Пусть G исходный граф, V - множество его вершин и E - множество его ребер. Рассмотрим дополнение $\overline{G}$ к графу G. Множество вершин дополнения $\overline{G}$ совпадает с V, а множество ребер дополнения $\overline{G}$ обозначим $\overline{E}$. Т.к. $|V| = 6$ и $|E| = 11$, то по определению дополнения $|E \cup \overline{E}| =$ (число ребер в полном графе K_6) $= \frac{6*5}{2} = 15$ и т.к. $E \cap \overline{E} = \emptyset$, то $|\overline{E}| = 15 - |E| = 15 - 11 = 4$. Таким образом дополнение $\overline{G}$ - это граф на 6 вершинах с 4-мя ребрами.

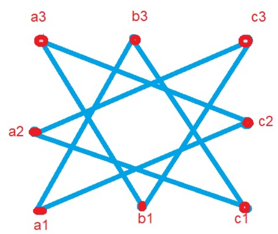
Покажем, что $\overline{G}$ - не связен. Допустим $\overline{G}$ связен и следовательно у $\overline{G}$ существует остовное дерево, в котором не более 4-х ребер и 6 вершин. Но у дерева с 6 вершинами должно быть ровно 5 ребер. Противоречие. Следовательно, $\overline{G}$ не связен.

Т.к. граф и его дополнение не могут быть не связными графами одновременно (пример 3.8), то G связен. Что и требовалось.

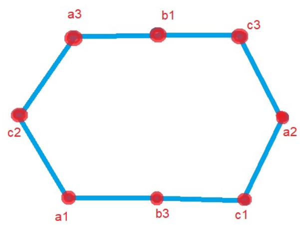
Задача 6

Ответ: нельзя.

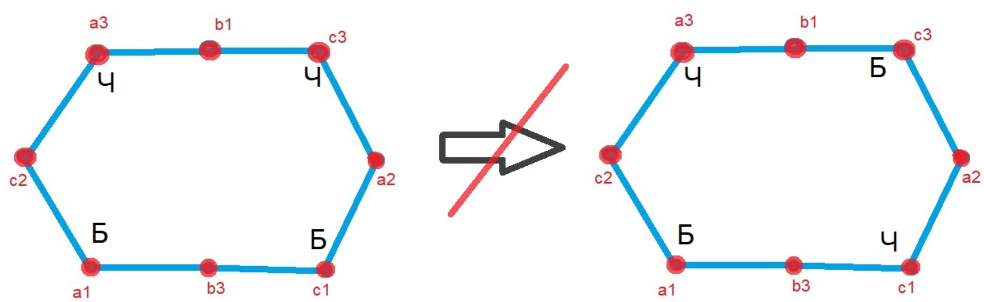
Решение. Обозначим все поля доски 3×3 как принято в шахматах - от $a1$ до $c3$ (9 полей). Составим граф, вершины которого будут поля (кроме поля $c2$, т.к., очевидно, ни один конь на это поле никогда не попадет), а ребра будут возможные ходы коня с данного поля. Тогда получим такой граф:



Как видно $a1, b3, c1, a2, c3, b1, a3, c2, a1$ - простой цикл, при этом этот путь еще и эйлеров цикл. Поэтому этот граф эквивалентен следующему:



Тогда задача состоит в том, что можно ли найти последовательность ходов такую, что белые кони, стартуя с полей $a1, c1$ и черные - с полей $a3, c3$, поочередно двигаясь по ребрам графа, придут на поля $a1, c3$ (белые) и $a3, c1$ (черные). Это невозможно, т.к. с одной стороны как бы ни перемещались кони вдоль ребер графа должна сохраняться последовательность коней ЧЧББ при обходе графа по циклу (иначе в какой-то момент две фигуры будут вынуждены располагаться на одном поле, а это запрещено правилами). А с другой стороны, в конечной позиции имеем последовательность ЧБЧБ при обходе графа по циклу, которую невозможно получить из позиции вида ЧЧББ. Т.е. ЧЧББ $\not\to$ ЧБЧБ.



P.S. В терминах разрезов можно еще так пояснить, что ЧЧББ $\not\to$ ЧБЧБ. Граф в левой части рисунка выше показывает, что какие бы ни делались ходы конями в любой момент существует разрез графа, такой что в одной части графа окажутся все белые кони, а в другой все черные. Однако для графа в правой части такого разреза не существует.