

Домашнее задание номер 6

04.07.2023

1. Диагонализировать следующие симметричные матрицы в ортонормированном базисе (то есть получить разложение $A = CDC^T$, где C – ортогональная матрица, а D диагональная).

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

а) Найдите разложение $A = CDC^T$, где C ортогональная матрица, а D диагональная.

б) Найдите какую-нибудь симметричную матрицу B такую, что $B^2 = A$.

3. Найти сингулярное разложение и усечённое сингулярное разложение следующих матриц

а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найдите матрицу ранга 1 ближайшую по норме Фробениуса к матрице из задачи 3а).

5. Найдите нормальный вид квадратичной формы

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Указание: нужно сперва составить матрицу этой формы, а затем применить симметрический метод гаусса. Чтобы составить матрицу нужно сперва сделать соответствующую симметрическую билинейную форму (в данном случае это будет $x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, а затем собрать её коэффициенты в матрицу.)