Домашнее задание 1

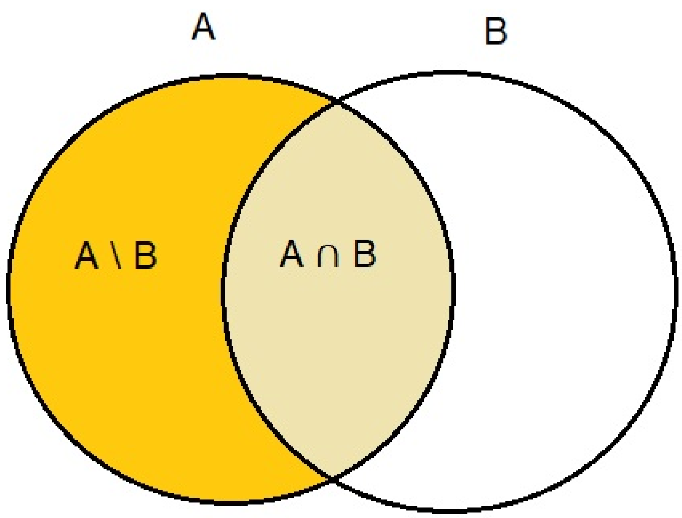
Андрей Зотов

Апрель 2023

Задача 1.а

Ответ: равенство $A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \setminus B)$ выполнено для любых A и B.

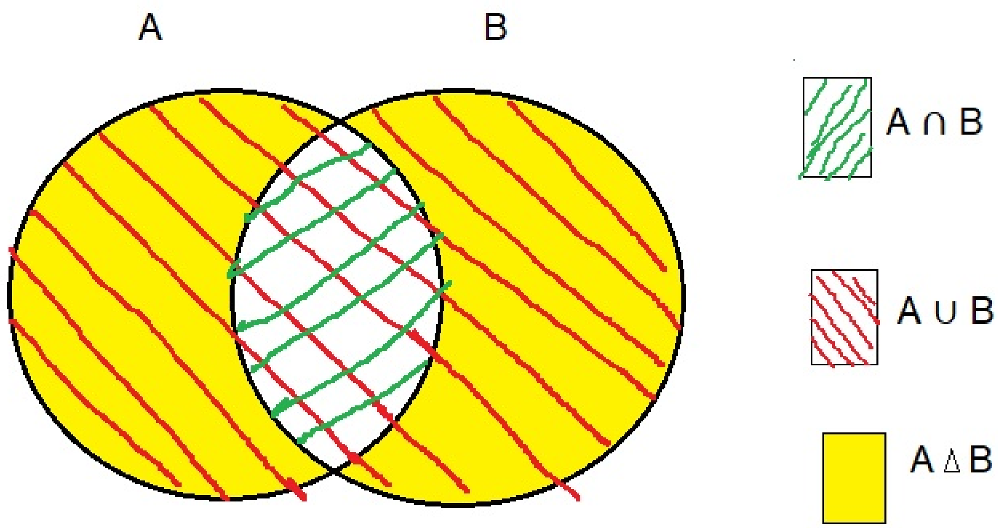
Доказательство. Из диаграммы Эйлера-Венна (ниже) видно, что с одной стороны $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$, а с другой стороны $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$. Т.е. левая и правая части доказываемого равенства равны.



Задача 1.б

Ответ: равенство $(A \cup B) \triangle (A \cap B) = A \triangle B$ выполнено для любых A и B.

Доказательство. По определению симметрической разницы $(A \cup B) \triangle (A \cap B) = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))$. При этом из диаграммы Эйлера-Венна (ниже) видно, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$ и $(A \cap B) \setminus (A \cup B) = \emptyset$, т.е. левая часть равенства равна $(A \triangle B) \cup \emptyset$, которая в свою очередь равна правой части равенства $A \triangle B$. Что и требовалось доказать.

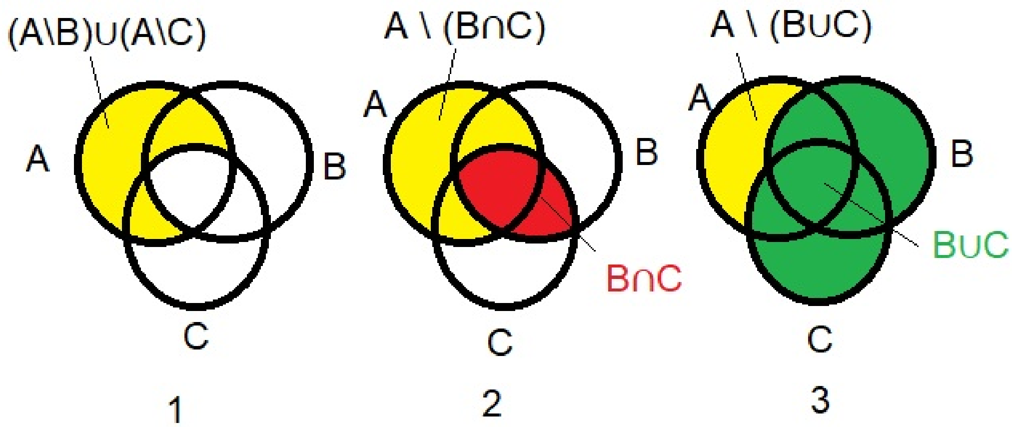


Задача 1.в

Ответ: равенство $((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$, вообще говоря, выполняется не для любых A, B и C. Контрпример: $B = \emptyset$, $A = \{a, b\}$, $C = \{a\}$

Доказательство. На диаграммах Эйлера-Венна (1 и 2), наглядно видно, что $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$. Обозначим желтую область диаграмм 1 и 2 как F. Таким образом, левая часть равенства будет $F \cap F = F$. При этом на диаграмме 3 видно, что правая часть равенства (область закрашенная желтым), вообще говоря, отличается от F.

Видя эти диаграммы, нетрудно подобрать контрпример: пусть $B = \emptyset$, тогда $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A$, т.е. левая часть будет $F = A$, в то же время правая часть будет $A \setminus (\emptyset \cup C) = A \setminus C$, т.е. не совпадает с левой частью, если $A \cap C \neq \emptyset$. Т.е. контрпример может быть, например, таким: $B = \emptyset$, $A = \{a, b\}$, $C = \{a\}$ - в этом случае элемент a входит в левую часть, а в правую не входит.

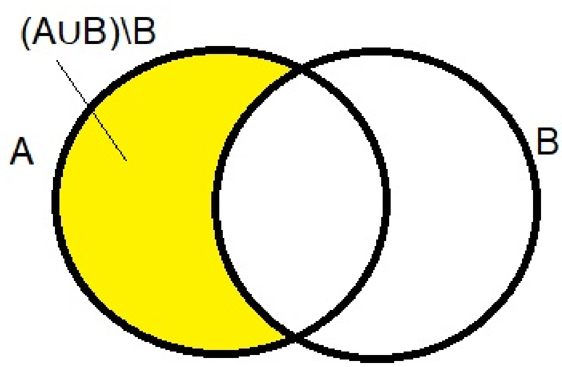


Задача 2

Ответ: утверждение верно. Для любых множеств A и B выполняется включение

$$(A \cup B) \setminus B \subseteq A$$

Доказательство. На диаграмме (ниже) наглядно видно, что множество $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$ и, очевидно, является подмножеством A. Что и требовалось показать.



Задача 3

Решение. Пусть $\varphi_1(a, b) = \neg(a \vee (b \oplus 1)) \wedge (a \to 1)$ и $\varphi_2(a, b) = \neg a \wedge b$. Тогда учитывая, что $a \to 1 \equiv 1$, $x \wedge 1 \equiv x$ и $b \oplus 1 \equiv \neg b$, получаем $\varphi_1(a, b) = \neg(a \vee \neg b)$.

Раскрывая эту скобку по закону де Моргана, и учитывая что $\neg\neg b \equiv b$, получаем $\varphi_1(a, b) = \neg a \wedge b = \varphi_2(a, b)$. Что и требуется.

Задача 4

Ответ: высказывание ложно в случаях б), в) и г).

Решение. Если x некоторое число, то высказывание из условия можно представить как предикат:

$$P(x) = Q(x) \wedge (R(x) \to \neg S(x))$$

где

- $Q(x) =$ "Число x четно"
- $R(x) =$ "В числе x 7 цифр"
- $S(x) =$ "Третий разряд числа x четный"

Тогда:

- а) если $x = 0 \Rightarrow Q(x) = 1, R(x) = 0, S(x) = 1 \Rightarrow P(x) = 1 \wedge (0 \to \neg 1) = 1$
- б) если $x = 1234567 \Rightarrow Q(x) = 0, R(x) = 1, S(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge (1 \to \neg 0) = 0$
- в) если $x = 2222222 \Rightarrow Q(x) = 1, R(x) = 1, S(x) = 1 \Rightarrow P(x) = 1 \wedge (1 \to \neg 1) = 0$
- г) если $x = 123457 \Rightarrow Q(x) = 0, R(x) = 0, S(x) = 1 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge (0 \to \neg 1) = 0$

Таким образом высказывание ложно в случаях б), в) и г).

Задача 5

Ответ: $x \in \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$

Решение. Множество A - это натуральные числа от 1 до 7 включительно - $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Множество B - это множество всех четных целых чисел. Множество C - это множество всех целых чисел от 0 до 9 включительно - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Поэтому предикат $Q(x) = \neg(x \in B)$ обращается в истину тогда и только тогда, когда x не является четным.

Множество C можно разложить на два непересекающихся множества - первое состоит из элементов, которые входят в A, а второе из элементов, которые не входят в A. Поэтому рассмотрим 2 случая:

- 1) $x \in A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Для этих x предикат $P(x) = (x \in A)$ обращается в истину, поэтому чтобы предикат $P(x) \to Q(x)$ обращался в истину необходимо, чтобы $Q(x)$ был истиной, а это возможно только когда x не является четным числом, т.е. при $x \in \{1, 3, 5, 7\}$
- 2) $x \in C \setminus A = \{0, 8, 9\}$. Для этих x предикат $P(x)$ ложен, поэтому значение $Q(x)$, вообще говоря, не важно (т.к. $0 \to x \equiv 1$), т.е. предикат $P(x) \to Q(x)$ обращается в истину при $x \in \{0, 8, 9\}$.

Таким образом, объединяя два этих множества подходящих x, получаем, что предикат $P(x) \to Q(x)$ обращается в истину для $x \in C$, если $x \in \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$.

Задача 6

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. База индукции выполняется: при $n = 1$ утверждение верно: $2 = 1 * 2$. Докажем теперь шаг индукции. Пусть утверждение верно для $n = k$, т.е. верно, что:

$$2 + 4 + \ldots + 2k = k(k+1)$$

Тогда при $n = k + 1$ получаем:

$$2 + 4 + \ldots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

Т.е. утверждение верно для $n = k + 1$ в предположении, что оно верно для $n = k$. Шаг индукции доказан. Таким образом утверждение доказано по индукции.