



Теория вероятностей:
условное распределение и закон больших чисел.

3 октября 2023

Домашнее задание.

- 1** Банк внедряет новую систему для анализа кредитной истории клиентов. Согласно статистике банка, наличие у заемщика просрочек по платежам в прошлом (с.в. X) и факт погашения кредита позже назначенного срока (с.в. Y) имеют распределение, заданное таблицей ниже.

$X \backslash Y$	0	1
0	0.6	0
1	0.1	0.3

(Т.е. случайная величина X принимает значение 0, если человек вносил платежи вовремя, и 1 иначе. Аналогично, Y принимает значение 0, если клиент вернул кредит вовремя, и 1 в противном случае.)

В зависимости от значения корреляции этих величин банк примет решение о том, как учитывать наличие просрочек по платежам для выдачи кредита.

Найдите коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

- 2** Независимые случайные величины $X, Y \sim U(-1, 1)$. Рассмотрим $Z = 2X + Y$.
- а) Найдите $\text{Cov}(Z, Y)$.
- б) Чему равняется $\rho_{Z,Y}$?

- 3** Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей.

$X \backslash Y$	1	3
0	0.4	0
2	0	0.4
3	0.2	0

- а) Какие значения принимает условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X|Y)$?

(Иными словами, требуется найти значения $\mathbb{E}(X|Y = 1)$ и $\mathbb{E}(X|Y = 3)$.)

- б) С какой вероятностью условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X|Y)$ принимает значение $\mathbb{E}(X|Y = 1)$?

- в) Какая из функций ниже выражает условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X|Y)$ через Y ? Ответ обоснуйте

1) $\frac{Y}{2}$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}$; 3) Y^2 ; 4) $2Y - 1$.

- 4** Пусть с.в. X и Y независимы и имеют распределения $X \sim N(2, 4)$, $Y \sim \text{Exp}(2)$. Чему равняется $\mathbb{E}[(X + Y)^2 \cdot \sin Y | Y]$?

- 5** Среднее время обработки запроса на некотором сервисе равняется 1 секунде.

- а) Какова максимальная возможная вероятность того, что запрос будет обрабатываться не меньше 100 секунд?

Приведите пример ситуации, в которой достигается эта вероятность.

Подсказка: для оценки вероятности используйте неравенство Маркова.

- б) Пусть теперь известно, что дисперсия времени обработки запроса равняется 1. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что запрос будет обрабатываться не меньше 100 секунд.

- 6** Известно, что среднее время решения этой задачи составляет 40 минут. Причем вероятность того, что на решение уйдет не больше 30 минут, равна $\frac{1}{2}$. Среднее время решения этой задачи для тех, кто уложился в 30 минут, равняется 20 минутам.

Каково среднее время решение этой задачи для тех, кто решал ее дольше 30 минут?

7 На 50 сайтов одновременно совершают кибер-атаку 20 хакеров. Каждый из них выбирает одну цель случайно и независимо от других, но всегда взламывает защиту.

Сколько сайтов в среднем останется не взломано?