Домашнее задание 6 (линал)

Андрей Зотов

Июль 2023

Задача 1

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;
б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Решение. а) Найдем собственные значения A:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \in \{1, 3\}$$

$$\Downarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Имеем 2 разных собственных значения $\Rightarrow$ имеется два одномерных собственных подпространства V_λ и т.к. матрица A симметрична эти подпространства ортогональны. Найдем ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ из собственных векторов:

1) $V_{\lambda=1} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (A - E)u = 0\}$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=1} = \langle (-1, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$$

2) $V_{\lambda=3} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (A - 3E)u = 0\}$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=3} = \langle (1, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$$

Таким образом ортогональная матрица перехода будет $C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ и поэтому:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

б) Найдем собственные значения A:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \in \{-1, 1\}$$

$$\Downarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ из собственных векторов:
1) $V_{\lambda=-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 | (A + E)u = 0\}$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=-1} = \langle (-1, 0, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^T$$

2) $V_{\lambda=1} = \{u \in \mathbb{R}^3 | (A - E)u = 0\}$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=1} = \langle (0, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T \rangle$$

Как видно ФСР уже состоит из ортогональных векторов. Остается только их отнормировать.

$$\Downarrow$$

$$e_2 = (0, 1, 0)^T,\ e_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^T$$

Таким образом ортогональная матрица перехода будет $C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ и поэтому:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;
б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные значения A:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 13 & -14 & -4 \\ -14 & \lambda - 24 & -18 \\ -4 & -18 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda-13)(\lambda-24)(\lambda-29) - 14\cdot 18\cdot 4 - 14\cdot 18\cdot 4 - 16\cdot(\lambda-24) - 18\cdot 18\cdot(\lambda-13) - 14\cdot 14\cdot(\lambda-29) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda-13)(\lambda-24)(\lambda-29) - 2016 + 384 + 4212 + 5684 - 16\lambda - 324\lambda - 196\lambda = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda-13)(\lambda-24)(\lambda-29) + 8264 - 536\lambda = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(-29-13-24) + \lambda(13\cdot 24 + 13\cdot 29 + 24\cdot 29) - 13\cdot 24\cdot 29 + 8264 - 536\lambda = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^3 - 66\lambda^2 + 849\lambda - 784 = 0$$

Заметим, что $\lambda = 1$ является корнем характеристического многочлена поэтому, поделив этот многочлен на $\lambda - 1$, получим квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - 65\lambda + 784 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{65 \pm 33}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda \in \{16, 49\}$$

Таким образом собственные значения A будут $\lambda \in \{1, 16, 49\} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$. Найдем ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ из собственных векторов:

1) $V_{\lambda=1} = \{u \in \mathbb{R}^3 | (A - E)u = 0\}$

$$A - E = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 4 \\ 14 & 23 & 18 \\ 4 & 18 & 28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 14 & 23 & 18 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 14 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 & -12 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ФСР: } x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -2,\ x_1 = 2.$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=1} = \langle (2, -2, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_1 = (2/3, -2/3, 1/3)^T$$

2) $V_{\lambda=16} = \{u \in \mathbb{R}^3 | (A - 16E)u = 0\}$

$$A - 16E = \begin{pmatrix} -3 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 18 \\ 4 & 18 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 18 \\ 1 & 32 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 14 & 8 & 18 \\ 0 & 110 & 55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 7 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 0 & -220 & -110 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ФСР: } x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -0.5,\ x_1 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=16} = \langle (-1, -0.5, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_2 = (2/3, 1/3, -2/3)^T$$

3) $V_{\lambda=49} = \{u \in \mathbb{R}^3 | (A - 49E)u = 0\}$. Нам уже известно, что $V_{\lambda=49}$ одномерно (т.к. у нас 3 разных собственных значения у оператора действующего в $\mathbb{R}^3$) и ортогонально по отношению к $V_{\lambda=1}$ и $V_{\lambda=16}$ (это вытекает из симметричности A), поэтому базисный собственный вектор для $V_{\lambda=49}$ и вектор e_3 проще найти из двух линейных уравнений $(e_3, e_2) = 0$ и $(e_3, e_1) = 0$, которым соответствует матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ФСР: } x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = 0.5$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=49} = \langle (0.5, 1, 1)^T \rangle = \langle (1, 2, 2)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_3 = (1/3, 2/3, 2/3)$$

Таким образом ортогональная матрица перехода будет $C = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ и поэтому:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix} = CDC^T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть D' диагональная матрица, на диагонали которой стоят квадратные корни из собственных значений A (вообще говоря с любым знаком) в том же порядке, как и в матрице D, тогда, очевидно, $D'^2 = D$. Кроме того, C - ортогональная матрица, т.е. $C^T C = E$. Поэтому, если $B = CD'C^T$, то $B^2 = CD'C^T CD'C^T = CD'^2C^T = CDC^T = A$. Таким образом, одним из возможных значений B будет:

$$B = CD'C^T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Ответ:

- а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
  - Сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.
  - Усеченное сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.
- б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  - Сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$.
  - Усеченное сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Ищем сингулярное разложение $A = C\Lambda D^T$, где C ортогональная матрица 2×2, Λ - матрица 2×3 с сингулярными числами на главной диагонали (остальные значения 0) и D - ортогональная матрица 3×3.

Найдем сначала собственные значения $S = AA^T$:

$$S = AA^T = \begin{pmatrix} 90 & 72 \\ 72 & 90 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_S(\lambda) = |\lambda E - S| = (\lambda - 90)^2 - 72^2 = (\lambda - 162)(\lambda - 18) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \in \{162, 18\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ортогональную матрицу C (ортонормированный базис из собственных векторов $\{e_1, e_2\}$, в котором S имеет диагональный вид):

1) $V_{\lambda=18} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (S - 18E)u = 0\}$

$$S - 18E = \begin{pmatrix} 72 & 72 \\ 72 & 72 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=18} = \langle (-1, 1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ (индекс 2, т.к. 18 второе по величине собственное значение)}$$

2) $V_{\lambda=162} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (S - 162E)u = 0\}$. Т.к. S симметрична, то $V_{\lambda=162} \perp V_{\lambda=18} = \langle (-1, 1)^T \rangle$ поэтому, очевидно, что $V_{\lambda=162} = \langle (1, 1)^T \rangle$. Значит $e_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$.

Таким образом

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Найдем теперь D^T. Если D_1^T - это первая строка D^T, то D_1^T в точности равна первой строке матрицы $C^TA = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, деленной на $\sqrt{162}$ (первое по величине сингулярное число), т.е.

$$D_1^T = \frac{1}{\sqrt{162}\cdot\sqrt{2}}(12,6,12) = (2/3, 1/3, 2/3)$$

Аналогично находим D_2^T (вторая строка D^T):

$$D_2^T = \frac{1}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}(2,4,-4) = (1/3, 2/3, -2/3)$$

Осталось достроить D_3^T. Т.к. $D_3^T \perp D_2^T$ и $D_3^T \perp D_1^T$, то координаты D_3^T являются решением ОСЛУ, которой соответствует матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ФСР: } (-2,2,1)^T$$

$$\Downarrow$$

$$D_3^T = (-2/3, 2/3, 1/3)$$

Таким образом

$$D^T = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сингулярное разложение будет:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

А вытекающее из него усеченное сингулярное разложение будет:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

б) Действуем так же, как в задаче а) с аналогичными обозначениями. Для краткости опущу пояснения, т.к. по сути они такие же как и в задаче а).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$S = AA^T = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_S(\lambda) = (\lambda-10)^2 - 8^2 = (\lambda-18)(\lambda-2)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \in \{18, 2\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $V_{\lambda=18} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (S-18E)u = 0\}$

$$S - 18E = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=18} = \langle (1,1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

2) $V_{\lambda=2} = \{u \in \mathbb{R}^2 | (S-2E)u = 0\}$

$$V_{\lambda=2} \perp V_{\lambda=18}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\lambda=2} = \langle (-1,1)^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$e_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

Таким образом

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$C^T A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D_1^T = \frac{1}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} (3,3,3,3) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

$$D_2^T = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} (1,1,-1,-1) = (0.5, 0.5, -0.5, -0.5)$$

$$D_3^T, D_4^T \perp \langle D_1^T, D_2^T \rangle$$

$$\Downarrow$$

Компоненты D_3^T, D_4^T удовлетворяют ОСЛУ с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

ФСР: $u_1 = (-1,1,0,0)^T, u_2 = (0,0,-1,1)^T,$ при этом видно, что $u_1 \perp u_2$.

$$\Downarrow$$

Чтобы получить более красивый вид D перейдем к другому базису пространства решений:

$v_1 = u_1 + u_2 = (-1,1,-1,1)^T,\ v_2 = u_1 - u_2 = (-1,1,1,-1)^T,$ при этом видно, что $v_1 \perp v_2$.

$$\Downarrow$$

$$D_3^T = (-0.5, 0.5, -0.5, 0.5)$$

$$D_4^T = (-0.5, 0.5, 0.5, -0.5)$$

$$\Downarrow$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Поэтому сингулярное разложение будет:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

А вытекающее из него усеченное сингулярное разложение будет:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4

Ответ: $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Усеченное сингулярное разложение для A, найденное в задаче 3а) будет:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому (оставляя ненулевым только первое самое большое сингулярное число) получаем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 5

Ответ: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Решение. Исходной квадратичной форме соответствует симметрическая билинейная форма $b(x, y) = x^T B y = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} y$, где $x, y \in \mathbb{R}^3$. Приведем матрицу B к диагональному нормальному виду симметрическим методом Гаусса:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом нормальный вид исходной квадратичной формы будет $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.
Метод Якоби позволяет проверить ответ:

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = 2 - 1 = 1,\ \Delta_3 = 2 + 2 + 2 - 8 - 1 - 1 = -2$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1,\ \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -2$$

$$\Downarrow$$

$$\text{нормальный вид формы: } x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$