Домашнее задание 4

Андрей Зотов

Май 2023

Задача 1

Ответ:

- а) Максимальная длина ориентированного простого цикла в графе G равна 3. На графе G всего имеется 6 ориентированных простых циклов длины 3: A, B, C, A; B, C, A, B; C, A, B, C; A, D, C, A; D, C, A, D; C, A, D, C.
- б) В графе G всего имеется 3 компоненты сильной связности: $ABCDG$, E и F.
- в) Достаточно добавить одно ориентированное ребро $(F,\ D)$.

Решение. в) Как следует из пункта б) чтобы граф G стал сильно связным нужно чтобы существовали ориентированные пути, связывающие (в обе стороны) вершины E и F с компонентой $ABCDG$ (пусть далее это будет компонента G_1). При этом вершины E и F тоже будут связаны (в обе стороны).

Действительно, если добавить ориентированное ребро $(F,\ D)$, то

- Из E в компоненту G_1 будет ориентированный путь E, F, D.
- Из G_1 в E будет ориентированный путь D, E.
- Из F в G_1 будет ориентированный путь F, D.
- Из G_1 в F будет ориентированный путь D, E, F.
- Из E в F будет ориентированный путь E, F.
- Из F в E будет ориентированный путь F, D, E.

Таким образом, после добавления ориентированного ребра $(F,\ D)$ существуют ориентированные пути, связывающие любую вершину графа G с любой другой вершиной, т.е. граф G становится сильно связным.

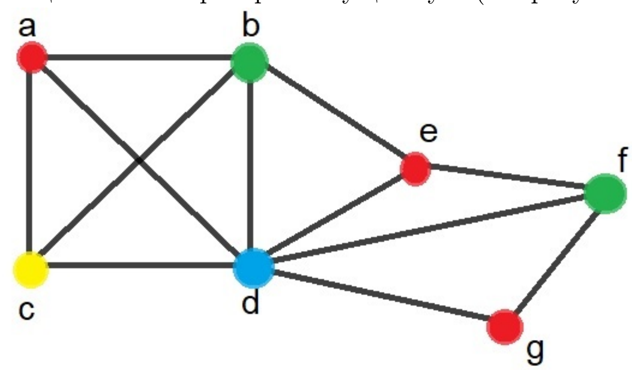
Задача 2

Ответ: $CABGFDE$ (отсортированная в топологическом порядке последовательность вершин графа H).

Задача 3

Ответ: все собрания получится провести в пятницу. Минимальное количество временных слотов будет 4.

Решение. Пусть рабочие группы будут вершинами некоторого графа G. При этом вершины графа G связаны ребром, если у соответствующих рабочих групп есть общие участники. Т.е. из условия получаем, что подграфы: $abcd \equiv K_4$, $gfd \equiv K_3$, $bde \equiv K_3$ и $ef \equiv K_2$. Кроме того понятно, что невозможно провести собрание двух рабочих групп в один и тот же слот, если соответствующие вершины графа G связаны ребром. Поэтому первый вопрос задачи равносилен существованию правильной раскраски графа G в 4 цвета. Такая раскраска существует (см. рисунок ниже).



Однако меньшим количеством цветов обойтись невозможно, т.к. граф G содержит подграф $abcd$, который эквивалентен K_4, а для K_4 необходимо для правильной раскраски ровно 4 цвета. Т.е. 4 временных слота - это минимальное количество необходимое для планирования собраний.

Задача 4

Ответ: а) mk; б) n^2.

Решение. а) В простом двудольном графе любую белую вершину можно соединить со всеми черными, тогда из каждой белой вершины будет выходить максимально возможное число ребер - по m штук (кратные ребра не рассматриваем). Т.к. всего белых вершин k штук, то всего ребер будет mk штук. (Симметрично можно было бы рассматривать m черных вершин, где из каждой выходит максимальное число ребер - по k штук и получается тоже самое максимальное число ребер mk).

б) Т.к. рассматривается двудольный граф, то все его вершины можно разбить на два класса - черные и белые, при этом каждое ребро графа соединяет вершины из разных классов. Пусть белых вершин будет k штук, тогда черных будет $2n-k$ штук. Согласно пункту а) максимально возможное число ребер при заданном k будет $M_k = k(2n-k)$ штук.

Найдем k, при котором M_k достигает максимума. Заметим, что

$$M_k = n^2 - (n-k)^2$$

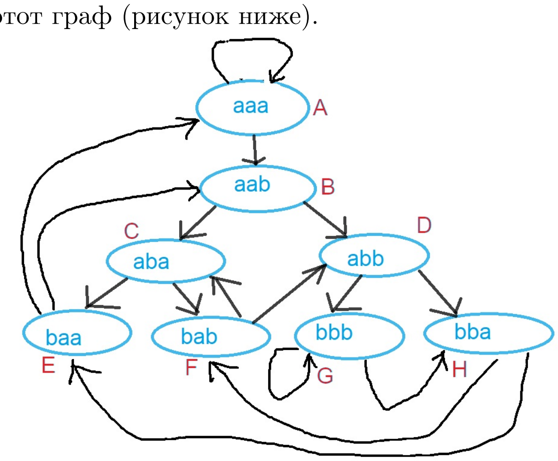
Как видно M_k достигает максимума n^2, когда второе отрицательное слагаемое обращается в ноль, т.е. при $k = n$.

Таким образом, максимальное число ребер двудольного графа достигается, когда черных и белых вершин по n штук, а максимальное число ребер будет n^2.

Задача 5

Ответ: а) слово *aaabbbabaa*; б) не существует.

Доказательство. а) Рассмотрим ориентированный граф G, в качестве вершин которого будут выступать трехбуквенные комбинации (всего 8 штук), а ориентированные ребра будут связывать начальную комбинацию $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ с конечной комбинацией $\beta_1\beta_2\beta_3$, если комбинацию $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ можно продолжить буквой α_4, так что $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$. Тогда существование слова по условию п. а) будет равносильно существованию *простого* ориентированного пути в графе G, который содержит все вершины графа G. Рассмотрим этот граф (рисунок ниже).



На рисунке вершины графа G обозначены большими латинскими буквами. И как видно существует простой ориентированный путь A, B, D, G, H, F, C, E, который содержит все вершины графа. Слово, которое соответствует этому пути будет $aaabbbabaa$.

Решение. б) Слово, которое начиналось бы на $abba$ и удовлетворяло бы условию п. а) не существует. Потому что иначе существовал бы простой ориентированный путь в графе G, содержащий все вершины графа, где первая вершина была бы D (комбинация abb), а вторая H (комбинация bba). Но это невозможно, т.к. этот путь обязан содержать кроме прочих вершину G (комбинация bbb), а в эту вершину можно попасть либо из нее самой, либо из вершины D. Т.е. искомый путь должен содержать 2 вершины D, а значит он не является простым.