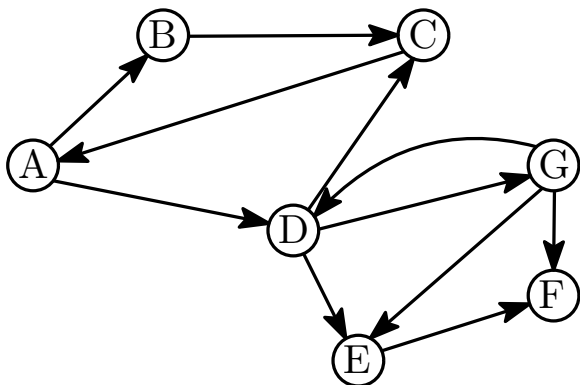




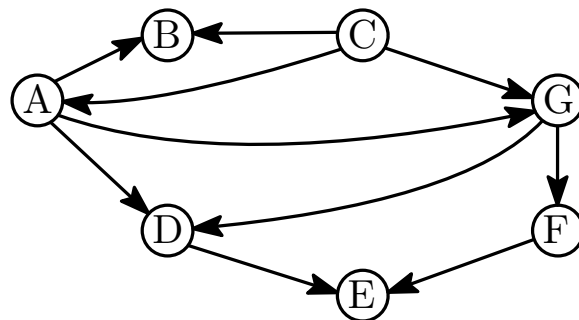
Дискретная математика:
ориентированные графы и алгоритмы на графах.

23 мая 2023

Домашнее задание.



Граф G.



Граф H.

1 Граф G изображен на рисунке выше.

- а) Найдите максимальную длину простого цикла в графе G . Укажите все различные простые циклы максимальной длины. (Достаточно предъявить ответ)
- б) Найдите компоненты сильной связности графа G . (Достаточно предъявить ответ)
- в) Какое минимальное число рёбер необходимо добавить в граф G , чтобы он стал сильно связным? (Необходимо обоснование ответа)

2 Ациклический граф H изображен на рисунке справа. Осуществите топологическую сортировку вершин графа H . (Достаточно предъявить ответ. В ответе можно, например, указать последовательность вершин от меньшего номера к большему.)

К остальным задачам необходимо привести решения с обоснованием.

Определение. Напомним, что *правильной раскраской* графа называется такое сопоставление каждой его вершине цвета, что любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета.

Кроме того, на занятии было доказано, что для правильной раскраски полного графа на n вершинах K_n необходимо n цветов.

3 В некоторой компании 7 рабочих групп a, b, c, d, e, f и g . В пятницу необходимо провести собрания в каждой рабочей группе по отдельности, причем каждое собрание можно планировать в один из 4 временных слотов:

9:00 - 10:45, 11:00 - 12:45, 13:15 - 15:00 и 15:15 - 17:00.

Кроме того, некоторые сотрудники участвуют сразу в нескольких группах:

- есть те, кто одновременно состоят в a, b, c и d ;
- несколько сотрудников состоят в g, f и d одновременно;
- часть состоит в группах b, d и e одновременно;
- и еще один человек работает в e и f .

Собрания в разных группах можно проводить в одно и то же время, если нет сотрудников, которые в этот момент должны быть сразу на нескольких разных собраниях.

Получится ли провести все собрания в пятницу? Какое минимальное количество временных слотов необходимо?

4 Напомним, что граф называется двудольным, если его можно правильно раскрасить в два цвета.

а) Какое наибольшее число ребер может быть в простом двудольном графе на k белых и m черных вершинах? (В нем не должно быть ребер, соединяющих вершины одинакового цвета.)

б) Какое наибольшее количество ребер может быть в двудольном графе на $2n$ вершинах?

5 Рассмотрим алфавит, состоящий только из двух букв a и b . Все возможные слова, которые можно получить в этом алфавите, назовем языком.

а) Докажите, что в этом языке можно составить слово, в котором любая трехбуквенная комбинация этих двух букв ($aaa, aab, \dots, bba, bbb$) встречается ровно один раз.

б) Существует ли слово, которое удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на $abba$? Если существует, то укажите его. Если не существует, то объясните, почему это невозможно.

Замечание. Трехбуквенная комбинация — три подряд идущие буквы в слове.

В слове $aaaa$, например, комбинация букв aaa встречается два раза (первые три буквы и последние). А вот в слове $ababa$ три комбинации: aba, bab и aba .