Домашнее задание 3 (линал)

Андрей Зотов

Июнь 2023

Задача 1

Ответ: $z \in \{2+3i,\ 2+i\}$.

Решение.

$$z^2 - \frac{8z}{1-i} + 1 + 8i = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z^2 - \frac{8z(1+i)}{2} + 1 + 8i = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(z - 2(1+i))^2 - 4(1+i)^2 + 1 + 8i = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(z - 2(1+i))^2 + 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(z_{1,2} - 2(1+i)) = \pm i$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1 = 2+3i,\ z_2 = 2+i$$

Задача 2

Ответ: данная система векторов в $\mathbb{R}^5$ является линейно независимой.

Решение. Составим из векторов v_1, v_2, v_3, v_4 матрицу A размером 5×4 и найдем ранг этой матрицы, приведя ее к ступенчатому виду методом Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом получили матрицу с 4 ненулевыми строками, т.е. $\operatorname{rk} A = 4$, т.е. все 4 столбца матрицы A линейно независимы, а это означает, что и система векторов v_1, v_2, v_3, v_4 в $\mathbb{R}^5$ линейно независима.

Задача 3

Ответ:

- а) $\dim U = 3$; базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- б) координаты $(2, 3, 1)$

Решение. а) Покажем, что множество U 2×2 матриц с нулевым следом является подпространством пространства $V = M_2(\mathbb{R})$ всех вещественных 2×2 матриц.

Действительно:

1. Пусть $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in U$ и $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U$, тогда в силу того, что $a_1 + d_1 = a_2 + d_2 = 0$ имеем $a_1 + a_2 + d_1 + d_2 = 0$, т.е. $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in U$.
2. Пусть $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда в силу того, что $a + d = 0$ имеем $\lambda a + \lambda d = 0$, т.е. $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \in U$.

Таким образом U подпространство V.

Найдем размерность подпространства U и один из его базисов.

Пространство V эквивалентно $\mathbb{R}^4$, поэтому подпространство $U \subseteq V$ можно задать с помощью ОСЛУ в виде $U = \{x \in \mathbb{R}^4 | Ax = 0\}$. При этом решение $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ определяется единственным уравнением $x_1 + x_4 = 0$, т.е. матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом поиск базиса U сводится к нахождению фундаментальной системы решений уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Матрица A уже имеет ступенчатый вид, в котором имеется три свободных переменных: x_2, x_3, x_4, поэтому $\dim U = 3$. При этом каждой свободной переменной соответствует свой базисный вектор:

$$x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Разложим матрицу (или вектор $\in U$) $v = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ в линейную комбинацию найденных базисных векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$. Сразу видно, что $v = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, но этот результат можно получить алгоритмически. Для этого составим матрицу, столбцами которой будут являться вектора e_1, e_2, e_3, v и приведем ее к каноническому ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем разложение $v = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, т.е. координаты v в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$ будут $(2, 3, 1)$.

Задача 4

Ответ: $a_1,\ a_2,\ a_3$ - базис; $a_4 = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3,\ a_5 = a_1 + 5a_2 - 5a_3$.

Решение. Составим матрицу A, столбцы которой будут вектора a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, и приведем ее к каноническому ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & -12 & 25 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 4 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 4 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Таким образом вектора a_1, a_2, a_3 (соответствующие главным позициям канонического вида) образуют базис, а в 4-м и 5-м столбцах стоят координаты векторов a_4 и a_5 в этом базисе, т.е. $a_4 = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3$ и $a_5 = a_1 + 5a_2 - 5a_3$.

Задача 5

Ответ: размерность - 2; базис - $e_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -1.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Требуется найти размерность $U = \{x \in \mathbb{R}^5 | Ax = 0\}$ (и предъявить базис в U), где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Приведем матрицу A к каноническому ступенчатому виду и найдем ФСР.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Полученная ступенчатая матрица имеет две свободные позиции, которым соответствуют переменные x_2 и x_5, поэтому $\dim U = 2$. Каждой свободной переменной соответствует свой вектор базиса (ФСР):

$$x_2 = 1,\ x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.5,\ x_4 = 0,\ x_3 = 0 \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0,\ x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = -1.8,\ x_4 = 0.2,\ x_3 = 0 \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} -1.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6

Ответ: 3.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Приведем матрицу A к каноническому ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Полученная ступенчатая матрица имеет 3 ненулевые строки, поэтому $\operatorname{rk} A = 3$.