

## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ К ЛЕКЦИИ 4

Напомним, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом (т.е. содержащем границу) множестве (например на прямоугольнике или на диске или на сфере) обязательно имеет минимум и максимум.

### Задачи.

(1) Вычислите интегралы:

- (а) Пусть фигура  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  задана как область между графиками функций  $y = x$  и  $y = x^2$  на отрезке  $x \in [0, 1]$ . Найдите интеграл

$$\int_A xy^2 \, dx dy$$

(б) Найдите интеграл

$$\int_{x^2+y^2 \leq a^2} |xy| \, dx dy$$

(2) Вычислите интеграл.

$$\int_{\substack{0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \pi/2}} \cos(x+y) \, dx dy$$

(3) Найдите объем эллипсоида

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 1.$$

(4) Найдите точки условного экстремума

- (а) для функции  $z = xy$  при условии, что  $x + y = 1$ .

(б) для функции  $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  при условии, что  $x^2 + y^2 = 1$  (считаем, что  $a, b > 0$ ).

(5) Дана цилиндрическая бочка радиуса  $r$  и высоты  $h$ . Какими надо выбрать радиус и высоту, чтобы при фиксированной площади поверхности  $S$ , бочка имела наибольшую вместимость?

(6) Найти минимум и максимум функции  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  при условии  $x^2 + y^2 \leq 25$ .