

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ К ЛЕКЦИИ 2.

Задача 1. Посчитайте неопределенные интегралы

a)

$$\int \sin^3 x \, dx$$

b)

$$\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$$

c)

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

d)

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

Задача 2. Посчитайте определенные интегралы

a)

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

b)

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

Задача 3. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt}{\ln x}.$$

Указание. Воспользуйтесь правилом Лопиталя. Чтобы обосновать правило Лопиталя надо доказать, что и числитель и знаменатель имеют предел ∞ . Со знаменателем все понятно, а для числителя стоит воспользоваться неравенством $e^t \geq 1$ при $t \geq 0$ и тем, что мы доказывали про интеграл $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$. Для применения правила Лопиталя стоит воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для интеграла.

Задача 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – некоторые положительные числа.

Задача 5. Напомним, что если $y = f(x)$ – некоторая функция, то длина графика на отрезке $[a, b]$ выражается по формуле

$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Найдите длину дуги графика $y = x^{3/2}$ на отрезке $[0, 4]$.