Домашнее задание 4 (матан)

Андрей Зотов

Август 2023

Задача 1

Ответ: a) $\frac{1}{40}$; b) $\frac{a^4}{2}$.

Решение. a) Т.к. область A - это область между графиками $y = x$ и $y = x^2$ при $x \in [0, 1]$, то y пробегает все значения из отрезка $[0, 1]$ и при фиксированном y переменная x пробегает все значения из отрезка $[y, \sqrt{y}]$. Поэтому:

$$\int\limits_A xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\right)\,dy = \int\limits_0^1 y^2 \left(\int\limits_y^{\sqrt{y}} x\,dx\right)\,dy = \int\limits_0^1 y^2 \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_y^{\sqrt{y}}\right)\,dy = \int\limits_0^1 y^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 y^3\,dy - \int\limits_0^1 y^4\,dy\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1 - \frac{y^5}{5}\bigg|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{40}.$$

b) Область интегрирования есть круг радиуса a с центром в точке $(0, 0)$, при этом под интегралом стоит функция $f(x, y) = |xy|$, которая является четной как по переменной x, так и по переменной y, поэтому если обозначить за I исходный интеграл, то интеграл по четвертинке круга ($x \geq 0, y \geq 0$) будет равен $\frac{1}{4}I$ (а $f(x, y) = xy$ в этой четверти). При этом x будет пробегать все значения из отрезка $[0, a]$, а y (при фиксированном x) - из отрезка $[0, \sqrt{a^2 - x^2}]$. Таким образом:

$$\frac{I}{4} = \int\limits_{\substack{x^2+y^2\leq a^2\\ x\geq 0\\ y\geq 0}} xy\,dx\,dy = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy\right)\,dx = \int\limits_0^a x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\,dx = \int\limits_0^a x\left(\frac{a^2 - x^2}{2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\int\limits_0^a x\,dx - \int\limits_0^a x^3\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(a^2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^4}{8};$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{a^4}{2}.$$

Задача 2

Ответ: 0.

Решение. Учитывая, что область интегрирования квадрат $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, то получаем:

$$\int\limits_{\substack{0\leq x\leq \pi/2\\ 0\leq y\leq \pi/2}} \cos(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,dx\right)\,dy = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,d(x+y)\right)\,dy = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin(x+y)\bigg|_{x=0}^{x=\pi/2}\right)\,dy =$$

$$= \langle \sin(\pi/2 + y) = \cos y \rangle = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos y - \sin y)\, dy = \sin y \Big|_0^{\pi/2} + \cos y \Big|_0^{\pi/2} = (1 - 0) + (0 - 1) = 0.$$

Задача 3

Ответ: $\frac{4\pi}{3\sqrt{abc}}$.

Решение. По условию фигура $ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 1$ эллипсоид, поэтому $a, b, c > 0$. Объем этой фигуры будет равен:

$$V = \int\limits_{ax^2+by^2+cz^2 \leq 1} 1 \, dx\, dy\, dz$$

Т.к. $a, b, c > 0$, то можно рассмотреть замену переменных $\tilde{x} = \sqrt{a} \cdot x, \tilde{y} = \sqrt{b} \cdot y, \tilde{z} = \sqrt{c} \cdot z$ или:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}}\tilde{x} \\ \frac{1}{\sqrt{b}}\tilde{y} \\ \frac{1}{\sqrt{c}}\tilde{z} \end{pmatrix},$$

при которой исходный эллипсоид преобразуется в шар радиуса 1: $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1$. Матрица Якоби этого отображения будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial z}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$|\det J| = \frac{1}{\sqrt{abc}}$$

И т.к. $dx\, dy\, dz = |\det J|\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z}$, то

$$V = \int\limits_{ax^2+by^2+cz^2 \leq 1} 1 \, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2 \leq 1} |\det J|\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{abc}} \cdot \int\limits_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2 \leq 1} 1\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z},$$

где интеграл справа - это объем шара радиуса 1, который равен $\frac{4\pi}{3}$ (вычислялось на лекции).
Таким образом искомый объем будет:

$$V = \frac{4\pi}{3\sqrt{abc}}.$$

Задача 4

Ответ: a) условный максимум в точке $(0.5, 0.5)$, b) условный максимум в точке $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ и условный минимум в точке $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

Решение. a) Лагранжиан имеет вид: $\mathcal{L} = \alpha xy - \lambda(x + y - 1)$. Поэтому $\operatorname{grad} \mathcal{L} = (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}) = (\alpha y - \lambda, \alpha x - \lambda)$ и значит условный экстремум должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \alpha y - \lambda = 0 \\ \alpha x - \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Видно, что если $\alpha = 0$, то $\lambda = 0$, но α и λ не могут быть равны нулю одновременно, поэтому $\alpha \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$x = y = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2\lambda = \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0.5, \ y = 0.5$$

Таким образом точка $(0.5, 0.5)$ - единственная критическая точка $\mathcal{L}$, лежащая на прямой $x + y = 1$, причем $z(0.5, 0.5) = 0.25$. Рассмотрим какую-нибудь другую точку на прямой $x + y = 1$, например $(0, 1)$, тогда $z(0, 1) = 0 < z(0.5, 0, 5) = 0.25$, поэтому точка $(0.5, 0.5)$ условный максимум исходной задачи. Требование существования α и λ одновременно не равных 0 выполняется - достаточно взять $\alpha = 2$ и $\lambda = 1$.

b) Лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} = \alpha(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Поэтому $\operatorname{grad} \mathcal{L} = (\frac{\alpha}{a} - 2\lambda x, \frac{\alpha}{b} - 2\lambda y)$ и значит условный экстремум должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{a} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\alpha}{b} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Видно, что если $\lambda = 0$, то $\alpha = 0$, но α и λ не могут быть равны нулю одновременно, поэтому $\lambda \neq 0$ (аналогично $\alpha \neq 0$)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{2\lambda a} \\ y = \frac{\alpha}{2\lambda b} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $y = \frac{a}{b} x$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^2 x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow y = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким образом имеем 2 критические точки $\mathcal{L}$, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 1$: $A_1(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ и $A_2(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$. И т.к. по условию $a, b > 0$, то $z(A_1) > 0$ и $z(A_2) < 0$, т.е. A_1 точка условного максимума, а A_2 точка условного минимума исходной задачи. Требование существования α и λ одновременно не равных 0 выполняется - необходимо взять такие α и λ, что $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для точки A_1 и $\frac{\alpha}{\lambda} = -\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для точки A_2.

Задача 5

Ответ: $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Решение. Объем бочки будет $V(r, h) = \pi r^2 h$. Площадь поверхности бочки (с учетом дна и крышки) будет $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$, при этом считаем, что $S > 0$ фиксировано. Таким образом Лагранжиан имеет вид $\mathcal{L}(r, h) = \alpha\pi r^2 h - \lambda(S - 2\pi r(r+h))$. Поэтому $\operatorname{grad} \mathcal{L} = (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}) = (2\alpha\pi r h + \lambda(4\pi r + 2\pi h), \alpha\pi r^2 + 2\lambda\pi r)$. Т.е. оптимальное решение удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} 2\alpha r h + \lambda(4r + 2h) = 0 \\ S = 2\pi r(r + h) \end{cases}$$

Если $\alpha = 0$, то $\lambda = 0$, но α и λ не могут быть равны нулю одновременно, поэтому $\alpha \neq 0$. Поэтому $r = -\frac{2\lambda}{\alpha}$ (при этом видно, что если $\lambda = 0$, то $r = 0$ и значит $S = 0$, но мы исходим из того что $S > 0$, поэтому $\lambda \neq 0$). Подставляя в первое уравнение системы выражение для r получаем

$$2\alpha\left(-\frac{2\lambda}{\alpha}\right)h + \lambda\left(4\left(-\frac{2\lambda}{\alpha}\right) + 2h\right) = 0$$

Т.к. $\lambda \neq 0$, то получаем:

$$-4h - \frac{8\lambda}{\alpha} + 2h = 0$$

Таким образом $h = -\frac{4\lambda}{\alpha},\ r = -\frac{2\lambda}{\alpha} \Rightarrow h = 2r \Rightarrow S = 6\pi r^2 \Rightarrow r = r_{ext} = \sqrt{\frac{S}{6\pi}},\ h = h_{ext} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ (корни берем со знаком $+$ потому что r, h не могут быть отрицательными). Точка $(r_{ext},\ h_{ext})$ - единственный условный экстремум исходной задачи, при этом $V_{ext} = V(r_{ext}, h_{ext}) = \frac{S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}} > 0$. Т.к. при $h = 0, r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ поверхность бочки будет равна заданному S, а объем будет равен 0, т.е. меньше чем V_{ext}, то найденный условный экстремум - это условный максимум функции объема $V(r, h)$. Требование существования α и λ одновременно не равных 0 выполняется - необходимо взять такие α и λ, что $\frac{\lambda}{\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Задача 6

Ответ: В точке $(3, -4)$ функция $z(x, y)$ достигает условного минимума $z(3, -4) = -75$, а в точке $(-3, 4)$ - условного максимума $z(3, -4) = 125$.

Решение. Лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} = \alpha(x^2 + y^2 - 12x + 16y) - \mu(x^2 + y^2 - 25)$. Поэтому $\operatorname{grad}\mathcal{L} = (2\alpha x - 12\alpha - 2\mu x, 2\alpha y + 16\alpha - 2\mu y)$. Рассмотрим 2 основных случая:

I. $z(x, y) \to \max$. Тогда условный максимум должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} 2\alpha x - 12\alpha - 2\mu x = 0 \\ 2\alpha y + 16\alpha - 2\mu y = 0 \\ \alpha \geq 0 \\ \mu(x^2 + y^2 - 25) = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \leq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

I. a) $\mu = 0 \Rightarrow \alpha > 0$ (т.к. μ и α не равны 0 одновременно) и тогда условный максимум должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \alpha x = 6\alpha \\ \alpha y = -8\alpha \\ \alpha > 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \\ \alpha > 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$$

Т.к. $6^2 + (-8)^2 - 25 = 75 > 0$, то полученная система решений не имеет.

I. b) $\mu \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$ и тогда условный максимум должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} 2\alpha x - 12\alpha - 2\mu x = 0 \\ 2\alpha y + 16\alpha - 2\mu y = 0 \\ \alpha \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ \mu > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x(\alpha-\mu)=6\alpha \\ y(\alpha-\mu)=-8\alpha \\ \alpha\geq 0 \\ x^2+y^2-25=0 \\ \mu>0 \end{cases}$$

Если $\alpha=0$, тогда $x=0,\ y=0$ и очевидно система не имеет решений (решение обязано быть на окружности $x^2+y^2=25$). А если $\alpha\neq 0$ (т.е. $\alpha>0$), тогда $x=-\frac{3}{4}y\Rightarrow\frac{9}{16}y^2+y^2-25=0\Rightarrow y^2\cdot\frac{25}{16}=25\Rightarrow y^2=16\Rightarrow y=\pm 4\Rightarrow x=\mp 3$. Таким образом получили 2 критические точки $\mathcal{L}$: $A_1(3,-4)$ и $A_2(-3,4)$. И т.к. $z(A_1)=25-36-64=-75$ и $z(A_2)=25+36+64=125$, условный максимум достигается в точке $A_2(-3,4)$ и равен $z(A_2)=125$. Помимо прочего также требуется чтобы существовали $\alpha,\mu>0$. Для существования условного максимума в точке $A_2(-3,4)$ достаточно положить $\alpha=1$ и $\mu=3$.

II. $z(x,y)\to\min$. В этом случае получается аналогичная система, только $\mu\leq 0$. Проводя те же рассуждения, получим те же 2 условных экстремума. Таким образом условный минимум достигается в точке $A_1(3,-4)$ и равен $z(A_1)=-75$. Помимо прочего также требуется чтобы существовали $\alpha>0,\mu<0$. Для существования условного минимума в точке $A_1(3,-4)$ достаточно положить $\alpha=1$ и $\mu=-1$.