Домашнее задание 1 (матан)

Андрей Зотов

Июль 2023

Задача 1

Ответ: а) 1/3, б) $\frac{1-b}{1-a}$.

Решение.

а) Т.к. $\frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})^n \to 0$ и $(-\frac{2}{3})^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}}{\frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}} + 1} = \frac{1}{3}.$$

б) Пусть $S_a = 1 + a + \cdots + a^n$, тогда $aS_a = S_a - 1 + a^{n+1}$ и т.к. $|a| < 1$ (т.е. $1 - a \neq 0$), то $S_a = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (сумма геометрической прогрессии). Аналогично $S_b = 1 + b + \cdots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$. Т.к. если $|a| < 1,\ |b| < 1$, то $a^{n+1} \to 0$ и $b^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_a}{S_b} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-a)(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

Задача 2

Ответ: а) 2/3, б) -2.

а) Под пределом стоит отношение двух непрерывных функций в точке $x = 1$ и каждая равна 0 в этой точке, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя и после его применения вычислим предел, учитывая, что под пределом получится отношение двух непрерывных функций в точке $x = 1$:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{2x}{4x - 1} = \frac{2}{3}$$

б) Также имеем отношение двух непрерывных функций под знаком lim, равных 0 в точке $x = 0$, т.е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому по правилу Лопиталя получаем:

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x - 1)} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-\cos(\cos x - 1) \cdot \sin x}$$

Учитывая, что при $x \to 0$ функция $\frac{\sin x}{x} \to 1$ (разобрано на лекции), функция $\frac{2}{1+x^2} \to 2$ (по непрерывности функции в $x = 0$) и функция $-\cos(\cos x - 1) \to -1$ (тоже по непрерывности функции в $x = 0$), то получаем:

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-\cos(\cos x - 1) \cdot \sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\cos(\cos x - 1) \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{-1 \cdot 1} = -2.$$

Задача 3

Ответ: а) $\frac{2\cdot(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$, б) $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$:

$$\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' = \frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{(1-2x)(1-x+x^2+1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2\cdot(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

б) Воспользуемся формулой $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$:

$$\left(\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \frac{1}{e^x\cdot(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}\cdot\frac{e^x\cdot(\sqrt{1+e^{2x}}+e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+e^{2x}}+e^x}{(1+\sqrt{1+e^{-2x}})\cdot\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x\cdot(1+\sqrt{1+e^{-2x}})}{(1+\sqrt{1+e^{-2x}})\cdot e^x\cdot\sqrt{1+e^{-2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}.$$

Задача 4

Ответ: а) $y' = 2\sin x\cos x\cdot\big(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\big)$, б) $y' = e^{f(x)}\cdot\big(e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)\big)$.

Решение.

а) Воспользуемся формулами $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ и $(f+g)' = f'+g'$:

$$y' = \big(f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)\big)' = f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x - f'(\cos^2 x)\cdot 2\sin x\cos x = 2\sin x\cos x\cdot\big(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\big).$$

б) Воспользуемся формулами $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ и $(fg)' = f'g+g'f$:

$$y' = \left(f(e^x)e^{f(x)}\right)' = f'(e^x)\cdot e^x\cdot e^{f(x)} + e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot f(e^x) = e^{f(x)}\cdot\big(e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)\big).$$

Задача 5

Ответ: а) у функции $y=(x+1)^{10}e^{-x}$ есть два экстремума: локальный минимум в точке $x=-1$, равный $y(-1)=0$, и локальный максимум в точке $x=9$, равный $y(9)=10^{10}e^{-9}$; б) у функции $y = x+\frac{1}{e^x}$ есть один экстремум: локальный минимум в точке $x=0$, равный $y(0)=1$.

Решение.

а) Найдем корни уравнения $y'(x)=0$:

$$y' = 10(x+1)^9\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot(x+1)^{10} = e^{-x}\cdot(x+1)^9\cdot(10-x-1) = -e^{-x}(x+1)^9(x-9) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)^9(x-9)=0 \text{ (т.к. } -e^{-x}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R})$$

$$\Updownarrow$$

$$x\in\{-1,9\}$$

Таким образом имеем две критические точки $x\in\{-1,9\}$, в которых функция $y'(x)$ обращается в 0. Т.к. функция $y'(x)$ непрерывна во всех точках $\mathbb{R}$, то она сохраняет знак на промежутках $(-\infty;-1)$, $(-1;9)$ и $(9;+\infty)$. Найдем знаки производной на этих промежутках и выясним характер найденных критических точек:

1) $x=-1$: $y'(-2) = -\frac{1}{e^2}(-1)^9(-2-9) < 0 \Rightarrow$ функция $y'(x)<0$ на промежутке $(-\infty;-1)\Rightarrow$ функция $y(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;-1)$ и $y'(0)=9>0\Rightarrow$ функция $y'(x)>0$ на промежутке $(-1,9)\Rightarrow$ функция $y(x)$ возрастает на промежутке $(-1;9)$. Отсюда следует, что в точке $x=-1$ функция достигает локального минимума $y(-1)=0$.

2) $x=9$: $y'(10) = -\frac{1}{e^{10}}11^9\cdot 1 < 0\Rightarrow$ функция $y'(x)<0$ на промежутке $(9;+\infty)\Rightarrow$ функция $y(x)$ убывает на промежутке $(9;+\infty)$. Как было установлено ранее на промежутке $(-1;9)$ функция $y(x)$ возрастает, поэтому в точке $x=9$ функция достигает локального максимума $y(9)=10^{10}e^{-9}$.

б) Найдем корни уравнения $y'(x)=0$:

$$y' = 1-e^{-x} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{-x} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0$$

Таким образом имеем одну критическую точку $x = 0$, в которой функция $y'(x)$ равна нулю. Т.к. функция $y'(x)$ непрерывна во всех точках $\mathbb{R}$, то она сохраняет знак на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Найдем знаки производной на этих промежутках и выясним характер найденной критической точки:

$y'(-1) = 1 - e < 0$ (т.к. $e > 2$) $\Rightarrow$ функция $y'(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$ $\Rightarrow$ функция $y(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$ и $y'(1) = 1 - 1/e > 0$ (т.к. $0 < 1/e < 1$) $\Rightarrow$ функция $y'(x) > 0$ на промежутке $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ функция $y(x)$ возрастает на промежутке $(0, +\infty)$. Таким образом в точке $x = 0$ функция $y(x)$ достигает локального минимума $y(0) = 1$.