Домашнее задание 3 (матан)

Андрей Зотов

Июль 2023

Задача 1

Ответ: 1.

Решение. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}\right) = 1 + (y-1)\cdot\frac{\partial\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}{\partial x}$, и т.к. второе слагаемое обращается в 0 при $y = 1$, то $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 1) = 1$.

Задача 2

Ответ: a) $\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}\right)$, $H(u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y^2)^2} & -\frac{2y}{(x+y^2)^2} \\ -\frac{2y}{(x+y^2)^2} & \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \end{pmatrix}$;

b) $\operatorname{grad} u = \left(-\frac{2x\sin x^2}{y}, -\frac{\cos x^2}{y^2}\right)$, $H(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{y}(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2) & \frac{2x}{y^2}\sin x^2 \\ \frac{2x}{y^2}\sin x^2 & \frac{2}{y^3}\cos x^2 \end{pmatrix}$.

Решение. a) $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\ln(x+y^2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y^2), \frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y^2)\right) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}\right)$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y^2}\right) = -\frac{1}{(x+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = \frac{2(x+y^2) - 4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

$$\Downarrow$$

$$H(u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y^2)^2} & -\frac{2y}{(x+y^2)^2} \\ -\frac{2y}{(x+y^2)^2} & \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

b) $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\frac{\cos x^2}{y} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos x^2}{y}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos x^2}{y}\right) = \left(-\frac{2x\sin x^2}{y}, -\frac{\cos x^2}{y^2}\right)$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x\sin x^2}{y}\right) = -\frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x\sin x^2) = -\frac{2}{y}(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\cos x^2}{y^2}\right) = \frac{2\cos x^2}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x^2}{y^2}\right) = \frac{2x\sin x^2}{y^2}.$$

$$\Downarrow$$

$$H(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{y}(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2) & \frac{2x}{y^2}\sin x^2 \\ \frac{2x}{y^2}\sin x^2 & \frac{2}{y^3}\cos x^2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Ответ: a) равенство верно, b) равенство верно.

Решение. a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-2xy-3y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x-6y) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy-3y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(2x-2y) = -2.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = -2.$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\ln x\cdot x^{y^2}\right) = 2y\left(\frac{1}{x}\cdot x^{y^2} + \ln x\cdot 2y^3\cdot x^{y^2-1}\right) = 2y\cdot x^{y^2-1}(1+\ln x\cdot y^2);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cdot x^{y^2-1}\right) = 2y\cdot x^{y^2-1} + y^2\cdot\ln x\cdot x^{y^2-1}\cdot 2y = 2y\cdot x^{y^2-1}(1+\ln x\cdot y^2).$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 2y\cdot x^{y^2-1}(1+\ln x\cdot y^2).$$

Задача 4

Ответ: a) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 0$; b) $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3} = -6(\cos x+\cos y)$; c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -6x^2yz$.

Решение. a) $\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}(x\ln(xy)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}(x\ln(xy)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

b) $\frac{\partial^6}{\partial x^3\,\partial y^3}(x^3\sin y + y^3\sin x) = \frac{\partial^5}{\partial x^2\,\partial y^3}(3x^2\sin y + y^3\cos x) = \frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}(3x^2\cos y + 3y^2\cos x) = \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}(6x\cos y - 3y^2\sin y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(-6x\sin y - 6y\sin x) = \frac{\partial}{\partial y}(-6\sin y - 6y\cos x) = -6(\cos x+\cos y).$

c) $u = f(x, xy, xyz) = x + \ln(x^2y^2z) - x^3y^2z \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(x+\ln(x^2y^2z) - x^3y^2z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{2}{x} - 3x^2y^2z\right) = -6x^2yz.$

Задача 5

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Решение. $u = x^2+y^2-z^2 \Rightarrow \operatorname{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = (2x, 2y, -2z)$

$$\Downarrow$$

$$a = \operatorname{grad}_{A=(\varepsilon,0,0)} u = (2\varepsilon, 0, 0),\ \ b = \operatorname{grad}_{B=(0,\varepsilon,0,)} u = (0, 2\varepsilon, 0),\ \ \varepsilon\neq 0;$$

$$\Downarrow$$

$$(a,b) = 2\varepsilon\cdot 0 + 0\cdot 2\varepsilon + 0\cdot 0 = 0,\ \ |a| = 2|\varepsilon| > 0,\ \ |b| = 2|\varepsilon| > 0;$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} = 0,\ \ \varphi\in[0,\pi];$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 6

Ответ: a) Функция $f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ в точке $(-1,-1)$ имеет строгий локальный максимум равный -4, и в точке $(1,1)$ - строгий локальный минимум равный 4; b) Функция $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10$ в точке $(4,1,2)$ имеет строгий локальный максимум равный 51.

Решение. a) Необходимое условие экстремума функции $f(x,y)$ в точке $A(x,y)$ - это $\operatorname{grad}_A f = 0$, поэтому найдем множество критических точек $K = \{A : \operatorname{grad}_A f = 0\}$.

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(1 - \frac{1}{x^2}, 1 - \frac{1}{y^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \\ 1 - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x,y) \in \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\} = K$$

Т.к.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{2}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0,$$

то матрица Гессе функции f будет иметь вид:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 0 \\ 0 & 2/y^3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим все 4 найденных критических точки:

1) Точка $(-1,-1) \Rightarrow H_{(-1,-1)}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Т.к. эта матрица соответствует отрицательно определенной квадратичной форме, то в точке $(-1,-1)$ строгий локальный максимум равный $f(-1,-1) = -4$.

2) Точка $(-1,1) \Rightarrow H_{(-1,1)}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Получившаяся матрица соответствует знакопеременной квадратичной форме, поэтому в точке $(-1,1)$ нет экстремума.

3) Точка $(1,-1) \Rightarrow H_{(1,-1)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Получившаяся матрица соответствует знакопеременной квадратичной форме, поэтому в точке $(1,-1)$ нет экстремума.

4) Точка $(1,1) \Rightarrow H_{(1,1)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Т.к. эта матрица соответствует положительно определенной квадратичной форме, то в точке $(1,1)$ строгий локальный минимум равный $f(1,1) = 4$.

b) Найдем критические точки:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-2x + y - 2z + 11, -10y + x + 2z + 2, -6z - 2x + 2y + 18)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -2x + y - 2z + 11 = 0 \\ -10y + x + 2z + 2 = 0 \\ -6z - 2x + 2y + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -x - 9y = -13 \\ x - 28y = -24 \\ -2x + 2y - 6z = -18 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -37y = -37 \\ x = 28y - 24 \\ z = \frac{-18-2y+2x}{-6} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 28 \cdot 1 - 24 = 4 \\ z = \frac{-18-2\cdot 1+2\cdot 4}{-6} = 2 \end{cases}$$

Таким образом существует только одна критическая точка $M(4,1,2)$. Найдем матрицу Гессе в этой точке:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$H(f) = H_{M(4,1,2)}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Угловые миноры $H_{M(4,1,2)}(f)$ имеют следующие знаки: $\Delta_1 = -2 < 0,\ \Delta_2 = 20 - 1 = 19 > 0,\ \Delta_3 = -120 - 4 - 4 + 40 + 8 + 6 = -128 + 54 = -74 < 0$. Поэтому по критерию Сильвестра матрица $H_{M(4,1,2)}(f)$ соответствует отрицательно определенной квадратичной форме, т.е. в точке $M(4,1,2)$ функция $f(x,y,z)$ имеет максимум равный $f(4,1,2) = 51$.