Домашнее задание 1 (линал)

Андрей Зотов

Июнь 2023

Задача 1

Ответ: $y,\ t \in \mathbb{R}$ (свободные переменные); $x = -2y - t - 1,\ z = t$ (главные переменные).

Решение. Составим расширенную матрицу СЛУ и решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -6 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 12 & -9 & -3 \\ 2 & 4 & -8 & 10 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили матрицу канонического ступенчатого вида, из которого следует, что решение СЛУ будет $y, t \in \mathbb{R}$ (свободные переменные) и $x = -2y - t - 1,\ z = t$ (главные переменные).

Задача 2

Ответ: искомый многочлен: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда a, b, c, d будут корнями СЛУ:

$$\begin{cases} a + b + c + d = f(1) = 1 \\ -a + b - c + d = f(-1) = 13 \\ 8a + 4b + 2c + d = f(2) = 7 \\ -27a + 9b - 3c + d = f(-3) = 17 \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 13 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 36 & 24 & 28 & 44 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 9 & 6 & 7 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -52 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -26 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Получили матрицу канонического ступенчатого вида, из которого следует, что СЛУ имеет единственное решение $a = 1,\ b = 2,\ c = -7,\ d = 5$. Т.е.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5.$$

Задача 3

Ответ: $\begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$

Решение. Вычислим $(2A)^2$: $(2A)^2 = 4A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^2 = 4\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix}$

Вычислим $3((BA)^T - E)^2$:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(BA)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(BA)^T - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$3((BA)^T - E)^2 = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = 3\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$(2A)^2 - 3((BA)^T - E)^2 = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Ответ: все матрицы вида $\lambda\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$

Решение. Пусть X искомая матрица, тогда

$$X\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}X \tag{1}$$

Отсюда следует, что X имеет размер 2×2. Тогда будем искать X в виде

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

И из выражения (1) получаем, что x, y, z, t являются решениями системы:

$$\begin{cases} -x + 3z = -x + 2y \\ 2y + 5t = 3z + 5t \\ -y + 3t = 3x + 5y \\ 2x + 5z = -z + 2t \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
3z = 2y \\
2y = 3z \\
6y + 3x + 3t = 0 \\
6z + 2x - 2t = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

Если поделить на 3 третье уравнение и на 2 четвертое, а также исключить второе уравнение т.к. оно эквивалентно первому, то система (2) будет равносильна

$$
\begin{cases}
3z = 2y \\
2y + x + t = 0 \\
3z + x - t = 0
\end{cases}
\tag{3}
$$

Если, учитывая, что $3z = 2y$, вычесть из второго уравнения третье, то получим $t = 0$. И переписав второе уравнение, с учетом $t = 0$, получим, что система (3) равносильна

$$
\begin{cases}
3z = 2y \\
x = -2y \\
t = 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

А система (4), очевидно, равносильна

$$
\begin{cases}
y \in \mathbb{R} \text{ (свободная переменная)} \\
z = \frac{2}{3}y \\
x = -2y \\
t = 0
\end{cases}
$$

Таким образом $X = \begin{pmatrix} -2y & y \\ \frac{2}{3}y & 0 \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, где $y \in \mathbb{R}$.
Что равносильно

$$
X = \lambda \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}
$$

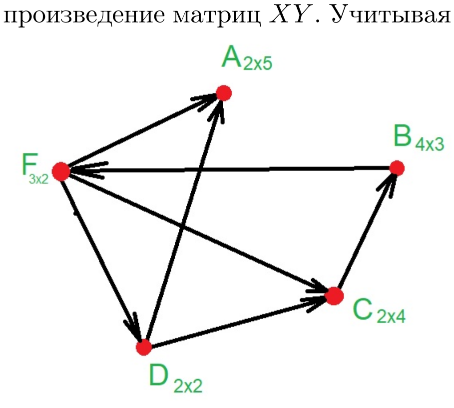
Задача 5

Ответ: два варианта:

$$
CBFDA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 137 & 16 & 65 & -34 & -6 \end{pmatrix};
$$

$$
DCBFA = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}.
$$

Решение. Рассмотрим ориентированный граф G, вершины которого будут данные матрицы A, B, C, D, F. При этом наличие ориентированного ребра из вершины X в вершину Y будет означать, что имеет смысл произведение матриц XY. Учитывая размеры всех матриц, получим ориентированный граф G (см. рисунок).



Тогда решение задачи будет равносильно нахождению путей в графе G, которые содержат каждую вершину ровно один раз. Найдем все такие пути.

Очевидно, если такие пути существуют, то они заканчиваются вершиной A, т.к. у вершины A нет исходящих ребер, т.е. такие пути не могут начинаться с вершины A. Поэтому возможны 4 случая:

1. Путь начинается с вершины B. Далее путь продолжается единственным образом в вершину F. Затем путь можно продолжить либо в вершину A, либо в вершину D, либо в вершину C, но A - это тупик, а из вершины C можно попасть только в вершину B, из которой мы начали, поэтому путь продолжается единственным образом в вершину D. Далее опять возможны два варианта продолжения: либо в A, либо в C, поэтому единственное продолжение это вершина C. Но как уже было замечено из вершины C путь можно продолжить только в вершину B, с которой мы начали, при этом вершина A осталась не посещенной. Таким образом путь не может начинаться с вершины B.

2. Путь начинается с вершины C. Далее путь продолжается единственны образом в вершину B. Затем следует единственное продолжение в вершину F. Далее возможны варианты продолжения: A (тупик и вершина D останется не посещенной), C (с этой вершины начали) и D, поэтому единственное продолжение это вершина D. И завершаем единственным продолжением в вершину A. Таким образом возможен путь (или перемножение матриц в этом порядке): C, B, F, D, A.

3. Путь начинается с вершины D. Далее либо A (тупик), либо C, поэтому продолжаем в C. Затем единственное продолжение в B. Далее единственное продолжение в F. И далее завершение пути в A. Таким образом возможен путь (или перемножение матриц в этом порядке): D, C, B, F, A.

4. Путь начинается с вершины F. Далее либо A (тупик), либо D, либо C, но, как и продолжение в A продолжение в D не образует требуемый путь, т.к. в A можно попасть только из F и D и следовательно попав в D обязательно нужно двигаться в A (в F мы уже побывали), а тогда вершины B и C никогда не будут посещены. Таким образом единственное продолжение из F будет продолжение в C. Далее единственное продолжение в B. И затем единственное продолжение в вершину F, из которой мы стартовали. Таким образом путь не может начинаться с вершины F.

В итоге существует только два возможных порядка перемножения матриц $CBFDA$ и $DCBFA$. Найдем результаты этих перемножений.

Вычислим $CBFDA$:

$$P_1 = CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 F = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 28 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CBFDA = P_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 137 & 16 & 65 & -34 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычислим $DCBFA$:

$$Q_1 = DC = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = Q_1 B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = Q_2 F = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$DCBFA = Q_3 A = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$