Домашнее задание 2 (тервер)

Андрей Зотов

Сентябрь 2023

Задача 1

Ответ: а) $P(X=2)=0.5$; б)

$\mathbf{X}^2$	0	1	4
P	0.15	0.3	0.55

.

Решение.

а) Т.к. $\sum\limits_{k=-2}^{2} P(X=k)=1$, то $P(X=2)=1-\sum\limits_{k=-2}^{1} P(X=k)=1-(0.05+0.1+0.15+0.2)=0.5$.

б) Т.к. величина X принимает значения из множества $\{-2,-1,0,1,2\}$, то величина X^2 принимает значения из множества $\{0,1,4\}$, при этом $P(X^2=0)=P(X=0)=0.15$; $P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0.1+0.2=0.3$; $P(X^2=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0.05+0.5=0.55$.

Задача 2

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение.

Событие $A=$«решка первый раз выпала на нечетном броске» состоит из следующих элементарных исходов:
$\omega_0=$ «первый раз решка выпала на первом испытании»;
$\omega_1=$ «первый раз решка выпала на третьем испытании»;
...
$\omega_k=$ «первый раз решка выпала на $2k+1$-ом испытании»;
...

Т.е. $A=\bigsqcup\limits_{k=0}^{\infty}\omega_k$, поэтому $P(A)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(\omega_k)$. Считаем монету симметричной (т.е. вероятность выпадения решки $\frac{1}{2}$) и испытания независимыми в совокупности. Событие ω_k означает выпадение орлов в первых $2k$ испытаниях и затем выпадение решки в последнем $2k+1$-ом испытании, поэтому $P(\omega_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$.

Таким образом $P(A)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} =<$ пользуемся формулой для суммы геом. прогрессии $>= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

Задача 3

Ответ: а) $\frac{1}{8}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{3}{8}$.

Решение.

а) $P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=F_X(1)-\lim\limits_{x\to 1-0}F_X(x)=F_X(1)-F_X(1-0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$;
б) $P(X=2)=P(X\le 2)-P(X<2)=F_X(2)-F_X(2-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$;
в) $P(X\in(1.5;2])=P(X\le 2)-P(X\le 1.5)=F_X(2)-F_X(1.5)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$;
г) $P(X\in(1;2])=P(X\le 2)-P(X\le 1)=F_X(2)-F_X(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$;
д) $P(X\in[1;2])=P(X=1)+P(X\in(1;2])=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.

Задача 4

Ответ: а) В частности возможна плотность нормального распределения с любыми параметрами (параметры зависят от соотношения числа сайтов N и числа ссылок M) б) $F_X(5) = 1 - \frac{1}{5^{1.1}} \approx 0.83$.

Решение.

Пусть X - случайная величина «число ссылок на случайном выбранном сайте» (исходящая степень случайной вершины в веб-графе), а Y - «число ссылок на случайно выбранный сайт» (входящая степень случайной вершины в веб-графе).

а) Плотность случайной величины X, распределенной согласно распределению Парето с параметрами $x_m = 1,\ k = 1.1$, будет $f_X(x) = \begin{cases} \frac{kx_m^k}{x^{k+1}}, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases} = \begin{cases} \frac{1.1}{x^{2.1}}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$. Требуется найти плотность распределения величины Y - $f_Y(x)$.

Представляется, что характер распределения Y не зависит от распределения X - по крайней мере из условия это никак не следует. В частности, можно показать, что плотность распределения Y может быть нормальной.

Допустим, что ссылки указывают на любой сайт (в т.ч. числе и на себя) равновероятно. Тогда, если N - это число всех сайтов, а M - число всех ссылок, то вероятность, что на случайный сайт будет указывать ровно k ссылок будет $P(Y = k) = \binom{M}{k} \cdot \frac{1}{N^k} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-k}$ (биномиальное распределение). Т.е. имеем дискретное распределение, у которого вообще говоря нет плотности. Но можно рассмотреть предельный случай биномиального распределения, которое как известно является нормальным распределением с известной функцией плотности.

Пусть Y_n — это число ссылок на случайный сайт при условии, что всего ссылок $n = M$. Пусть $p = \frac{1}{N}$ и $q = 1 - p$. Тогда согласно предельной теореме Муавра-Лапласа для фиксированных z_1 и z_2 при $n \to \infty$ имеем:

$$P(np + z_1\sqrt{npq} \leq Y_n \leq np + z_2\sqrt{npq}) \to \mathfrak{N}(z_2) - \mathfrak{N}(z_1)$$

где $\mathfrak{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy$ и величины np и npq сохраняют устойчивость, т.е. имеют конечные пределы.

Отсюда видно, что если, например, величина $np = n/N$ близка к нулю при $n \to \infty$ (т.е. N тоже неограниченно растет в пределе), а величина $npq = n(N-1)/N^2$ близка к 1 при $n \to \infty$, то $P(Y_n \leq x) \to F_Y(x) = \mathfrak{N}(x)$, т.е. плотность $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Вообще говоря, в пределе можно получить плотность нормального распределения с любыми параметрами - зависит от структуры веб-графа и от асимптотического поведения величин $M/N, M(N-1)/N^2$.

б) В данном случае надо найти $F_X(5)$. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^k, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{1.1}}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$, поэтому искомая вероятность будет $F_X(5) = 1 - \frac{1}{5^{1.1}} \approx 0.83$.

Задача 5

Ответ: $\frac{9}{16}$.

Решение.

Т.к. функция плотности $f_X(x)$ определена для всех точек отрезка $[\frac{1}{2}; 2]$, то функция распределения $F_X(x)$ непрерывна на этом отрезке и поэтому $P(X \in [\frac{1}{2}; 2]) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f_X(x)\,dx$. Этот интеграл - это площадь под графиком $f_X(x)$ на отрезке $[\frac{1}{2}; 2]$, т.е. площадь S трапеции с основаниями $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2}$ и высотой $h = \frac{3}{2}$, т.е. $P(X \in [\frac{1}{2}; 2]) = S = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{16}$.

Задача 6

Ответ: а) $\lambda = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5} \approx 0.18$; б) $\frac{21}{25} = 0.84$.

Решение.

а) Функция экспоненциального распределения случайной величины X имеет вид $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.
При этом известно, что $P(X > 5) = \frac{2}{5}$, т.е. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = 1 - (1 - e^{-5\lambda}) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\frac{2}{5} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5} \approx 0.18$.

б) Вероятность того, что разговор продлится не более 10 минут будет $P(X \leq 10) = F_X(10) = 1 - e^{-10\lambda} = 1 - e^{2\ln\frac{2}{5}} = 1 - e^{\ln\frac{4}{25}} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0.84$.

Задача 7

Ответ: а) $Y \sim U[2,4]$; б) $F_Z(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \ln 2 \\ e^x - 1, & x \in [0, \ln 2) \\ 0, & x < 0 \end{cases}$; $f_Z(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, \ln 2] \\ 0, & x \notin [0, \ln 2] \end{cases}$.

Решение.

Пусть $X \sim U[0,1]$, тогда $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$ и $F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x, & x \in [0;1) \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

а) Если $Y = (X+1)\cdot 2$, то функция распределения $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P((X+1)\cdot 2 \leq x) = P(X \leq \frac{x-2}{2}) = F_X(\frac{x-2}{2}) = \begin{cases} 1, & \frac{x-2}{2} \geq 1 \\ \frac{x-2}{2}, & \frac{x-2}{2} \in [0;1) \\ 0, & \frac{x-2}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 4 \\ \frac{x-2}{2}, & x \in [2;4) \\ 0, & x < 2 \end{cases}$, т.е. $Y \sim U[2;4]$.

б) Если $Z = \ln(X+1)$, то функция распределения $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\ln(X+1) \leq x) = P(X \leq e^x - 1) = F_X(e^x - 1) = \begin{cases} 1, & e^x - 1 \geq 1 \\ e^x - 1, & e^x - 1 \in [0;1) \\ 0, & e^x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq \ln 2 \\ e^x - 1, & x \in [0, \ln 2) \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ плотность $f_Z(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, \ln 2] \\ 0, & x \notin [0, \ln 2] \end{cases}$.