Домашнее задание 5 (линал)

Андрей Зотов

Июль 2023

Задача 1

Ответ: $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -3 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -4 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda^3 + \lambda) - (3\lambda^2 - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda \in \{-1, 1\}$$

Таким образом получили два разных собственных значения $\lambda \in \{1, 2\}$, каждое из которых имеет кратность 2. Найдем размерности собственных подпространств, отвечающих каждому собственному значению.
1. $\lambda = -1$, $V_{\lambda=-1} = \{v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | (A + E)v = 0\}$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Получили одну свободную переменную x_4 и поэтому $\dim V_{\lambda=-1} = 1$. Т.е. в жордановом блоке для $\lambda = -1$ только одна жорданова клетка, при этом ее размер будет 2×2, т.к. $\lambda = -1$ имеет кратность 2.
2. $\lambda = 1$, $V_{\lambda=1} = \{v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | (A - E)v = 0\}$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Получили одну свободную переменную x_4 и поэтому $\dim V_{\lambda=1} = 1$. Т.е. в жордановом блоке для $\lambda = 1$ тоже только одна жорданова клетка размера 2×2 ($\lambda = 1$ тоже имеет кратность 2).

Таким образом ЖНФ матрицы A будет

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Ответ: равносторонний треугольник со стороной 6 и углами по 60°.

Решение. Пусть O - точка начала координат. Найдем длины сторон, учитывая, что задано стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |(4,0,2,0,4)^T| = \sqrt{16+4+16} = 6;$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}| = |(-1,3,1,3,-4)^T| = \sqrt{1+9+1+9+16} = 6;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = |(3,3,3,3,0)^T| = \sqrt{9+9+9+9} = 6.$$

Таким образом все стороны треугольника ABC равны 6, и поэтому его углы равны 60° автоматически. Для проверки найдем косинусы углов через формулы со стандартным скалярным произведением (как мы уже вычислили в знаменателях этих формул везде будет стоять $6 \cdot 6 = 36$):

$$\cos\angle BAC = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{36} = \frac{((4,0,2,0,4)^T, (3,3,3,3,0)^T)}{36} = \frac{12+6}{36} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ;$$

$$\cos\angle ABC = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{36} = \frac{((-4,0,-2,0,-4)^T, (-1,3,1,3,-4)^T)}{36} = \frac{4-2+16}{36} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ;$$

$$\cos\angle ACB = \frac{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}{36} = \frac{((1,-3,-1,-3,4)^T, (-3,-3,-3,-3,0)^T)}{36} = \frac{-3+9+3+9}{36} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ.$$

Задача 3

Ответ: $\rho(x,U) = 8,\ \mathrm{pr}_U\, x = (-3,1,4,2,3)^T$.

Решение. Пусть в $\mathbb{R}^5$ задано стандартное скалярное произведение и пусть у матрицы A в столбцах стоят вектора $a_i,\ (i = 1,2,3,4)$, тогда ортогональное дополнение к $U = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ можно задать как пространство решений ОСЛУ:

$$U^\perp = \{u^\perp = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T \in \mathbb{R}^5 | A^T u^\perp = 0\}.$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & -6 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 30 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 16 & -9 \end{pmatrix} \to$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 25 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & -7 & 16 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 35 & -39 \\ 0 & 0 & -7 & 16 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 35 & -39 \\ 0 & 0 & 3 & -51 & 48 \end{pmatrix} \to
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 86 & -87 \\ 0 & 0 & 3 & -51 & 48 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 86 & -87 \\ 0 & 0 & 0 & 309 & -309 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 86 & -87 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Таким образом получили одну свободную переменную x_5, т.е. $\dim U^\perp = 1$. И ФСР будет состоять из одного базисного вектора $x^\perp$:

$x_5 = 1 \Rightarrow x_4 = x_5 = 1,\ x_3 = 87 - 86 = 1,\ x_2 = 4 - 4 - 3 = -3,\ x_1 = 2 \cdot (-3) + 5 + 6 - 3 = 2 \Rightarrow x^\perp = (2, -3, 1, 1, 1)^T$

Т.е. $U^\perp = \langle x^\perp \rangle = \langle (2, -3, 1, 1, 1)^T \rangle$.

Пусть $v = \operatorname{pr}_U x$ (проекция x на U). Т.к. $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp = U \oplus \langle x^\perp \rangle$ (прямая сумма), то существует единственное разложение вектора x: $x = v + \alpha x^\perp,\ \alpha \in \mathbb{R}$, причем $\alpha x^\perp$ - это ортогональная составляющая вектора x относительно U.

Найдем α:

$$
v \perp x^\perp \Rightarrow (x - \alpha x^\perp, x^\perp) = 0 \Rightarrow (x, x^\perp) - \alpha(x^\perp, x^\perp) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(x, x^\perp)}{(x^\perp, x^\perp)};
$$

$$
x = (1, -5, 6, 4, 5)^T,\ x^\perp = (2, -3, 1, 1, 1)^T \Rightarrow \alpha = \frac{2 + 15 + 6 + 4 + 5}{4 + 9 + 1 + 1 + 1} = \frac{32}{16} = 2.
$$

Таким образом ортогональная составляющая x относительно U будет $\operatorname{ort}_U x = \alpha x^\perp = 2 \cdot (2, -3, 1, 1, 1)^T$. И поэтому расстояние от x до U будет:

$$
\rho(x, U) = |\operatorname{ort}_U x| = 2 \cdot |(2, -3, 1, 1, 1)^T)| = 2 \cdot \sqrt{16} = 8.
$$

А проекция x на U будет:

$$
\operatorname{pr}_U x = v = x - \alpha x^\perp = (1, -5, 6, 4, 5)^T - 2 \cdot (2, -3, 1, 1, 1)^T = (-3, 1, 4, 2, 3)^T.
$$

Задача 4

Ответ: ортогональный базис линейной оболочки $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ будет $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, где $u_1 = (1, 2, 2, -1)^T,\ u_2 = (2, 3, -3, 2)^T,\ u_3 = (2, -1, -1, -2)^T$.

Решение. Найдем ортогональный базис линейной оболочки $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта:

$$
u_1 = a_1 = (1, 2, 2, -1)^T;
$$

$$
u_2 = a_2 - \frac{(a_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 = a_2 - \frac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} u_1 = (1, 1, -5, 3)^T + (1, 2, 2, -1)^T = (2, 3, -3, 2)^T;
$$

$$
u_3 = a_3 - \frac{(a_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(a_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = a_3 - \frac{3 + 4 + 16 + 7}{10} u_1 - \frac{6 + 6 - 24 - 14}{4 + 9 + 9 + 4} u_2 =
$$

$$
= (3, 2, 8, -7)^T - 3 \cdot (1, 2, 2, -1)^T + (2, 3, -3, 2)^T = (2, -1, -1, -2)^T.
$$

Задача 5

Ответ: приближенное решение $\tilde{x} = 0,\ \tilde{y} = -\frac{1}{2},\ \tilde{z} = -\frac{1}{4}$.

Решение. Системе соответствует матрица:

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Убедимся, что столбцы матрицы A линейно независимы. Для этого найдем ранг матрицы A методом Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rk} A = 3$$

Ранг равен 3, поэтому столбцы матрицы A линейно независимы $\Rightarrow$ приближенное решение по методу наименьших квадратов единственно и выражается формулой:

$$\tilde{v} = (A^T A)^{-1} A^T b, \;\; b = (1, -1, 0, -1)^T$$

Найдем вектор приближенного решения $\tilde{v} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$:

$$C = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 48 - 8 - 4 = 36$$

(вычисляем алгебраические дополнения C):

$$C_{11} = 8, \;\; C_{12} = 4, \;\; C_{13} = 4$$

$$C_{21} = 4, \;\; C_{22} = 20, \;\; C_{23} = 2$$

$$C_{31} = 4, \;\; C_{32} = 2, \;\; C_{33} = 11$$

$$\Downarrow$$

$$C^{-1} = (A^T A)^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 20 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 20 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 20 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{v} = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})^T$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{x} = 0, \;\; \tilde{y} = -\frac{1}{2}, \;\; \tilde{z} = -\frac{1}{4}.$$