Домашнее задание 1 (тервер)

Андрей Зотов

Сентябрь 2023

Задача 1

Ответ: 0.44.

Решение.

Пусть A - событие «увидеть рекламу в СМИ», B - событие «увидеть рекламу в соцсетях» и $C = A \cup B$ - событие «увидеть рекламу в соцсетях или в СМИ». Тогда $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ и т.к. события A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. Поэтому $P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44$.

Задача 2

Доказательство.

Т.к. A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. Также воспользуемся тем, что $P(\bar{X}) = 1 - P(X)$ для любого события X.

а) Т.к. $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, то $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B})$. Что и требовалось доказать.

б) Т.к. $A = AB \sqcup A\bar{B}$, то $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$. Что и требовалось доказать.

Задача 3

Решение.

Рассмотрим правильный тетраэдр, у которого первая грань раскрашена в красный цвет, вторая - в зеленый, третья - в синий, а четвертая в красный, зеленый и синий цвета (т.е. четвертая грань разделена на 3 области, каждая из которых покрашена в свой цвет).

Пусть событие A - «после подбрасывания тетраэдр приземлился на грань с красным цветом», событие B - «после подбрасывания тетраэдр приземлился на грань с зеленым цветом» и событие C - «после подбрасывания тетраэдр приземлился на грань с синим цветом». При этом приземление на любую из четырех граней считаем равновероятным элементарным исходом. Т.е. всего в нашем пространстве 4 элементарных исхода с вероятностью $1/4$ каждый.

Тогда $P(A) = P($«Тетраэдр приземлился либо на первую грань, либо на четвертую»$) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, аналогично $P(B) = 1/2$ и $P(C) = 1/2$. При этом $P(AB) = P($«Тетраэдр приземлился на 4ю грань»$) = 1/4$, т.е. $P(AB) = P(A)P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, что означает что события A и B независимы. Аналогично независимы события A и C и события B и C.

Однако $P(ABC) = P($«Тетраэдр приземлился на 4ю грань»$) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8$. Таким образом 3 события A, B, C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. Что и требовалось показать.

Задача 4

Ответ: предпочтителен второй вариант (сильный - слабый - сильный), вероятность победы тогда будет $pq(2-q)$.

Решение.

Найдем вероятность p_1 события A_1 «Игрок выигрывает в двух партиях подряд в варианте 1». Событие A_1 состоит из 3-х элементарных исходов:

- $\omega_1 =$ (Выиграл слабого; Выиграл сильного; Выиграл слабого) $\Rightarrow$ вероятность $P(\omega_1) = p \cdot q \cdot p$ (перемножаем вероятности, т.к. результаты партий независимы в совокупности);
- $\omega_2 =$ (Выиграл слабого; Выиграл сильного; Проиграл слабому) $\Rightarrow P(\omega_2) = p \cdot q \cdot (1-p)$;
- $\omega_3 =$ (Проиграл слабому; Выиграл сильного; Выиграл слабого) $\Rightarrow P(\omega_3) = (1-p) \cdot q \cdot p$.

Таким образом $p_1 = P(A_1) = P(\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3) = pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = pq(p+1-p+1-p) = pq(2-p)$. Аналогично находим вероятность p_2 события A_2 «Игрок выигрывает в двух партиях подряд в варианте 2»: $p_2 = P(A_2) = pq(2-q)$.

Отсюда получаем, что если $pq > 0$, то из того, что $q < p$ следует $2-q > 2-p$ и поэтому $p_2 = pq(2-q) > pq(2-p) = p_1$. Т.е. в этом случае второй вариант предпочтительней, а вероятность выиграть равна $pq(2-q)$. Если же $pq = 0$, то $q = 0$ и $p > 0$ (по условию $q < p$), в этом случае в обоих вариантах вероятность выигрыша равна 0, что в принципе не противоречит формуле выигрыша для первого случая $pq(2-q)$, т.к. она обращается в 0 при $q = 0$. Т.е. при любых допустимых значениях p и q можно придерживаться второго варианта для максимизации вероятности выигрыша.

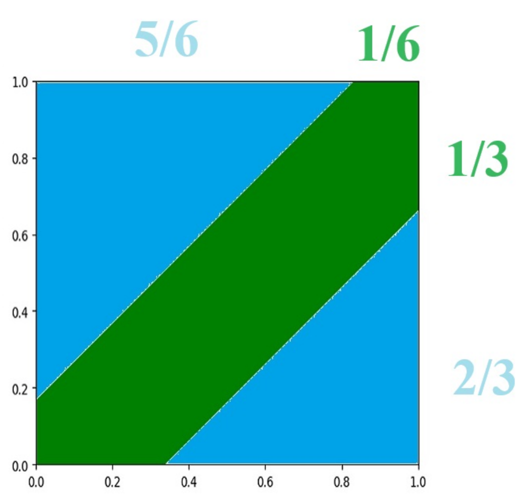
Задача 5

Ответ: $\frac{31}{72}$.

Решение.

Пусть x - время прихода Алисы, а y - время прихода Боба, при этом будем, считать момент 11:00 эквивалентным моменту $t = 0$, а момент 12:00 эквивалентным моменту $t = 1$. Тогда пространство элементарных исходов Ω будет состоять из точек квадрата $[0,1] \times [0,1]$ в прямоугольной системе координат Oxy.

Если первым приходит Алиса в момент $x \in [0,1]$, то у Боба есть в лучшем случае 10 минут (1/6 часа), чтобы встретиться, т. е. встреча будет возможна, если $y \in [x, \min(x + 1/6, 1)]$. Если же первым приходит Боб в момент $y \in [0,1]$, то у Алисы есть в лучшем случае 20 минут (1/3 часа), чтобы встреться, т. е. встреча будет возможна, если $x \in [y, \min(y + 1/3, 1)]$. Поэтому на рисунке ниже изображена закрашенная зеленым область квадрата $[0,1] \times [0,1]$, состоящая из точек (элементарных исходов) относящихся к событию E «Алиса и Боб встретились».



Т.к. площадь квадрата $[0,1] \times [0,1]$ равна 1, то площадь зеленой области и есть вероятность события E. Заметим, что событие $\bar{E}$ — это два синих треугольника на рисунке выше. Их площадь, т.е. вероятность $\bar{E}$ будет $P(\bar{E}) = 1/2 * (2/3)^2 + 1/2 * (5/6)^2 = \frac{41}{72}$, поэтому $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{41}{72} = \frac{31}{72}$.

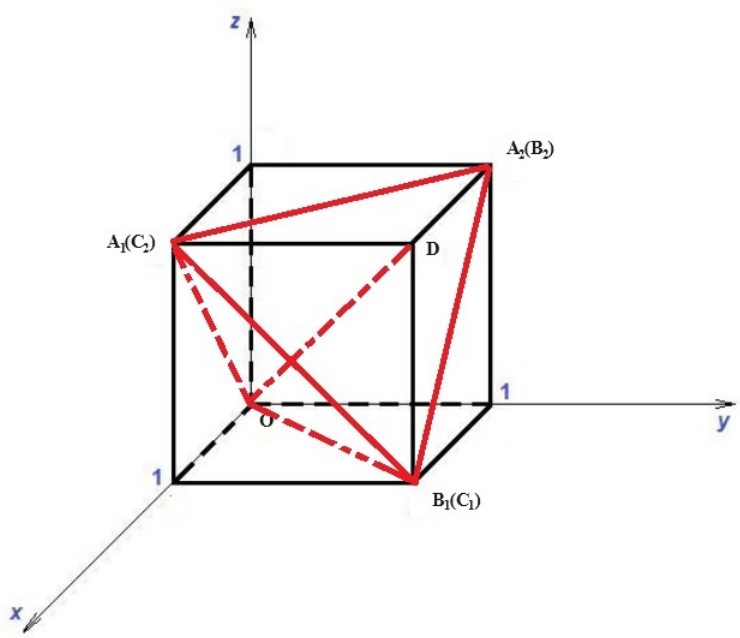
Задача 6

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146$.
Решение.

а) В этой задаче элементарным исходом является случайная точка $(x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, где x, y, z - случайные длины отрезков. Т.е. пространство Ω - это единичный куб в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Чтобы отрезки с длинами (x, y, z) могли образовать треугольник необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства треугольника: $x + y > z,\ x + z > y,\ y + z > x$. Эти неравенства определяют область, вложенную в единичный куб, объем которой и будет искомая вероятность. Все неравенства линейные, поэтому границы искомой области определяются тремя плоскостями и гранями единичного куба. Найдем эти плоскости - достаточно предъявить для каждой плоскости 3 точки, не лежащие на одной прямой:

- Плоскость $x + y = z$ проходит через вершины куба $O = (0,0,0),\ A_1 = (1,0,1),\ A_2 = (0,1,1)$;
- Плоскость $x + z = y$ проходит через вершины куба $O = (0,0,0),\ B_1 = (1,1,0),\ B_2 = (0,1,1)$;
- Плоскость $y + z = x$ проходит через вершины куба $O = (0,0,0),\ C_1 = (1,1,0),\ C_2 = (1,0,1)$.

Как можно заметить $B_2 = A_2,\ A_1 = C_2,\ B_1 = C_1$. Обозначим также вершину куба $D = (1,1,1)$. Ниже наглядное изображение куба с отмеченными точками.



Таким образом событие E «отрезки с длинами x, y, z образуют треугольник» - это многогранник $OA_1A_2B_1D$ (он в частности содержит диагональ куба OD - элементарные исходы соответствующие правильным треугольникам). Этот многогранник состоит из двух тетраэдров $T_1 = OA_1A_2B_1$ и $T_2 = DA_1A_2B_1$. При этом заметим, что событие $\bar{E}$ состоит из трех тетраэдров, таких же по объему как T_2 (в силу симметрии), но примыкающих к осям $Ox,\ Oy,\ Oz$, т.е. $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 3 \cdot V(T_2)$. Поэтому достаточно найти объем тетраэдра T_2.

Т.к. тетраэдр T_2 прямоугольный (все плоские углы трехгранного угла D прямые), то его объем будет равен $V(T_2) = \frac{1}{6} \cdot abc$, где a, b, c - длины ребер трехгранного угла D. В нашем случае $a = b = c = 1$ и поэтому $V(T_2) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(E) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Рассмотрим произвольный остроугольный треугольник со сторонами x, y, z. Пусть напротив стороны z лежит острый угол α, тогда по теореме косинусов $x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = z^2$ или $\cos\alpha = \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$, т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$, т.е. $x^2 + y^2 - z^2 > 0$.

Таким образом, если треугольник остроугольный, то верно, что

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2>0 \\ x^2+z^2-y^2>0 \\ y^2+z^2-x^2>0 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases} \tag{1}$$

Верно и обратное: если для некоторых $x>0, y>0, z>0$ выполняется (1), то из отрезков с длинами x, y, z можно составить остроугольный треугольник. Действительно, если $x>0,\ y>0,\ z>0$ и $x^2+y^2>z^2$, то $x^2+2xy+y^2>z^2 \Rightarrow (x+y)^2>z^2 \Rightarrow x+y>z$ (тут важно, что x, y, z строго положительные величины). Получаем, что из (1) вытекают все три неравенства треугольника, поэтому x, y, z образуют треугольник. При этом косинусы всех углов положительные, т.е. углы острые.

Таким образом (1) - это критерий существования остроугольного треугольника со сторонами $x>0,\ y>0,\ z>0$.

По аналогии с пунктом а) нужно понять какую фигуру образует система (1) в пересечении с единичным кубом. Заметим, что при $z\in[0,1]$ уравнение $z^2-x^2-y^2=0$ - это круговой конус с вершиной в точке $(0,0,0)$ и осью вдоль Oz. При этом в единичный куб попадает только четвертая часть этого конуса (т.к. $x>0, y>0$ - это только один квадрант плоскости Oxy). Два других уравнения системы (1) дают два аналогичных конуса с осями вдоль Ox и Oy.

Получили, что внешность этих трех конусов (которая кстати содержит диагональ OD), лежащая внутри единичного куба, и будет событие E «отрезки с длинами x, y, z образуют остроугольный треугольник». Заметим, что событие $\bar{E}$ — это внутренность трех четвертинок конусов, которые были рассмотрены выше.

Формула объема конуса $V_{con}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot \pi r^2$, где h - высота конуса, а r - радиус основания. В нашем случае $h=r=1$, поэтому $P(E)=1-P(\bar{E})=1-\frac{3}{4}\cdot V_{con}=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=1-\frac{\pi}{4}$.

P.S.

Красивая двумерная модель вероятностного пространства для задачи 6 описана в работе «Г. Корбулон, Каких больше – острых или тупых?, Квант, 2015, номер 3, 41–42»
https://www.mathnet.ru/rus/kvant1589

Цитата: «Можно считать так. Взять три отрезка случайной длины и попробовать из них сложить треугольник – для этого нужно, чтобы длина самого длинного из них была все же меньше, чем сумма двух оставшихся. Чтобы не возиться с сантиметрами и футами или парсеками с ангстремами, за единицу длины возьмем длину самого длинного отрезка. Тогда длины двух оставшихся отрезков (x и y) будут числами меньше единицы, а условие, что из этих отрезков можно сложить треугольник, запишется так: $x+y>1$. Если отложить x и y по осям, то диагональ квадрата $x+y=1$ (красная линия) разделит его пополам (рис. 1), т.е. в половине возможных случаев из трех случайно взятых отрезков нельзя вообще сложить треугольник.

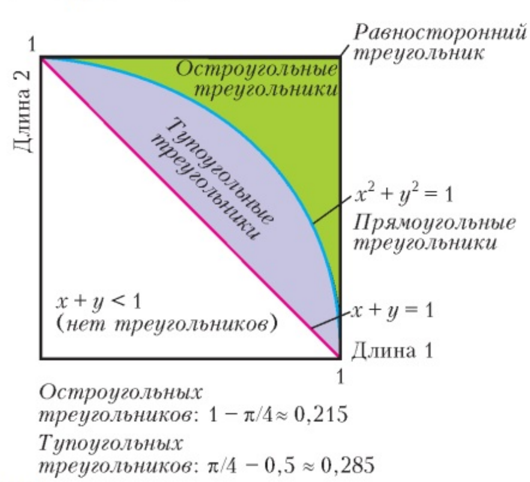


Рис. 1

Если учесть, что у прямоугольных треугольников $x^2+y^2=1$ (дуга окружности, синяя линия), получим области «острых» и «тупых» треугольников. Площадь фиолетового сегмента равна $\frac{\pi}{4}-0.5\approx 0.285$, а площадь зеленой области равна $1-\frac{\pi}{4}\approx 0.215$».