

# Домашнее задание 3

Андрей Зотов

Май 2023

## Задача 1

**Ответ:**

- а) Максимальная длина простого цикла в графе  $G$  равняется 4. Всего имеется 16 различных простых циклов максимальной длины 4.
- б) Да, верно.
- в) Минимум 2 ребра надо удалить из графа  $G$ , чтобы он стал несвязным.

**Решение.** а) Всего в графе  $G$  имеется 6 различных подграфов, которые образуют простые циклы:  $ABD, DBC, ABCD, CEN, HEF, CEFH$ . Два из этих подграфов -  $ABCD, CEFH$  - самые большие и образуют простые циклы длины 4. Каждый из подграфов длины 4 дает 8 разных простых циклов (стартовую вершину цикла можно выбрать 4-мя способами и направление 2-мя способами  $\Rightarrow 4 * 2 = 8$  разных простых циклов получается из одного подграфа). Таким образом в графе  $G$  имеется 16 разных простых циклов максимальной длины 4.

б) Не трудно заметить, что, во-первых, граф  $G$  связный, а во-вторых, для любого ребра графа  $G$  существует цикл (а иногда и не один), в который входит это ребро. А т.к. удаление любого ребра из цикла не может нарушить связность графа, который содержит этот цикл, то удаление любого ребра не может нарушить связность графа  $G$ .

в) Учитывая п. б) искомое минимальное кол-во ребер не может быть меньше двух, при этом если из графа  $G$  удалить 2 ребра, например  $CB$  и  $CD$ , то граф распадется на 2 компоненты связности, т.е. 2 и есть искомое минимальное кол-во ребер.

## Задача 2

**Ответ:** 200 дорог в государстве.

**Решение.** Пусть города будут множеством вершин  $V$ , а дороги множеством

ребер  $E$  некоего графа  $G$ . Тогда по лемме о рукопожатиях  $\sum_{v_i \in V} \deg v_i = 2|E|$ . При этом по условию задачи  $\forall v_i \in V \deg v_i = 4$  и  $|V| = 100$ , т.е.  $4 * 100 = 2|E|$ . Поэтому кол-во дорог будет  $|E| = 200$ .

### Задача 3

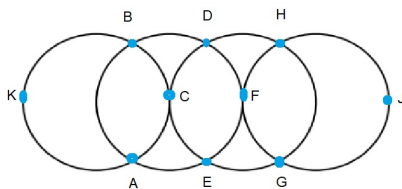
**Ответ:**

- а) Можно.
- б) Нельзя.

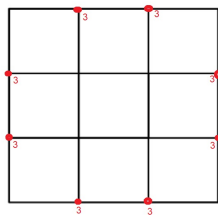
**Решение.** а) Рассмотрим картинку а) как граф  $G$ , где точки пересечения - это вершины графа  $G$ , а дуги это ребра графа  $G$ . Получившийся граф  $G$  очевидно связан. Тогда требование задачи будет выполнимо тогда и только тогда, когда у графа  $G$  существует эйлеров путь. Т.к. все вершины графа  $G$  имеют четную степень 4, то по критерию эйлеров путь существуют (причем он является также эйлеровым циклом).

Хотя критерий верен и для графов с кратными ребрами мы без ущерба для рассуждения можем избавиться от кратных ребер в  $G$ , добавив две вершины ( $J$  и  $K$ ) степени 2 на крайние левую и правую дуги нашей фигуры (на наличие эйлерова цикла, очевидно, это не повлияет). В итоге имеем граф  $ABCDEFGHIJK$ , который изображен на картинке ниже. Эйлеров цикл (т.е. путь, вдоль которого можно вести карандаш, не отрывая от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу) в нем будет, например, таким:

$K, B, D, H, J, G, F, H, G, E, C, D, F, E, A, B, C, A, K$



б) Аналогично а) рассмотрим картинку б) как связный граф и заметим, что в нем будет 8 вершин нечетной степени 3 (см. рисунок ниже). Поэтому согласно критерию (в графе должно быть не больше двух вершин нечетной степени), в таком графе эйлеров путь не существует, а значит и нарисовать картинку б), не отрывая карандаш от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу невозможно.



## Задача 4

**Ответ:** одна вершина имеет степень 3.

**Решение.** Т.к. у дерева ровно три вершины имеют степень 1, то в дереве не существует вершин, у которых степень больше 3-х. Докажем это.

Допустим это не так, пусть в дереве есть вершина  $A$ , из которой выходит  $n > 3$  ребер. Если из исходного дерева удалить вершину  $A$  и все ребра, которые из нее выходят, то образуются  $n$  подграфов, каждый из которых тоже дерево (т.к. подграф дерева - это дерево). Все эти поддеревья не связаны между собой, т.к. иначе существовал бы цикл в исходном дереве, проходящий через вершину  $A$ , что невозможно (т.к. в дереве нет циклов).

В каждом из  $n$  изолированных друг от друга поддеревьев либо существует хотя бы один лист (т.е. вершина со степенью 1), либо поддерево состоит из одной единственной вершины - в обоих случаях такие вершины имеют степень 1 в исходном дереве. Поэтому в исходном дереве существует минимум  $n > 3$  листьев, а это невозможно, т.к. листьев по условию ровно 3. Противоречие.

Таким образом в рассматриваемом дереве у вершин могут быть степени только 1, 2 или 3.

Если в рассматриваемом дереве  $x$  - кол-во вершин степени 3 и 3 вершины степени 1, тогда кол-во вершин степени 2 будет  $2022 - 3 - x$ . При этом число ребер дерева будет  $|E| = |V| - 1 = 2022 - 1 = 2021$  и по лемме о рукопожатиях имеем:

$$2 * |E| = 2 * 2021 = 4042 = \sum_{v_i \in V} \deg v_i = 1 * 3 + 2 * (2022 - 3 - x) + 3 * x$$

Что равносильно

$$3x - 2x + 3 + 2 * 2019 = 4042$$

А это в свою очередь равносильно

$$x = 1$$

Таким образом, если такое дерево существует, то в нем ровно 3 вершины степени 1, ровно 2018 вершин степени 2 и ровно одна вершина имеет степень 3. Такой граф действительно существует - его изображение на картинке

ниже.



## Задача 5

**Доказательство.** Пусть  $G$  исходный граф,  $V$  - множество его вершин и  $E$  - множество его ребер. Рассмотрим дополнение  $\bar{G}$  к графу  $G$ . Множество вершин дополнения  $\bar{G}$  совпадает с  $V$ , а множество ребер дополнения  $\bar{G}$  обозначим  $\bar{E}$ . Т.к.  $|V| = 6$  и  $|E| = 11$ , то по определению дополнения  $|E \cup \bar{E}| = (\text{число ребер в полном графе } K_6) = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  и т.к.  $E \cap \bar{E} = \emptyset$ , то  $|\bar{E}| = 15 - |E| = 15 - 11 = 4$ . Таким образом дополнение  $\bar{G}$  - это граф на 6 вершинах с 4-мя ребрами.

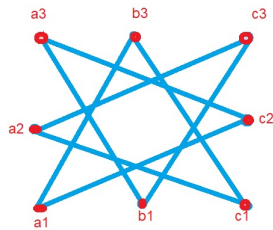
Покажем, что  $\bar{G}$  - не связен. Допустим  $\bar{G}$  связен и следовательно у  $\bar{G}$  существует остовное дерево, в котором не более 4-х ребер и 6 вершин. Но у дерева с 6 вершинами должно быть ровно 5 ребер. Противоречие. Следовательно,  $\bar{G}$  не связен.

Т.к. граф и его дополнение не могут быть не связными графами одновременно (пример 3.8), то  $G$  связен. Что и требовалось.

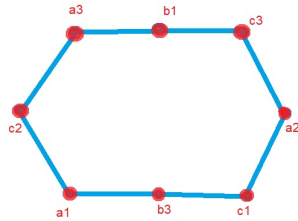
## Задача 6

**Ответ:** нельзя.

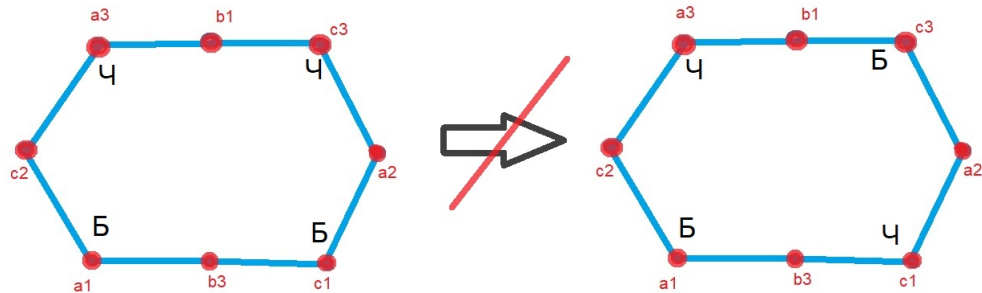
**Решение.** Обозначим все поля доски  $3 \times 3$  как принято в шахматах - от  $a1$  до  $c3$  (9 полей). Составим граф, вершины которого будут поля (кроме поля  $c2$ , т.к., очевидно, ни один конь на это поле никогда не попадет), а ребра будут возможные ходы коня с данного поля. Тогда получим такой граф:



Как видно  $a1, b3, c1, a2, c3, b1, a3, c2, a1$  - простой цикл, при этом этот путь еще и эйлеров цикл. Поэтому этот граф эквивалентен следующему:



Тогда задача состоит в том, что можно ли найти последовательность ходов такую, что белые кони, стартуя с полей  $a1, c1$  и черные - с полей  $a3, c3$ , поочередно двигаясь по ребрам графа, придут на поля  $a1, c3$  (белые) и  $a3, c1$  (черные). Это невозможно, т.к. с одной стороны как бы ни перемещались кони вдоль ребер графа должна сохраняться последовательность коней ЧЧББ при обходе графа по циклу (иначе в какой-то момент две фигуры будут вынуждены располагаться на одном поле, а это запрещено правилами). А с другой стороны, в конечной позиции имеем последовательность ЧБЧБ при обходе графа по циклу, которую невозможно получить из позиции вида ЧЧББ. Т.е.  $\text{ЧЧББ} \not\rightarrow \text{ЧБЧБ}$ .



P.S. В терминах разрезов можно еще так пояснить, что  $\text{ЧЧББ} \not\rightarrow \text{ЧБЧБ}$ . Граф в левой части рисунка выше показывает, что какие бы ни делались ходы конями в любой момент существует разрез графа, такой что в одной части графа окажутся все белые кони, а в другой все черные. Однако для графа в правой части такого разреза не существует.