Домашнее задание 4 (тервер)

Андрей Зотов

Сентябрь 2023

Задача 1

Ответ: $\mathbb{E}X = \frac{1}{4}$.

Решение.

С геометрической точки зрения мат. ожидание — координата по оси Ox центра масс области под графиком функции плотности $f_X(x)$. Эта область состоит из двух частей с ненулевой площадью: треугольник с площадью $\frac{1}{2}$ и прямоугольник с такой же площадью. Координата по оси Ox центра треугольника будет $x = -\frac{1}{2}$, координата по оси Ox центра прямоугольника будет $x = 1$. Таким образом центр области под графиком плотности будет середина отрезка $[-\frac{1}{2}, 1]$, т.е. $\mathbb{E}X = \frac{-1/2+1}{2} = \frac{1}{4}$.

Задача 2

Ответ: $\mathbb{E}Y = 1$.

Решение.

Функция распределения $F_Y(x) = 0$, при $x < 0$, поэтому мат. ожидание Y - это площадь области над графиком $F_Y(x)$ при $x \geq 0$, ограниченной прямой $F_Y = 1$. Эта область состоит из прямоугольника площадью $\frac{1}{2}$, и двух трапеций - одна с площадью $\frac{3}{8}$, другая с площадью $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$, т.е. $\mathbb{E}Y = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

Задача 3

Ответ: а) 10 запросов в час; б) 6 минут; в) $\mathbb{E}Y = e^{10(e-1)} \approx 29000345$.

Решение.

а) Т.к. $\mathbb{E}X = \lambda$ (разобрано на лекции), то среднее число запросов за час будет 10.

б) Если Z - это случайная величина равная времени между двумя последовательными запросами, то Z имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 10$. И т.к. $\mathbb{E}Z = \lambda^{-1}$ (разобрано на лекции), то среднее время между двумя запросами будет $\lambda^{-1} = \frac{1}{10}$ часа или 6 минут.

в) $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}e^X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^k \cdot P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e} = e^{\lambda(e-1)} = e^{10(e-1)}$.

Задача 4

Ответ: а) 1; б) 25; в) 6.

Решение.

а) $\mathbf{Var}\left(\frac{X-2}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathbf{Var}(X-2) = \frac{1}{4}\mathbf{Var}(X) = \frac{\sigma_1^2}{4} = 1$.

б) Т.к. X и Y независимы, то $\mathbf{Var}(2X - 3Y) = \mathbf{Var}(2X) + \mathbf{Var}(-3Y) = 4\,\mathbf{Var}(X) + 9\,\mathbf{Var}(Y) = 4\sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 = 16 + 9 = 25$.

в) Т.к. X и Y независимы, то $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Кроме того заметим, что если $\mathbf{Var}(X) = \sigma_1^2 = \mathbb{E}X^2 - \mu_1^2$, то $\mathbb{E}X^2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2$ (аналогично $\mathbb{E}Y^2 = \sigma_2^2 + \mu_2^2$).

Таким образом $\mathbb{E}(X-Y)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}Y^2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2 = 4 + 1 - 0 + 1 + 0 = 6$.

Задача 5

Доказательство.

Пусть X имеет конечное мат. ожидание $\mathbb{E}X = \mu$ и дисперсию $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$, тогда $\mathbb{E}X^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Отсюда получаем

$$\mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2a\mathbb{E}X + a^2 = \sigma^2 + \mu^2 - 2a\mu + a^2 = \sigma^2 + (\mu - a)^2$$

Получили сумму квадратов, где первое слагаемое фиксировано, а второе очевидно достигает минимума, когда равно 0, т.е. при $a = \mu$.

Таким образом $\min\limits_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2 = \sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$ при $a = \mu = \mathbb{E}X$. Что и требовалось доказать.

Задача 6

Ответ: а)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{2}{15}$

; б) $\mathbb{E}X = 0.8$; в) $\mathbf{Var}(X) = \frac{96}{225} \approx 0.43$; г)

X	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

, $\mathbb{E}X = 0.8$, $\mathbf{Var}(X) = 0.48$.

Решение.

Пусть X - случайная величина числа вынутых черных шаров, тогда $X \in \{0, 1, 2\}$. Пусть событие A_1 «В первый раз был вынут черный шар» и событие A_2 «Во второй раз был вынут черный шар».

Тогда

$$P(X=0) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3};$$

$$P(X=1) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{48}{90} = \frac{24}{45};$$

$$P(X=2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Т.е. распределение X будет

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{2}{15}$

. Отсюда находим ответ на подзадачи б) и в).

б) Мат. ожидание $\mathbb{E}X = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) = \frac{24}{45} + \frac{4}{15} = \frac{36}{45} = 0.8$;

в) Дисперсию $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 4 \cdot P(X=2) - 0.8^2 = \frac{24}{45} + \frac{8}{15} - 0.64 = \frac{96}{225} \approx 0.43$.

г) В этом случае события A_1 и A_2 будут независимыми, поэтому:

$$P(X=0) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10} = \frac{9}{25};$$

$$P(X=1) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{12}{25};$$

$$P(X=2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{4}{25}.$$

Т.е. распределение X будет

X	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

. Отсюда $\mathbb{E}X = 1 \cdot \frac{12}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0.8$ и $\mathbf{Var}(X) = 1 \cdot \frac{12}{25} + 4 \cdot \frac{4}{25} - 0.8^2 = \frac{28}{25} - \frac{64}{100} = 0.48$.

Таким образом распределение X изменилось, мат. ожидание осталось прежним, а дисперсия немного увеличилась.