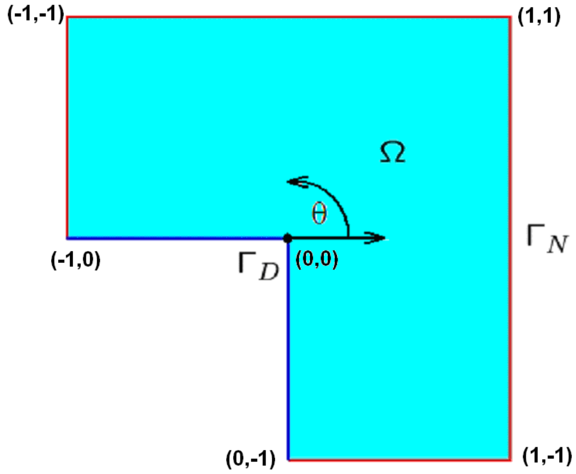
L-shape domain

Sformułowanie silne problemu



Ω to obszar [-1,1]x[-1,1] \ [-1,0]x[-1,0] (obszar w kształcie odwróconej litry L)
Brzeg Dirichleta Γ_D i brzeg Neumanna Γ_N są zaznaczone odpowiednio na ciemno niebiesko i czerwono

Problem polega na policzeniu pola temperatur
$R^2 \ni (x_1, x_2) \to u(x_1, x_2) \in R$ gdzie $u(x_1, x_2)$ oznacza temperaturę w punkcie (x_1, x_2).
W tym celu rozwiązujemy równanie transportu ciepła

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ na } \Omega$$

(czyli $\Delta u = 0$)
Zadajemy następujące warunki brzegowe:
$u = 0$ na Γ_D (zerowa temperature na brzegu Dirichleta, zaznaczonym na ciemno niebiesko)
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na Γ_N (pochodna w kierunku normalnym do brzegu jest zadana funkcją g)
gdzie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \circ (n_1, n_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = g$$

gdzie $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$ to gradient u natomiast (n_1, n_2) to współrzędne wektora normalnego;
na przykład na dolnym brzegu - na odcinku (0,-1)-(1,-1) mamy

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \circ (0, -1) = -\frac{\partial u}{\partial x_2} = g$$

oraz *g* jest funkcją daną w biegunowym układzie współrzędnych o początku w punkcie (0,0)

$$R \times (0, 2\Pi) \ni (r, \theta) \to g(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \left(\theta + \frac{\Pi}{2} \right)$$