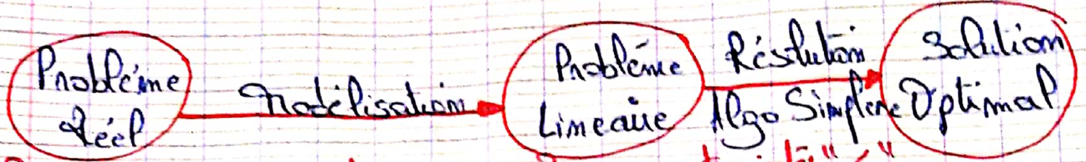
Chapitre 8
Méthode de Simplexe:



1/ Pb de maximisation avec des contraintes "≤".

a_ Algorithme:

1_ Repérer le plus grand élement strictement positif de la dernière ligne, soit le $k^{ième}$ élement, et ce pour faire entrer le vecteur correspondant à la base.

2_ Calculer $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0$, pour faire sortir le vecteur correspondant à (la ligne l) de la base

3_ Passer au tableau suivant avec les modifications:

$$\begin{cases} L_l = \dfrac{L_l}{a_{lk}} & (l: \text{ligne de pivot}) \\ L_i = L_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{lk}} \cdot L_l & (i \neq l) \end{cases}$$

4_ Refaire les étapes de 1 à 3 jusqu'à disparition des élements strictement positifs de la dernière ligne.

b. Application:

- Résoudre le Problème Linéaire suivant:

$\text{Max } Z = x_1 + x_2.$

$$\text{s.c} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 1{,}5 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Forme standard :

$$\max Z = x_1 + x_2 + \underset{e}{0}x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.c}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \boxed{x_3} = 6 \\ x_2 + \boxed{x_4} = 1{,}5 \\ x_1 - x_2 + \boxed{x_5} = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

On a 3 contraintes
⇒ $\mathbb{R}^3$
⇒ Base Cannonique

$$BC = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{x_i = A_i}$ Annotation.

Base	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	ratios
A_3	2	3	1	0	0	6	$6/2 = 3$
A_4	0	1	0	1	0	1,5	$1{,}5/0 = +\infty$
$l=3$ ligne sortante → A_5	1	-1	0	0	1	2	$2/1 = 2$
	$\boxed{1}$	1	0	0	0	Z	

Plus petit ratio positive !

plus grande valeur positive (on peut aussi choisir l'autre 1)

la ligne entrante

$l=3$ (ligne pivot)

$i = 1$; $L_1 = L_1 - \frac{a_{11}}{a_{31}} \cdot L_3 = L_1 - \frac{2}{1} \cdot L_3$

$$L_1 = L_1 - 2L_3 \begin{cases} 2 - 2(1) = 0 \\ 3 - 2(-1) = 5 \\ 1 - 2(0) = 1 \\ 0 - 2(0) = 1 \\ 0 - 2(1) = -2 \\ 6 - 2(2) = 2 \end{cases}$$

$i = 2$; $L_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{31}} \cdot L_3$
$= L_2 - \frac{0}{1} \cdot L_3$
$= L_2$

$i = 4$; $L_4 = L_4 - \frac{a_{41}}{a_{31}} L_3 = L_4 - \frac{1}{1} L$
$= L_4 - L_3$

Scanné avec CamScanner

ligne sortante →

Base	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	ratios
A_3	0	5	1	0	-2	2	$2/5$
A_4	0	1	0	1	0	1.5	$1.5/1 = 1.5$
A_1	1	-1	0	0	1	2	$2/-1$ —
	0	2	0	0	-1	2-2	

$\uparrow$

$k = 2$ ligne ~~[illegible]~~ entrante

$l = 1, \; L_1 = \frac{L_1}{a_{12}} \Rightarrow L_1 = \frac{L_1}{5}$

$i = 2$: $L_2 = L_2 - \frac{a_{22}}{a_{12}} \cdot L_1$

$$L_2 = L_2 - \frac{1}{5} L_1 \quad \begin{cases} 0 - \frac{1}{5}(0) = 0 \\ 1 - \frac{1}{5}(5) = 0 \\ 0 - \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5} \\ 1 - \frac{1}{5}(0) = 1 \\ 0 - \frac{1}{5}(-2) = \frac{2}{5} \\ 1{,}5 - \frac{1}{5}(2) = \frac{11}{10} \end{cases}$$

$i = 3$: $L_3 = L_3 - \frac{a_{32}}{a_{12}} \cdot L_1$

$$= L_3 - \frac{(-1)}{5} \cdot L_1$$

$$= L_3 + \frac{1}{5} L_1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{5}(0) = 1 \\ -1 + \frac{1}{5}(5) = 0 \\ 0 + \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5} \\ \quad = 0 \\ 1 + \frac{1}{5}(-2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ 2 + \frac{1}{5}(2) = \frac{12}{5} \end{cases}$$

-2

~~⇒ Toutes les valeurs de la dernière ligne $x_i \vee A_i$ sont negatives, d'où la condition d'arrêt est vérifié. la solution optimal est: $\begin{cases} x_1^* = \frac{12}{5} \\ x_2^* = \frac{2}{5} \end{cases}$ et $Z^* = \frac{14}{5}$.~~

i=4:

$$Z - 2 - \frac{2}{5}(2) = Z - 2 - \frac{4}{5} = Z - \frac{10}{5} - \frac{4}{5}$$

$$= Z - \frac{14}{5}$$

base	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
A_2	0	1	$1/5$	0	$-2/5$	$2/5$
A_4	0	0	$-1/5$	1	$2/5$	$11/10$
A_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$12/5$
	0	0	$-2/5$	0	$-1/5$	$Z - \frac{14}{5}$

⇒ Toutes les valeurs de la dernière ligne $x_i \forall A_i$ sont negatives, d'ou la condition d'arrêt est vérifié. la solution optimal est:

$$x_1^* = \frac{12}{5} \qquad \text{et } Z^* = \frac{14}{5}.$$

$$x_2^* = \frac{2}{5}$$

Vérification:

$$Z^* \overset{?}{=} x_1^* + x_2^*$$

$$\Rightarrow \frac{14}{5} \overset{?}{=} \frac{12}{5} + \frac{2}{5} \Rightarrow \checkmark$$

2/ Pb de minimisation avec des contraintes "≤".

a- algorithme:

1- Récuperer le plus petit element st negative de la dernière ligne, soit le $k^{ième}$ element, et ce pour faire entr le vecteur correspondant à la base.

2- Calculer $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0$; pour faire sortir le vecteur correspondant (à la ligne l) de la base.

3. Passer au tableau suivant avec les modifications

- $L_l = \frac{L_l}{a_{lk}}$ (l, ligne de pivot)
  ↳ pivot.

- $L_i = L_i - \frac{a_{ik}}{\boxed{a_{lk}}} \cdot L_l \quad (i \neq l)$
  ↳ pivot

4. Refaire les étapes de 1 à 3 jusqu'à la disparition des élément st négative de la dernière ligne.

b. Application :

Résoudre le Problème linéaire suivant.

$$\text{Min } Z = -3x_1 + 4x_2$$

$$sc \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x \geq 0. \end{cases}$$

1. Forme Standard :

$$\text{Min } Z = -3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$x \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(1) ⚠ lorsqu'une var initial ne figure pas donc elle est null.

- $L_{pivot} = \frac{L_{pivot}}{pivot}$
- $L_i = L_i - \frac{\cdot}{pivot} \cdot L_{pivot}$

$x_i \sim A_i$

Base	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	ratios
A_3	-1	2	1	0	0	7	-7
S ← A_4	$\boxed{1}$	4	0	1	0	9	$9/1 = 9$
A_5	2	-2	0	0	1	18	$18/2 = 9$
	-3	4	0	0	0	Z	
	↑ e						

$L_2 = \frac{L_2}{1}$

$i = 1 : L_1 = L_1 - \frac{(-1)}{1} L_2$

$L_1 = L_1 + L_2$

$i = 3 : L_3 = L_3 - \frac{2}{1} \cdot L_2$

$L_3 = L_3 - 2L_2$

$i = 4 \quad L_4 = L_4 - \frac{(-3)}{1} L_2$

Base	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	
A_3	0	6	1	1	0	16	
x_1^* A_1	1	4	0	1	0	(9	$Z^* +$ $=0$
A_5	0	-6	0	-2	1	0	
	0	16	0	3	0	$Z^* + 27$	

(1) → pas de x_2^*

$L_4 = L_4 + 3L_2$ ⟹ Sol^o optimal : $x_1^* = 9$ et $Z^* = -27$

$x_2^* = 0$

⟹ Toutes les valeurs de la dernière ligne sont (+) pour ce problème de minimisation. d'où la C.A est vérifiée.

↳ Vérification

$Z^* = 3x^* + 4x_2^*$

$-27 = -3 \times 9 + 0 \times 4$