Ecole Nationale d' Ingénieurs de Carthage Analyse Numérique 2

Feuille d'exercices n°1

Interpolation polynomiale

Classes : 1ère année ING-INF 2019/2020

Exercice 1 On considère la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$.

1. Soit P_2 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
   Calculer P_2 en utilisant
   (a) la matrice de Vandermonde,
   (b) la forme de Lagrange,
   (c) la forme de Newton,
2. Calculer maintenant le polynôme P_3 de degré 3 interpolant f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 0,75$, $x_2 = 1,5$ et $x_3 = 2$.

Exercice 2 Calculer le polynôme d'interpolation aux points $(x_i, y_i), i = 0..4$, suivants :

x_i	-2	1	4	-1	3	-4
y_i	-1	2	59	4	24	-53

à l'aide de la méthode des différences divisées.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Soit P_3 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
   (a) Calculer le polynôme P_3 en utilisant la base de Lagrange.
   (b) Calculer le polynôme P_3 en utilisant la base de Newton.

   (On donne : $\ln(2) \simeq 0.6931$, $\ln(3) \simeq 1.0986$, $\ln(4) \simeq 1.3863)$, $\ln(5) \simeq 1.6094)$

2. Soit P_4 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = \dfrac{3}{2}$.
   (a) Calculer P_4. Justifier le choix de la méthode utilisée.
   (b) Donner, en fonction des dérivées successives de f, l'expression de l'erreur d'interpolation $E_4(x) = f(x) - P_4(x)$, $\forall x \in [0, 3]$.
   (c) Utiliser le polynôme P_4 pour calculer une valeur approchée de $\ln(2.7)$, ainsi qu'une majoration de la valeur absolue de l'erreur commise.

Exercice 4 Soient $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et P son polynôme d'interpolation relatif aux $(n + 1)$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(\xi) = P^{(n)}(\xi)$.
2. En déduire que $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$
   où $f[x_0, \ldots, x_n]$ désigne la différence divisée de f aux points $x_0, \ldots, x_n$

Exercice 5 On considère la fonction $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ définie sur $[0,1]$.
Soit P_n le polynôme d'interpolation de f relatif aux points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ donnés dans $[0,1]$. On note $E_n(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)|$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0$$

Exercice 6 soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite (de degré ≤ 3) de f vérifiant :

$$P(0) = f(0) \quad , \quad P'(0) = f'(0) \quad P''(0) = f''(0) \quad et \quad P(1) = f(1)$$

1. Déterminer le polynômes P.
2. (a) Soit $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On pose

$$F(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{x^3(x-1)} t^3(t-1)$$

   Montrer que F est de classe C^4 sur $[0,1]$ et qu'il existe $\xi_x \in]0,1[$ tel que

$$F^{(4)}(\xi_x) = 0$$

   (b) Déduire l'expression de l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - P(x), \forall x \in [0,1]$.

Exercice 7 Soient $a \in]0,+\infty[$ et $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$.

1. Déterminer l'unique polynôme P de degré 3 vérifiant :

$$P(-a) = f(-a) \quad , \quad P(a) = f(a) \quad , \quad P(0) = f(0) \quad et \quad P'(0) = f'(0)$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [-a,a]$, on a

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{a^4}{96} M$$

   où $M = \max\limits_{x\in[-a,a]} |f^{(4)}(x)|$

Exercice 8 Soit $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une partition de l'intervalle [a,b]. On désigne par $h_\Delta = \max\limits_i (x_{i+1} - x_i)$ la finesse de Δ.

1. Montrer que pour chaque $f \in \mathcal{C}^m[a,b]$, il existe une fonction φ unique vérifiant les conditions :
   (a) φ est un polynôme de degré $2m+1$ sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$
   (b) $\varphi \in \mathcal{C}^m[a,b]$
   (c) $\varphi^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad 0 \leq i \leq n, \ 0 \leq k \leq m$
2. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{2m+2}[a,b]$. Montrer que

$$||f - \varphi||_\infty \leq \frac{1}{2^{2(m+1)}(2m+2)!} \left|\left|f^{(2m+2)}\right|\right|_\infty h_\Delta^{2(m+1)}$$

   Notation : $||g||_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$

Exercice 9 soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ et soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points -1 et 1 vérifiant :

$$P(-1) = f(-1) \quad , \quad P'(-1) = f'(-1) \quad et \quad P(1) = f(1)$$

1. Calculer les polynômes w_1, w_2 et w_3 de degré 2 définis par :

$$\begin{cases} w_1(-1) = w_1'(-1) = 0 & et \quad w_1(1) = 1 \\ w_2(-1) = w_2(1) = 0 & et \quad w_2'(-1) = 1 \\ w_3(1) = w_3'(-1) = 0 & et \quad w_3(-1) = 1 \end{cases}$$

2. Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2)
3. Donner l'expression du polynôme P dans la base $\{w_1, w_2, w_3\}$.
4. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - P(x)$.

Exercice 10 Soient x_0, x_1 et x_2 trois nombres réels tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On note $\mathcal{P}_m$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq m$.
Soit $g : [x_0, x_2] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ unique vérifiant :

$$\begin{array}{ll} P(x_0) = g(x_0) & P(x_1) = g(x_1) \\ P'(x_0) = g'(x_0) & P'(x_1) = g'(x_1) \quad et \quad P'(x_2) = g'(x_2) \end{array}$$

(On pourra d'abord montrer l'unicité et en déduire l'existence)

2. Soit H le polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant :

$$\begin{array}{lll} H(x_0) = 0 & H(x_1) = 0 & H(x_2) = 1 \\ H'(x_0) = 0 & H'(x_1) = 0 & H'(x_2) = 0 \end{array}$$

   (a) Montrer que $H^{(5)}$ est une constante non nulle et que

   $$H(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$$

   (b) Soient P le polynôme introduit en **1.**, et $t \in [x_0, x_2]$.
   Montrer qu'il existe $\xi = \xi(t) \in]x_0, x_2[$ tel que $g(t) - P(t) = \dfrac{g^{(5)}(\xi)}{H^{(5)}(\xi)} H(t)$.
   Indication : On pourra considérer pour t $\neq x_0$ et t $\neq x_1$, la fonction

   $$G(x) = g(x) - P(x) - \frac{g(t) - P(t)}{H(t)} H(x)$$