Spécification formelle

THÉORIE DES ENSEMBLES

École Supérieure de Technologie et d'informatique

3ème année année Ingénierie des Systèmes Intelligents

E. Menif Abassi

Plan du module

I. Introduction aux méthodes formelles

II. Méthodes de spécification

III. Théorie des ensembles

IV. Langage Z

Plan du chapitre

1. Définition et notation
2. Concepts de base
3. Ensemble puissance
4. Opérations sur les ensembles
5. Relations et fonctions

Plan du chapitre

1. Définition et notation
2. Concepts de base
3. Ensemble puissance
4. Opérations sur les ensembles
5. Relations et fonctions

Spécification formelle

Définition et notation

- La notion d'ensemble est un des piliers des mathématiques, mais également un ingrédient essentiel en sciences informatiques: Intelligence artificielle, bases de données, les langages de programmation, …

- Définition: une ensemble est une collection d'objets qui partagent une ou plusieurs propriétés. Ces objets sont aussi désignées sous le nom d'éléments ou de membres

Définition et notation

- Il existe deux méthodes pour décrire un ensemble: en extension (*Set enumeration*) ou en compréhension (*Set comprehension*)

- Définition en extension: Un ensemble peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments

Exemples: A = {0, 2, 4, 6, 8}, B ={1, 2, 3, 4}

Définition et notation

- Définition en compréhension: Un ensemble peut être défini en indiquant une propriété que vérifient tous les éléments de l'ensemble et aucun autre. Une telle propriété est dite propriété caractéristique.

Soit t un type, R un prédicat et E une expression: $\{x{:}t \mid R : E\}$

Dénote l'ensemble des valeurs résultant de l'évaluation de $E\ [x{:=}v]$

Pour chaque valeur v dans t tel que $R\ [x := v]$ est vrai

Exemples: A = $\{x{:}\ \mathbb{Z} | 0 \leq x < 5 : 2{\cdot}x\}$, B = $\{x{:}\ \mathbb{Z} | 0 < x < 5 : x\}$

Définition et notation

- Définition en compréhension: La notation traditionnelle

Soit R un prédicat : $\{x \mid R\}$ est équivalente à l'écriture $\{x \mid R : x\}$

Exemples: A = $\{x | 0 \leq x < 10 \wedge \text{paire}(x)\}$, B = $\{x | 0 < x < 5\}$

- Quelques exemples d'ensembles numériques :
  - $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
  - $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
  - $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels
  - $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels ,

Plan du chapitre

1. Définition et notation
2. Concepts de base
3. Ensemble puissance
4. Opérations sur les ensembles
5. Relations et fonctions

Concepts de base

- Cardinalité d'un ensemble: le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé le cardinal de l'ensemble et on le note card (E) ou $\#E$.
- Ensemble fini , ensemble infini: Un ensemble E est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.
- Ensemble vide: L'ensemble vide est un ensemble qui ne contient aucun élément et on le note $\emptyset$. Par convention, card $(\emptyset) = 0$

Concepts de base

- Appartenance: notée $x \in E$, est la caractéristique d'un élément x d'être membre d'un ensemble E sinon on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$

- Inclusion: Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B . L'ensemble A est alors qualifié de partie ou de sous-ensemble de B .

- Égalité: Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments

Concepts de base

- Remarques
  - L'ensemble $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.
  - Un ensemble est inclus dans lui-même (on dit que l'inclusion est réflexive). Par exemple, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.
  - Soient A et B deux ensembles finis. Si $A \subset$ B alors $\#A < \#B$.
  - Soient A , B et C trois sous-ensembles de E. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (on dit que l'inclusion est transitive). Supposons de plus l'ensemble C fini. Alors $\#A < \#B < \#C$

Plan du chapitre

Ensemble puissance

- Ensemble puissance (ensemble des parties): Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\wp(E)$.
- Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\#\wp(E) = 2^n$.

  Exemple: Si E = {a, b, c} alors $\#\wp(E) = 2^3 = 8$ et

  $\wp(E)$ ={∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

- Remarque: les éléments de $\wp(E)$ sont des sous-ensembles de E et non pas des éléments de E. On a alors: $\emptyset \in \wp(E)$ et $E \in \wp(E)$.

Plan du chapitre

1. Définition et notation
2. Concepts de base
3. Ensemble puissance
4. Opérations sur les ensembles
5. Relations et fonctions

Opérations sur les ensembles

- Union: Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'union de A et B , notée $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A$ ou $x \in B\}$
- Intersection: Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'intersection de A et B , notée $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A$ et $x \in B\}$
- Loi de Morgan: Soient A et B deux sous-ensembles de E. On a les relations suivantes: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Opérations sur les ensembles

- Complément: Le complément de A relativement à E est le sous-ensemble de E, noté $\complement_E(A)$ ou $\bar{A}$, constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A , ainsi : $\complement_E(A) = \bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

- Produit cartésien: Le produit cartésien de E et de F est l'ensemble noté $E \times F$, constitué des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, ainsi:
  $E \times F = \{(x, y)\ x \in E\ ,\ y \in F\}$

- Différence: Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence de A et B , notée $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A$ <u>et</u> $x \notin B\}$

Plan du chapitre

1. Définition et notation
2. Concepts de base
3. Ensemble puissance
4. Opérations sur les ensembles
5. Relations et fonctions

Relations et fonctions

- Relation: Une relation R entre les ensembles A et B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, ainsi : $R \subseteq A \times B$.
-
- Une relation est caractérisée par:
  - Un ensemble de départ A
  - Un ensemble d'arrivée B
  - Un ensemble de couples vérifiant la relation
- Domaine: Le domaine de R est l'ensemble des éléments figurant comme premier élément dans au moins un couple de la $R \Rightarrow$ Sous-ensemble de l'ensemble de départ
- Codomaine: Le codomaine de R est l'ensemble des éléments figurant comme deuxième élément dans au moins un couple de la $R \Rightarrow$ Sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée

Relations et fonctions

- Exemple: Soient S ={0, 2, 4, 6}, T = {0, 2, 8, 9, 11} et $R = \{(x,y) \in S \times T : x$ est un diviseur exact de $y\}$.
  - x est un antécédent de y
  - y est une image de x
  - L'ensemble de départ est S
  - L'ensemble d'arrivée est T
  - Définition en extension de R = {(2,0), (4,0), (6,0), (2,2), (2,8), (4,8)}
  - Domaine de R = {2, 4, 6}
  - Codomaine de R = {0, 2, 8}

Relations et fonctions

- Fonction: Une fonction f est une relation plus restrictive dans laquelle un élément de l'ensemble de départ A ne peut avoir qu'au plus une image dans l'ensemble d'arrivée B. On ne peut pas avoir plusieurs couples avec le même premier élément.

- On note cette fonction: $f : A \rightarrow B$
- On écrit $f(a)=b$ au lieu de $(a, b) \in f$

- Une fonction est dite:
  - Totale: Tout élément de l'ensemble de départ a une image. On dit que la fonction est totalement définie.
  - Partielle: Un élément de l'ensemble de départ a, au plus, une image. On dit que la fonction est partiellement définie.

Relations et fonctions

- Fonction est injective: ssi $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.

- Fonction est surjective: ssi chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'au moins un élément du domaine

- Fonction est bijective: ssi elle est injective et surjective c-à-d ssi chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un et d'un seul élément de l'ensemble de départ

Relations et fonctions

- Exercice: dites si chacune des relations suivantes est une fonction. Si c'est le cas, donnez les propriétés qu'elle possède (injective, surjective, bijective)