Logique Formelle

Chap. 4 : Logique des prédicats

Qqs : Quel que soit
Exis : Existe

Terme: Constante, Variable, Fonction+ Ses paramétres(Termes)
Un terme sans variables est un terme clos

Fonction => Variable
Prédicat => Boolean

Formule Atomique FA: {Prédicat + ses termes, Egalité de deux termes}

Formule Bien Formée FBF :
- FA et combinaisons
- Qqs x : [FBF]
- Exis x : [FBF]

Qqs x : [P(x) => Q(x)]
Exis x : [P(x) et Q(x)]
Avec Qqs on utilise l'implication alors qu'avec Exis on utilise ET.

Occurance libre <=> qui ne se trouve pas dans la portée d'un qunatificateur

Variable est dite libre <=> Admet au moins une occurrence libre

Variable est dite liée <=> Admet au moins une occurrence liée

Substitution :

S= {x/t} => Remplacer toutes les occurences de x par t

On ne peut pas remplacer une **constante** ou une **fonction**

Une substitution d'un terme t pour une variable x : s={x/t}, dans une formule F est correcte ssi t est libre pour x dans F.

Le terme t est dit libre pour la variable x dans F si toutes les occurrences des variables dans t ont des occurrences libres dans F*s*.

Exemples :

- $\Phi = \exists y:[aime(x,y)]$ et $s=\{x/père(y)\}$.
- Le terme t = père(y) n'est pas libre pour x dans Φs.
- ~~$\Phi s = \exists y:[aime(père(y),y)]$~~: y n'est pas libre pour x dans Φs.
- $\Phi = \exists x:[aime(y,x)]$ et $s=\{y/père(z)\}$.
- $\Phi s= \exists x:[aime(père(z),x)]$
- Car libre père(z) pour y dans Φ.

Forme Clausale :

Clause = Disjonction de litéraux (A ou B ou C..)

Forme clausale : un ensemble formé par les clauses d'une formule sous forme de conjonction de clauses :

- $\Phi=(\neg P(x)\vee Q(x,y)\vee\neg r(v))\wedge(P(z)\vee Q(x,z))\wedge(\neg P(y)\vee R(y))$
- Forme clausale de Φ : $\{\neg P(x)\vee Q(x,y)\vee\neg r(v), P(z)\vee Q(x,z), \neg P(y)\vee R(y)\}$

Algorithme de mise sous forme clausale :

Mise sous forme conjonctive (A et B et C…)

Élimination de => et <=>
Réduction des NOT
Renommage des variables liées
Élimination des quantificateurs.

Elimination du quantificateur existentiel

- $\exists x{:}\forall y{:}[P(x,y) \wedge Q(x)]$
  devient
  $\forall y{:}[P(a,y) \wedge Q(a)]$ *avec a constante de skolem*
- $\forall x{:}\ \exists y{:}[P(x,y) \wedge Q(x)]$
  devient
  $\forall x{:}[P(\mathrm{x},f(x)) \wedge Q(x))]$ *avec f fonction de skolem*

Elimination du quantificateur universel

- $\forall x{:}\forall y{:}\ [P(x,y)]$
  devient
  $P(x,y)$

Voir Slide 24=>27
Voir Exercice et Correction

Unification de litéraux:

A = P(a,y,z)
B = P(x,b,z)
S= {x/a,y/b} est une substitution unifiant A et B

Principe de résolution pour la déduction:

-x OU a
-NON(x) OU b
=> a OU b
Voir exemple page 37

Déduction naturelle :

Conjonction ET

n	ϕ	
.	.	
.	.	
m	ψ	
.		
.		
k	$\phi \wedge \psi$	$\wedge$-I,n,m

n	$\phi \wedge \psi$	
.	.	
.	.	
m	ϕ	$\wedge$-E,n

Principe : si je dispose d'une preuve de A et une preuve de B, alors je dispose d'une preuve de A$\wedge$B.

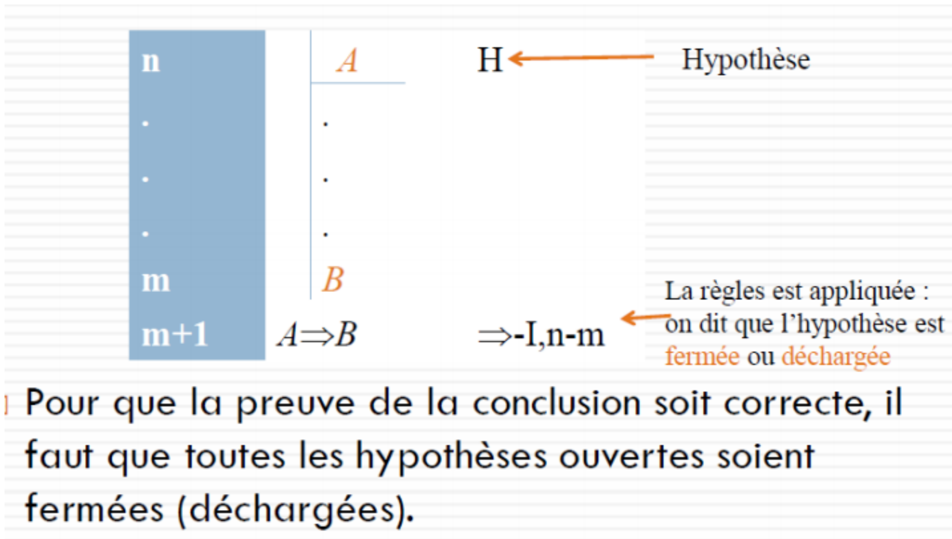
Si je dispose d'une preuve de A $\wedge$B, alors je dispose d'une preuve de A et d'une preuve de B.

Implication

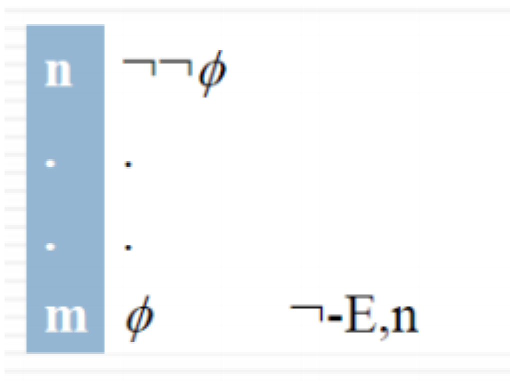
n	ϕ	
.	.	
.	.	
m	$\phi \Rightarrow \psi$	
.		
.		
k	ψ	$\Rightarrow$-E,n,m

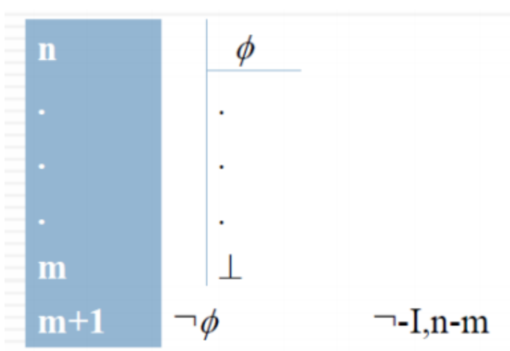
C'est la règle du modus ponens.

Si nous avons A et A$\Rightarrow$ B, donc nous avons B.

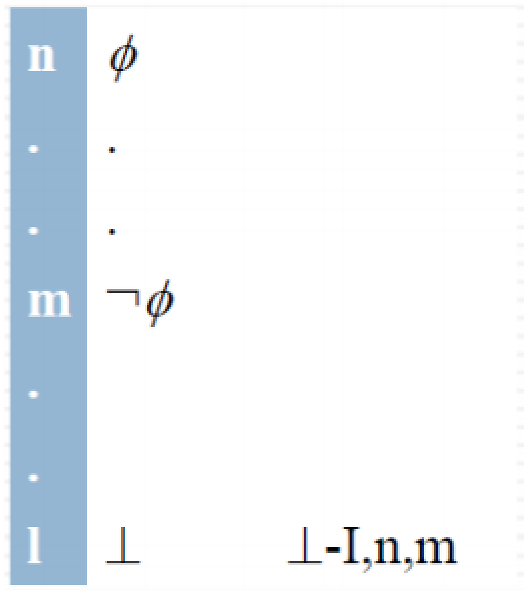


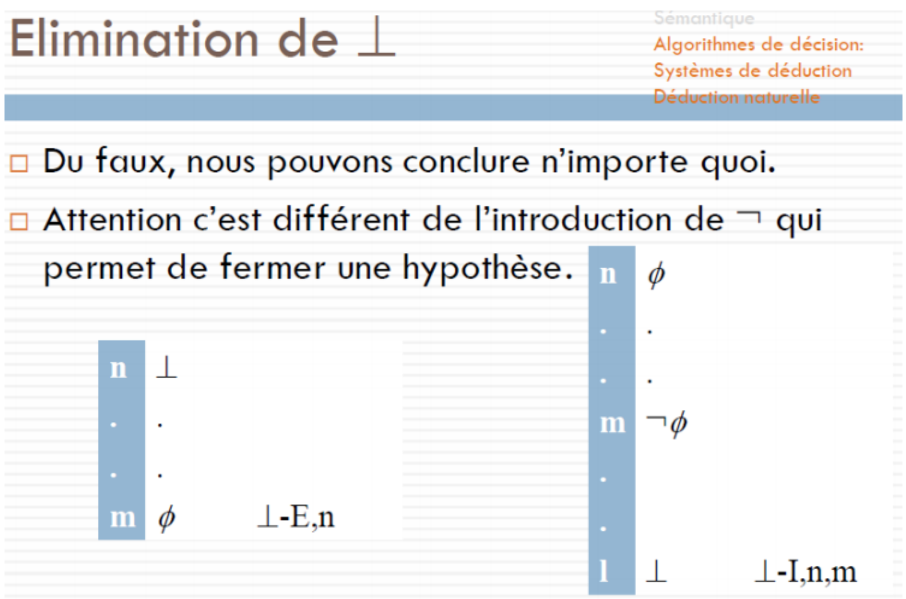
Négation :





Contradiction:





Disjonction OU

Pour introduire une disjonction $\phi \vee \psi$, il suffit de prouver ou bien ϕ, ou bien ψ, ou bien les deux.

n	ϕ	
.	.	
.	.	
m	$\phi \vee \psi$	$\vee$-I,n

n	$\phi \vee \psi$	
n+1	ϕ	H
.	.	
.	.	
m	α	
m+1	ψ	H
.	.	
.	.	
k	α	
k+1	α	$\vee$-E,n,n+1-m,m+1-k

Existe :

Élimination:

n	$\exists x:[\phi]$	
.	.	
m	$\quad \phi[x/a]$	H,
.	$\quad .$	
p	$\quad \psi$	
p+1	ψ	$\exists$-E, n, m-p
		a ne doit pas apparaitre ni dans les prémisses, ni dans les hypothèses actives ni dans ψ.

Introduction:

1	aime(Mabrouk,Ali)	
2	$\exists$x:[aime(x,Ali)]	$\exists$-I, 1, x/Mabrouk

Qqs :

Élimination :

1	$\forall x$:[aime(Mabrouk,x)]	
2	aime(Mabrouk,Ali)	$\forall$-E, 1, x/Ali

Correct

Introduction:

- Montrons $\forall$x:[A(x) $\Rightarrow$A(x)]

1	$\quad$ A(x)	H
2	$\quad$ A(x)	R, 1
3	A(x) $\Rightarrow$A(x)	$\Rightarrow$-I,1-2
3	$\forall x$:[A(x) $\Rightarrow$A(x)]	$\forall$-I, 3

- Correct car x n'est pas active dans aucune hypothèse (x est non libre dans les hypothèses actives ni dans les prémisses).