Cours : Spécification formelle

Classe : 3ème années Ingénierie des Systèmes Intelligents

TD Abstraction des données

Exercice 1 : Donner la définition en extension pour les ensembles suivants:

1. $\mathbb{P}\mathbb{P}\{1,2\} =$
   $\mathbb{P}\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} =$
   $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\},$

   $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}$
2. $\mathbb{P}\emptyset = \{\emptyset\}$
3. $\emptyset \times \{2,3\} = \emptyset$
4. $\mathbb{P}\emptyset \times \{2,3\} = \{\emptyset\} \times \{2,3\} = \{(\emptyset,2), (\emptyset,3)\}$
5. $\{(1,2)\} \times \{2,3\} = \{((1,2),2), ((1,2),3)\}$
6. $\{0\} \leftrightarrow \{0,1\} = \mathbb{P}(\{0\} \times \{0,1\}) = \mathbb{P}(\{(0,0), (0,1)\}) = \{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(0,0),(0,1)\}\}$
7. $\emptyset \leftrightarrow \{0,1\}$ $\} = \mathbb{P}(\emptyset \times \{0,1\}) = \mathbb{P}\emptyset = \{\emptyset\}$

Exercice 2 (Adapté d'une série proposée par Pr Nadia Tawbi): Cet exercice vise à vous assurer que vous comprenez bien le typage et la différence entre la déclaration d'éléments et d'ensembles. Donnez des exemples de valeurs pour les variables suivantes et donnez-en le type. Essayez de donner un sens aux noms choisis pour ces variables étant donné le type qu'elles ont (ce ne sera pas toujours naturel):

1. [ANIMAL]; animalerie:ANIMAL; Pipo: $\mathbb{P}$ANIMAL

animalerie est un ANIMAL alors que Pipo est un ensemble d'animaux, aucun des deux déclarations n'a vraiment de sens . . . La 2ème est peut-être l'ensemble des animaux qui s'appellent Pipo

2. [JOUET]; enfant: $\mathbb{P}$ JOUET;

enfant = $\{j_1; j_2; j_3; ... \}$ (avec $j_1; j_2; j_3$: JOUET) ici un enfant est défini par l'ensemble des jouets qu'il possède (ou peut-être rêve de posséder)

[ENFANT]; classe : ENFANT $\nrightarrow$ $\mathbb{P}$ JOUET

classe = $\{(e_1 \mapsto \{j_1; j_3\}); (e_2 \mapsto \{j_1; j_2; j_5\}); (e_1 \mapsto \{j_{10}; j_{14}; j_2; j_9\}); ...\}$ ici une classe est représentée par chaque enfant et l'ensemble des jouets qui lui est associé.

- Donnez le type des variables suivantes et des valeurs possibles si e : ENFANT et j : JOUET.

3. Sophie = e

Sophie: ENFANT pas d'autre valeur possible que e.

4. Nathalie : ENFANT

Nathalie est un enfant pourrait être = Sophie ou = e ou autre enfant

5. Mélanie = ENFANT

Mélanie est l'ensemble ENFANT son type est $\mathbb{P}$ENFANT

6. M = $\mathbb{P}$ ENFANT

M est l'ensemble de tous les ensembles d'ENFANT, Son type est $\mathbb{P}\mathbb{P}$ENFANT.

7. N: $\mathbb{P}$ ENFANT

N est un ensemble d'enfants comme E ou {} ou {e} ou {e; Sophie; e_2} si e_2 est un ENFANT.

- Dites s'il y a erreur de typage dans les expressions suivantes et, sinon, dites si ces expressions peuvent être vraies, sont toujours vraies ou toujours fausses:

8. Sophie ∈ M

erreur de typage

9. Sophie ∈ N

peut être vrai

10. Sophie = Mélanie

erreur de typage

11. Sophie = Nathalie

peut être vrai

<u>Exercice 3</u> : En utilisant les définitions en compréhension, définir les ensembles suivants :

1. L'ensemble des entiers compris entre 0 et 100 inclusivement

$\{x : \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \land x \leq 100\}$ ou $\{x : 0..100\}$

2. L'ensemble des entiers multiples de 10

$\{x : \mathbb{Z} \bullet x*10\}$

$\{x : \mathbb{Z} \mid (\exists y : \mathbb{Z} \bullet x = 10*y)\}$

$\{x : \mathbb{Z} \mid x \bmod 10 = 0\}$

3. L'ensemble des entiers divisibles par 2, 3 et 5

$\{x : \mathbb{Z} \mid x \bmod 2 = 0 \land x \bmod 3 = 0 \land x \bmod 5 = 0\}$

Exercice 4 : Considérez les relations et les ensembles suivants.

[X;Y; Z]

$R : X \leftrightarrow Y$
$S : Y \leftrightarrow Z$
$E : \mathbb{P}\, X$
$F : \mathbb{P}\, Y$

Reformuler les expressions suivantes toujours en utilisant les opérateurs sur les relations

1. $dom(E \lhd R) = dom(R) \cap E$

$ran(E \lhd R) = R \llparenthesis E \rrparenthesis$

2. $ran(R \rhd F) = ran(R) \cap F$

$dom(R \rhd F) = R^{\sim} \llparenthesis F \rrparenthesis$

3. $dom(E ⩤ R) = dom(R) \setminus E$

$ran(E ⩤ R) = R \llparenthesis dom(R) \setminus E \rrparenthesis$

4. $ran(R ⩥ F) = ran(R) \setminus F$

$dom(R ⩥ F) = R^{\sim} \llparenthesis ran(R) \setminus F \rrparenthesis$

5. $ran(R^{\sim}) = dom(R)$
6. $dom(R \,⨾\, S) = dom(R \rhd dom(S))$

$ran(R \,⨾\, S) = S \llparenthesis ran(R) \rrparenthesis$

7. $ran(R \oplus S) = ran(S) \cup (ran(R) \setminus R \llparenthesis dom(S) \rrparenthesis)$

Exercice 5 : Soit le type de base **PERSONNE** et soit la relation **Enfant** entre les personnes, telle que ***x* Enfant *y*** signifie que ***x*** est un enfant (fils ou fille) de ***y***, avec ***x*** et ***y*** des éléments de **PERSONNE**. À l'aide des opérateurs sur relations :

1. Définir la relation **Parent** telle que ***x* Parent *y*** signifie que ***x*** est un parent (père ou mère) de ***y***

Parent = Enfant~

2. Définir la relation **Fraterie** telle que ***x* Fraterie *y*** signifie que ***x*** est un frère ou une sœur de ***y***

Fraterie = (Enfant ⨾ Parent) \ id (Enfant ⨾ Parent)

3. Définir la relation **Cousin** telle que ***x* Cousin *y*** signifie que ***x*** est un cousin ou une cousine de ***y***

Cousin = (Enfant ⨾ Fraterie ⨾ Parent)

4. Définir la relation **Ancetre** telle que ***x* Ancetre *y*** signifie que ***x*** est un ancêtre de ***y***

Ancetre = Parent^k avec $k \geq 2$

Exercice 6: Dans Z, le symbole **mod** est utilisé pour retourner le reste d'une division de deux entiers et le symbole **..** est utilisé pour dénoter un intervalle de valeurs. En utilisant ces symboles définir en compréhension les deux ensembles suivants :

1. *Premiers*, l'ensemble des entiers premiers strictement positifs

Premiers ≙{x : ℤ|x=2 ∨ (x>2 ∧(∀m :2..(x-1)•x mod m ≠0))}

2. *NonPremiers*, l'ensemble des entiers non premiers strictement positifs

NonPremiers ≙{x : ℕ*Premiers*}

Exercice 7 : Un vecteur d'entiers peut être spécifié en Z par une séquence d'entiers :

vecteur : seq ℕ

1. Définir les ensembles suivants :
   a) L'ensemble des vecteurs d'entiers **Vecteurs**

Vecteurs : ℙ seq ℕ ou Vecteurs ≙ seq ℕ

   b) L'ensemble des vecteurs de même taille **Vecteurs_MT**

Vecteurs_MT : ℙ Vecteurs ou ℙ seq ℕ
∀v1,v2 : Vecteurs_MT • #v1 = #v2

c) Les vecteurs booléens **Vecteurs_BOOL** (0 = Faux, 1 = Vrai)

- Vecteurs_BOOL : ℙ seq {0,1} ou Vecteurs_BOOL ≙ seq {0,1}
- BOOL ::=Vrai | Faux et Vecteurs_BOOL : ℙ seq BOOL ou Vecteurs_BOOL ≙ seq BOOL
- Vecteurs_BOOL ≙ {v : seq ℕ| ran(v) ⊆ {0,1}}

2. Définir les fonctions suivantes :

a) ***sum***, qui donne la somme de deux vecteurs d'entiers (les vecteurs doivent être de même taille,

sum : Vecteurs ⨯Vecteurs ⇸Vecteurs
sum(⟨⟩,⟨⟩)=⟨⟩
∀v1,v2 : Vecteurs; x1,x2 : ℕ| #v1 = #v2• ***sum***(⟨x1⟩⁀v1,⟨x2⟩⁀v2) =
⟨x1+x2⟩⁀***sum***(v1,v2)

ou

sum : Vecteurs ⨯Vecteurs ⇸Vecteurs
sum(⟨⟩,⟨⟩)=⟨⟩
∀v1,v2 : Vecteurs | v1 ≠ ⟨⟩ ∧ v2 ≠ ⟨⟩ ∧ #v1 = #v2• ***sum***(v1, v2) = ⟨head(v1)+head(v2)⟩⁀
sum(tail(v1),tail(v2))

b) ***scal***, le produit d'un vecteur d'entiers par un entier,

scal : ℕ ⨯Vecteurs →Vecteurs
∀n :ℕ• ***scal*** (n,⟨⟩)=⟨⟩
∀v : Vecteurs; n,x : ℕ| v ≠ ⟨⟩• ***scal***(n,⟨x⟩⁀v) = ⟨n*x ⟩⁀***scal***(n,v)

ou

scal : ℕ ⨯Vecteurs →Vecteurs
∀n :ℕ• ***scal*** (n,⟨⟩)=⟨⟩
∀v : Vecteurs; n : ℕ| v ≠ ⟨⟩• ***scal***(n,v) = ⟨n*head(v) ⟩⁀***scal***(n,tail(v))

c) ***minV***, donne l'élément minimum d'un vecteur d'entiers,

minV : Vecteurs ⇸ ℕ
∀v : Vecteurs | v ≠ ⟨⟩• ***minV***(v) =***min***(ran(v))

d) ***tri***, qui effectue le tri d'un vecteur d'entiers (ramener le minimum en première position)

Tri : Vecteurs →Vecteurs
Tri (⟨⟩)=⟨⟩

$\forall v: Vecteurs \mid v \neq \langle\rangle \bullet (\exists v1,v2: Vecteurs \mid v=v1 \frown \langle minV(v)\rangle \frown v2 \bullet \textit{Tri}(v) = \langle minV(v)\rangle \frown \textit{Tri}(v1 \frown v2)$

<u>Exercice 8</u> : Considérez les sacs suivants :

$b_1; b_2$: bag $\mathbb{Z}$
$b_1 = \{(-2; 3); (0; 1); (3; 7); (2; 10); (49; 2)\}$
$b_2 = [\![-1; 0; 0; 2; 2; 2; 4]\!]$

Effectuez les calculs suivants :

a) $b_1\#2 = 10$

b) $b_2\#2 = 3$

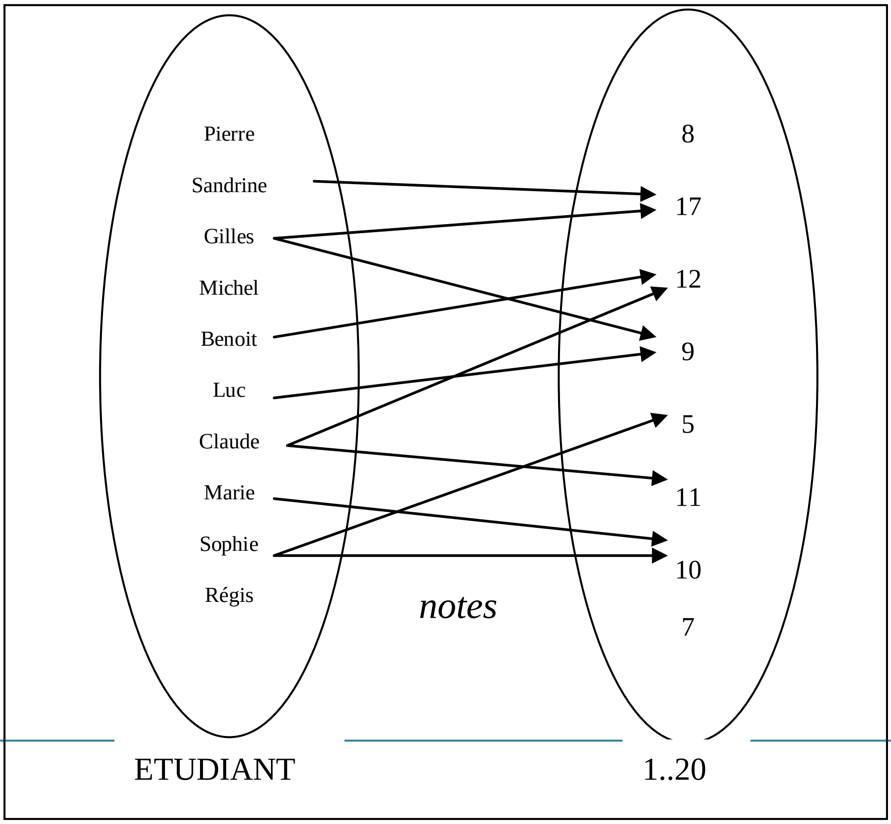
c) count $b_2 = (\lambda x:\mathbb{Z} \bullet 0) \oplus \{(-1,1),(0,2),(2,3),(4,1)\}$

d) $b_2 \sqsubseteq b_1$ faux

e) $b_1 \uplus b_2 = \{(-2; 3),(-1,1),(0,3),(2,13),(3,7),(4,1),(49,2)\}$

Est-ce que l'opération b1 ∪ b2 donne un sac ? Justifiez

<u>Exercice 9</u> : Nous reprenons la relation *notes* déjà abordée en cours, qui associe aux étudiants les notes obtenues dans différents modules et dont la représentation graphique est donnée dans la figure suivante :



Dans cette relation, nous supposons que l'ensemble ETUDIANT se limite à celui de la figure.

1. Définir en <u>extension</u> la relation *notes*$^{\sim}$
2. Donner la valeur pour chacune des expressions suivantes :
    a) dom *notes* :
    b) ETUDIANT \ dom *notes* :
    c) *notes* ⊕ *corrections* avec la relation *corrections* ≙ {Pierre ↦ 14, Sophie ↦10}
3. Déterminer en utilisant les <u>opérateurs</u> sur les relations :
    a) Les notes de *Sandrine*, *Gilles* et *Sophie*

notes⦇{Sandrine, Gilles, Sophie}⦈

    b) Les étudiants recalés à au moins un module, sachant que le niveau minimum requis pour réussir un module est 10

dom(notes ▷0..9)

    c) Les étudiants recalés pouvant repasser les modules, sachant que le niveau minimum requis pour repasser un module est 6

dom(notes ▷6..9)

    d) Les éléments de la relation *notes* <u>se limitant</u> à l'ensemble {x : 10..20}

notes▷{x : 10..20}

    e) Les éléments de la relation *notes* <u>ne considérant pas</u> l'ensemble {x : 10..20}

notes ⩥{x : 10..20}

4. Nous proposons une définition en extension de la fonction *notes_bis* ≙ {Sandrine ↦17, Gilles ↦ 17 , Benoit ↦ 12, Luc ↦ 9, Claude ↦ 12, Marie ↦ 10, Sandrine ↦ 5}
    a) Déclarer cette fonction en utilisant un opérateur de déclaration de fonction et justifier le choix de l'opérateur
    b) Donner la définition axiomatique de la fonction *niveaux*, en se basant sur la fonction *notes_bis* et en utilisant les opérateurs sur les relations. Cette fonction, donne les groupes de niveaux des étudiants. Elle associe à chaque note un ensemble d'étudiants (les étudiants sont dans le même groupe s'ils ont la même note).

niveaux : ℕ⇸ ℙ ETUDIANT

∀n : 1..20• ***niveau*** (n) =notes_bis~⦇{n}⦈

<u>Exercice 10</u>: L'Association de Loisirs des Étudiants et des Enseignants du Département Informatique cherche à gérer sa croissance. Pour cela elle décide de s'informatiser. L'association est composée de membres et d'un conseil d'administration de 30 membres dits actifs. Ce nombre peut évoluer en modifiant les statuts. L'administration de l'association est confiée à un bureau composé de membres actifs. Il est formé d'un président et ses deux vice-présidents, d'un président d'honneur, d'un secrétaire et son adjoint, d'un trésorier et son adjoint. Toutes les fonctions doivent être attribuées. Aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions dans le bureau. Le conseil d'administration est élu par l'assemblée générale. Les statuts prévoient un renouvellement annuel du tiers de membres (la répartition des membres est équitable). Tous les ans, un tiers du conseil est déclaré sortant. L'élection d'un nouveau membre à ce conseil est soumise au vote de majorité absolue lors de l'assemblée générale annuelle. Le vote est licite si au moins les deux tiers des membres de l'association sont présents. Décrire cet énoncé en Z en déclarant les types et variables suivants :

1. Les types ETUDIANT et ENSEIGNANT comme types de base
[ETUDIANT, ENSEIGNANT]
2. Les variables *membres* et *conseil*
MEMBRE ::= ***etudiant*** ⟪ETUDIANT⟫ | ***enseignant*** ⟪ENSEIGNANT⟫

$$\begin{array}{|l}
\boldsymbol{etudiant} : \mathrm{ETUDIANT} \rightarrowtail \mathrm{MEMBRE} \\
\boldsymbol{enseignant} : \mathrm{ENSEIGNANT} \rightarrowtail \mathrm{MEMBRE} \\
\hline
\mathrm{ran}(\boldsymbol{etudiant}) \cap \mathrm{ran}(\boldsymbol{enseignant}) = \emptyset \\
\mathrm{MEMBRE} = \mathrm{ran}(\boldsymbol{etudiant}) \cup \mathrm{ran}(\boldsymbol{enseignant})
\end{array}$$

$membres : \mathbb{P}\ \mathrm{MEMBRE}$

$$\begin{array}{|l}
conseil : \mathbb{P}\ \mathrm{MEMBRE} \\
\hline
\#conseil = 30
\end{array}$$

3. La variable *nb_membres_actifs* (nombre des membres actifs de l'association)

$$\begin{array}{|l}
nb_membres_actifs : \mathbb{N} \\
\hline
nb_membres_actifs = 30
\end{array}$$

$\#conseil = nb\_membres\_actifs$

4. Les variables : *bureau*, *pres*, *vpres*, *hpres*, *sec*, *secAdj*, *tres*, *tresAdj* représentant respectivement le président, les vice-présidents, le président d'honneur, le secrétaire, l'adjoint du secrétaire, le trésorier et l'adjoint du trésorier

$bureau: \mathbb{P}\ MEMBRE$

$bureau \subseteq conseil$

$pres, vpres, hpres, sec, secAdj, tres, tresAdj: \mathbb{P}\ MEMBRE$

$\#pres=1 \land \#vpres=2 \land \#hpres=1 \land \#sec=1 \land \#secAdj=1 \land \#tres=1 \land \#tresAdj=1$

$\langle pres, vpres, hpres, sec, secAdj, tres, tresAdj \rangle$ partition $bureau$

ou

Fonction ::=pres | vpres | hpres | sec | secAdj | tres | tresAdj

$bureau : MEMBRE \twoheadrightarrow Fonction$

dom $bureau \subseteq conseil$

5. les variables *tiers1*, *tiers2* et *tiers3* représentant les tiers

$tiers1, tiers2, tiers3 : \mathbb{P}\ MEMBRE$

$\langle tiers1, tiers2, tiers3 \rangle$ partition $conseil$

$\#tiers1 = \#conseil$ div 3

$\#tiers2 - \#tiers1 \leq 1$

$\#tiers3 - \#tiers1 \leq 1$

$\#tiers2 - \#tiers1 \geq 0$

$\#tiers3 - \#tiers1 \geq 0$

6. les variables *voui*, *vnon*, *vnul* et *vabs* représentant respectivement les votes pour, contre, neutre ainsi que les absents, sachant que le vote est exclusif et total (l'absence correspond aux non-votants).

$voui, vnon, vnul, vabs : \mathbb{P}\ MEMBRE$

$voui \subseteq conseil \land vnon \subseteq conseil \land vnul \subseteq conseil \land vabs \subseteq conseil$

$voui \cap vnon = \emptyset \land voui \cap vnul = \emptyset \land vnul \cap vnon = \emptyset$

$vabs = conseil \setminus ((voui \cup vnon)) \cup vnul)$

Exprimer à l'aide de prédicats les énoncés suivants :

- Les membres du bureau sont membres de l'association
  $bureau \subseteq membres$ cette propriété est obtenue par transitivité de l'inclusion
- Un vote est licite
  $\#vabs \leq \#conseil$ div 3