Devoir surveillé d'Analyse Numérique

Classes : $1^{\text{ère}}$ année ING-INFO — A.U. 2015-2016
Date : Mars 2016 — Nbre de pages : **2**
Durée : **1h30** — **Documents non autorisés**

Exercice 1 (8 points)

On considère quatre valeurs d'une fonction f définie sur $[2,5]$

$$f(2) = 0.5878 \qquad f(3) = 0.8090 \qquad f(4) = 0.9510 \qquad f(5) = 1$$

1. Soit P_2 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 2, x_1 = 3$ et $x_2 = 4$. Calculer P_2 en utilisant :
   (a) La forme de Lagrange.
   (b) La forme de Newton.
2. Calculer P_3 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4$ et $x_3 = 5$. Justifier le choix de la méthode utilisée.
3. Donner, à l'aide de P_3, une valeur approchée de $f(3.5)$ à 4 chiffres après la virgule.
4. (a) Sachant que $f(x) = \sin(\frac{\pi}{10}x)$, donnez l'expression de l'erreur d'interpolation $E_3(x) = f(x) - P_3(x)$ sur $[2,5]$.
   (b) Donner une majoration de $|E_3(3.5)|$.

Exercice 2 (12 points)

soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite (de degré ≤ 3) de f vérifiant :

$$P(0) = f(0) \quad , \quad P'(0) = f'(0) \quad P''(0) = f''(0) \quad et \quad P(1) = f(1)$$

1. Déterminer le polynômes P.
2. (a) Soit $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On pose

$$F(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{x^3(x-1)} t^3(t-1)$$

   Montrer que F est de classe C^4 sur $[0,1]$ et qu'il existe $\xi_x \in]0,1[$ tel que $F^{(4)}(\xi_x) = 0$.
   (b) Déduire l'expression de l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - P(x), \forall x \in [0,1]$.

3. Déterminer les coefficients α_1, α_2, α_3 et α_4 pour que la fomule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f'(0) + \alpha_3 f''(0) + \alpha_4 f(1) + E(f) \tag{1}$$

soit exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$. ($E(f)$ désigne le terme d'erreur)

Dans toute la suite α_1, α_2, α_3 et α_4 désignent les coefficients ainsi trouvés.

4. Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature (1).
5. (a) Montrer que le terme d'erreur $E(f)$ vérifie : $E(f) = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - P(x))dx$.
   (b) En déduire qu'il existe $\eta \in [0,1]$ tel que $E(f) = -\dfrac{1}{480} f^{(4)}(\eta)$.
6. Soit $a < b$ deux réels donnés et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$.
   (a) Déduire de la formule (1) une formule de quadrature pour approcher $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$, ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant qu'on notera $E(g)$. (*Indication : Effectuer le changement de variable affine* $t = a + (b-a)x$)
   (b) Utilisier le résultat au point précédent pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos(\frac{\pi}{2}t)dt$, ainsi qu'un encadrement de l'erreur commise.

D.S. Analyse numérique non linéaire — Mars 2016

Indication

Exercice 1 :

1/ (a) $P_2(x) = f(2)\,L_0(x) + f(3)\,L_1(x) + f(4)\,L_2(x)$

avec $L_0(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x-4)$, $L_1(x) = -(x-2)(x-4)$ et $L_3(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$

(b) Table des différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
2	$\boxed{0,5878}$	$\boxed{0,2212}$	$\boxed{-0,0396}$	$\boxed{-0,0023}$
3	0,8090	0,142	-0,0465	
4	0,9510	0,049		
5	1			

Forme de Newton : $P_2(x) = 0,5878 + 0,2212(x-2) - 0,0396(x-2)(x-3)$

2) Forme de Newton $P_3(x) = P_2(x) - 0,0023\,(x-2)(x-3)(x-4)$.

3/ $P_3(3,5) = 0,5878 + 0,2212\cdot(1,5) - 0,0396\times 1,5\times 0,5 + 0,0023\times 1,5\times 0,5\times 0,5$

$\simeq 0,8908$

$f(3,5) \simeq P_3(3,5) \simeq 0,8908$

4/ (a) $E_3(x) = f(x) - P_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ avec $\eta \in [2,5]$

$= \left(\dfrac{\pi}{10}\right)^4 \dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{4!} \sin\left(\dfrac{\pi}{10}\eta\right)$

(b) $|E_3(3,5)| \leq \left(\dfrac{\pi}{10}\right)^4 \dfrac{1}{4!}(1,5)(0,5)(0,5)(1,5) \simeq 2,28\;10^{-4}$

Exercice 2

1) On pose $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(0) = f(0) \\ P'(0) = f'(0) \\ P''(0) = f''(0) \\ P(1) = f(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \\ a_3 = f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2} f''(0) \end{cases}$$

d'où $P(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \left(f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2} f''(0)\right) x^3$

2) (a) f de classe C^4, ℓ de classe C^4 et $t \mapsto t^3(t-1)$ C^4 $\Rightarrow$ F est C^4 sur $[0,1]$

$$F(0)=F(1)=F(x)=0 \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists\, x_1, x_2 \notin \{0,1,x\} \text{ tq } F'(x_1)=F'(x_2)=0$$

$$F'(0)=F'(x_1)=F'(x_2) \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists\, x_3, x_4 \notin \{0,1,x\} \text{ tq } F''(x_3)=F''(x_4)=0$$

$$F''(0)=F''(x_3)=F''(x_4)=0 \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists\, x_5, x_6 \notin \{0,1,x\} \text{ tq } F^{(3)}(x_5)=F^{(3)}(x_6)=0$$

$$F^{(3)}(x_5)=F^{(3)}(x_6)=0 \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists\, \xi_x \in]0,1[\text{ tq } F^{(4)}(\xi_x)=0.$$

(b) $\forall t \in [0,1]$, $F^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) + \ell^{(4)}(t) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)} \dfrac{d^4}{dt^4}\left(t^3(t-1)\right)$, pour $x \notin \{0,1\}$

$\ell^{(4)}(t) = 0$ car $d^\circ \ell \leq 3$.

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(t^3(t-1)\right) = 4!$$

d'où $F^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)}(4!)$ $\forall t \in [0,1]$

Pour $t=\xi_x$ on obtient $0 = f^{(4)}(\xi_x) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)}(4!)$

Ce qui donne $f(x)-\ell(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^3(x-1)$ avec $\xi_x \in]0,1[$

Pour $x \in \{0,1\}$, $f(x)-\ell(x)=0$.

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $\exists \xi_x \in]0,1[$ tq $E(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^3(x-1)$;

3) Ecrivons la formule (1) pour $1, X, X^2$ et X^3

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{1}{2} \\ 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{3} \\ \alpha_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{4} \\ \alpha_2 = \frac{1}{4} \\ \alpha_3 = \frac{1}{24} \\ \alpha_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{3}{4} f(0) + \frac{1}{4} f'(0) + \frac{1}{24} f''(0) + \frac{1}{4} f(1).$$

4) Soit m le degré de précision de la formule (1)

on a $m \geq 3$ (Formule exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$)

Calculons $E(x^4)$: $\displaystyle\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$

$\frac{3}{4} f(0) + \frac{1}{4} f'(0) + \frac{1}{24} f''(0) + \frac{1}{4} f(1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow E(x^4) \neq 0$ Ainsi $\boxed{m = 3}$

5) (a) $d^\circ \ell \leq 3$ donc la formule (1) est exacte pour ℓ

c.à.d $\displaystyle\int_0^1 \ell(x)\,dx = \frac{3}{4}\ell(0) + \frac{1}{4}\ell'(0) + \frac{1}{24}\ell''(0) + \frac{1}{4}\ell(1)$

$$= \frac{3}{4}f(0) + \frac{1}{4}f'(0) + \frac{1}{24}f''(0) + \frac{1}{4}f(1)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx - E(f)$$

$$\Rightarrow \quad E(f) = \int_0^1 (f(x) - \ell(x))\,dx.$$

(b) $\displaystyle E(f) = \int_0^1 (f(x) - \ell(x))\,dx \overset{2.b/}{=} \int_0^1 \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^3(x-1)\,dx.$

$f^{(4)}$ continue sur $[0,1]$ et $x \mapsto x^3(x-1)$ continue et garde un signe constant sur $[0,1]$

Alors d'après th de la moyenne $\exists\, \eta \in [0,1]$ tq

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^1 x^3(x-1)\,dx = -\frac{1}{480}f^{(4)}(\eta)$$

) (a) $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = \int_0^1 g(a+(b-a)x)\,.\,(b-a)\,dx$

$$= (b-a)\int_0^1 g(a+(b-a)x)\,dx$$

En remplaçant $f(x)$ par $g(a+(b-a)x)$ ds la formule (1). on obtient

$$\int_a^b g(t)\,dt = (b-a)\left[\frac{3}{4}g(a) + \frac{1}{4}(b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{24}g''(a) + \frac{1}{4}g(b)\right] + E(g)$$

$$\simeq \frac{3}{4}(b-a)g(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2 g'(a) + \frac{(b-a)^3}{24}g''(a) + \frac{1}{4}(b-a)g(b)$$

$$E(g) = (b-a)\left(-\frac{1}{480}\right)(b-a)^4 g^{(4)}(\xi) \quad \text{avec } \xi \in\,]a,b[$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{480}g^{(4)}(\xi)$$

(b). $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt \simeq 2\left(\frac{3}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{4}\frac{\pi}{2}\times\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{4}{24}\times\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$2 \qquad \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle E(g) = -\frac{(b-a)^5}{480}g^{(4)}(\xi) = -\frac{2^5}{480}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$ pour $g(t) = \cos\frac{\pi}{2}t$ et $[a,b] = [-1,1]$

$$\Rightarrow \quad |E(g)| \leq \frac{2.\pi^4}{480} \simeq 0{,}4$$