Chapitre I : Outils Mathématiques

MODULE : TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

W. BAHRI[1] A. GUEDDANA[1]

[1]Département Informatique
Université de Carthage, École Nationale d'Ingénieurs de Carthage - Enicar

Année Universitaire 2019-2020

Plan

Transmission de l'Information

Qu'est ce qu'on transmet ? de l'information. L'information prend usuellement la forme d'un signal **analogique** ou **numérique**. Parmi les exemples de signaux analogiques, on trouve les signaux audio (issu d'un microphone qui transforme l'onde acoustique en un signal électrique) et vidéo (signal issu d'une caméra) déterministe ou aléatoire. Ces signaux sont considérés comme étant des signaux à **basses fréquences** (le changement est lent) et ne peuvent pas être transmis à travers les milieux de transmission usuels (câble électrique, canal atmosphérique, fibre optique) : ces ondes s'atténuent rapidement en fonction de la distance. Un autre type de signaux utiles véhiculé est le signal numérique abstraitement représenté par une suite de bits 0110110001 ou une suite de symboles quelconques $a_1 a_2 a_3 \ldots$. Les signaux de données échangés par les calculateurs et implicitement par des stations de bases de GSM et de GPRS en sont des bon exemples.
C'est pour cette raison qu'il faut procéder à l'aide de certaines techniques de transmissions afin **d'adapter les signaux** à transmettre au milieu de transmission dans le but de permettre la **simultanéité** de plusieurs applications en parallèle.

Propriétés d'un Signal

Définition

Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe T_0 tel que $x(t+T_0) = x(t)$
$x(t)$ est causal si $x(t) = 0$ pour tout $t < 0$
$x(t)$ est à énergie finis si $E_x = \int |x(t)|^2 dt$ converge
$x(t)$ est à puissance finie si $P_x = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} |x(t)|^2 \, dt$ converge

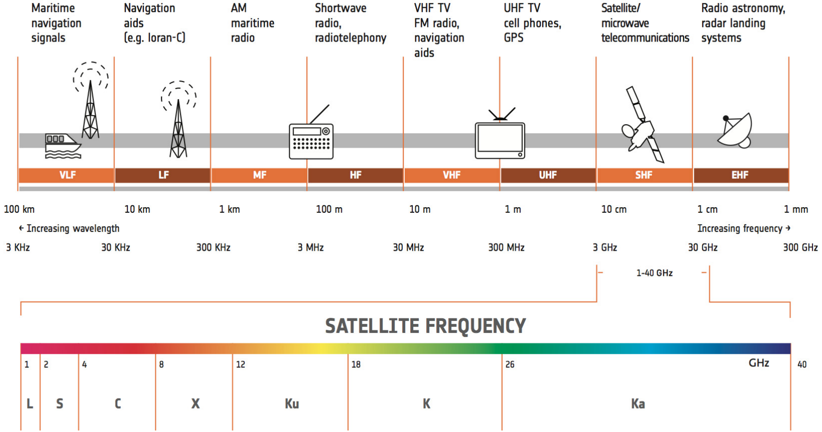
Bande de Fréquence

- On appelle bande fréquentielle ou tout simplement bande l'intervalle $[a, b]$ tel que :

$$X(f) \neq 0 \, \forall f \in [a, b]$$

- Cet intervalle détermine les fréquences contenues dans un signal. Par exemple, la bande du signal audio est [300, 3400]Hz. Un signal est à basses fréquences (BF) s'il ne contient que des fréquences basse ne dépassant pas une centaine de KHz.
- On distinguera aussi les signaux à hautes fréquences (HF) et les signaux à bande étroite.

Spectre Fréquentiel et Applications



Forme algébrique de la décomposition en série de Fourier

La forme la plus couramment utilisée de la décomposition en série de Fourier d'une fonction $x(t)$ est la forme algébrique. Pour $x(t)$ périodique de période T et intégrable sur $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$, pour $\omega = \frac{2\pi}{T}$, elle s'écrit comme suit :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t))$$

a_0 représente la valeur moyenne de la fonction sur la période $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ et s'écrit comme :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Les coefficients de la série de Fourier s'évaluent selon les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, sin(n\omega t)\, dt$$

Remarques

- Pour $n = 1$, la fonction $a_1 cos(\omega t) + b_1 sin(\omega t)$ s'appelle la **fondamentale** de la fonction
- Les fonctions $(a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t))$ s'appellent les **harmoniques** de la fonction
- Les intégrales sont à prendre sur une période de la fonction $x(t)$. On peut donc généraliser les expressions suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} x(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} x(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

- Dans la pratique, on choisira t_0 de manière à simplifier le calcul de l'intégrale.

Forme complexe de la décomposition en série de Fourier

- La forme complexe de la décomposition en série de Fourier d'une fonction $x(t)$ s'écrit comme suit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

avec :

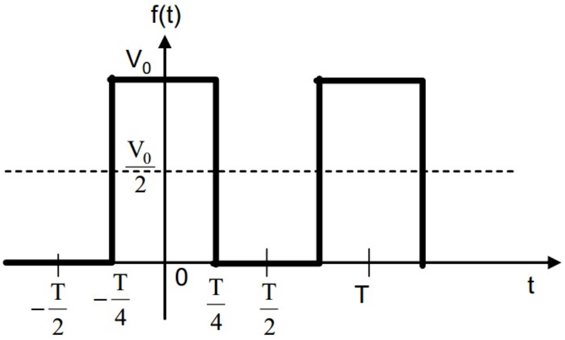
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt$$

- Pour la valeur particulière $n = 0$, on obtient :

$$C_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Exemple : fonction créneau

Soit la fonction créneau $f(t)$ présentée comme suit :



Déterminer la décomposition en série de Fourier du signal $f(t)$.

Décomposition en Série de Fourier de $f(t)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Transformée de Fourier

- Soit un signal à temps continu $x(t)$ d'énergie E. On appelle transformée de Fourier de $x(t)$ la fonction $X(f)$ définie par :

$$X(f) = TF(x(t)) = \int x(t)e^{-2j\pi ft}dt$$

- $X(f)$ est appelé spectre ou représentation spectrale du signal analogique $x(t)$, c'est une représentation équivalente du signal temporel car la transformée de Fourier est une fonction bijective, autrement, il existe la transformée de Fourier inverse qui est définie par :

$$x(t) = \int X(f)e^{2j\pi ft}df$$

- Le spectre est perçu ainsi comme une projection du signal temporel dans la base des fréquences pures $e^{-2j\pi ft}$. La formule d'inversion énonce ainsi que le signal temporel $x(t)$ est une somme continue de fréquences pures $e^{-2j\pi ft}$ dont l'amplitude de chacune est $X(f)$.

Remarques

- La primitive d'une fonction complexe est définie par :

$$\int f(t)dt = \int f_R(t)dt + j\int f_I(t)dt$$

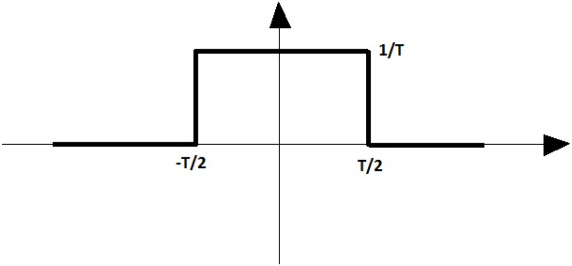
- Exceptionnellement pour la primitive de l'exponentielle complexe, elle est similaire au cas réel, autrement :

$$\int e^{st}dt = \frac{1}{s}e^{st} + cste; \; s \; complexe$$

- Le spectre est une fonction complexe de fréquence. Pour le visualiser, on trace le spectre d'amplitude $\mid X(f) \mid$ et sa phase $\arg(X(f))$

Exemple : TF du signal carré

Soit le signal $rect_T(t)$ comme illustré par la figure suivante :



Déterminer la TF du signal $rect_T(t)$ notée $Rect_T(f)$.

$Rect_T(f) = TF[rect_T(t)]$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 1 : Linéarité

$$TF\left(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\right) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

- Si $x(t)$ est réel et pair alors $X(f)$ est réel et pair.
- Si $x(t)$ est réel et impair alors $X(f)$ est imaginaire pur et impair.

Autres propriétés

- Translation en temps : $TF(x(t+t_0)) = X(f)e^{2j\pi t_0 f}$
- **Translation en fréquence** : $TF(x(t)e^{2j\pi f_0 t}) = X(f - f_0)$
- Dérivation en temps : $TF(\frac{dx(t)}{dt}) = 2j\pi f\, X(f)$;

$$TF(\frac{d^m x(t)}{dt}) = (2j\pi f)^m\, X(f)$$

- Dilatation ou compression en temps : $TF(x(at)) = \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$
- Inversion du temps : $TF(x(-t)) = X(-f)$
- Conjugaison : $TF(x^*(t)) = X^*(-f)$
- Dualité : soit $X(f) = TF(x(t))$ alors on a :

$$TF(X(t)) = x(-f) \text{ et } TF(X(-t)) = x(f)$$

Définition

- La TF ne s'applique strictement qu'aux signaux qui vérifient les **conditions de DIRICHLET**. Il serait agréable d'étendre le formalisme afin de pouvoir définir une TF pour les signaux de puissance moyenne finie, et de retrouver la série de FOURIER comme cas particulier de la TF.
- Cette extension est possible en utilisant la théorie des distributions, et en particulier la **distribution de DIRAC**. La distribution de DIRAC est une distribution, et nous devrions faire alors appel aux résultats de la théorie des distributions. Ceci sort largement du cadre de ce cours, et nous nous contenterons ici d'une approche heuristique.
- On appelle impulsion de DIRAC la fonction $\delta(t)$ tel que :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t \neq 0 \\ +\infty \; pour \; t = 0 \end{cases}$$

et telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Propriétés

On peut voir (interpréter) l'impulsion de DIRAC comme la limite d'une fonction porte :

$$\text{Lorsque } T \to 0,\ rect_T(t) \to \delta(t) \text{ et } sinc(\pi f t) \to 1$$

L'impulsion de DIRAC est ainsi « une impulsion infiniment fine, d'amplitude infinie, et d'aire unité ». L'impulsion de DIRAC joue le rôle d'une **fonction indicatrice** lorsqu'elle intervient dans une intégration. En effet, l'impulsion de DIRAC est nulle sauf lorsque son argument est nul, auquel cas, son amplitude est infinie, mais son « aire » unité. Ainsi, on peut écrire que $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$. Par conséquent, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

La TF de l'impulsion de DIRAC est donc une fonction constante, quelque soit la fréquence :

$$TF[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,e^{-2j\pi f t}\,dt = 1$$

Applications et conséquences

On peut rechercher les TFs de quelques fonctions qui n'admettraient pas de TFs au sens habituel. Ce faisant, on pourra donner un nouvel éclairage à la TF.

TF d'une impulsion retardée : la TF d'une impulsion de DIRAC placée en $t = \tau$ est une exponentielle complexe.

$$TF\left[\delta\left(t-\tau\right)\right] = e^{-2j\pi f\tau}$$

TF d'un signal continu : On recherche la TF d'un signal constant, c'est-à-dire d'un signal continu (au sens « électronique », pas au sens mathématique). La TF d'un signal constant est donc une raie, ou une masse, à la fréquence nulle.

$$TF\left\{1\right\} = \delta\left(-f\right) = \delta\left(f\right)$$

TF d'une exponentielle complexe :

$$TF\left[e^{2j\pi f_0 t}x\left(t\right)\right] = X\left(f-f_0\right)$$

ce qui implique alors, en prenant $x(t) = 1$, que : $TF\left[e^{2j\pi f_0 t}\right] = \delta\left(f-f_0\right)$

Exemple

En utilisant les formules d'EULER, déterminer $TF\left[cos\left(2\pi f_0 t\right)\right]$ et $TF\left[sin\left(2\pi f_0 t\right)\right]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

TF de signaux périodiques

- Comme on l'a déjà indiqué, un signal périodique possède une énergie infinie. Si sa puissance est finie, on peut obtenir une représentation de Fourier en utilisant les séries de Fourier :

$$x(t) = \sum_n X_n e^{2j\pi n \frac{t}{T}}$$

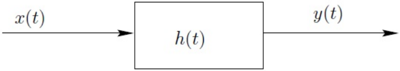
ainsi on a :

$$X(f) = \sum_n X_n \delta(f - \frac{n}{T})$$

- Ceci signifie que la TF d'un signal périodique n'est différente de zéro qu'aux fréquences n/T apparaissant dans sa série de Fourier. On dit parfois qu'un signal périodique a un spectre discret ou encore un **spectre de raies**. Les amplitudes de ces raies spectrales sont les coefficients de Fourier X_n.

Filtres et convolution

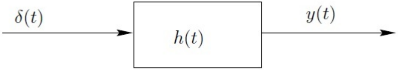
- Un filtre est un instrument, ou un modèle physique, associant (linéairement) une excitation, ou signal d'entrée, à un signal de sortie.



- Un système est linéaire s'il justifie le principe de superposition : la réponse à une somme pondérée d'excitations est égale à la somme pondérée des réponses aux excitations individuelles :

$$\sum_i \alpha_i x_i(t) \rightarrow \sum_i \alpha_i y_i(t)$$

- Le système est invariant dans le temps si la réponse ne dépend pas de l'instant d'application : si $y(t)$ est la sortie correspondante à une entrée $x(t)$, la réponse associée à $x(t-t_0)$ est $y(t-t_0)$. On appelle réponse impulsionnelle, souvent notée $h(t)$, la réponse du système à l'application d'une impulsion de DIRAC $\delta(t)$:



- Le système étant linéaire et invariant, alors la réponse associée à $x(\tau)\delta(t-\tau)$est $x(\tau)h(t-\tau)$. Or, tout signal $x(t)$ peut être décomposé en une somme infinie de « composantes » $x(\tau)$ sur une base d'impulsions de DIRAC :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

On en déduit que la réponse globale du système, appelée **convolution** entre x et h, s'écrit par linéarité :

Définition

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = [x \otimes h](t)$

Propriétés

- Commutativité :

$$[x \otimes h](t) = [h \otimes x](t)$$

- $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution et qui vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$$

$$\delta(t-t_0) \otimes f(t) = f(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_0).f(t) = f(t_0).\delta(t-t_0)$$

Propriétés

$$TF\left[y\left(t\right)\right] = TF\left[h \otimes x\left(t\right)\right] = ?$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

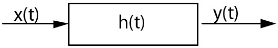
....

....

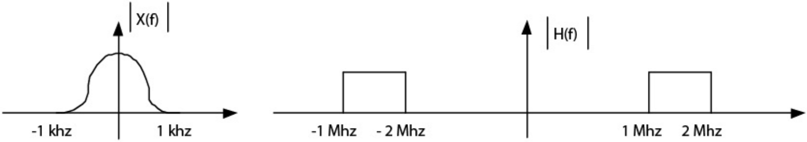
Cette relation est fondamentale pour toute la suite. Elle montre que dans le domaine des fréquences, la relation d'entrée sortie dans un filtrage linéaire est un simple produit.

Exemple

- Soit le système suivant :



- On donne les spectres réels suivants des fonctions en questions :



Déterminer le spectre du signal à la sortie du filtre.

Gabarits des Filtres