CORRECTION SERIE 3

Cours : Vérification formelle
Filière/Classe : 3ème ING

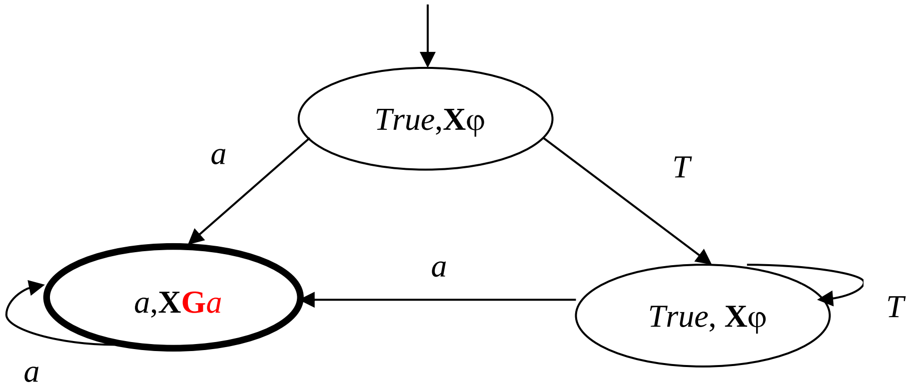
Exercice 1 :

Pour chacune des formules suivantes, construire un automate de Büchi correspondant :

1. $\mathbf{F}(\mathbf{G}a)$.
2. $\mathbf{G}(a\vee\neg\mathbf{X}b)$.
3. $a\mathbf{U}\underline{b}$.

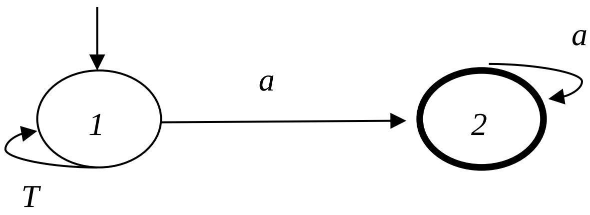
Correction :

1. $\varphi=\mathbf{FG}a = \mathbf{G}a \vee\mathbf{X}\varphi = (a\wedge\mathbf{XG}a)\vee\mathbf{X}\varphi$.

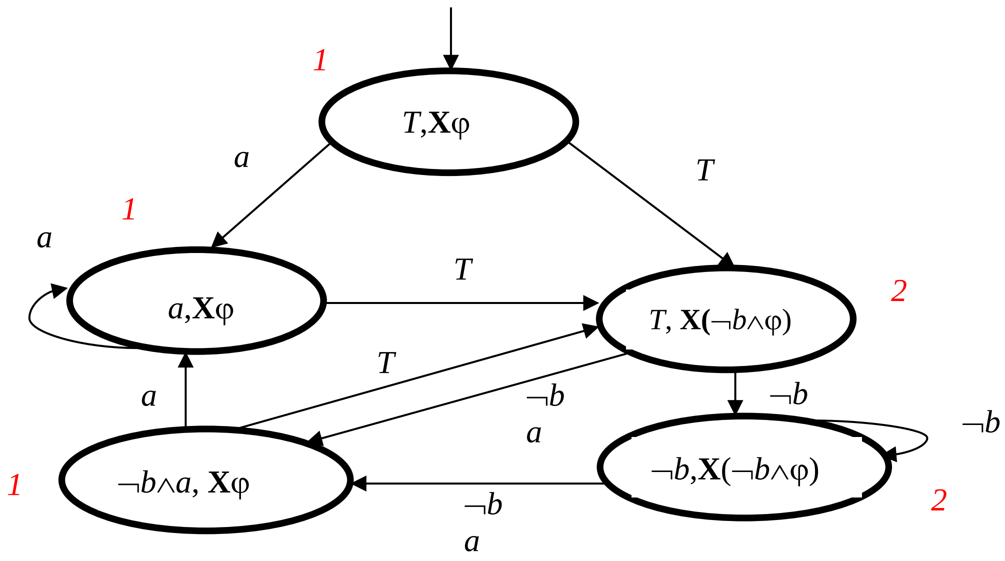


$\mathbf{G}a = a\wedge\mathbf{XG}a$.

Après minimisation :

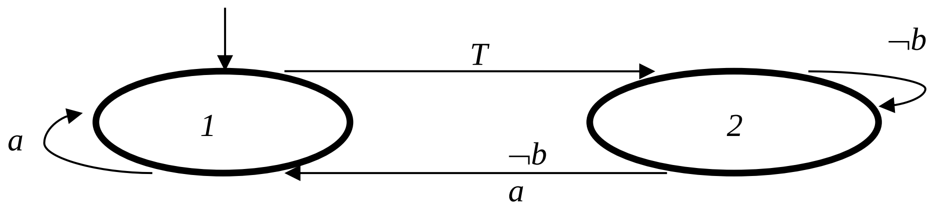


2. $\varphi=\mathbf{G}(a\vee\neg\mathbf{X}b)=(a\vee\neg\mathbf{X}b)\wedge\mathbf{X}\varphi = (a\wedge\mathbf{X}\varphi)\vee(\mathbf{X}\neg b\wedge\mathbf{X}\varphi) = (a\wedge\mathbf{X}\varphi)\vee(\mathbf{X}(\neg b\wedge\varphi))$.

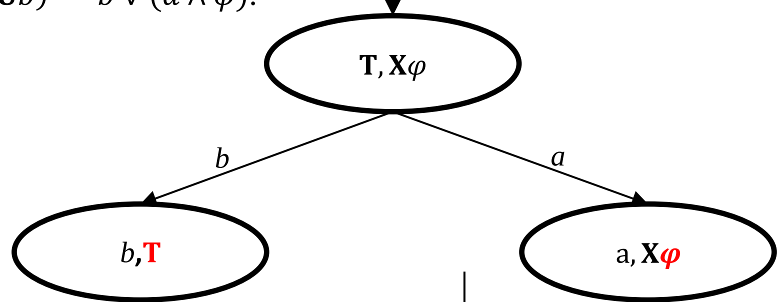


$\neg b\wedge\varphi=\neg b\wedge\mathbf{G}(a\vee\neg\mathbf{X}b)=\neg b\wedge((a\vee\neg\mathbf{X}b)\wedge\mathbf{X}\varphi) = (\neg b\wedge\mathbf{X}\varphi\wedge a) \vee (\neg b\wedge\mathbf{X}\varphi\wedge\neg\mathbf{X}b) = (\neg b\wedge a\wedge\mathbf{X}\varphi) \vee (\neg b\wedge\mathbf{X}\varphi\wedge\mathbf{X}\neg b) = (\neg b\wedge a\wedge\mathbf{X}\varphi) \vee (\neg b\wedge\mathbf{X}(\varphi\wedge\neg b))$.

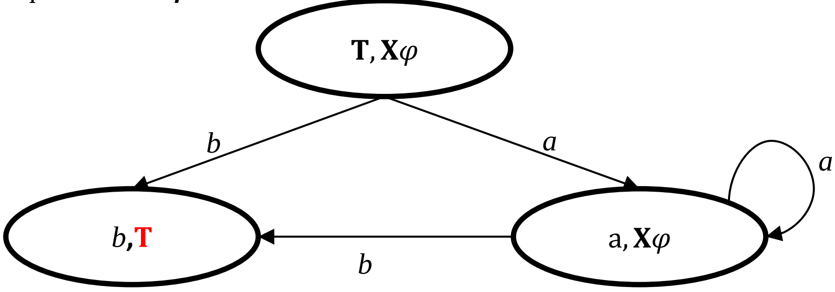
Après minimization (les états à regrouper sont numérotés ci-haut) :



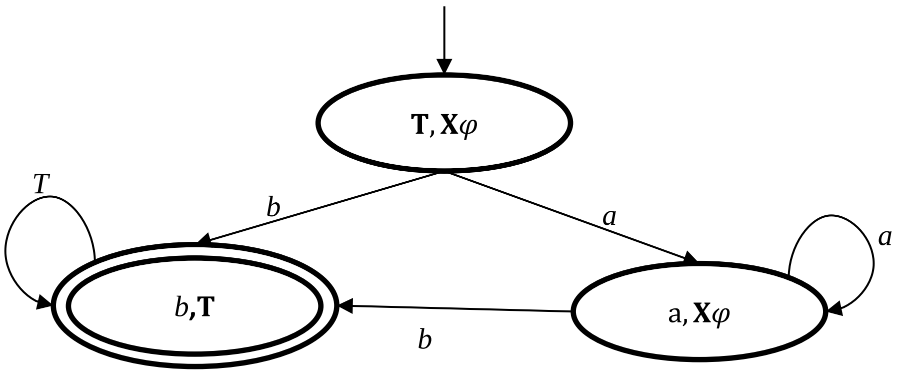
3. $\varphi = a\mathbf{U}b = b \vee (a \wedge \mathbf{X}(a\mathbf{U}b) = b \vee (a \wedge \varphi)$.



Pour $\mathbf{X}\boldsymbol{\varphi}$, les prochains états sont les mêmes que ceux de $\boldsymbol{\varphi}$.



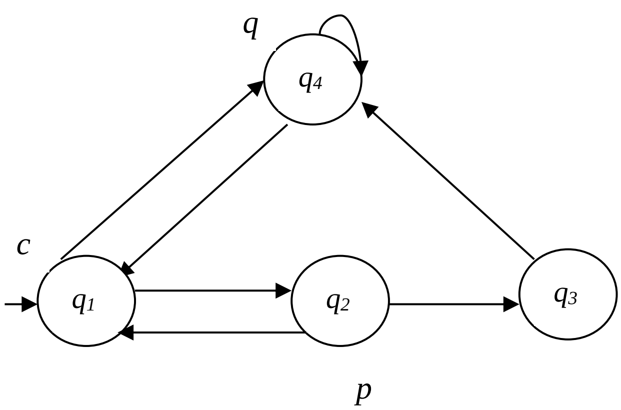
Pour **T** (true), c'est une formule toujours vraie, donc c'est une boucle vers le même état étiqueté parTrue. Ceci est applicable pour toute formule dont la formule X est True. Pour les états finaux, le seul état qui n'est pas un F-formule (U-formule) est celui étiqueté par (*b*,**T**).



Exercice 2 :

1. Pour chacune des formules suivantes construire un automate de Büchi correspondant :
   a. $G(p \Rightarrow F(q \vee c))$.
   b. $F(p \wedge G(\neg q \wedge \neg c))$.

2. Pour la structure de Kripke K suivante, vérifier si $K \vDash G(p \Rightarrow F(q \vee c))$.



Correction :

1.
   a. $\varphi = \mathbf{G}(p \Rightarrow \mathbf{F}(q \vee c)) = \mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c)) = (\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c)) \wedge \mathbf{X}(\varphi) = (\neg p \vee (q \vee c) \vee \mathbf{X}(\mathbf{F}(q \vee c))) \wedge \mathbf{X}(\varphi) = (\neg p \wedge \mathbf{X}(\varphi)) \vee (q \wedge \mathbf{X}(\varphi)) \vee (c \wedge \mathbf{X}(\varphi)) \vee (\mathbf{X}(\mathbf{F}(q \vee c)) \wedge \mathbf{X}(\varphi)) = \psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3 \vee \psi_4$

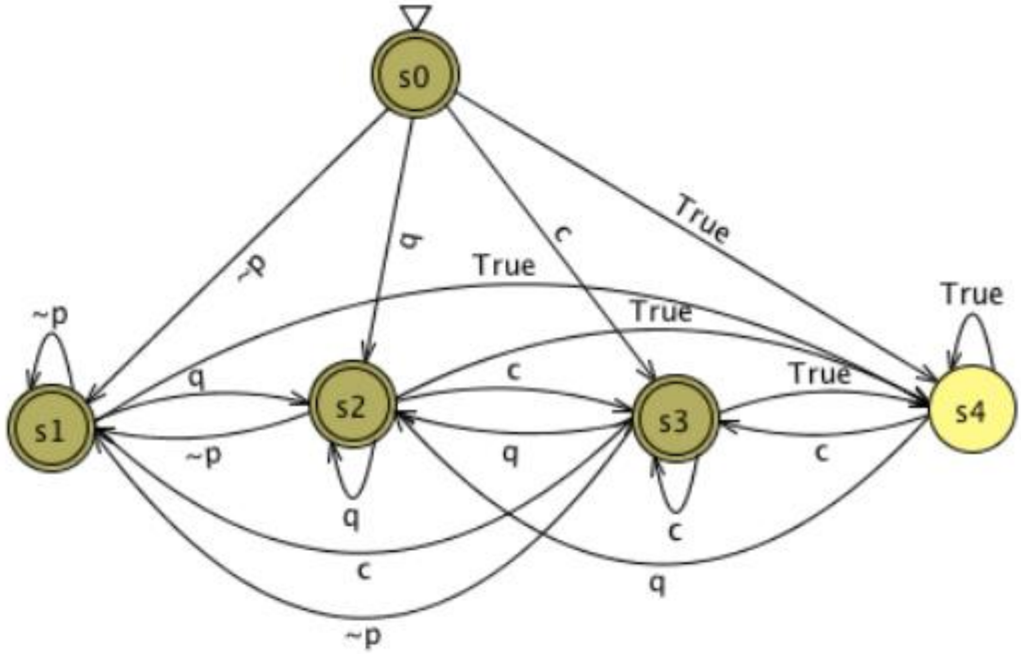
   ψ_1, ψ_2 et ψ_3 ont les mêmes arcs que φ.

   $\psi_4 = (\mathbf{F}(q \vee c) \wedge \varphi) = \mathbf{F}(q \vee c) \wedge \mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c)) = \mathbf{F}(q \vee c) \wedge (\neg p \vee \mathrm{F}(q \vee c)) \wedge$

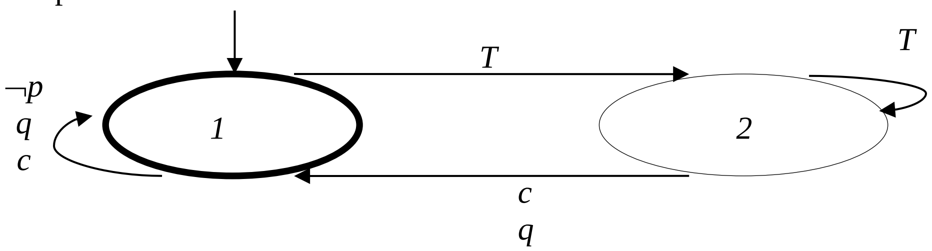
$\mathbf{X}(\mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c))) = \mathbf{F}(q \vee c) \wedge \mathbf{X}(\mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c))) = (q \vee c) \vee \mathbf{X}(\mathbf{F}(q \vee c)) \wedge \mathbf{X}(\mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c))) = ((q \wedge \mathbf{X}(\varphi)) \vee (c \wedge \mathbf{X}(\varphi)) \vee (\mathbf{X}(\mathbf{F}(q \vee c)) \wedge \mathbf{X}(\mathbf{G}(\neg p \vee \mathbf{F}(q \vee c))))$
$= \psi_2 \vee \psi_3 \vee \psi_4$

Notez que $y \wedge (y \vee z) = y$.

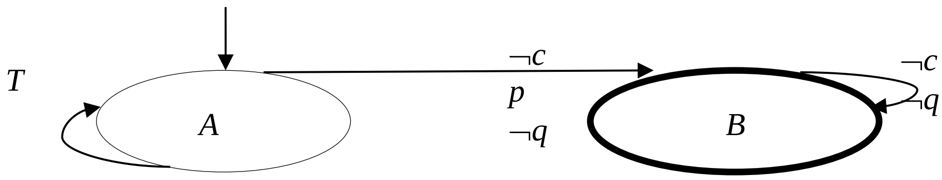
Le seul état qui contient une sous-formule $\mathbf{X}\psi$ tel que ψ est une formule-U est ψ_4, c'est donc le seul état non final. L'automate est décrit ci-dessous (construit avec le l'application GOAL) avec $\varphi=s_0$, $\psi_1=s_1$, $\psi_2=s_2$, $\psi_3=s_3$, $\psi_4=s_4$.



Après minimisation :

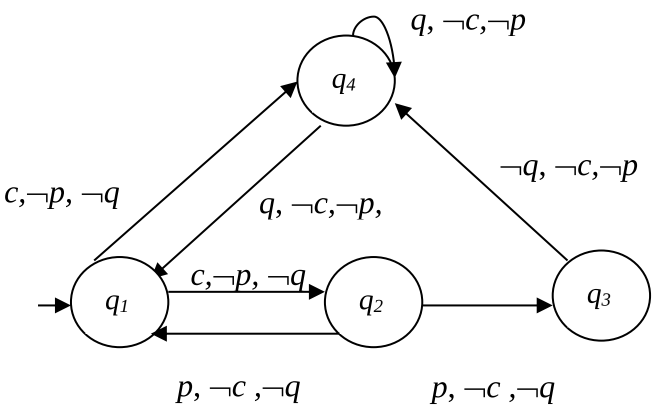


b. De façon analogue, vous obtiendrez l'automate de Buchi pour $\mathbf{F}(p \wedge \mathbf{G}(\neg q \wedge \neg c))$.

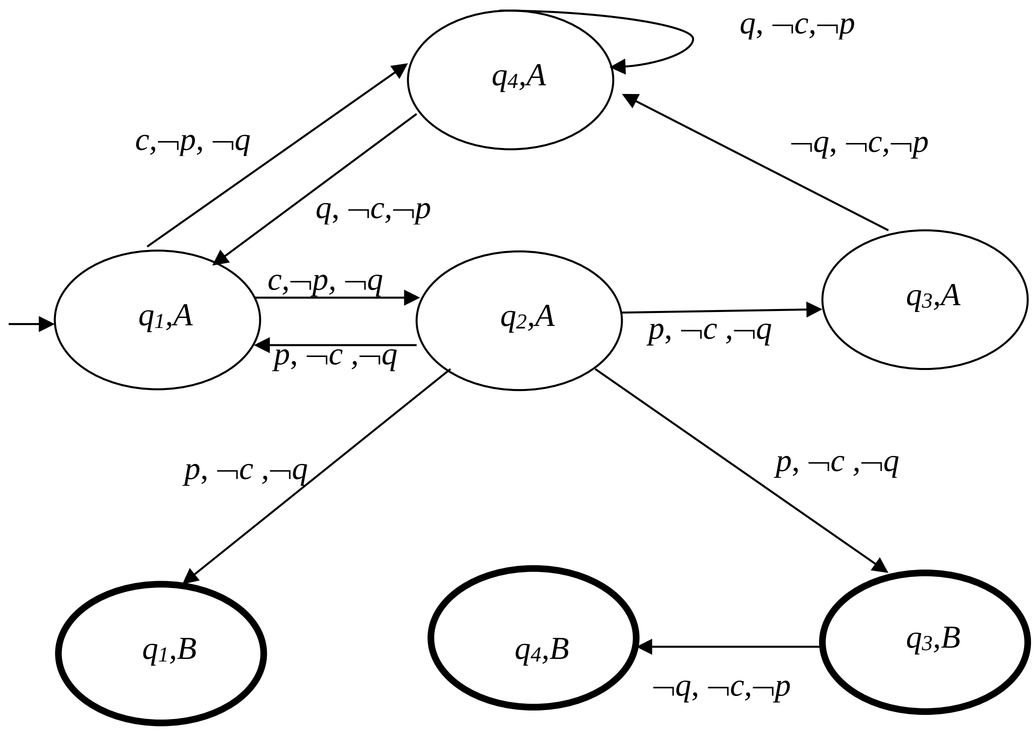


Il est à noter que lorsqu'une proposition n'apparait pas, c'est qu'elle peut être vraie ou fausse. Par exemple, à l'état A, nous avons toutes les combinaisons possibles de p, c et q. A l'état B, nous avons deux possibilités : $\neg q \wedge \neg c \wedge p$ et $\neg q \wedge \neg c \wedge \neg p$.

2. Remarquez que $\neg\varphi = \neg \mathbf{G}(p \Rightarrow \mathbf{F}(q \vee c)) = \mathbf{F}(p \wedge \mathbf{G}(\neg q \wedge \neg c))$. Il suffit donc de montrer que l'intersection de $\neg\varphi$ avec K est vide. Nous devrions passer à l'automate de Buchi correspondant à K (voir cours ch3 page 34 et 35). <u>Notez que tous les états de l'automate représentant K sont finaux.</u> Egalement, nous enrichissons l'automate par les transitions qui ne sont pas vérifiées, par exemple de l'état q_1 à l'état q_2, uniquement c est vraie, nous ajoutons donc $\neg p$ et $\neg q$ (ceci est différent pour l'automate de Buchi de la propriété). Voici le modèle modifié.



Ci-dessous le produit des deux automates :



Un état de cet automate ne peut progresser que si les deux états qui le constituent peuvent le faire aussi. Par exemple, de l'état q_2,A il peut passer à :

- q_1,A : par la transition $\neg c, p, \neg q$ (il est à noter que A peut faire cette transition puisque toutes les transitions à partir de A vers A sont possibles).
- q_3,A : par la transition $\neg c, p, \neg q$ (il est à noter que A peut faire cette transition puisque toutes les transitions à partir de A vers A sont possibles).
- q_1,B : par la transition $\neg c, p, \neg q$ (il est à noter que B peut faire cette transition puisque les deux transitions possible de B vers B sont $\neg c, p, \neg q$ et $\neg c, \neg p, \neg q$).

Ici le **langage du produit des automates est vide** puisqu'il n'existe pas de chemin infini qui, partant de l'état initial, visite un état acceptant une **infinité de fois**. La formule est donc non satisfaite.