Feuille d'exercices n°2

Intégration Numérique

Classes : $1^{\text{ère}}$ année ING-INF 2019/2020

Exercice 1 Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$. On considère la formule de quadrature de type interpolation à deux points suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \lambda_0 f(-1) + \lambda_1 f(1) + E_1(f)$$

1. Calculer λ_0 et λ_1 par deux méthodes.
2. Chercher $E_1(f)$.

Exercice 2 On considère la formule de quadrature de type interpolation suivante :

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\frac{1}{2}) + \lambda_2 f(1) + E_2(f) \tag{1}$$

1. Calculer les poids λ_0, λ_1 et λ_2 de la formule (1).
2. Quel est le degré de précision de cette formule.

Exercice 3 soit g une fonction réelle, continue et dérivable sur $[-1, 1]$ et α, β deux réels donnés tel que $-1 \leq \alpha < 0 < \beta \leq 1$. Considérons la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \lambda_1 g(\alpha) + \lambda_2 g(0) + \lambda_3 g(\beta) + E(g) \tag{2}$$

$E(g)$ désigne le terme d'erreur.

1. (a) Calculer les poids λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction de α et β tels que la formule (2) soit au moins de degré de précision 2.
   (b) Déterminer une relation entre α et β pour que cette formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
   (c) Trouver ensuite les valeurs de α et β pour que cette formule reste exacte pour les polynômes de degré 4.
   (d) En déduire alors la formule de quadrature correspondante et son degré de précision.

   Dans toute la suite $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3 désignent les coefficients ainsi trouvés.

2. Quelle serait l'erreur d'approximation si l'on utilisait la formule (2) pour évaluer
   $J = \int_{0}^{3} (5x^5 + 3x^2 + x + 1)dx$
3. (a) Calculer, à l'aide de la formule (2), une valeur approchée de $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$
   (*Indication : utiliser le changement de variable* $x = \frac{\pi}{4}(t + 1)$).
   (b) Calculer, à l'aide de la formule du trapèze, une valeur approchée de I.
   (c) Calculer, à l'aide de la formule de Simpson, une valeur approchée de I.
   (d) Laquelle des trois méthodes donne une meilleure approximation de I ?

Exercice 4 Soit α un nombre réel donné tel que $0 < \alpha < 1$. Soit $x_0 = -1$, $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1$ et soit ω_0, ω_1, ω_2 et ω_3 4 nombres réels. On considère la formule de quadrature :

$$J(f) \approx \sum_{i=0}^{3} \omega_i f(x_i) \tag{3}$$

1. Trouver ω_0, ω_1, ω_2 et ω_3 en fonction de α pour que la formule (3) soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
2. Déterminer α pour que la formule (3) soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 4.
3. En déduire alors les valeurs des poids ω_0, ω_1, ω_2 , ω_3 et le degré de précision de (3).

Exercice 5 soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f vérifiant :

$$P(0) = f(0) \quad , \quad P'(0) = f'(0) \quad P''(0) = f''(0) \quad et \quad P(1) = f(1)$$

1. Déterminer les coefficients α_1, α_2, α_3 et α_4 pour que la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f'(0) + \alpha_3 f''(0) + \alpha_4 f(1) + E(f) \tag{4}$$

   soit exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$. ($E(f)$ désigne le terme d'erreur)

Dans toute la suite α_1, α_2, α_3 et α_4 désignent les coefficients ainsi trouvés.

2. Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature (4).
3. (a) Montrer que le terme d'erreur $E(f)$ vérifie : $E(f) = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - P(x))dx$.

   (b) En déduire qu'il existe $\eta \in [0,1]$ tel que $E(f) = -\dfrac{1}{480} f^{(4)}(\eta)$.
4. Soit $a < b$ deux réels donnés et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$.

   (a) Déduire de la formule (4) une formule de quadrature pour approcher $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$, ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant qu'on notera $E(g)$.

   (b) Utilisier le résultat au point précédent pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos(\frac{\pi}{2}t)dt$, ainsi qu'un encadrement de l'erreur commise.

Exercice 6 : On considère $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$

1. Calculer, a l'aide de la formule composite des trapèzes à 3 points, une valeur approchée de I et une valeur approchée de J.
2. Calculer, a l'aide de la formule composite des trapèzes à 5 points, une valeur approchée de I et une valeur approchée de J.
3. Traiter de nouveaux ces deux questions en utilisant la formule composite de Simpson.

Exercice 7 : On veut déterminer une valeur approchée de π en utilisant les outils d'intégration numérique. On considère $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

1. Donner la valeur exacte de I.
2. (a) Donner la formule composite des rectangles à $m+1$ points pour le calcul de I.
   (b) Déterminer une valeur approhée de $\frac{\pi}{4}$ en prenant $m = 10$ et en arrondissant les résultats à 10^{-4}.
   (c) Donner une majoration de l'erreur commise dans ce cas.
3. (a) Donner la formule composite des trapèzes à $m+1$ points pour le calcul de I.
   (b) Trouver le nombre minimal m de sous-intervalles afin que l'erreur commise par cette formule soit $\leq 10^{-2}$
   (c) En déduire, dans ce cas, une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 8 (Examen Mai 2019) soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ et soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points -1 et 1 vérifiant :

$$P(-1) = f(-1) \quad , \quad P'(-1) = f'(-1) \quad et \quad P(1) = f(1)$$

1. Calculer les polynômes w_1, w_2 et w_3 de degré 2 définis par :
$$\begin{cases} w_1(-1) = w_1'(-1) = 0 & et \quad w_1(1) = 1 \\ w_2(-1) = w_2(1) = 0 & et \quad w_2'(-1) = 1 \\ w_3(1) = w_3'(-1) = 0 & et \quad w_3(-1) = 1 \end{cases}$$
2. Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2)
3. Donner l'expression du polynôme P dans la base $\{w_1, w_2, w_3\}$.
4. Donner, en fonction des dérivées de f, l'expression de l'erreur $E(x) = f(x) - P(x)$.
5. Déterminer les coefficients α_1, α_2 et α_3 pour que la fomule de quadrature
$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f'(-1) + \alpha_3 f(1) + E(f) \tag{5}$$
soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. ($E(f)$ désigne le terme d'erreur).

Dans toute la suite α_1, α_2 et α_3 désignent les coefficients ainsi trouvés.

6. Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature (5).
7. (a) Montrer que le terme d'erreur $E(f)$ vérifie : $E(f) = \int_{-1}^1 (f(x) - P(x))dx$.
   (b) En déduire qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $E(f) = -\frac{2}{9} f^{(3)}(\eta)$.
8. Soit $a < b$ deux réels donnés et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On découpe l'intervalle $[a,b]$ en m sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ à pas constant $H = \frac{b-a}{m}$, où $x_i = a + iH$, pour $0 \leq i \leq m$,
   (a) Déduire de la formule (5) une formule de quadrature élémentaire pour approcher $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)dt$, ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant qu'on notera $E_i(g)$.
   (*Indication : Effectuer le changement de variable affine* $t = \frac{H}{2}(x+1) + x_i$)
   (b) En utilisant le résultat au point précédent, construire une formule de quadrature composite pour approcher $I(g) = \int_a^b g(t)dt$, et donner une majoration du terme d'erreur correspondant.