EXAMEN DE LA SESSION PRINCIPALE

MATIERE : LOGIQUE FORMELLE

Nom	:	………………………………………………..	**Enseignant**	:	**M. Fourati Cherif, H. Ghazouani**
Prénom	:	………………………………………………..	**Formation**	:	**Ingénieur Informatique**
C.I.N	:	………………………………………………..	**Niveau / Groupes**	:	**1ère année/ A, B, C, D, E & F**
Section	:	………………………………………………..	**Documents**	:	**Non Autorisés**
Salle	:	………………………………………………	**Calculatrice**	:	**Non Autorisée**
			Nombre de pages	:	**8**
			Durée	:	**1 h 30 min**
			Barème	:	**3,5-4-2-4-1,5-5**

Identifiant secret

Identifiant secret

<u>Exercice 1 :</u> (Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats : 3,5 points)

1. Soient P un symbole de prédicat unaire, R un symbole de prédicat binaire, f un symbole de fonction uniaire et x, y, z des variables. Dire si les formules suivantes sont des formules bien formées de la logique des prédicats en cochant la case de la bonne réponse.

	Vrai	**Faux**
• $\forall x: [P(x) \wedge \exists y]$	☐	☐
• $\forall x: [\exists y: [R(f(x), y) \Rightarrow \neg \forall z: [R(z, x)]]$.	☐	☐
• $R(x, y) \wedge P(y)$.	☐	☐
• $\forall x: [P(x) \Rightarrow \neg\neg\neg \exists y: [R(x, y)]]$.	☐	☐
• $\exists x: [f(x) \wedge \exists y: [R(x, y)]]$.	☐	☐

2. Soit un sous langage de la logique des prédicats contenant une seule constante c, une seule variable x, un seul prédicat unaire P et un seul prédicat binaire Q. Quelles sont les formules atomiques qui peuvent être formées dans ce langage ?
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

3. Soient les variables x et y ainsi que les prédicats :
   - $M(x) : x - 4 = 1$,
   - $S(x,y) : x \geq y$.

   Prenons l'ensemble des <u>entiers naturels</u> comme domaine des variables x et y, donner l'expression d'interprétation et calculer la valeur de vérité des formules suivantes :

   a. $\exists x: [M(x)]$:……………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………..

   b. $\exists x: [\forall y: [S(x, y)]]$: ……………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………..

NE RIEN ECRIRE ICI

<u>Exercice 2 :</u> (Variables et substitution : 4 points)

Soit un sous ensemble de la logique des prédicats, avec :

- R, S et = sont des symboles de prédicats binaires,
- f et g sont des symboles de fonctions, f d'arité 1 et g d'arité 2,
- a est un symbole de constante.

1. Soulignez les occurences libres et entourer les occurences liées des variables de la formule F suivante :

$$\forall y: \left[\exists z: \left[R\big(y, g(z,a)\big) \vee S(x,y)\right]\right] \wedge \exists x: [g(x,a) = y \Rightarrow \neg S(y,z)]$$

2. Préciser les variables libres et les variables liées dans F :

Variables libres : …………………………………………………………………… ………..

Variables liées : …………………………………………………………………… ………..

3. Indiquer la portée de $\exists z$ dans F en la soulignant dans F :

$$\forall y: \left[\exists z: \left[R\big(y, g(z,a)\big) \vee S(x,y)\right]\right] \wedge \exists x: [g(x,a) = y \Rightarrow \neg S(y,z)]$$

4. Souligner tous les termes (pas les formules atomiques) dans la formule F :

$$\forall y: \left[\exists z: \left[R\big(y, g(z,a)\big) \vee S(x,y)\right]\right] \wedge \exists x: [g(x,a) = y \Rightarrow \neg S(y,z)]$$

5. Souligner toutes les formules atomiques dans la formule F :

$$\forall y: \left[\exists z: \left[R\big(y, g(z,a)\big) \vee S(x,y)\right]\right] \wedge \exists x: [g(x,a) = y \Rightarrow \neg S(y,z)]$$

NE RIEN ECRIRE ICI

6. Soit la substitution $s=\{y/f(z)\}$. On désire éliminer le premier quantificateur universel ($\forall y$) en appliquant s à F. Cette élimination est-elle possible ? Si oui donner la formule correspondante, si non expliquer.
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

<u>Exercice 3 :</u> (Unification : 2 points)

1. Est-ce que chaque groupe d'expressions suivant est unifiable? Si oui, donner la substitution la plus générale. Dans ces expressions, les lettres en majuscules représentent des variables, et celles en minuscule sont des constantes.

   a. p(a) et p(X).

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

   b. p(a,b) et p(Z).

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

   c. p(f(X), g(y)), p(a,g(b))

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

   d. p(X, f(X)), p(a, Z)

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

NE RIEN ECRIRE ICI

e. p(X,f(g(X)),a) et p(b,Y,Z)

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

f. p(X,Y), p(f(Z),X) et p(W,f(X))

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

2. Soient les formules $\varphi_1 = p(X,f(Y))$ et $\varphi_2 = p(b,f(Y))$ et soit la substitution s={$X/b, Y/a$} :
   a. s est-il un unificateur de φ_1 et φ_2 ?
      …………………………………………………………………………………………
      …………………………………………………………………………………………
   b. s est-il l'unificateur le plus général de φ_1 et φ_2 ? Expliquer ?
      …………………………………………………………………………………………
      …………………………………………………………………………………………
      …………………………………………………………………………………………

<u>Exercice 4 Traduction (4 points) :</u>

Considérez les phrases suivantes :

P1. Tout crime est commis par quelqu'un.
P2. Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.
P3. Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.
P4. Les crimes existent.
P5. Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.
P6. Les gens malhonnêtes commettent au moins un crime.

1. Traduire ces phrases en formules de la logique des prédicats. <u>Définir tous les prédicats utilisés</u>.

Nom : ……………………………………………………..

Prénom : ……………………………………………………..

C.I.N : ……………………………………………………..

Section : ……………………………………………………..

Salle : ……………………………………………………..

Identifiant secret

Identifiant secret

Prédicats :
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Traduction :
P1…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

P2…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

P3…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

P4…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

P5…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

P6…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. Exprimer sous forme d'une formule de la logique des prédicats le fait : « P5 est une conséquence logique de P1, P2, P3 et P4 ».

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

NE RIEN ECRIRE ICI

<u>Exercice 5 Forme clausale (1,5 points) :</u>

Mettre la formule suivante sous forme clausale en montrant toutes les étapes de la transformation :

$$\exists x : \forall y : [P(x, y)] \Rightarrow \forall x : \exists y : [Q(x, y) \land R(y)]$$

………..…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………..…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

………..…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

<u>Exercice 6 Preuve formelle (5 points) :</u>

Considérer les informations suivantes :

- Une constante : *K* représente une personne s'appelant *Kamel*.
- Deux variables : *x*, *y*.
- Un prédicat binaire *Tm*, tel que *Tm*(*x*,*y*) signifie que « *x a la température y* ».
- Quatre prédicats unaires *G*, *Tr*, *F* et *To*, tels que
  G(*x*) signifie que « *x a la grippe* »,
  Tr(*x*) signifie que « *x doit aller travailler* »,
  F(*x*) signifie que « *x a de la fièvre* »,
  To(*x*) signifie que « *x tousse* »,

NE RIEN ECRIRE ICI

Soient l'ensemble des formules de la logique des prédicats suivantes :

- $\Phi_1 = \forall x: [G(x) \Rightarrow \neg Tr(x)]$
- $\Phi_2 = \forall x: [F(x) \wedge To(x) \Rightarrow G(x)]$
- $\Phi_3 = \forall x: \forall y: [Tm(x, y) \wedge S(y, 38) \Rightarrow F(x)]$
- $\Phi_4 = To(K) \wedge \exists y: [Tm(K, y) \wedge S(y, 38)]$

1. Monter en utilisant <u>le système formel déduction naturelle</u> que Kamel ne doit pas aller travailler.
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

2. Montrer en utilisant <u>le principe de résolution pour la réfutation</u> que Pierre ne doit pas aller travailler.
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

NE RIEN ECRIRE ICI