ENI CARTHAGE
المدرسة الوطنية للمهندسين بقرطاج
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage

Couples de variables alétoires continues

Enseignants :Aloui.M/Bacha.I/Debbech.A **AU :2019/2020**

Classe :1Ing-Info **.**

1 Fonction Densité de Probabilité

1.1 *Définition*

Un couple de variables aléatoires continues (X,Y) est défini par sa densité de probabilité $f(x,y)$.Cette densité doit respecter la condition de normalisation c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ et $f(x,y) \geq 0 \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$
L'expression de la probabilité est classique $P(\{(x,y) \in A\}) = \int\int_A f(x,y)dxdy.$

1.2 *Exemple 1*

Soit l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

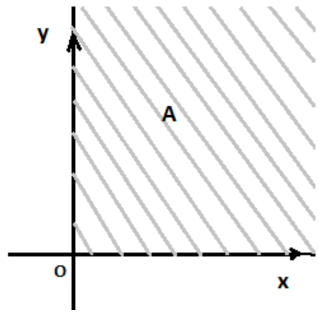
$$. \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & si \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On se propose de montrer que f est une densité de probabilité d'un couple de de variables alétoires continues (X,Y).

On a $\forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

et $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x,y)dxdy = 1$

avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)\neq 0\}=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$



donc $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy$
$=2\int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx\ \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy=2[e^{-x}]_0^{+\infty}\ .\frac{-1}{2}[e^{-2y}]_0^{+\infty}=1$
Conclusion

f est la densité de probabilité d'un couple de variables alétoires continues (X,Y)

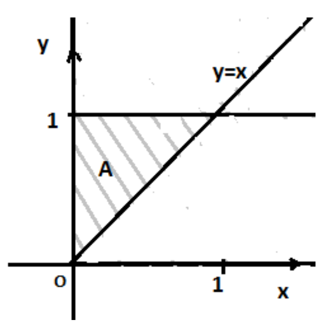
1.3 Exemple 2

On considère l'application g définie par :

$g:\ \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$.\ \ (x,y)\ \mapsto \begin{cases} axy & si\ \ 0\leq x\leq y\leq 1; a\in\mathbb{R} \\ 0 & sinon \end{cases}$
Déterminons a pour que g soit une densité de probabilité d'un couple de de variables alétoires

continues (X,Y) donc $a=8$
On a $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)\geq 0$ et $\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy=\int\int_A g(x,y)dxdy=1$
avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/g(x,y)\neq 0\}$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq y\leq 1\}$



donc $\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy = a\int_0^1 (\int_x^1 ydy)xdx = 1 \iff a\int_0^1 ([\frac{y^2}{2}]_x^1)xdx = 1 \iff \frac{a}{2}\int_0^1 (1-x^2)xdx = 1 \iff \frac{a}{2}[(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]_0^1)dx = 1 \iff \frac{a}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = 1 \iff \frac{a}{8} = 1$

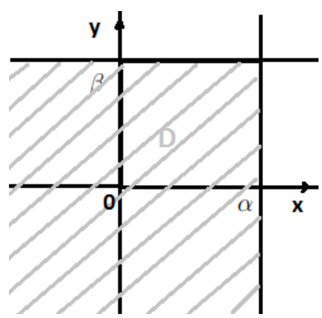
$\iff a = 8 \geq 0$ donc $a = 8$

2 Fonction de répartition

On désigne par F la fonction de répartition d'un couple de variables alétoires continues (X,Y) de densité de probabilité f définie par :

$F: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

. $(\alpha,\beta) \mapsto P(x < \alpha, y < \beta) = P((x,y) \in D)$



avec $F(x,y) \geq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$F(+\infty,+\infty) = 1$ (x et y sont sûrement quelque part)

$F(-\infty,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ et x ne peut pas être inférieure à $-\infty$

$F(x,-\infty) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et y ne peut pas être inférieure à $-\infty$

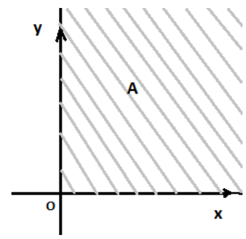
F est aussi défini par : $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} (\int_{-\infty}^{y} f(u,v)du)dv$.

On a donc $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

2.1 Exemple

Revenons àl'exemple 1

On $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} (\int_{-\infty}^{y} f(u,v)du)dv$



On a $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}(\int_{-\infty}^{y} 2e^{-u}e^{-2v}du)dv = 2(\int_{-\infty}^{x} e^{-u}du)(\int_{-\infty}^{y} e^{-2v}dv) = 2[e^{-u}]_{-\infty}^{x} .\frac{-1}{2}[e^{-2v}]_{-\infty}^{y} = e^{-x}e^{-2y}$ et $F(x,y) = 0$ sinon

On vérifie bien que $F(+\infty,+\infty) = 1$

$F(-\infty,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

$F(x,-\infty) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

3 Probabilité Marginale

Par analogie avec les variables alétoires discrètes, on peut définir des densités marginales du couple de variables alétoires réelles continues $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, x$ fixé pour X
et $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, y$ fixé pour Y
D'où les valeurs moyennes marginales $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy$
$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy$ On appelle répartitions marginales du couple de variables alétoires réelles continues (X,Y) les fonctions de répartitions F_X pour X et F_Y pour Y définies par $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ et $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$

3.1 Exemple 1

Concernant l'exercice 1.les densités marginales du couple de variables alétoires réelles continues sont

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, x$ fixé $, x \geq 0$
. $\quad = \int_{0}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dy$

. $= 2e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-2y}dy$

. $= 2e^{-x}[\frac{-1}{2}e^{-2y}]_0^{\infty}$

. $= e^{-x}$

et $f_X(x) = 0$ sinon

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, y$ fixé $, y \geq 0$

. $= \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dx$

. $= 2e^{-2y}[-e^{-x}]_0^{\infty}$

. $= 2e^{-2y}$

et $f_Y(y) = 0$ sinon

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$

. $= \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

. $= [xe^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx$

. $= [e^{-x}]_0^{\infty} = 1$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy$

. $= \int_0^{\infty} 2ye^{-2y}dy$

. $= 2\int_0^{\infty} ye^{-2y}dy$

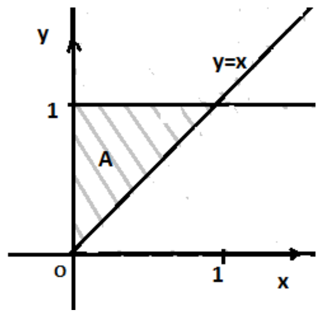
. $= [\frac{-1}{2}ye^{-2y}]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2y}dy$

. $= 2[\frac{1}{2}[e^{-2y}]_0^{\infty}] = \frac{1}{2}$

3.2 Exemple 2

On considère l'application g définie par :

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 8xy & si \quad 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dy, x$ fixé $, 0 \leq x \leq 1$

$. \qquad = \int_x^1 8xydy$

$. \qquad = 8x[\frac{1}{2}y^2]_x^1$

$. \qquad = \frac{8}{2}x(1-x^2)$

$. \qquad = 4x(1-x^2)$

$g_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx, y$ fixé $, 0 \leq y \leq 1$

$. \qquad = \int_0^y 8xydx$

$. \qquad = 8y[\frac{1}{2}x^2]_0^y$

$. \qquad = 4y^3$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg_X(x)dx$

$. \qquad = \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx$

$. \qquad = 4[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1$

$. \qquad = \frac{8}{15}$

$E(Y) = \int_0^1 yg_Y(y)dy$

$. \qquad = \int_0^{\infty} 4y^4dy$

$. \qquad = 4[\frac{1}{5}[y^5]_0^1] = \frac{4}{5}$

4 Indépendance de deux variables réelles à densités

4.1 Définition

Deux variables alétoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$F_{X,Y}(x,y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P((X \leq x))P((Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y)$

4.2 Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densités f_X et f_Y.

X et Y sont indépendantes si et seulement si le couple (X,Y) admettant pour densité la fonction $f_{(X,Y)}$ vérifie $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

4.3 Exemple1

Soit l'application f définie par :

$$\begin{array}{lccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ . & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & si \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{cases} f_X(x) == e^{-x} & si \quad x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & sinon \end{cases} \quad \begin{cases} f_Y(y) = 2e^{-2y} & si \quad x \geq 0 \\ f_Y(y) = 0 & sinon \end{cases}$$

et $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

X et Y sont donc indépendants

4.4 Exemple2

Soit l'application g définie par :

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$. \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 8xy & si \quad 0 \leq x \leq y \leq 1; a \in \mathbb{R} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_X(x) = 4x(1-x^2) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_X(x) = 0 & sinon \end{cases} \qquad \begin{cases} g_Y(y) = 4y^3 & si \quad 0 \leq y \leq 1 \\ g_Y(y) = 0 & sinon \end{cases}$$

et $g(x,y) \neq g_X(x)g_Y(y)$

X et Y ne sont pas donc indépendant

5 Somme de deux variables réelles à densité Indépendantes

5.1 Définition

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité de probabilité $f_{X,Y}$ et de densité marginales f_X et f_Y.

Posons $Z = X+Y$. La fonction de répartition de Z est défini par :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int\int_{D_z} f(x,y)dxdy$$

avec $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \neq z\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{z-x} f_{(X,Y)}(x,y)dy)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{z} f_{(X,Y)}(x,t-x)dt)dx \\ &= \int_{-\infty}^{z} (\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,t-x)dx)dt \end{aligned}$$

5.2 Proposition

La somme $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction f_Z définie par :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(z-y,y)dy$$

5.3 Proposition

Si X et Y sont indépendantes, alors la somme $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction définie par :

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$

On dit que $f_Z = f_{X+Y}$ est le produit de convolution de X et de Y

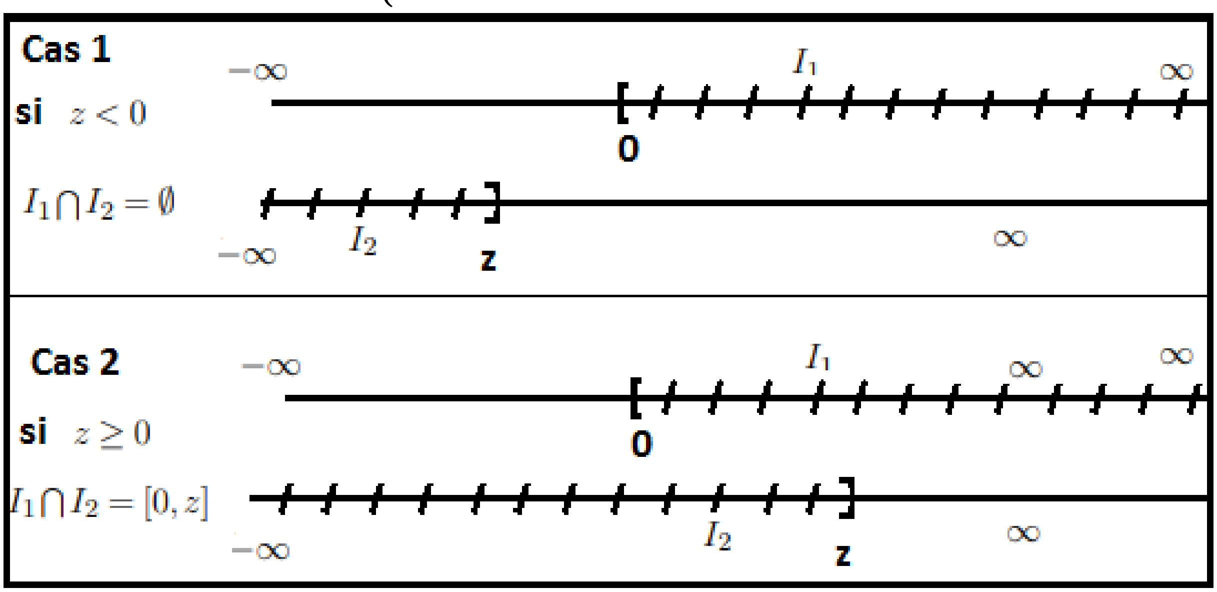
et on note $f_{X+Y} = f_X * f_Y = f_Y * f_X$

5.4 Exemple

Reprenons notre exemple 1 X et Y sont indépendants la loi de $Z = X+Y$ est définie par

$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)dx.$

On a $\begin{cases} f_X(x) \neq 0 & \Rightarrow \quad x \in I_1 = [0, +\infty[\\ f_Y(z-x) \neq 0 & \Rightarrow \quad z - x \geq 0 \Rightarrow z \geq x \Rightarrow x \in I_2 =]-\infty, z] \end{cases}$



$f_Z(z) = 2\int_0^z e^{-x}(x) e^{-2(z-x)}dx$

. $\quad = 2e^{-2z} \int_0^z e^x dx$

. $\quad = 2e^{-2z}[e^x]_0^z$

. $\quad = 2e^{-2z}(e^z - 1) = 2(e^{-z} - e^{-2z})$ si $z \geq 0$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(e^{-z} - e^{-2z}) & si \qquad z \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

5.5 Proposition

si X et Y sont deux variables alétoires réelles indépendantes de lois normales $N(\mu_1, \sigma_1)$ et $N(\mu_2, \sigma_2)$ alors $X+Y$ suit la loi normale $N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

6 Covariance

6.1 Définition

Si X et Y sont deux variables alétoires réelles admettant une esperence mathématique $/E(X^2)$ et $/E(Y^2)$ existent alors (X,Y) admet une espérance mathématique donnée par $E(XY) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy$

6.2 Exemple1

$E(XY) = \int_0^{+\infty} 2\int_0^{+\infty} xye^{-x}e^{-2y}dxdy = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \int_0^{+\infty} ye^{-2y}dy$ On doit effectuer deux intégrations par parties. $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = e^{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = -e^{-x} \end{cases}$

donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$ $\begin{cases} U(y) = y \\ V'(y) = e^{-2y} \end{cases}$ $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = -\frac{1}{2}e^{-2y} \end{cases}$

donc $\int_0^{+\infty} ye^{-2y}dx = [-\frac{1}{2}ye^{-2y}]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} - e^{-2y}]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$ $E(XY) = \frac{1}{2}$

6.3 Exemple2

On a $E(XY) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyg(x,y)dxdy = 8\int_0^1 y^2(\int_0^y x^2dx)dy = 8\int_0^1 y^2([\frac{1}{3}x^3]_0^y)dy = \frac{8}{3}\int_0^1 y^5dy = \frac{4}{9}$

6.4 Covariance

Soient X et Y deux variables alétoires admettant une espérance et telque $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent alors la covariance du couple (X,Y) est égale à $E((X-E(X))(Y-E(Y)))$ qui est aussi égale à $E(XY)-E(X)E(Y)$

La covariance du couple (X,Y) est notée $Cov(X,Y)$.

6.5 Proposition

On a $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

6.6 Remarques

Soient X Y et Z trois variables aléatoires à densité admettant des espérances mathématiques $/E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent alors :

$Cov(\lambda X+\mu Y,Z)=\lambda Cov(X,Z)+\mu Cov(Y,Z)$

$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

$Cov(X,X)=E(X^2)-E^2(X)=Var(X)$

6.7 Proposition

Pour tout couple de variables alétoires continues (X,Y) on a $|Cov(X,Y)|\leq\sqrt{Var(X)Var(Y)}$

6.8 Interprétation de la covariance

✓ Si $Cov(X,Y)>0$, X et Y sont en même temps supérieurs ou en même temps inférieurs à leur espérance.Le lien est proche d'être linéaire entre les variables avec une pente positive

Exemple :X temperature exterieureY= consommation de glaces.

✓ Si $Cov(X,Y)<0$: Quand une variable est supérieure à son espérance, l'autre est inférieure à son espérance.Le lien est proche d'être linéaire entre les variables avec une pente négative

Exemple :X température exterieureY= Facture de chauffage .

✓ Si $Cov(X,Y) = 0$, C'est le cas de la pente nulle.

Attention :Ce cas ne correspond pas forcement à l'indépendance entre les deux variables.

6.9 Remarque

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles continues indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$

6.10 Exemples

Pour le couple (X,Y) de variables aléatoires réelles continues définie par la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & si \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

X et Y étant indépendantes on a $Cov(X,Y) = 0$

Pour le couple (X,Y) de variables aléatoires réelles continues définie par la fonction g définie par :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 8xy & si \quad 0 \leq x \leq y \leq 1; a \in \mathbb{R} \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{cases} g_X(x) = 4x(1-x^2) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_X(x) = 0 & sinon \end{cases} \qquad \begin{cases} g_Y(y) = 4y^3 & si \quad 0 \leq y \leq 1 \\ g_Y(y) = 0 & sinon \end{cases}$$

$E(X) = \frac{8}{15}$, $\quad E(Y) = \frac{4}{5}$, $\quad E(XY) = \frac{4}{9}$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{8}{15}\frac{4}{5} = \frac{12}{675} \geq 0$ on est dans le premier cas de la covariance

6.11 Le coefficient de corrélation linéaire

6.12 Définition

Le coefficient de corrélation linéaire est défini par des variables non constantes X et Y par $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

6.13 Remarques

On a toujours $\rho(X,Y) \in [-1,1]$

Si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$ et donc $\rho(X,Y) = 0$.On a par conséquent $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Attention ! :La réciproque est fausse

6.14 Interprétation

✓ Si $\rho(X,Y) > 0$ alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.

✓Si $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow$ une des variables aléatoires est une fonction affine strictement croissante de l'autre variable. $\Leftrightarrow \exists a > 0, b \in \mathbb{R} / Y = aX + b$ ou $X = aY + b$

✓ Si $\rho(X,Y) \longrightarrow 1$ La dépendance est forte entre les deux variables aléatoires.

✓ Si $\rho(X,Y)$ est trés proche de 0, les deux variables sont linéairement indépendantes.

Attention

Ne pas confondre une dépendance linéaire et une indépendance.

il y a une faible dépendance entre les variables

✓ Si $\rho(X,Y) = 0$ alors X et Y sont linéairement indépendantes.mais elles ne sont pas forcèments indépendantes (Il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $Y = e^X$ ou $Y = Log(X)$...

✓ Si $\rho(X,Y) < 0$ les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse

✓ Si $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow$ une des variables aléatoires est une fonction affine strictement décroissante de l'autre variable. $\Leftrightarrow \exists a>0, b \in \mathbb{R}/Y=-aX+b$ ou $X=-aY+b$

✓ Si $\rho(X,Y) \longrightarrow -1$ La dépendance est forte entre les deux variables aléatoires.

✓ Si $\rho(X,Y) \longrightarrow 0$,X et Y sont linéairement indépendantes.(La dépendance est faible entre les deux variables aléatoires).

Exemple

Pour le même cas où $E(X)=\dfrac{8}{15}, \quad E(Y)=\dfrac{4}{5}, \quad E(XY)=\dfrac{4}{9}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{15}\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{675}\leq 0$

$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.48$

$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=0.22$

$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.36$

$\sigma(Y)=\sqrt{Var(Y)}=0.6$

$\rho(X,Y)=0.13 \longrightarrow 0$ la dépendance est faible entre les variable.