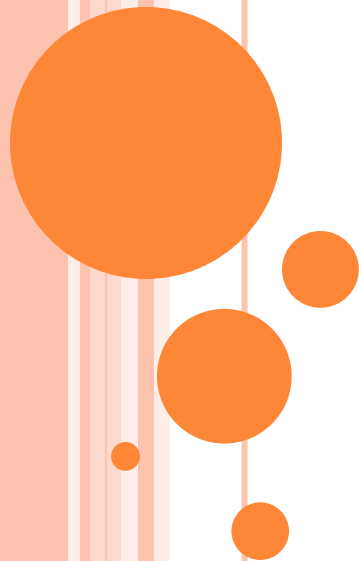


CHAPITRE 4

PARTIE 2

LOGIQUE DES PRÉDICATS



2

Déduction naturelle

Logique des prédicats

Elimination de \forall

3

n $\forall x:[\phi]$

.

.

m $\phi[x/t]$

\forall -E, n

avec t libre pour x dans ϕ

Un terme t est libre pour une variable x dans une formule ϕ ssi en remplaçant x par t dans ϕ , aucune occurrence libre de x ne doit être remplacée par une variable liée dans t .

Exemple

$\forall x:[\forall y :[\text{aime}(x,y)]]$

$\phi = \forall y :[\text{aime}(x,y)]$

Variable libre

$\phi[x/\text{fils}(y)] = \forall y :[\text{aime}(\text{fils}(y),y)]$

Variable liée

Introduction de \forall

4

n	ϕ
.	.
.	.
m	$\forall x:[\phi]$

\forall -I, n

x non libre ni dans les
prémisses ni dans les
hypothèses actives de la
preuve car x est
générique.

Elimination de \forall (exemple)

5

1	$\forall x: [\text{aime}(\text{Mabrouk}, x)]$		
2	$\text{aime}(\text{Mabrouk}, \text{Ali})$	$\forall\text{-E}, 1, x/\text{Ali}$	Correct

1	$\forall x: [\exists y: [P(x, y)]]$		
2	$\exists y: [P(y, y)]$	$\forall\text{-E}, 1, x/y$	Erreur

- L'erreur découle du fait que le terme y n'est pas libre pour x dans $\exists y: [P(x, y)]$.

Introduction de \forall (1/2)

6

1	$\text{aime}(\text{Mabrouk}, x)$	P	
2	$\forall x: [\text{aime}(\text{Mabrouk}, x)]$	$\forall\text{-I}, 1$	Erreur

- La variable x est libre dans la prémisse, donc pas de généralisation pour x .

1	$\begin{array}{ l} P(x) \end{array}$	H	
2	$\forall x: [P(x)]$	$\forall\text{-I}, 1$	Erreur
3	$P(x) \Rightarrow \forall x: [P(x)]$	$\Rightarrow\text{-I}, 1\text{-}2$	

- La variable x est libre dans l'hypothèse, donc pas de généralisation pour x .

Introduction de \forall (exemples) 2/2

7

□ Montrons $\forall x:[A(x) \Rightarrow A(x)]$

1	<u>A(x)</u>	H
2	A(x)	R, 1
3	A(x) \Rightarrow A(x)	\Rightarrow -I, 1-2
3	$\forall x:[A(x) \Rightarrow A(x)]$	\forall -I, 3

□ Correct car x n'est pas active dans aucune hypothèse (x est non libre dans les hypothèses actives ni dans les prémisses).

Introduction de \exists

8

n $\phi[x/t]$

.

.

m $\exists x:[\phi]$

\exists -I, n

t est un terme libre pour
x dans ϕ .

- Si $\phi(t)$ est vrai pour un élément alors on peut inférer l'existence d'un x pour lequel ϕ est vrai.

Introduction de \exists (exemple)

9

1 aime(Mabrouk,Ali)

2 $\exists x:[\text{aime}(x,\text{Ali})]$ $\exists\text{-I, 1, } x/\text{Mabrouk}$

Elimination de \exists

10

n $\exists x:[\phi]$

.

m $\phi[x/a]$

.

p ψ

p+1 ψ

H,

\exists -E, n, m-p

a ne doit pas apparaitre ni dans les prémisses, ni dans les hypothèses actives ni dans ψ .

Elimination de \exists (Exemple)

11

□ Montrons que $\exists x:[p(x) \wedge q(x)] \vdash \exists x:[p(x)]$

1	$\exists x:[p(x) \wedge q(x)]$	P
2	<u>$p(a) \wedge q(a)$</u>	H, a une constante nouvelle
3	$p(a)$	\wedge -E, 2
4	$\exists x:[p(x)]$	\exists -I, 3, x/a
5	$\exists x:[p(x)]$	\exists -E, 1, 2-4 Application correcte car a n'apparaît ni dans la prémisse ni dans $\exists x:[p(x)]$ et il n'existe aucune hypothèse active.

Elimination de \exists (Exemple incorrect)

12

1	$\exists x:[p(x)] \wedge (p(a) \Rightarrow \forall y:[q(y)])$	P
2	$\exists x:[p(x)]$	E- \wedge , 1
3	$p(a) \Rightarrow \forall y:[q(y)]$	E- \wedge , 1
4	$\begin{array}{ l} p(a) \end{array}$	H
5	$\begin{array}{ l} \forall y:[q(y)] \end{array}$	\Rightarrow -E, 3, 4
6	$\forall y:[q(y)]$	\exists -E, 2, 4-5

Application incorrecte
car a se trouve dans la
prémisse

7 ...