Chapitre 3 Ordonnancement de projet

I- Généralités
1- Introduction

Un problème d'ordonnancement désigne une classe de problèmes se rattachant particulièrement à la conception des projets qui nécessite l'intervention d'une multitude de tâches (opérations) soumises à plusieurs contraintes.
Etablir l'ordonnancement ou le programme d'un projet consiste à :

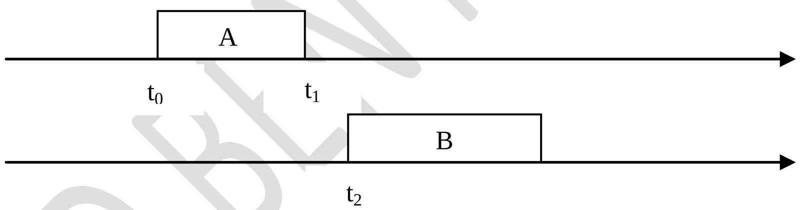
- déterminer l'ordre et le calendrier d'exécution des différentes tâches tout en respectant les contraintes.
- contrôler le déroulement des travaux pour détecter à temps les retards possibles, et de remplacer le calendrier courant par un programme d'urgence.

2- Les contraintes

Il existe trois types de contraintes qui peuvent s'opposer à l'exécution des opérations d'un projet telles que les contraintes potentielles, disjonctives et cumulatives. Dans la suite, on va s'intéresser uniquement aux **contraintes potentielles** qui peuvent êtres subdivisées en deux types. A l'aide de deux exemples simples, nous allons comprendre ces deux types à savoir les contraintes de succession et les contraintes de localisation temporelle.

a- Les contraintes de succession

Exemple : on considère deux tâches A et B telle que la tâche B ne peut pas commencer qu'après la fin de la tâche A.

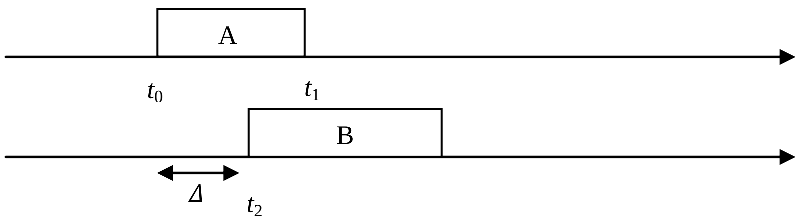


$t_2 \geq t_1$

Soit t_1 la date d'achèvement de l'exécution de la tâche A, alors la date de début de la tâche B notée t_2 doit vérifier $t_2 \geq t_1$.

b- Les contraintes de localisation temporelle

Exemple : on considère deux tâches A et B telle que la tâche B ne peut pas commencer qu'après Δ unités de temps de la date de début de la tâche A.



$t_2 \geq t_0 + \Delta$

Soit t_0 la date de début d'exécution de la tâche A. Alors, il faut attendre Δ unités de temps pour pouvoir commencer l'exécution de la tâche B. D'où $t_2 \geq t_0 + \Delta$.

II- Représentation MPM

1- Définition

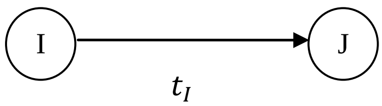
Dans ce cas, un projet est donné par un graphe orienté où chaque tâche est représentée par un sommet et les contraintes potentielles sont représentées par des arcs.

2- Exemples

a- Exemple 1

On considère deux tâches I et J de durées respectives t_{I}et t_{J} et telle que la tâche I précède la tâche J (autrement dit, J succède I).

Question 1 : donner la représentation MPM dans ce cas.



t_I: durée d'exécution de la tâche I

b- Exemple 2

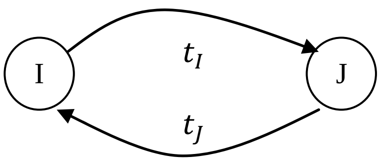
Tâche	Durée	Tâches précédentes	Tâches suivantes
A	7	-	H
B	1	F	C, D
C	2	B, H	E
D	2	B, H	G
E	2	C	G
F	2	-	B
G	1	E, D	-
H	8	A	C, D

Remarques :

i- la tâche A n'admet pas de précédent, alors elle peut s'exécuter la première.
(même remarque pour le tâche F).

ii- la tâche A précède la tâche H, alors la tâche H ne peut s'exécuter que si la tâche A est achevée.

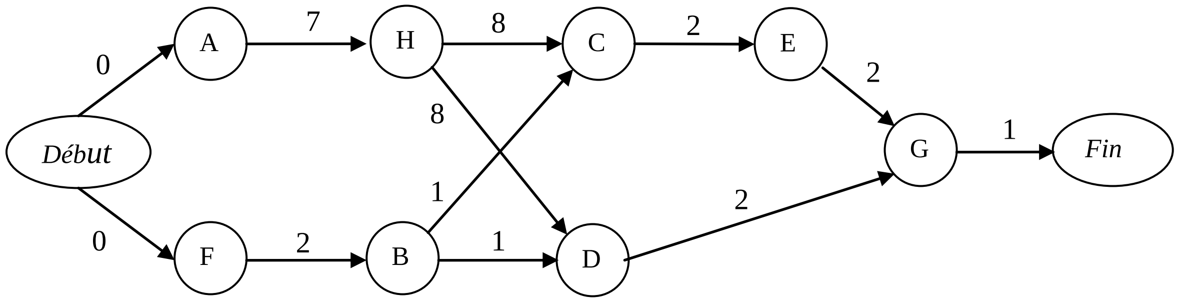
iii- le graphe MPM ne contient pas de circuit, sinon le projet serait irréalisable.
Supposons qu'on a un circuit formé uniquement par deux tâches I et J.



Ainsi, la tâche I ne peut s'exécuter que si la tâche J est terminée et la tâche J ne peut s'exécuter que si la tâche I est terminée. Dans ce cas, le projet est irréalisable (état de blocage).

iv- On ajoutera deux tâches fictives *Début* et *Fin* de durées nulles, et ce pour indiquer le début et la fin du projet.

Question 2 : donner le graphe MPM correspondant.



Remarque : le graphe MPM obtenu est un graphe à niveaux. C'est-à-dire ce graphe respecte l'ordre topologique.

Objectif : on cherche dans ce chapitre à déterminer la durée minimale du projet et le calendrier d'exécution des différentes tâches.
Pour ce faire, il faut appliquer une démarche spécifique qui consiste à calculer les dates de début au plus tôt et au plus tard.

3- dates de début au plus tôt

a- Notation :

d(i) : date de début au plutôt de la tâche i.

b- Algorithme : dates de début au plus tôt

Début

d(*Début*) = 0; $t_{Début} = 0$

Pour toute tâche i (selon l'ordre topologique)

$d(i) = \max_{j \in P(i)} \{d(j) + t_j\}$

Fin Pour

Fin

NB : P(i) est l'ensemble des prédécesseurs de la tâche i.

Question 3 : donner les dates de début au plus tôt de chacune des tâches.

d(*Début*) = 0 ; . $t_{Début} = 0$
d(A) = d(*Début*) + $t_{Début}$ = 0 + 0 = 0.
d(F) = d(*Début*) + $t_{Début}$ = 0 + 0 = 0.
d(H) = d(A) + t_A= 0 +7 = 7.
d(B) = d(F) + t_F= 0 +2 = 2.
d(C) = max {d(H) + t_H, d(B) + t_B}= max {7 + 8, 2 + 1} = 15.
d(D) = max {d(H) + t_H, d(B) + t_B}= max {7 + 8, 2 + 1} = 15.
d(E) = d(C) + t_C = 15 + 2 = 17.
d(G) = max {d(E) + t_E, d(D) + t_D}= max {17 + 2, 15 + 2} = 19.
d(Fin) = d(G) + t_G= 19 + 1 = 20.

Remarque : la durée d'exécution minimale de la réalisation d'un projet correspond à la date de début au plus tôt de la tâche fictive *Fin*.

Question 4 : donner la durée minimale du projet.
La durée minimale du projet : 20 jours.

4- dates de début au plus tard

a- Notation :

D(i) : date de début au plus tard de la tâche i de manière à ce que le projet se termine le plus tôt possible (c'est-à-dire, dans notre cas le $20^{\text{ième}}$ jours).

Algorithme : Dates de début au plus tard

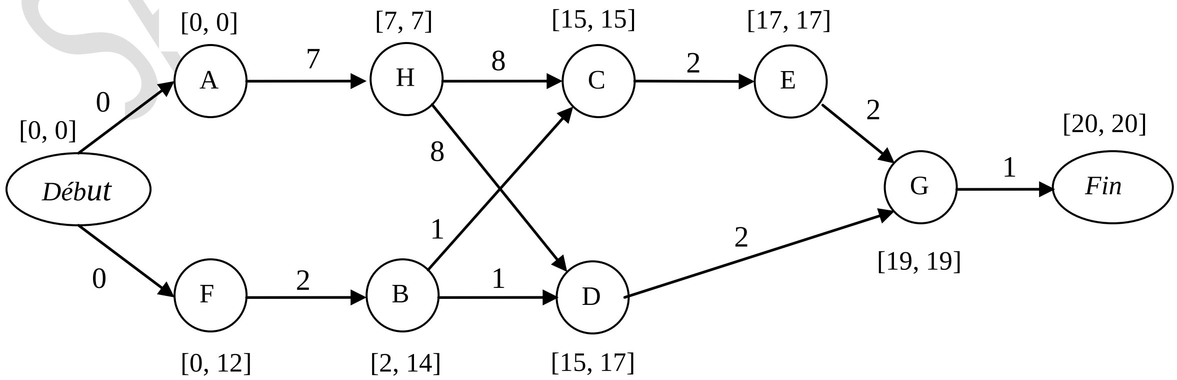
Début
    D(*Fin*) = d(*Fin*)
    Pour toute tâche i (selon l'ordre inverse de l'ordre topologique)
        $D(i) = \min_{j \in S(i)}\{D(j)\} - t_i$
    Fin Pour
Fin

NB : S(i) est l'ensemble des successeurs de la tâche i.

Question 5 : déterminer les dates de début au plus tard.

D(*Fin*) = d(*Fin*)=20
D(G)=D(Fin) – t_G=20 – 1=19.
D(E)=D(G) – t_E=19 – 2= 17.
D(C)=D(E) – t_C=17 – 2= 15.
D(D)=D(G) – t_D=19 – 2= 17.
D(H)=$min\{\mathrm{D(C)}, \mathrm{D(D)}\} - t_{\mathrm{H}}$=$min\{15, 17\}$– 8=7.
D(B)=$min\{\mathrm{D(C)}, \mathrm{D(D)}\} - t_{\mathrm{B}}$=$min\{15, 17\}$–1=14.
D(A)=D(H) – t_A=7 – 7= 0.
D(F)=D(B) – t_F=14 – 2= 12.
D(Début)=$min\{\mathrm{D(A)}, \mathrm{D(F)}\} - t_{Début}$=$min\{0, 12\}$–0=0.

Question 6 : donner le calendrier d'exécution des tâches.
Il suffit de rajouter l'intervalle [d(i), D(i)] pour chaque tâche i. (voir les intervalles sur le graphe suivant).



5- Définitions

a- Tâche critique : une tâche *i* est dite critique si d(*i*)= D(*i*).

Question 7 : quelles sont les tâches critiques.
Les tâches critiques sont : A, C, E, G et H.

b- Chemin critique : un chemin formé par des tâches critiques est appelé chemin critique. Il correspond à un plus long chemin entre les tâches fictives *Début* et *Fin* du projet. Par ailleurs, la longueur du chemin critique correspond à la durée minimale du projet.

Question 8 : donner le chemin critique.
Le chemin critique est : A – H – C – E – G. (inutile de rajouter les tâches *Début* et *Fin*)

c- Marge totale : on appelle marge totale d'une tâche *i*, le retard maximal de cette tâche par rapport à sa date de début au plus tôt afin que la durée minimale de la réalisation du projet ne soit pas perturbée (retardée).

$$\mathrm{M}_i = \mathrm{D}(i) - d(i) = (\min_{j \in S(i)}\{\mathrm{D}(j)\} - t_i) - d(i)$$

d- Marge libre : on appelle marge libre d'une tâche *i*, le retard maximal que peut prendre cette tâche par rapport à sa date de début au plus tôt de manière à ce qu'aucun de ses suivants ne commencera après sa date de début au plus tôt.

$$\mathrm{m}_i = (\min_{j \in S(i)}\{\mathrm{d}(j)\} - t_i) - d(i)$$

Question 9: Donner les marges totales et libres de chacune des tâches.

Marges totales

M_A =D(A) – d(A)= 0 – 0 = 0.
M_B =D(B) – d(B)=14 – 2 = 12.
M_C =D(C) – d(C)=15 – 15 = 0.
M_D =D(D) – d(D)=17 – 15 = 2.
M_E =D(E) – d(E)=17 – 17 = 0.
M_F =D(F) – d(F)=12 – 0 = 12.
M_G =D(G) – d(G)=19 – 19 = 0.
M_H=D(H) – d(H)=7 – 7 = 0.

Marges libres

$\mathrm{m_A} = \mathrm{d(H)} - \mathrm{d(A)} - \mathrm{t_A}$=7 – 0 – 7 = 0.
$\mathrm{m_B} = \min\{\mathrm{d(C)}, \mathrm{d(D)}\} - \mathrm{d(B)} - \mathrm{t_B}$= min{15, 15} – 2 – 1 = 12.
$\mathrm{m_C} = \mathrm{d(E)} - \mathrm{d(C)} - \mathrm{t_C}$=17 – 15 – 2 = 0.
$\mathrm{m_D} = \mathrm{d(G)} - \mathrm{d(D)} - \mathrm{t_D}$=19 – 15 – 2 = 2.
$\mathrm{m_E} = \mathrm{d(G)} - \mathrm{d(E)} - \mathrm{t_E}$=19 – 17 – 2 = 0.
$\mathrm{m_F} = \mathrm{d(B)} - \mathrm{d(F)} - \mathrm{t_F}$=2 – 0 – 2 = 0.
$\mathrm{m_G} = \mathrm{d(Fin)} - \mathrm{d(G)} - \mathrm{t_G}$=20 – 19 – 1 = 0.
$\mathrm{m_H} = \min\{\mathrm{d(C)}, \mathrm{d(D)}\} - \mathrm{d(H)} - \mathrm{t_H}$= min{15, 15} – 7 – 8 = 0.

Tableau récapitulatif

I	M_i	m_i
A	0	0
B	12	12
C	0	0
D	2	2
E	0	0
F	12	0
G	0	0
H	0	0

Remarque : pour chaque tâche critique *i*, on a $M_i=m_i=0$. Ainsi, tout retard effectué sur une tâche critique va perturber (retarder) la date de fin du projet et par conséquent la durée minimale du projet.