TD 5 : Logique des prédicats (déduction naturelle)
Cours : Logique Formelle
Filière/Classe : 1ère année ING INFO

Exercice 1 :
Soient A, M et S des symboles de prédicats, x un symbole de variable libre et a un symbole de constante. Commenter les preuves ci-dessous.

1. $\vdash \exists x: [A(x)] \Rightarrow \forall x: [A(x)]$.

1	$\exists x: [A(x)]$	H
2	$A(z)$	H
3	$\forall x: [A(x)]$	$\forall$–I,2
4	$\forall x: [A(x)]$	$\exists$–E,1, 2-3
5	$\exists x: [A(x)] \Rightarrow \forall x: [A(x)]$	$\Rightarrow$-I, 2-4

2. $M(a), \exists x: [S(x)] \vdash \exists x: [S(a)] \wedge M(a)]$.

1	$M(a)$	P
2	$\exists x: [S(x)]$	P
3	$S(a)$	H
4	$S(a) \wedge M(a)$	$\wedge$–I,1,3
5	$\exists x: [S(x)] \wedge M(x)]$	$\exists$-I, 4, x/a
6	$\exists x: [S(a)] \wedge M(a)]$	$\exists$-E, 2, 3-5

Exercice 2 :
Sachant que P et R sont deux symboles de prédicats binaires, A et B deux symboles de prédicats unaires, x est un symbole de variable et a, b et c sont des symboles de constantes, démontrer, en déduction naturelle, les formules suivantes :

1. $\exists x: [\forall y: [P(x, y)] \vdash \forall y: [\exists x: [P(x, y)]]$.
2. $\vdash \exists x: [\neg A(x)] \Rightarrow \neg \forall x: [A(x)]$
3. $\vdash \neg \forall x: [A(x)] \Rightarrow \exists x: [\neg A(x)]$
4. $\vdash \exists x: [\forall y: [A(y) \Rightarrow A(x)]$.
5. $\forall x: [\neg B(x)], A(c) \vee B(c) \vdash \exists x: [A(x)]$
6. $\exists x: [R(a, x) \Rightarrow \forall y: [R(y, x)] \vdash \neg \forall x: [R(a, x)] \wedge \neg R(b, x)]$.

Exercice 3 :

Soient les constantes *Lamia*, *Mongi*, *Salim* et *Fatma*, et les prédicats père, plus_âgé, fille, et sœur. Soit Δ, l'ensemble des règles suivantes :

Δ_1 : $\forall$x :$\forall$y :[père(x,y) $\rightarrow$ plus_âgé(x,y)]

Δ_2 : $\exists$x : $\forall$y :[fille(x) $\wedge$ soeur(y,x) $\rightarrow$ plus_âgé(x,y)]

Δ_3 : $\forall$x :$\forall$y : $\forall$z : [plus_âgé(x,y) $\wedge$ plus_âgé(y,z) $\rightarrow$ plus_âgé(x,z)]

Δ_4 : fille(*Lamia*)

Δ_5 : père (*Mongi*,*Salim*)

Δ_6 : sœur(*Fatma*,*Lamia*)

Δ_7 : plus_âgé(*Fatma*,*Mongi*)

Prouver en utilisant la déduction naturelle que plus-âgé(Lamia, Salim). Montrer toutes les étapes de la preuve en indiquant la justification pour chaque étape.

Exercice 4

On veut formaliser un tournoi de tennis en utilisant la logique des prédicats. Pour cela, on introduit :

- deux constantes A et B qui représentent deux joueurs, Alain et Bernard,
- deux symboles prédicatifs d'arité 1, i et e, tels que i(x) signifie « x est inscrit au tournoi », et e(x) : « x est éliminé du tournoi »,
- deux symboles prédicatifs d'arité 2, a et b, tels que a(x,y) signifie "x a joué contre y" et b(x,y) : « x a battu y ».

1. Traduire en formules logiques les assertions suivantes :

   (a) Alain et Bernard sont inscrits au tournoi.
   (b) Un joueur doit être inscrit pour pouvoir jouer et tout joueur battu est éliminé.
   (c) Bernard a battu tous les joueurs inscrits qui ont joué contre Alain.
   (d) Aucun joueur inscrit ayant battu Bernard n'a joué contre un joueur inscrit battu par Alain.

2. Exprimer en langage naturel les formules suivantes :
   a. $\neg\forall x: [i(x)\Rightarrow a(x,A)]$
   b. $\exists x: [\forall y: [i(x)\wedge b(B,x)\wedge(i(y)\wedge a(y,A)\Rightarrow b(x,y))]]$.
   c. $\forall x: [\exists y: [i(x)\wedge b(x,B)\Rightarrow i(y)\wedge b(y,A)\wedge b(x,y)]]$.

3. Utiliser le principe de résolution pour la réfutation et démontrer que le fait « *Il y un joueur qui n'a pas été battu* » se déduit des faits suivants :
   a. $\exists x: [i(x)\wedge\neg e(x)]$
   b. $\forall x: [i(x)\Rightarrow(\exists y: [b(y,x)]\Rightarrow e(x))]$.
   c. $\forall x: [\forall y: [b(x,y)\Rightarrow\neg b(y,x)]]$