III - Cas particulier

1- base dégénérée

Ce cas arrive lrsk + eurs choix sont possibles pour la variable sortante, et dans ce cas l'une des variables de base sera nulle à l'itération suivante.

On appelle base dégénérée qui contient une variable nulle.

Dans ce cas, on peut montrer l'existence d'une contrainte redondante

Remarque :

Il y a un faible risque de cyclage

Pour l'éviter, on choisit l'élément de plus petit indice (pour la variable sortante

Exemple

Résoudre le P.L suivant

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$sc \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

① forme standard

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

② tableau simplexe

Base	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	1	$\boxed{2}$	1	0	4
A_4	1	4	0	1	8
	3	9	0	0	Z

$\Rightarrow K = 2$

ratios :

$\frac{4}{2} = 2$

$\frac{8}{4} = 2$

on choisit la $1^{ère}$ $\Rightarrow l = 1$

Rq x_1 n'existe pa $\Rightarrow x_1^* = 0$

vérif

	A_1	A_2	A_3	A_4	B
x_2^* A_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	2
A_4	-1	0	-2	1	0
	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$Z^* - 18$

$$L_{Pivot} = \frac{L_{Pivot}}{pivot}$$

$$L_i = L_i - \frac{\square}{Pivot} \cdot L_{pivot}$$

4∩E pivot

$$L_1 = \frac{L_1}{2}$$

$$L_2 = L_2 - \frac{4}{2} \cdot L_1 = L_2 - 2L_1$$

$$L_3 = L_3 - \frac{9}{2} \cdot L_2$$

tts les valrs sont négatives

$\Rightarrow$ C. A est respecté

sol. optimale $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$

$Z^* = 18$

vérif :

$$\begin{cases} Z^* = 3x_1^* + 9x_2^* \\ = 3.0 + 9.2 \end{cases}$$

2 - Infinité de solution :

Resoudre P.L suivant

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

① forme standard

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{sc} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

② tableau simplexe

	A_1	A_2	A_3	A_4	B	ratios
A_3	1	2	1	0	16	$\frac{16}{1}=16$
A_4	3	2	0	1	24	$\frac{24}{3}=8$
	6	4	0	0	Z	

$\boxed{K=1}$

ratios

$\frac{16}{1} = 16$

$\frac{24}{3} = 8$

I

	A_1	A_2	A_3	A_4	B	ratios
A_3	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	8	$8 \cdot \frac{3}{4} = 6$
x_1^* A_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	8	$8 \cdot \frac{3}{2} \cdot 12$
	0	0	0	-2	$Z-48$	

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

$$L_{pivot} = \frac{L_{pivot}}{Pivot} \; ; \; L_i = L_i - \frac{i}{Piv} \cdot L_{piv}$$

$$\cdot L_2 = \frac{L_2}{3} =$$

$$\cdot L_1 = L_1 - \frac{1}{3} \cdot L_2$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 0 \\ \frac{3 \cdot 2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$16 - \frac{1}{3} \cdot 24 = 16 - 8 = 8$$

$$\cdot L_3 = L_3 - \frac{6}{3} \cdot L_2$$

Rq
On a atteint un tableau finale dans lequel la variable $A_2(x_2)$ ne figure pas ds la base final et admet 0 ds dernière ligne.
Dans ce cas on force l'entrée de cette variable à la base.

II

	A_1	A_2	A_3	A_4	B
x_2^* A_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6
A_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
	0	0	0	-2	$Z-48$

$$\cdot L_1 = \frac{L_1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot L_1$$

$8 \cdot \frac{3}{4}$

$$\cdot L_2 = L_2 - \frac{\frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} \cdot L_1$$

$$L_2 = L_2 - \frac{1}{2} L_1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}2}{3} =$$

$8 -$

$$\cdot L_3 = L_3$$

tableau (I) $\Rightarrow$ sol° 1 : $x_1 = 8$ | $x_2 = 0$ | $z^* = 48$

(II) $\Rightarrow$ sol° 2 $x_1 = 4$ | , $x_2 = 6$ | et $z^* = 48$

$0 \leq \alpha \leq 1$

les sol° sont donnés par :

$$\begin{cases} x_1^* = 8.\alpha + (1-\alpha).4 \\ x_2^* = 0.\alpha + (1-\alpha).6 \end{cases}$$

et $z^* = 48$

en remplaçant $\alpha = 0 \rightarrow$ sol°

$\alpha = 1$

3 - Prb non borné

Resoudre P.L suivant

$MAX\ Z = x_1 + 2x_2$

$$sc \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

. forme standard

$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

. simplexe

B	A_1	A_2	A_3	A_4	B	ration
A_3	1	-2	1	0	1	$\frac{1}{-2}$
A_4	2	0	0	1	4	$\frac{4}{0} = +\infty$
	1	2	0	0		

- On ne peut pas choisir le vecteur sortant.
- Il s'agit d'un P.L non borné