Devoir surveillé d'Analyse Numérique

Classes : $1^{\text{ère}}$ année ING-INFO — A.U. 2016-2017
Date : Mars 2017 — Nbre de pages : **2**
Durée : **1h30** — **Documents non autorisés**

Exercice 1 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Soit P_3 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
   (a) Calculer le polynôme P_3 en utilisant la base de Lagrange.
   (b) Calculer le polynôme P_3 en utilisant la base de Newton.

   (On donne : $\ln(2) \simeq 0.6931$, $\ln(3) \simeq 1.0986$, $\ln(4) \simeq 1.3863$) , $\ln(5) \simeq 1.6094$)

2. Soit P_4 le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = \dfrac{3}{2}$.
   (a) Calculer P_4. Justifier le choix de la méthode utilisée.
   (b) Donner, en fonction des dérivées successives de f, l'expression de l'erreur d'interpolation $E_4(x) = f(x) - P_4(x)$, $\forall x \in [0,3]$.
   (c) Utiliser le polynôme P_4 pour calculer une valeur approchée de $\ln(2.7)$, ainsi qu'une majoration de la valeur absolue de l'erreur commise.

Exercice 2 (12 points)

Soit g une fonction de classe C^5 sur $[-1,1]$.

1. Déterminer les coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 tels que la formule

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \alpha_1 g(-1) + \alpha_2 g(0) + \alpha_3 g(1) + \alpha_4 g'(-1) + \alpha_5 g'(0) + E(g) \qquad (1)$$

   soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 4
   ($E(g)$ désigne le terme d'erreur).

Dans toute la suite α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 désignent les coefficients ainsi trouvés.

2. Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature (1)
3. Soit H le polynôme d'interpolation d'Hermite de g vérifiant :

$$\begin{cases} H(-1) = g(-1) \quad , \quad H(0) = g(0) \quad , \quad H(1) = g(1) \\ H'(-1) = g'(-1) \quad , \quad H'(0) = g'(0) \end{cases}$$

(a) Donner, en fonction des dérivées successives de g, l'expression de l'erreur d'interpolation $E(t) = g(t) - H(t)$, $\forall t \in [-1, 1]$.

(b) Montrer que le terme d'erreur $E(g)$ vérifie : $E(g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} E(t)dt$.

(c) En déduire qu'il existe $\eta \in [-1, 1]$ tel que $E(g) = -\dfrac{1}{450} f^{(5)}(\eta)$.

4. Déduire de la formule (1) une formule de quadrature pour le calcul de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ où f est une fonction de classe C^5 sur $[a, b]$; ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant qu'on notera $E(f)$.

   (*Indication : Effectuer le changement de variable affine* $x = a + (t+1)\dfrac{(b-a)}{2}$)

5. Utilisier le résultat au point précédent pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{4+x}$, ainsi qu'une majoration de la valeur absolue de l'erreur commise.

D.S. Analyse numérique non linéaire — 1/mars 2017

Corrigé

Exercice 1

1/

(a) Forme de Lagrange : $P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\,L_i(x)$

$$P_3(x)=\ln(2)\,L_1(x)+\ln(3)\,L_2(x)+\ln(4)\,L_3(x)$$

$$=\frac{\ln(2)}{2}x(x-2)(x-3)-\frac{\ln(3)}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{\ln(4)}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$=0,3465\,x(x-2)(x-3)-0,5493\,x(x-1)(x-3)+0,231\,x(x-1)(x-2)$$

$$\boxed{P_3(x)=0,8936\,x-0,2287\,x^2+0,0283\,x^3}$$

(b) Table des différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+2}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+3}]$	$f[x_0,\dots,x_4]$
0	$\boxed{0}$	$\boxed{0,6931}$	$\boxed{-0,1438}$	$\boxed{0,0283}$	$\boxed{-0,0086}$
1	$\ln(2)$	0,4055	$-0,0589$	0,0154	
2	$\ln(3)$	0,2877	$-0,0512$		
3	$\ln(4)$	0,3133			
$\frac{3}{2}$	$\ln(\frac{5}{2})$				

$$\boxed{\begin{aligned}P_3(x)&=0,6931\,x-0,1438\,x(x-1)+0,0283\,x(x-1)(x-2)\\&=0,8936\,x-0,2287\,x^2+0,0283\,x^3\end{aligned}}$$

2/

(a) Avec la forme de Newton, il n'est pas nécessaire de recalculer les éléments de la base si l'on rajoute un pt d'interpolation. Il suffit donc de compléter la table des différences divisées, déjà calculée ds 1/(b), pour calculer P_4.

$$P_4(x)=P_3(x)+(-0,0086)\,x(x-1)(x-2)(x-3)$$

(b) D'après le th du cours, pour tout $x\in[0,3]$, $\exists\,\xi_x\in[0,3]$:

$$E_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\,x(x-1)(x-2)(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

(c) $\ln(2,7)=f(1,7)\simeq P_4(1,7)\simeq 0,9930$

$$|E_4(x)|\leq \max_{[0,3]}|f^{(5)}(x)|\,\frac{|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-\frac{3}{2})|}{5!}$$

$$\leq \frac{24}{5!}\,|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-\tfrac{3}{2})|$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}\Rightarrow \max_{[0,3]}|f^{(5)}(x)|=24$$

Ainsi, pour $x=1,7$, on trouve

$$|E_4(1,7)|\leq\frac{24}{5!}\times1,7\times0,7\times0,3\times1,3\times0,2$$

$$\boxed{|E_4(1,7)|\leq 0,018}$$

Exercice 2

1/ En écrivant la formule (1) pour $1, t, t^2, t^3$ et t^4 on obtient le système d'ordre 5

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 & (1)\\ -\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0 & (2)\\ \alpha_1+\alpha_3-2\alpha_4=\frac{2}{3} & (3)\\ -\alpha_1+\alpha_3+3\alpha_4=0 & (4)\\ \alpha_1+\alpha_3-4\alpha_4=\frac{2}{5} & (5)\end{cases}$$

(3) − (5) donne $\boxed{\alpha_4=\frac{2}{15}}$

(4) + (3) donne $2\alpha_3=\frac{2}{3}-\alpha_4=\frac{8}{15}\Rightarrow\boxed{\alpha_3=\frac{4}{15}}$

(4) donne $\alpha_1=\alpha_3+3\alpha_4=\frac{10}{15}\Rightarrow\boxed{\alpha_1=\frac{10}{15}}$

(2) donne $\alpha_5=\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4=\frac{4}{15}\Rightarrow\boxed{\alpha_5=\frac{4}{15}}$

(1) donne $\alpha_2=2-\alpha_1-\alpha_3=\frac{16}{15}\Rightarrow\boxed{\alpha_2=\frac{16}{15}}$

La formule s'écrit alors.

$$\boxed{\int_{-1}^{1}g(t)\,dt\simeq\frac{10}{15}g(-1)+\frac{16}{15}g(0)+\frac{4}{15}g(1)+\frac{2}{15}g'(-1)+\frac{4}{15}g'(0).}$$

2) Soit m le degré de précision de (1).

La formule est exacte pour poly de degré ≤ 4 donc $m\geq 4$.

Calculons $E(t^5)$

$$\int_{-1}^{1}t^5\,dt=0$$

$$\frac{10}{15}g(-1)+\frac{16}{15}g(0)+\frac{4}{15}g(1)+\frac{2}{15}g'(-1)+\frac{4}{15}g'(0)=\frac{4}{15}\neq 0\quad(\text{pour } g(t)=t^5)$$

$\Rightarrow E(t^5)\neq 0$ par suite $\boxed{m=4}$

2/(a) H est le polynôme d'interpolation d'Hermite de f relativement aux pts $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_1=1$ et aux entiers 1, 1 et 0 alors $d^\circ H \leq 4$.

g est de classe C^5 sur $[-1,1]$, alors d'après th du cours, on a

pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\xi_t \in [-1,1]$ tq

$$\boxed{E(t) = \frac{f^{(5)}(\xi_t)}{5!}(t+1)^2 t^2 (t-1)}$$

(b) La formule (1) est exacte pour les polynômes de $d^\circ \leq 4$ donc elle est exacte pour le polynôme H $(d^\circ H \leq 4)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} H(t)\,dt = \alpha_1 H(-1) + \alpha_2 H(0) + \alpha_3 H(1) + \alpha_4 H'(-1) + \alpha_5 H'(0)$$

$$= \alpha_1 g(-1) + \alpha g(0) + \alpha_3 g(1) + \alpha_4 g'(-1) + \alpha_5 g'(0)$$

$$= E(g) - \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

ce qui donne $\boxed{E(g) = \int_{-1}^{1} (H(t) - g(t))\,dt = \int_{-1}^{1} E(t)\,dt.}$

(c)

$$E(g) = \int_{-1}^{1} E(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{f^{5}(\xi_t)}{5!} t^2 (t+1)^2 (t-1)\,dt$$

$f^{(5)}$ est continue sur $[-1,1]$ et $t \mapsto t^2(t+1)^2(t-1)$ est continue et garde un signe constant sur $[-1,1]$

Alors, d'après le th de la moyenne, $\exists \eta \in [-1,1]$ tq

$$E(g) = \frac{f^{(5)}(\eta)}{5!} \int_{-1}^{1} t^2 (t+1)^2 (t-1)\,dt$$

$$= \frac{f^{(5)}(\eta)}{5!} \int_{-1}^{1} (t^5 + t^4 - t^3 - t^2)\,dt$$

$$\boxed{E(g)} = \frac{2 f^{(5)}(\eta)}{5!}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{450} f^{5}(\eta)$$

4/ $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(a + (t+1)\frac{b-a}{2}\right) dt$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(u(t))\,dt \quad \text{avec } u(t) = a + (t+1)\frac{b}{\ }$$

En remplaçant g par fou ds la formule (1) on obtient :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha_3 f(b) + \alpha_4 \frac{b-a}{2} f'(a) + \alpha_5 \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + E(fou)\right]}$$

$$= \alpha_1 \frac{b-a}{2} f(a) + \alpha_2 \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha_3 \frac{b-a}{2} f(b) + \alpha_4 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f'(a) + \alpha_5 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + E(f)$$

avec $E(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right) E(fou)$

$$= \frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{450}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(5)}\left(a + (\eta_t + 1)\frac{b-a}{2}\right)$$

avec $\eta_t \in [-1,1]$

$$\boxed{E(f) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^6 \frac{1}{450} f^{(5)}(\eta), \text{ avec } \eta \in [a,b]}$$

5/ $f(x) = \frac{1}{4+x}$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{4+x} \simeq \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(\alpha_1 \frac{1}{4} + \alpha_2 \frac{1}{4+\frac{1}{4}} + \alpha_3 \frac{1}{4+\frac{1}{2}} + \alpha_4 \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4^2}\right) + \alpha_5 \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(4+\frac{1}{4})^2}\right)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{4}\left(\frac{10}{15}\frac{1}{4} + \frac{16}{15}\frac{1}{\frac{17}{4}} + \frac{4}{15}\frac{1}{\frac{9}{2}} + \frac{2}{15}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{4}{15}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(\frac{17}{4})^2}\right)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{16}{15}\frac{4}{17} + \frac{4}{15}\frac{2}{9} - \frac{1}{30}\frac{1}{16} - \frac{1}{15}\frac{16}{17^2}\right) \simeq 0{,}1178$$

$$|E(f)| = \left|\left(\frac{b-a}{2}\right)^6 \frac{1}{450}\frac{120}{(4+\eta)^6}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^6 \frac{1}{450}\frac{120}{4^6} \leq 1{,}5\ 10$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{(4+x)^6}, \quad \max_{[0,\frac{1}{2}]} |f^{(5)}(x)| = \frac{120}{4^6}$$