Ecole Nationale d' Ingénieurs de Carthage

Devoir surveillé d'Analyse Numérique

Classes : $1^{\text{ère}}$ année ING-INFO — A.U. 2017-2018
Date : Mars 2018 — Nbre de pages : **2**
Durée : **1h30** — **Documents non autorisés**

Exercice 1 (3 points)

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ et $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ points distints de $[a, b]$.
Écrire un algorithme qui permet de calculer les différences divisées de Newton $f[x_0, \ldots, x_k]$, k=0,..n, et donner le nombre d'opérations élémentaires nécessaires.

Exercice 2 (6 points)

Soit $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [-1, 1]$, et soit P le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ et 1.

1. Calculer P en utilisant la base de Lagrange.
2. Calculer P par la méthode des différences divisées.
3. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - P(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$.
4. Estimer l'erreur d'interpolation au point $x = \frac{1}{2}$.
5. Donner, à l'aide du polynôme P, une valeur approchée de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette approximation est-elle en accord avec l'estimation obtenue à la question précédente ?

Exercice 3 (11 points)

soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit deux points distints x_0 et x_1 dans l'intervalle $[-1, 1]$. On considère la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + E(f) \tag{1}$$

où λ_0 et λ_1 sont deux réels non nuls. $E(f)$ désigne le terme d'erreur.

1. Quelle relation doivent vérifier λ_0 et λ_1 pour que la formule (1) soit exacte pour les fonctions constantes ?
2. Montrer que la formule (1) est exacte pour les polynômes impairs de degré inférieur ou égal à 3 *si et seulement si* $x_0 = -x_1$ et $\lambda_0 = \lambda_1$.
3. En déduire alors les valeurs de x_0, x_1, λ_0 et λ_1 pour que la formule (1) soit exacte sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Quel est le degré de précision de la formule de quadrature correspondante.

Dans toute la suite x_0, x_1, λ_0 et λ_1 désignent les coefficients ainsi trouvés.

4. (a) Calculer, en utilisant la formule de quadrature (1), une valeur approchée de

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}dx$$

   (b) Calculer, à l'aide de la formule du trapèze, une valeur approchée de I.

   (c) Laquelle des deux méthodes donne une meilleure approximation de I ?

5. Soit H le polynôme d'interpolation d'Hermite de f vérifiant :

$$H(x_0) = f(x_0)\ ,\ H(x_1) = f(x_1)\ ,\ H'(x_0) = f'(x_0)\ et\ H'(x_1) = f'(x_1)$$

   (a) Montrer que le terme d'erreur de la formule (1) vérifie :

$$E(f) = \int_{-1}^{1} (f(x) - H(x))dx$$

   (b) En déduire que, pour $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$, il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que

$$E(f) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta)$$

6. Soit $a < b$ deux réels donnés et $g \in \mathcal{C}^4([a,b])$.

   (a) Déduire de la formule (1) une formule de quadrature pour approcher $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$, ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant qu'on notera $E(g)$.

   (b) Utiliser le résultat au point précédent pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t+3}dt$, ainsi qu'une estimation de l'erreur commise.

Nb : $\sqrt{2} \backsimeq 1,4142$ $\quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ $\quad ln(2) \backsimeq 0,6931$

D.S. Analyse numérique non linéaire — Avril 2018

Corrigé

Exercice 1 : voir Cours.

Exercice 2 : $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $x \in [-1,1]$

1/ Forme de Lagrange

$$\ell(x) = f(-1)\,L_0(x) + f\left(-\tfrac{1}{3}\right)L_1(x) + f\left(\tfrac{1}{3}\right)L_2(x) + f(1)\,L_3(x)$$

$$= \frac{9}{16}\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1) - \frac{27}{32}(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$
$$- \frac{27}{32}(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1) + \frac{9}{16}(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{9}{16}x^3 + \frac{25}{16}x \quad \text{(ds la base canonique)}$$

2) Forme de Newton

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+2}]$	$f[x_0,\dots,x_3]$
-1	$\boxed{-1}$	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\boxed{\frac{9}{16}}$	$\boxed{-\frac{9}{16}}$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{16}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		
1	1			

$$\ell(x) = -1 + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{9}{16}(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) - \frac{9}{16}(x+1)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$$

3/ f est de classe C^4 alors d'après th de cours, on a
Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi_x \in [-1,1]$ tq

$$E(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\left(x^2-1\right)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$$

4) $f^{(4)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \forall x \in [-1,1]$.

$$\left|E\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}\left|\left(\tfrac{1}{4}-1\right)\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}\right)\right|$$
$$\leq \frac{5\pi^4}{24 \cdot 2^4 \cdot 4 \cdot 12} \simeq 0{,}0264$$

5) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq \ell\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{25}{16}\,\frac{1}{2}$

$$\simeq 0{,}7109$$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \ell\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 0{,}0038 \leq$ estimation obtenue à la question précédente

Exercice 3 : $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + E(f)$ (1

1/ La formule (1) est exacte pour les fonctions ctes

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} c\,dx = \lambda_0 c + \lambda_1 c \Leftrightarrow \boxed{2 = \lambda_0 + \lambda_1}$$

2/ $\Leftarrow$ on suppose que $x_0 = -x_1$ et $\lambda_0 = \lambda_1$

La formule (1) s'écrit $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lambda_0\left(f(x_0) + f(-x_0)\right) + E($

Pour $f \equiv x$, $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ et $\lambda_0\left(f(x_0)+f(-x_0)\right) = 0 \Rightarrow E(f)$

Pour $f \equiv x^3$ $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ et $\lambda_0\left(f(x_0)+f(-x_0)\right) = 0 \Rightarrow E(f) =$

$\Rightarrow$ La formule est exacte pour tout polynôme impair de degré

$\Rightarrow$ on suppose que (1) est exacte pour tout polynôme impair de degré ≤ 3, alors (1) est exacte pour les monômes x^2 et x^3.

Ceci donne les équations

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = \lambda_0 x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 x_0 = -\lambda_1 x_1 \\ (-\lambda_1 x_1)x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 x_0 = -\lambda_1 x_1 & (1) \\ \lambda_1 x_1\left(x_1^2 - x_0^2\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

Comme $\lambda_1 \neq 0$ et $x_1 \neq 0$ (car sinon x_0 est nul aussi, ce qui contredit le fait que $x_0 \neq x_1$)

l'éq (2) donne $\boxed{x_1 = -x_0}$ et l'éq (1) donne $\boxed{\lambda_0 = \lambda$

3) La formule (1) est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$

$\Leftrightarrow$ elle est exacte pour $1, x, x^2$ et x^3

Ce qui donne le système

$$\begin{array}{l} f\equiv 1 \\ f\equiv x \\ f\equiv x^2 \\ f\equiv x^3 \end{array}\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 2 \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 = 2/3 \\ \lambda_0 x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 = 1 \\ x_0^2 = x_1^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 = 1 \\ x_1 = -x_0 = \frac{1}{\sqrt{\;}} \end{cases}$$

La formule s'écrit alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E(f)$$

Soit m le degré de précision de (1).
La formule est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$ donc $m \geq 3$

Calculons $E(x^4)$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}, \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{2}f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9} \quad \text{pour } f = x^4$$

$$\Rightarrow E(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \neq 0 \quad \text{Ainsi } \boxed{m=3}$$

4) (a) $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+3}$

$$I \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}+3} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+3}\right) = \frac{9}{26} \simeq 0,3461$$

(b) Formule du trapèze

$$I \simeq \frac{1}{2}\frac{2}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \simeq 0,375$$

(c) La valeur exacte de I est

$$I = \frac{1}{2}\ln(x+3)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\ln(2)}{2} \simeq 0,3465$$

c'est la formule (1) qui a donné une meilleure approx de I

5) (a) H est le polynôme d'interpolation d'Hermite de f relativement aux pts x_0 et x_1 et aux entiers 1, 1 donc $d^\circ H \leq 3$.
La formule (1) est alors exacte pour H, ce qui donne

$$\int_{-1}^{1} H(x)\,dx = \lambda_0 H(x_0) + \lambda_1 H(x_1)$$
$$= \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - E(f)$$

$$\Rightarrow E(f) = \int_{-1}^{1}(f(x) - H(x))\,dx$$

b) $f \in C^4([-1,1])$ alors d'après th de cours, on a
Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi_x \in [-1,1]$ tq

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow E(f) = \int_{-1}^{1}\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx$$

$f^{(4)}$ continue et $x \longmapsto (x^2-\frac{1}{3})^2$ continue et garde un signe cst alors d'après le th de la moyenne

il existe $\eta \in [-1,1]$ tq

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$$

6/ (a) En effectuant le changement de variable

$$t = u(x) = a + (x+1)\frac{b-a}{2}$$

on obtient

$$\int_a^b g(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g\left(a+(x+1)\frac{b-a}{2}\right)dx$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u(x))\,dx$$

En remplaçant f par $g\circ u$ ds la formule (1)
on obtient

$$\int_a^b g(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left[g(u(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})) + g(u(\tfrac{1}{\sqrt{3}})) + E(g\circ u)\right]$$

$$\boxed{\int_a^b g(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{2}\left(g\left(a+(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}+1)\tfrac{b-a}{2}\right) + g\left(a+(\tfrac{1}{\sqrt{3}}+1)\tfrac{b-a}{2}\right)\right)}$$

et $E(g) = \frac{b-a}{2}E(g\circ u)$

$$= \frac{b-a}{2}\frac{1}{135}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 g^{(4)}\left(a+(\eta_x+1)\frac{b-a}{2}\right)$$

avec $\eta_x \in [-1,1]$

$$\boxed{E(g) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{135} g^{(4)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [a,b]}$$

(b) $[a,b] = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et $g(t) = \frac{1}{2t+3}$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2t+3} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1)\frac{1}{2}\right)+3} + \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)\frac{1}{2}\right)+3}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(-\frac{1}{2\sqrt{3}})+3} + \frac{1}{2(\frac{1}{2\sqrt{3}})+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{9}{26}$$

$\simeq 0,3461$

$$|E(g)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{135}\max_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|g^{(4)}(t)|$$

$g'(t) = \frac{-2}{(2t+3)^2}$, $g''(t) = \frac{8}{(2t+3)^3}$, $g^{(3)}(t) = \frac{-48}{(2t+3)^4}$ ($g^{(4)} > 0$ et $\searrow$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$)

et $g^{(4)}(t) = \frac{384}{(2t+3)^5} \Rightarrow \max_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|g^{(4)}| = g^{(4)}(-\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \boxed{|E(g)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{135}\, 384 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \simeq 0,0027}$$