# Programmation linéaire

## I- Formulation d'un programme linéaire

### 1) Définition d'un programme linéaire

Un programme linéaire est défini par les trois entités suivantes :

**a) Les variables de décisions :** ce sont les inconnues que l'on veut déterminer pour apporter une solution à problème donné.

On distingue trois types de variables de décisions :
- variables continues ($\geq 0$)
- variables entières ($\in$ IN)
- variables binaires ($\in \{0,1\}$)

**b) La fonction objectif :** c'est la fonction à optimiser (maximiser ou minimiser). Elle exprime l'**objectif** du problème considéré et doit s'écrire sous la forme d'une relation linéaire entre les variables de décisions.

**c) Les contraintes :** ce sont les conditions qu'on doit respecter ou les limites du problème à ne pas dépasser. Elles peuvent être des contraintes d'inégalités ou d'égalités. De plus, le membre gauche de chaque contrainte doit être une relation linéaire entre les variables de décisions et le membre droit doit être une constante.

### 2) Exemples

**Exercice 1**

Une usine fabrique 2 produits $P1$ et $P2$ en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'œuvre, matières premières (voir le tableau ci-dessous). Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée.

| | $P1$ | $P2$ | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| Equipement | 3 | 9 | 81 |
| Main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| Matière première | 2 | 1 | 20 |

Les deux produits rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 dinars et 4 dinars par unité. Donner le programme linéaire correspondant.

**Variables de décision :**
$x_1$ : nombre de P1 à produire ;
$x_2$: nombre de P2 à produire ;

**Contraintes**

- contrainte liée à l'équipement
- contrainte liée à la main d'œuvre
- contrainte liée à la matière première.

Comment obtenir la première contrainte.

**Production de P1 seulement**
1 unité : $3 . (1) \leq 81$
2 unités : $3 . (2) \leq 81$
3 unités : $3 . (3) \leq 81$

**$x_1$ unités : $3. x_1 \leq 81$**

**Production de P2 seulement**
1 unité : $9 . (1) \leq 81$
2 unités : $9 . (2) \leq 81$
3 unités : $9 . (3) \leq 81$

**$x_2$ unités : $9. x_2 \leq 81$**

Production de P1 et P2

$$\mathbf{3. x_1 + 9. x_2 \leq 81}$$

Quand il y a un tableau, ça devient plus facile :

| | *P1* | *P2* | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| Equipement | 3 | 9 | 81 |
| Main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| Matière première | 2 | 1 | 20 |

→ $\mathbf{3. x_1 + 9. x_2 \leq 81}$

| | $P1$ | $P2$ | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| Equipement | 3 | 9 | 81 |
| Main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| Matière première | 2 | 1 | 20 |

→ $\mathbf{4.\ x_1 + 5.\ x_2 \leq 55}$

| | $P1$ | $P2$ | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| Equipement | 3 | 9 | 81 |
| Main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| Matière première | 2 | 1 | 20 |

→ $\mathbf{2.\ x_1 + 1.\ x_2 \leq 20}$

**Fonction objectif :** $6.\ x_1 + 4.\ x_2$

Ainsi, le P.L correspondant est : $Max\ Z = 6.x_1 + 4.x_2$

$$\begin{cases} 3.x_1 + 9.x_2 \leq 81 \\ 4.x_1 + 5.x_2 \leq 55 \\ 2.x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 2**

Un fabricant d'aliment pour bétail cherche à optimiser la composition de celui-ci sachant qu'il n'entre dans sa composition que trois ingrédients : Blé, colza et soja. L'aliment devra comporter au moins 22 pour cent d'un composant $C_1$ et 4 pour cent d'un composant $C_2$ pour se conformer aux normes en vigueur. Les données sont résumées dans le tableau ci-dessous :

| | Blé | Colza | Soja |
|---|---|---|---|
| Pourcentage de $C_1$ | 12 | 42 | 52 |
| Pourcentage de $C_2$ | 2 | 10 | 2 |
| Prix d'une Tonne | 25 | 39 | 41 |

Donner le programme linéaire correspondant en prenant comme variables structurelles les différents pourcentages requis pour obtenir une tonne d'aliment.

**Variables de décision :**

$x_1$ : pourcentage du blé pour obtenir une tonne d'aliment ;
$x_2$: pourcentage du Soja pour obtenir une tonne d'aliment ;
$x_3$: pourcentage du Colza pour obtenir une tonne d'aliment ;

**Contraintes :**

1. L'aliment doit contenir au moins 22% du composant C1 : $12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22$
2. L'aliment doit contenir au moins 4% du composant C2 : $2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 4$
3. on veut fabriquer exactement une tonne : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

**Fonction objectif :**
$\boldsymbol{Min\ Z} = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3$
Le programme linéaire correspondant est :

$$\boldsymbol{Min\ Z} = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_2 \ + 10x_3 \geq 4 \\ x_1 + \ x_2 + \quad x_3 = 1 \\ x_1,\ x_2, x_3 \ \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 3**

Une entreprise fabrique deux types de ceintures: A et B. Le type A est de meilleure qualité que le type B. Le bénéfice est 2 D pour le type A et 1,50 D pour le type B. Le temps de fabrication pour le type A est deux fois le temps de fabrication pour le type B et si toutes les pièces étaient du type B l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 pièces par jour (type A ou B). Enfin 400 boucles de type A et 700 boucles du type B sont disponibles chaque jour.
Donner un programme linéaire permettant de déterminer les nombres respectifs de ceintures des deux types à fabriquer chaque jour de manière à maximiser le bénéfice total de l'entreprise?

**Variables de décision :**
$x_1$ : nombre de ceinture de type A;
$x_2$: nombre de ceinture de type B;

**Fonction objectif :**
$\boldsymbol{Max\ Z} = 2.x_1 + 1.5x_2$

**Contraintes :**

- contrainte liée au temps de fabrication
- contrainte liée à l'approvisionnement en cuir
- contrainte liée à la disponibilité de boucles de type A
- contrainte liée à la disponibilité de boucles de type B

**Approvisionnement en cuir :**
L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 pièces par jour (type A ou B).

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

**Disponibilité de boucles de type A**
Enfin 400 boucles de type A sont disponibles chaque jour.

$$x_1 \leq 400$$

**Disponibilité de boucles de type B**
700 boucles du type B sont disponibles chaque jour.

$$x_2 \leq 700$$

**Temps de fabrication**
Le temps de fabrication pour le type A est deux fois le temps de fabrication pour le type B et si toutes les pièces étaient du type B l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jour.

Soit *r* :temps de fabrication pour le type B

| | A | B | disponibilité |
|---|---|---|---|
| Temps | | *r* | |

| | A | B | disponibilité |
|---|---|---|---|
| Temps | 2 *r* | *r* | 1000 *r* |

**Ainsi,**
$2r.x_1 + r.x_2 \leq 1000.r$

**Ensuite,** on simplifie par *r* $(r > 0)$
$2.x_1 + x_2 \leq 1000$

**Le P.L est** $Max\ Z = 2.x_1 + 1.5.x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 700 \\ 2.x_1 + x_2 \leq 1000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 4**
Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base $M_1$ et $M_2$.

| | Besoin pour ext. | Besoin pour int. | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 6 T | 4 T | 24 T |
| $M_2$ | 1 T | 2 T | 6 T |
| Profit /tonne | 5 MD | 4 MD | |

De plus, on a une demande maximale de 2 tonnes de peinture d'intérieur par jour ; et la production de peinture d'intérieur ne dépasse pas celle d'extérieur de plus d'une tonne.

Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

**Variables de décision :**
$x_1$ : quantité de peinture d'extérieur à produire;
$x_2$: quantité de peinture d'intérieur à produire;

**Fonction objectif :**

$$\boldsymbol{Max\ Z} = 5.x_1 + 4.x_2 \qquad \text{(MD)}$$

**Contraintes :**

- Disponibilité de M1
- Disponibilité de M2
- Limite sur la quantité de peinture d'extérieur à produire
- Relation entre la quantité produite de peinture d'extérieur et d'intérieur

**Disponibilité de M1**

$$6.x_1 + 4.x_2 \leq 24$$

**Disponibilité de M2**

$$x_1 + 2.x_2 \leq 6$$

**Limite sur la quantité de peinture d'extérieur à produire**
On a une demande maximale de 2 tonnes de peinture d'intérieur par jour

$$x_2 \leq 2$$

**Relation entre la quantité produite de peinture d'extérieur et d'intérieur**
La production de peinture d'intérieur ne dépasse pas celle d'extérieur de plus d'une tonne.

$$x_2 \leq x_1 + 1$$

D'où : $-x_1 + x_2 \leq 1$

**Le P.L correspondant est** $Max\ Z = 5.x_1 + 4.x_2$

$$\begin{cases} 6.x_1 + 4.x_2 \leq 24 \\ x_1 + \quad x_2 \leq 6 \\ \qquad\quad x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$