Résumé

Variables aléatoires discrètes et continues

On appelle variable aléatoire (v.a. en abrégé) discrète définie sur Ω toute application X : Ω → R telle que

- L'ensemble X(Ω) = $\{x_i ; i \in N^*\}$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.
- La famille (p_i) i∈ N^* des nombres p_i = P(X = x_i) (i ∈ N^*) s'appelle la distribution de probabilité (ou loi de probabilité) de la v.a. X.
- Il est important de noter que $\sum_{i \in N^*} p_i = 1$

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, la fonction F_X telle que :

- F_X : R → R
  t → F_X (t) = P(X < t)

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X alors :

1. ∀t ∈ R 0 ≤ F_X (t) ≤ 1
2. F_X est croissante sur R
3. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$
4. $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
5. si a ≤ b P (a < X ≤ b) = F_X (b) - F_X (a)

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné).

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement {X = a} est nulle. On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle [a,b] tel que

$P(a \leq X \leq b)$.

On appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux :

$f: R \to R$

$x \to f(x)$

telle que :

1. $\forall x \in R \; f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (en supposant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe)

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la fonction de répartition de X

par : $F_X : R \to R$

$t \to F_X(t) = P(X \leqslant t)$

alors la relation entre la fonction de répartition F_X et la fonction densité de probabilité f(x) est la suivante :

$\forall t \in R \; F_X(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition

F_X, alors :

1. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$
2. $\forall a \in R \; P(x = a) = 0$ si f est continue à droite du point a.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue X alors :

1. F_X est continue sur R, dérivable en tout point où f est continue et alors $F_X' = f$
2. F_X est croissante sur R
3. F_X est à valeurs dans [0,1]

4. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Espérance et Variance

L'espérance d'une variable aléatoire E(X) correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.

Si X est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité (x_i, p_i) définit sur un nombre fini (n) d'évènements élémentaires alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, on appelle espérance de X, le réel E(X) , défini par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\, dx$

si cette intégrale est convergente.

Propriétés de l'espérance

Les propriétés de l'espérance valent aussi bien pour une variable aléatoire discrète ou une variable aléatoire continue.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

1. E(X+Y)=E(X)+E(Y)
2. E(aX)=aE(X) ∀a ∈ R
3. Si X ≥ 0 alors E(X) ≥ 0
4. Si X est un caractère constant tel que : ∀ω ∈ Ω X (ω) = k alors E(X) = k

Variance

Si X est une variable aléatoire ayant une espérance E(X), on appelle

variance de X le réel : $V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Si X est une variable aléatoire ayant une variance V(X), on appelle écart-type de X, le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si X est une variable aléatoire admettant une variance alors :

1. $\forall$ a $\in$ R, V (aX) = a^2V (X)
2. $\forall$ (a, b) $\in$ R, V (aX + b) = a^2V (X)
3. V(b)=0

Lois de probabilités discrètes

Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux éventualités (succès et échec, pile et face, blanc et pas blanc, obtenirle 1 ou pas quand on jette un dé...) dont les probabilités respectives sont notées p et 1 − p (p étant un réel élément de[0, 1]). Une telle épreuve est appelée épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Loi binomiale

A un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, on peut associer la variable aléatoire X égale au nombre de succès en ntentatives. Cette variable aléatoire prend donc les valeurs 0, 1, 2, . . . , n − 1, n. La loi binomiale est la loi de probabilitéassociée à cette variable aléatoire et si k est un entier élément de {0, 1, . . . , n}, on a p(X = k) = $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

Espérance variance et écart-type de la loi binomiale

L'espérance de la loi binomiale de paramètre n et p est E(X) = np et la variance de la loi binomiale de paramètre n et p est V(X) = np(1 − p).

Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire dénombrable X, à valeurs dans N, suit une loi de Poisson de paramètre m (m > 0), si et seulement si, pour tout entier naturel k

$$P(X=k)=e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

On note P(m) cette loi, et on montre alors que son espérance et sa variance

$$E(X) = m, \; V(X) = m$$

Dans la pratique, si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », on considère en général la loi de Poisson de paramètre np comme une bonne approximation de la loi binômiale.

Plus précisément, si $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 15$, alors on considère que la loi B(n,p) est « proche »de la loi P(np), ce qui permet d'utiliser la loi de Poisson (à un seul paramètre) plutôt que la loi binômiale (à deux paramètres).

On retiendra que, sous certaines conditions, on peut approcher une loi binômiale par une loi de Poisson ayant la même espérance.

Nom et Symbole	Support	Probabilités élémentaires $P(X = k)$	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli B(p) $p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X = 1)=p$ $P(X = 0)=q=1-p$	p	pq
Loi binomiale B(n, p) $p \in]0,1[$, $n \in N^*$	$\{0,1,\ldots n\}$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq
Loi de Poisson P(m) $m \in R+^*$	**N**	$e^{-m} \dfrac{m^k}{k!}$	m	m

Lois continues

Loi Normale

Défintion

La loi normale de paramètre $m \ et \ \sigma$ est définie sur ***R*** par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- $m\epsilon$ ***R,*** m étant l'espérance de la variable aléatoire X.

$\sigma > 0$ est l'écart type de la variable aléatoire X.

σ^2 est la variance de X.

Le Calcul de la fonction de répartition d'une loi normale de paramètre $m \ et \ \sigma$ nécessite une intégration compliquée. Pour le simplifier on « standardise » X par l'intermédiaire d'un changement d'échelle, afin d'obtenir une variable sans unité. On fait le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{X - m}{\sigma}$$

τ suit une loi normale car toute combinaison linéaire de variables aléatoires normales est une variable aléatoire normale.

$$\tau \rightarrow N(0,1)$$

τ est dite loi normale centrée réduite.

Tableau récapitulatif représentant les principales formules des lois usuelles.

$$q = 1 - p$$

Loi	Notation	Formule	Espérance	Varaince
Loi de Bernoulli	$B(p)$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q$	$E(X)=p$	$V(X)=pq$
Binomiale	$B(n,p)$	$p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$E(X)=np$	$V(X)=npq$
Loi de Poisson	$P(m)$	$p(X=k) = e^{-m}\dfrac{m^k}{k!}$	$E(X)=m$	$V(X)=m$
Loi normale	N(m,σ)	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X)=m$	$V(X)=\sigma^2$
Loi normale centrée réduite	N(0,1))	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$E(X)=0$	$V(X)=1$

Approximations des lois

Epreuve : tirage avec remise.
Loi Binomiale $B(n, p)$

Si $n \geq 30$ $p \leq 0.1, np \leq 15$
Approximation de loi Binomiale par la loi de Poisson $P(np)$

Si $n \geq 30,$ $np \geq 15, npq \geq 5$
Approximation de loi Binomiale par la loi normale $N(np, \sqrt{npq})$

Loi de Poisson de paramètre m

Si $m \geq 15$ Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale $N(m, \sqrt{m})$

NB :** **<u>Avec se résumé il faut revoir toutes les applications du cours.</u>

Bon courage