

CORRECTION DE LA SERIE 6

Cours : Logique formelle

Filière/Classe : 1^{ère} ING

Sections : A, B & C

Exercice 1 :

Soient A , M et S des symboles de prédicats, x un symbole de variable libre et a un symbole de constante. Commenter les preuves ci-dessous.

$$1. \vdash \exists x: [A(x)] \Rightarrow \forall x: [A(x)].$$

1		$\exists x: [A(x)]$	H
2		$A(z)$	H
3		$\forall x: [A(x)]$	\forall -I, 2
4		$\forall x: [A(x)]$	\exists -E, 1, 2-3
5		$\exists x: [A(x)] \Rightarrow \forall x: [A(x)]$	\Rightarrow -I, 2-4

$$2. M(a), \exists x: [S(x)] \vdash S(x) \wedge M(x)$$

1		$M(a)$	P
2		$\exists x: [S(x)]$	P
3		$S(a)$	H
4		$S(a) \wedge M(a)$	\wedge -I, 1, 3
5		$\exists x: [S(x) \wedge M(x)]$	\exists -I, 4, x/a
6		$\exists x: [S(x) \wedge M(x)]$	\exists -E, 2, 3-5

Correction :

Déjà corrigé en cours.

Exercice 2 :

Sachant que P et R sont deux symboles de prédicats binaires, A et B deux symboles de prédicats unaires, x est un symbole de variable et a , b et c sont des symboles de constantes, démontrer, en déduction naturelle, les formules suivantes :

- $\exists x: [\forall y: [P(x, y)]] \vdash \forall y: [\exists x: [P(x, y)]]$.
- $\vdash \exists x: [\neg A(x)] \Rightarrow \neg \forall x: [A(x)]$
- $\vdash \neg \forall x: [A(x)] \Rightarrow \exists x: [\neg A(x)]$
- $\vdash \exists x: [\forall y: [A(y) \Rightarrow A(x)]]$.
- $\forall x: [\neg B(x)], A(c) \vee B(c) \vdash \exists x: [A(x)]$
- $\exists x: [R(a, x) \Rightarrow \forall y: [R(y, x)]] \vdash \neg \forall x: [R(a, x)] \wedge \neg R(b, x)$.

Correction :

1. Déjà corrigé en cours.
2. Déjà corrigé en cours.
3. Déjà corrigé en cours.
4. Déjà corrigé en cours.

5.

1	$\forall x: [\neg B(x)]$	P
2	$A(c) \vee B(c)$	P
3	$B(c)$	H
4	$\neg B(c)$	\forall -E, 1, x/c
5	\perp	\perp -I, 3, 4
6	$A(c)$	\perp -E, 5
7	$A(c)$	H
8	$A(c)$	R, 7
9	$A(c)$	\vee -E, 2, 3-6, 7-8
10	$\exists x: [A(x)]$	\exists -I, 9, x/c

6.

1	$\exists x: [R(a, x) \Rightarrow \forall y: [R(y, x)]]$	P
2	$\forall x: [R(a, x) \wedge \neg R(b, x)]$	H
3	$R(a, c) \wedge \neg R(b, c)$	\forall -E, 2, x/c
4	$R(a, c)$	\wedge -E, 3
5	$R(a, c) \Rightarrow \forall y: [R(y, c)]$	H
6	$\forall y: [R(y, c)]$	\Rightarrow -E, 4, 5
7	$R(b, c)$	\forall -E, 6, y/b
8	$\neg R(b, c)$	\wedge -E, 3
9	\perp	\perp -I, 7, 8
10	\perp	\exists -E, 1, 5-9
11	$\neg \forall x: [R(a, x) \wedge \neg R(b, x)]$	\neg -I, 2-10

Exercice 3 :

Soient les constantes *Lamia*, *Mongi*, *Salim* et *Fatma*, et les prédicats père, plus_âgé, fille, et sœur. Soit Δ , l'ensemble des règles suivantes :

- $$\begin{aligned} \Delta_1 &: \forall x : \forall y : [\text{père}(x, y) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, y)] \\ \Delta_2 &: \exists x : \forall y : [\text{fille}(x) \wedge \text{sœur}(y, x) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, y)] \\ \Delta_3 &: \forall x : \forall y : \forall z : [\text{plus_âgé}(x, y) \wedge \text{plus_âgé}(y, z) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, z)] \\ \Delta_4 &: \text{fille}(\text{Lamia}) \end{aligned}$$

Δ_5 : père (*Mongi, Salim*)
 Δ_6 : sœur (*Fatma, Lamia*)
 Δ_7 : plus_âgé (*Fatma, Mongi*)

Prouver en utilisant la déduction naturelle que plus_âgé(Lamia, Salim). Montrer toutes les étapes de la preuve en indiquant la justification pour chaque étape.

Correction :

1)	$\forall x : \forall y : [\text{père}(x, y) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, y)]$	P
2)	$\exists x : \forall y : [\text{fille}(x) \wedge \text{sœur}(y, x) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, y)]$	P
3)	$\forall x : \forall y : \forall z : [\text{plus_âgé}(x, y) \wedge \text{plus_âgé}(y, z) \Rightarrow \text{plus_âgé}(x, z)]$	P
4)	$\text{fille}(\text{Lamia})$	P
5)	$\text{père}(\text{Mongi}, \text{Salim})$	P
6)	$\text{sœur}(\text{Fatma}, \text{Lamia})$	P
7)	$\text{plus_âgé}(\text{Fatma}, \text{Mongi})$	P
8)	$\forall y : [\text{fille}(\text{Lamia}) \wedge \text{sœur}(y, \text{Lamia}) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Lamia}, y)]$	H
9)	$\text{fille}(\text{Lamia}) \wedge \text{sœur}(\text{Fatma}, \text{Lamia}) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Fatma})$	$\forall\text{-E}, 8, y/\text{Fatma}$
10)	$\text{fille}(\text{Lamia}) \wedge \text{sœur}(\text{Fatma}, \text{Lamia})$	$\wedge\text{-I}, 4, 6$
11)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Fatma})$	$\Rightarrow\text{-E}, 9, 10$
12)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Fatma}) \wedge \text{plus_âgé}(\text{Fatma}, \text{Mongi})$	$\wedge\text{-I}, 7, 11$
13)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Fatma}) \wedge \text{plus_âgé}(\text{Fatma}, \text{Mongi}) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Mongi})$	$\forall\text{-E}, 3, x/\text{Lamia},$
14)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Mongi})$	$y/\text{Fatma}, z/\text{Mongi}$ $\Rightarrow\text{-E}, 12, 13$
15)	$\forall y : [\text{père}(\text{Mongi}, y) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Mongi}, y)]$	$\forall\text{-E}, 1, x/\text{Mongi}$
16)	$\text{père}(\text{Mongi}, \text{Salim}) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Mongi}, \text{Salim})$	$\forall\text{-E}, 15, y/\text{Salim}$
17)	$\text{plus_âgé}(\text{Mongi}, \text{Salim})$	$\Rightarrow\text{-E}, 5, 16$
18)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Mongi}) \wedge \text{plus_âgé}(\text{Mongi}, \text{Salim}) \Rightarrow \text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Salim})$	$\forall\text{-E}, 3,$ $x/\text{Lamia}, y/\text{Mongi},$ z/Salim
19)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Mongi}) \wedge \text{plus_âgé}(\text{Mongi}, \text{Salim})$	$\wedge\text{-I}, 14, 17$
20)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Salim})$	$\Rightarrow\text{-E}, 18, 19$
21)	$\text{plus_âgé}(\text{Lamia}, \text{Salim})$	$\exists\text{-E}, 2, 8\text{-}20$ Erreur

La ligne 21 est fausse puisque l'application de la règle élimination de l'existentiel n'a pas respecté une condition nécessaire. En effet, la constante Lamia, utilisée dans l'hypothèse de la ligne 8, existe dans les prémisses ainsi que dans la conclusion (ligne 21). Au fait, ici nous avons voulu éliminer l'existentiel de la ligne 2 en remplaçant x par Lamia, qui est une constante existante dans les prémisses. La ligne stipule qu'un certain x existe mais ce n'est pas forcément Lamia qui est une personne connue. On sait que la règle est vraie pour quelqu'un, mais en aucun cas on peut supposer que c'est précisément Lamia.

On peut par contre utiliser une constante intermédiaire comme le montre l'exemple suivant.

Exemple corrigé :

Considérons les informations suivantes :

1. Les chevaux sont plus rapides que les chiens
2. *Il existe un lévrier plus rapide que tout lapin*
3. *Les lévriers sont des chiens*
4. *Harry est un cheval*

5. *Ralph est un lapin*

Peut-on déduire: « *Harry est plus rapide que Ralph* » ?

Traduction en logique des prédicats :

Soient les variables: x, y, z , les constantes : Harry, Ralph, les prédicats unaires: **cheval**, **chien**, **lévrier**, **lapin** et les prédicats binaires: **plus_rapide**. Nous écrivons les traductions ci-dessous. Notez l'ajout de la formule évidente Δ_6 que nous avons ajoutée pour le but de l'exercice.

- $\Delta_1 : \forall x : \forall y : [\text{cheval}(x) \wedge \text{chien}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,y)]$
- $\Delta_2 : \exists x : [\text{levier}(x) \wedge \forall y : [\text{lapin}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,y)]]$
- $\Delta_3 : \forall x : [\text{levier}(x) \Rightarrow \text{chien}(x)]$
- $\Delta_4 : \text{cheval}(\text{Harry})$
- $\Delta_5 : \text{lapin}(\text{Ralph})$
- $\Delta_6 : \forall x : \forall y : \forall z : [\text{plus_rapide}(x,y) \wedge \text{plus_rapide}(y,z) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,z)]$

Le but à prouver est : **plus_rapide(Harry,Ralph)**.

Preuve par déduction :

1)	$\forall x : \forall y : [\text{cheval}(x) \wedge \text{chien}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,y)]$	P
2)	$\exists x : [\text{levier}(x) \wedge \forall y : [\text{lapin}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,y)]]$	P
3)	$\forall x : [\text{levier}(x) \Rightarrow \text{chien}(x)]$	P
4)	$\text{cheval}(\text{Harry})$	P
5)	$\text{lapin}(\text{Ralph})$	P
6)	$\forall x : \forall y : \forall z : [\text{plus_rapide}(x,y) \wedge \text{plus_rapide}(y,z) \Rightarrow \text{plus_rapide}(x,z)]$	P
7)	$\text{levier}(\text{Tom}) \wedge \forall y : [\text{lapin}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Tom},y)]$	H
8)	$\text{levier}(\text{Tom})$	$\wedge\text{-E}, 7$
9)	$\text{levier}(\text{Tom}) \Rightarrow \text{chien}(\text{Tom})$	$\forall\text{-E}, 3, x/\text{Tom}$
10)	$\text{chien}(\text{Tom})$	$\Rightarrow\text{-E}, 8,9$
11)	$\forall y : [\text{cheval}(\text{Harry}) \wedge \text{chien}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Harry},y)]$	$\forall\text{-E}, 1, x/\text{Harry}$
12)	$\text{cheval}(\text{Harry}) \wedge \text{chien}(\text{Tom}) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Tom})$	$\forall\text{-E}, 1, y/\text{Tom}$
13)	$\text{cheval}(\text{Harry}) \wedge \text{chien}(\text{Tom})$	$\wedge\text{-I}, 4,10$
14)	$\text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Tom})$	$\Rightarrow\text{-E}, 12,13$
15)	$\forall y : [\text{lapin}(y) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Tom},y)]$	$\wedge\text{-E}, 7,$
16)	$\text{lapin}(\text{Ralph}) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Tom},\text{Ralph})$	$\forall\text{-E}, 15,16,$
17)	$\text{plus_rapide}(\text{Tom},\text{Ralph})$	y/Ralph $\Rightarrow\text{-E}, 5,16$
18)	$\text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Tom}) \wedge \text{plus_rapide}(\text{Tom},\text{Ralph}) \Rightarrow \text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Ralph})$	$\forall\text{-E}, 6,$ $x/\text{Harry}, y/\text{Tom},$ z/Ralph
19)	$\text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Tom}) \wedge \text{plus_rapide}(\text{Tom},\text{Ralph})$	$\wedge\text{-I}, 14,17$
20)	$\text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Ralph})$	$\Rightarrow\text{-E}, 18,19$
21)	$\text{plus_rapide}(\text{Harry},\text{Ralph})$	$\exists\text{-E}, 2,7\text{-}20$

L'application de la règle $\exists\text{-E}$ à la ligne 21 est correcte ici parce que Tom est une constante qui ne se trouve ni dans les prémisses, ni dans une hypothèse active ni dans la conclusion de la règle (ligne 21). La constante Tom est nouvelle et a été introduite juste pour le but de l'exercice, une fois utilisée dans l'hypothèse elle n'a plus aucune utilité par la suite.

Exercice 3 :

On veut formaliser un tournoi de tennis en utilisant la logique des prédicats. Pour cela, on introduit :

- deux constantes A et B qui représentent deux joueurs, Alain et Bernard,
- deux symboles prédicatifs d'arité 1, i et e, tels que i(x) signifie « x est inscrit au tournoi », et e(x) : « x est éliminé du tournoi »,
- deux symboles prédicatifs d'arité 2, a et b, tels que a(x,y) signifie « x a joué contre y » et b(x,y) : « x a battu y ».

1. Traduire en formules logiques les assertions suivantes :

- (a) Alain et Bernard sont inscrits au tournoi.
- (b) Un joueur doit être inscrit pour pouvoir jouer et tout joueur battu est éliminé.
- (c) Bernard a battu tous les joueurs inscrits qui ont joué contre Alain.
- (d) Aucun joueur inscrit ayant battu Bernard n'a joué contre un joueur inscrit battu par Alain.

Correction :

- a. $i(A) \wedge i(B)$
- b. $\forall x: [\exists y: [a(x, y)] \Rightarrow i(x)] \wedge \forall y: [\exists x: [b(x, y)] \Rightarrow e(y)]$
- c. $\forall x: [i(x) \wedge a(x, A) \Rightarrow b(B, x)]$
- d. $\neg \exists x: [i(x) \wedge b(x, B) \wedge \exists y: [i(y) \wedge a(x, y) \wedge b(A, y)]]$

2. Exprimer en langage naturel les formules suivantes :

- a. $\neg \forall x: [i(x) \Rightarrow a(x, A)]$
- b. $\exists x: [\forall y: [i(x) \wedge b(B, x) \wedge (i(y) \wedge a(y, A) \Rightarrow b(x, y))]]$.
- c. $\forall x: [\exists y: [i(x) \wedge b(x, B) \Rightarrow i(y) \wedge b(y, A) \wedge b(x, y)]]$.

Correction :

- a. Il y a un joueur inscrit qui n'a pas joué avec Alain.
- b. Il y a un joueur inscrit, battu par Bernard, qui a battu tous les joueurs inscrits ayant battu Alain.
- c. Tous les joueurs inscrits ayant battu Bernard ont battu un joueur inscrit ayant battu Alain.

3. Utiliser le principe de résolution pour la réfutation et démontrer que le fait « Il y un joueur qui n'a pas été battu » se déduit des faits suivants :

- a. $\exists x: [i(x) \wedge \neg e(x)]$
- b. $\forall x: [i(x) \Rightarrow (\exists y: [b(y, x)] \Rightarrow e(x))]$.
- c. $\forall x: [\forall y: [b(x, y) \Rightarrow \neg b(y, x)]]$

Correction :

La phrase « Il y un joueur qui n'a pas été battu », qui constitue le but à prouver, se traduit par $\exists x: [\neg \exists y: [b(y, x)]]$. Comme ce n'est pas mentionné dans l'énoncé, nous ferons la preuve par réfutation. Nous considérons donc la négation du but : $\neg \exists x: [\neg \exists y: [b(y, x)]]$.

Forma clausale

- $\{i(c), \neg e(c)\}$, avec c_1 et c_2 deux nouvelles constantes de Skolem
- $\{\neg i(x) \vee \neg b(y, x) \vee e(x)\}$
- $\{\neg b(x, y) \vee \neg b(y, x)\}$
- $\{b(g(x), x)\}$. Avec g une nouvelle fonction de skolem. (Négation du but sous forme clausale).

Donc voici l'ensemble des clauses :

- | | | |
|----|---|----------|
| a. | $i(c)$ | Φ_1 |
| b. | $\neg e(c)$ | Φ_2 |
| c. | $\neg i(x_1) \vee \neg b(y_1, x_1) \vee e(x_1)$ | Φ_3 |
| d. | $\neg b(x_2, y_2) \vee \neg b(y_2, x_2)$ | Φ_4 |
| e. | $b(g(x_3), x_3)$ | Φ_5 |

Résolution

1.	$i(c)$	Φ_1
2.	$\neg e(c)$	Φ_2
3.	$\neg i(x_1) \vee \neg b(y_1, x_1) \vee e(x_1)$	Φ_3
4.	$\neg b(x_2, y_2) \vee \neg b(y_2, x_2)$	Φ_4
5.	$b(g(x_3), x_3)$	Φ_5
6.	$\neg b(y_1, c) \vee e(c)$	1,3, PR, x_1/c
7.	$\neg b(y_1, c)$	2,6, PR
8.	\perp	5,7, $x_3/c, y_1/g(c)$