Correction TD1

E. Menif

A.U. 2020-2021

Exercice 1 :

(a) L'ensemble des mots qui commencent par un a et se terminent par b
Pour $\Sigma = \{a, b\}$, alors $L(E) = \{w \in \Sigma^* | \exists u \in \Sigma^* : w = a.u.b\}$

(b) L'ensemble de tous les mots sur $\Sigma = \{a, b\}$
$L(((\emptyset^*|b)a^*)^*) = L(((\varepsilon|b)a^*)^*) = L((a^*|ba^*)^*) = L((a^{**}(ba^*)^*)^*) = L((a^*(ba^*)^*)^*)$

(c) L'ensemble des mots formés d'un nombre impair de a et ne contenant pas b sur $\Sigma = \{a, b\}$
$L(E) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \, mod \, 2 = 1 \; et \; |w|_b = 0\}$

(d) L'ensemble des mots où les éventuelles occurrences de a et b doivent précéder les éventuelles occurrences de c et d.
Pour $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ alors $L(E) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \{a, b\}^* \; et \; v \in \{c, d\}^* : w = u.v\}$

(e) L'ensemble des mots qui commencent par la séquence aab et se terminent par au moins un couple bb ou aa.
Pour $\Sigma = \{a, b\}$, alors $L(E) = \{w \in \Sigma^* | \exists u \in \{a, b\}^* \; et \; v \in \{aa, bb\}^+ : w = aab.u.v\}$

Exercice 2 : Sachant que $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) $aa + ab + ba + bb$ ou $a(a + b) + b(a + b)$ ou $(a + b)(a + b)$

(b) $((a + b)(a + b))^*$

(c) b^*ab^*

(d) $(a + b)^*a(a + b)^*$

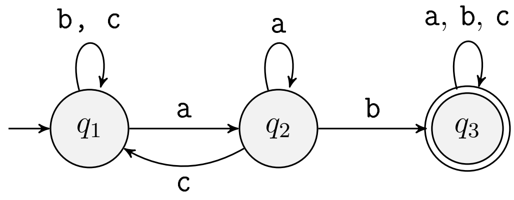
(e) $a^*(ba^*ba^*)^*ba^*$

(f) $(a + b)^*aba$

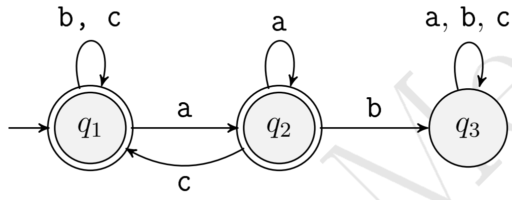
Exercice 3 : Sachant que $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) L'automate qui reconnait tous les mots ne contenant pas ab
On construit d'abord l'automate déterministe qui accepte les mots contenant *ab* pour pouvoir construire par la suite son complément.

Voici l'automate déterministe qui accepte les mots contenant *ab*.

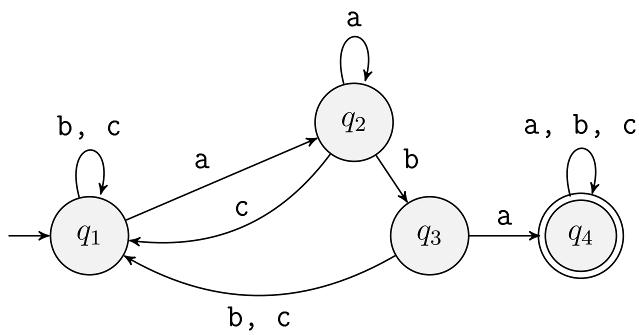


On construit maintenant son complément :

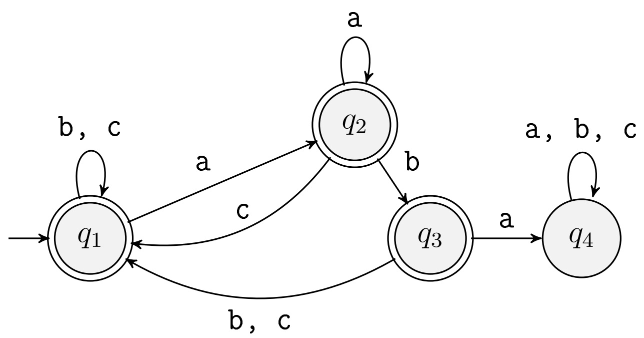


(b) L'automate qui reconnait tous les mots ne contenant pas *aba*
Comme pour le langage précédent, on construit l'automate qui reconnait les mots contenant *aba* puis on construit son complément.

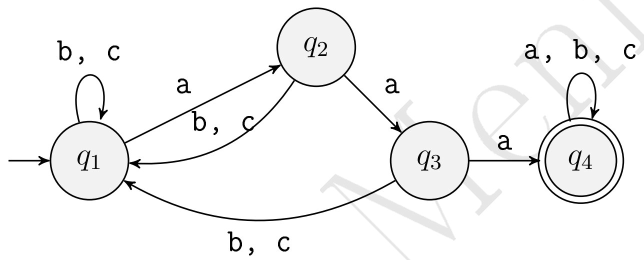
L'automate déterministe qui reconnait les mots contenant *aba* est le suivant :



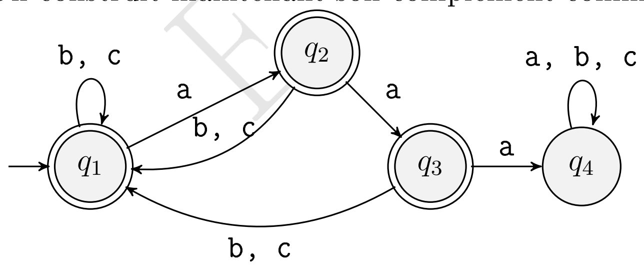
On construit maintenant son complément comme suit :



(c) Tous les mots ne contenant pas plus que deux a consécutifs
On commence par construire l'automate déterministe qui reconnait les mots contenant plus que deux a consécutifs puis on construit son complément.
L'automate déterministe qui reconnait les mots contenant plus que deux a consécutifs est le suivant :



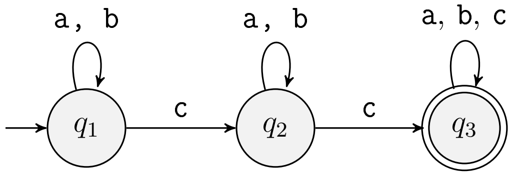
On construit maintenant son complément comme suit :



(d) Tous les mots ne contenant pas ab et possédant au moins 2 c. La construction de l'automate se fait en trois étapes :

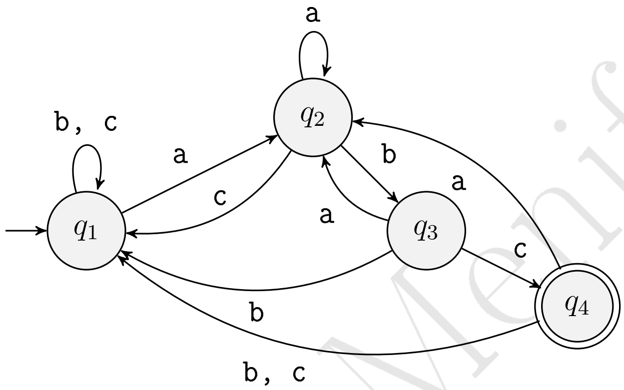
- Construire l'automate A_1 reconnaissant les mots ne contenant pas ab.
- Construire l'automate A_2 reconnaissant les mots possédant au moins 2 c.
- Construire l'automate A qui reconnait le langage $L(A_1) \cap L(A_2)$

L'automate A_1 est celui de la question a.
L'automate A_2 est le suivant :



Pour construire l'automate qui reconnaissant le langage intersection des deux langages $L(A_1)$ et $L(A_2)$, nous avons le choix d'appliquer la loi de Morgan ou le produit des automates.

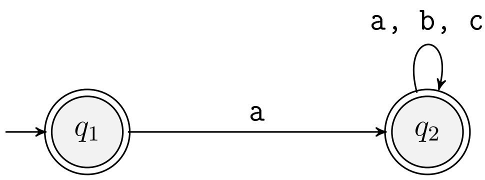
(e) Tous les mots finissant par abc.



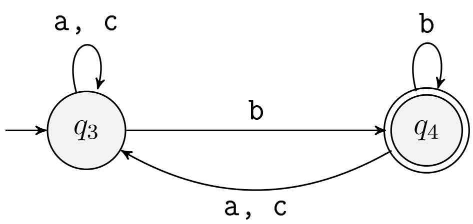
(f) Tous les mots commençant par a ou finissant par b Nous construisons deux automates :

- l'automate A_1 reconnait les mots commençant par a.
- l'automate A_2 reconnait les mots finissant par b.

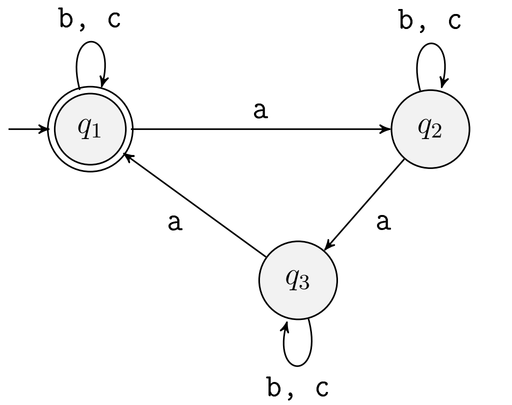
Par la suite nous procédons à leur union. L'automate A_1 est le suivant :



L'automate A_2 est le suivant :



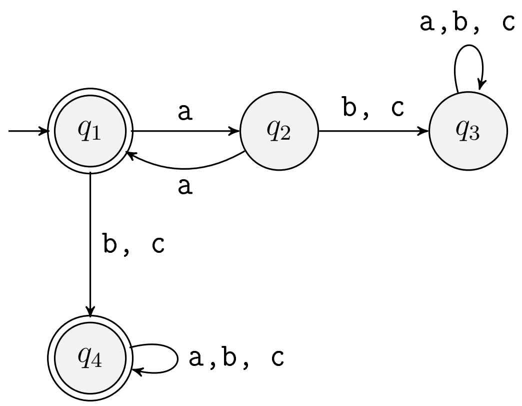
(g) Tous les mots dont les nombres de a, b et c sont multiples de 3.
Il faudra construire trois automates, chacun reconnait les mots contenant un nombre multiple de 3 pour une lettre donnée, puis nous procédons à leur intersection.
Par exemple, l'automate A_{3a} reconnait les mots contenant un nombre de a multiple de 3 :



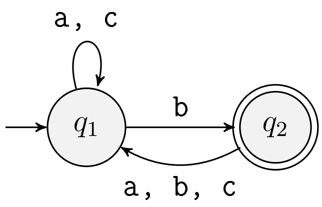
(h) Tous les mots commençant par un nombre pair de a et finissant par un nombre impair de b. Il faut construire deux automates :

- l'automate A_1 reconnait les mots commençant par un nombre pair de a.
- l'automate A_2 reconnait les mots finissant par un nombre impair de b.

Par la suite nous procédons à leur intersection. L'automate A_1 est le suivant :



L'automate A_2 est le suivant :



Exercice 4 : Pour montrer que l'ensemble L des séquences sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contenant un nombre impair de a, un nombre impair de b et un nombre pair de c est un langage régulier, nous allons montrer qu'il existe un automate fini reconnaissant le langage. Le langage L peut être considéré comme l'intersection de trois langages, $L = L_1 \cap L_2 \cap L_3$ avec :

- L_1 l'ensemble des mots contenant un nombre impair de a ;
- L_2 l'ensemble des mots contenant un nombre impair de b ;
- L_3 l'ensemble des mots contenant un nombre pair de c ;

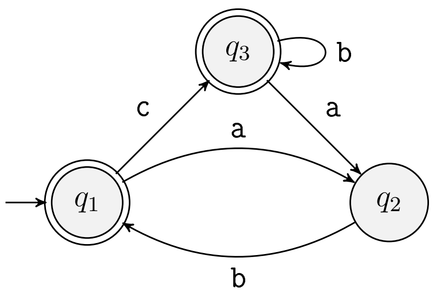
Ces trois langages sont réguliers puisqu'il existe un automate fini pour chaque langage et d'après le théorème de Kleene, les langages réguliers sont fermés par l'intersection. Par conséquent, L est régulier.

Exercice 5 : Sachant que $\Sigma = \{a, b, c\}$.

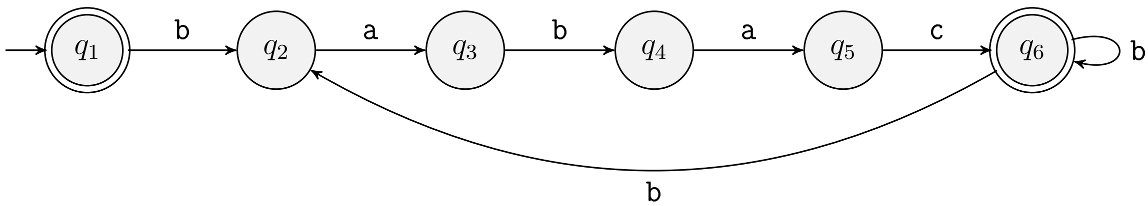
(a) $a((ab)^*cb^*)^*|a((ba)(ba)cb^*)^*$
Nous pouvons mettre en facteur le symbole a à gauche, nous obtenons alors une expression sous la forme $a(E_1|E_2)$ avec :

- E_1 l'expression $((ab)^*cb^*)^*$
- E_2 l'expression $((ba)(ba)cb^*)^*$

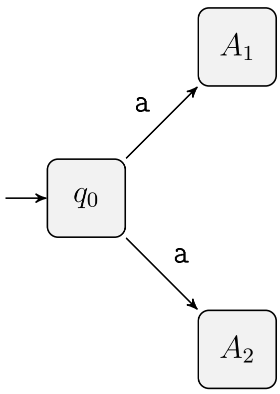
Nous pouvons ainsi construire un automate A_1 pour reconnaitre le langage engendré par E_1 et un autre A_2 pour reconnaitre le langage engendré par E_2.
L'automate A_1 est le suivant :



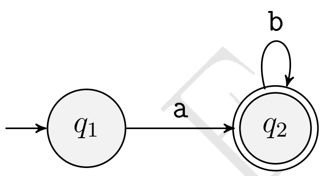
L'automate A_2 est le suivant :



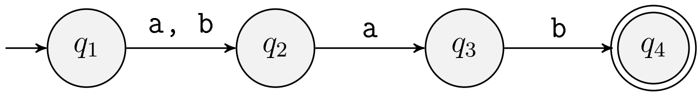
L'automate qui reconnait $L(E)$ est alors :



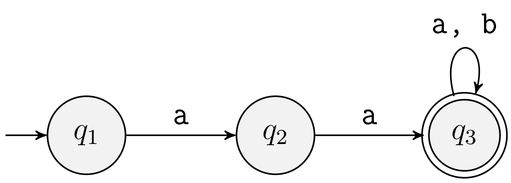
(b) ab^*



(c) $(a|b)ab$

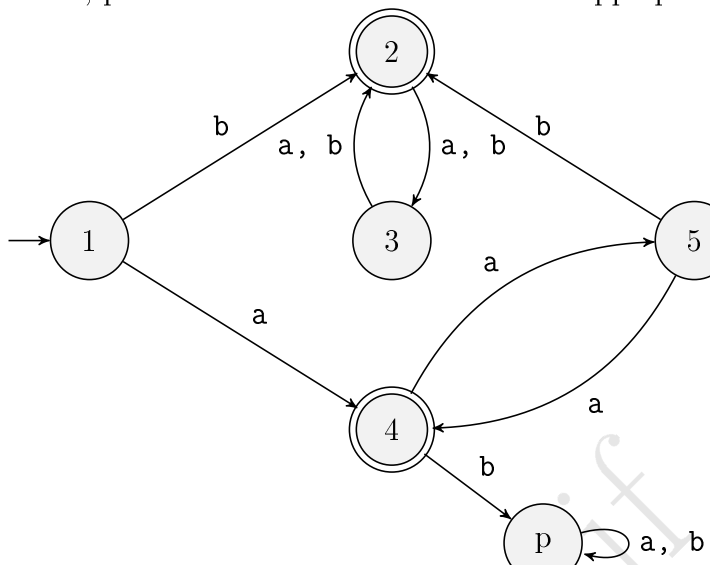


(d) $aa(a|b)^*$



Exercice 6 :

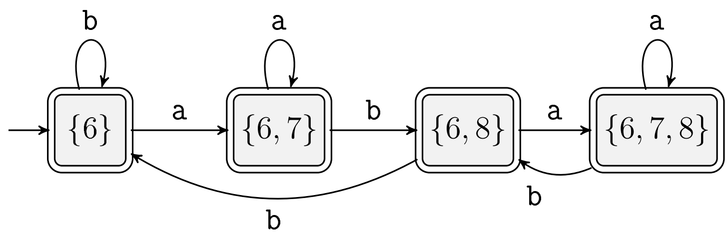
1. L'automate A_1 n'est pas déterministe car non complet au niveau de l'état 4, pour le rendre déterministe il faut appliquer la complétion.



L'automate A_2 est non déterministe car incomplet au niveau de l'état 7 sur a et au niveau de l'état 8 sur b et également ambigüe au niveau de l'état 6 et 8. Pour le rendre déterministe il faut appliquer l'algorithme de déterminisation.

	a	b
$* \rightarrow \{6\}$	$\{6,7\}$	$\{6\}$
$*\{6,7\}$	$\{6,7\}$	$\{6,8\}$
$*\{6,8\}$	$\{6,7,8\}$	$\{6\}$
$*\{6,7,8\}$	$\{6,7,8\}$	$\{6,8\}$

L'automate déterministe équivalent à A_2 est le suivant :



2. Le langage $L(A_1) = \{b\}\{a,b\}^{2*} \cup \{a\}\{aa\}^* \cup \{a\}\{aa\}^*\{b\}\{a,b\}^{2*}$

3. Le système d'équations relatif à l'automate est le suivant :
$L_1 = b\,L_2 + a\,L_4$

$L_2 = (a+b)\,L_3 + \varepsilon$
$L_3 = (a+b)\,L_2$
$L_4 = a\,L_5 + \varepsilon$
$L_5 = a\,L_4 + b\,L_2$

Nous remplaçons L_3 par son équation dans L_2 :

$L_2 = (a+b)\,(a+b)\,L_2 + \varepsilon$

D'après le lemme d'*Arden*, L_2 admet une solution qui est $((a+b)\,(a+b))^*$

Nous remplaçons maintenant L_5 par son équation dans L_4

$L_4 = a\,L_5 + \varepsilon$
$L_4 = a\,(a\,L_4 + b\,L_2) + \varepsilon$
$L_4 = aa\,L_4 + ab\,L_2 + \varepsilon$

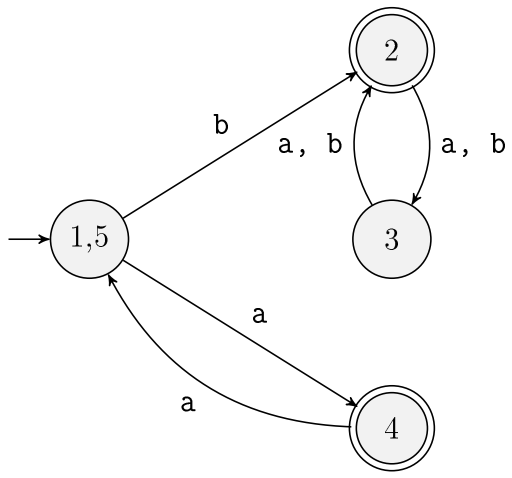
D'après le lemme d'*Arden*, L_4 admet une solution qui est $(aa)^*(ab\,L_2{+}\varepsilon)$
Nous remplaçons L_2 par sa solution dans L_4, nous aurons :

$L_4 = (aa)^*((ab)((a+b)(a+b))^* + \varepsilon))$

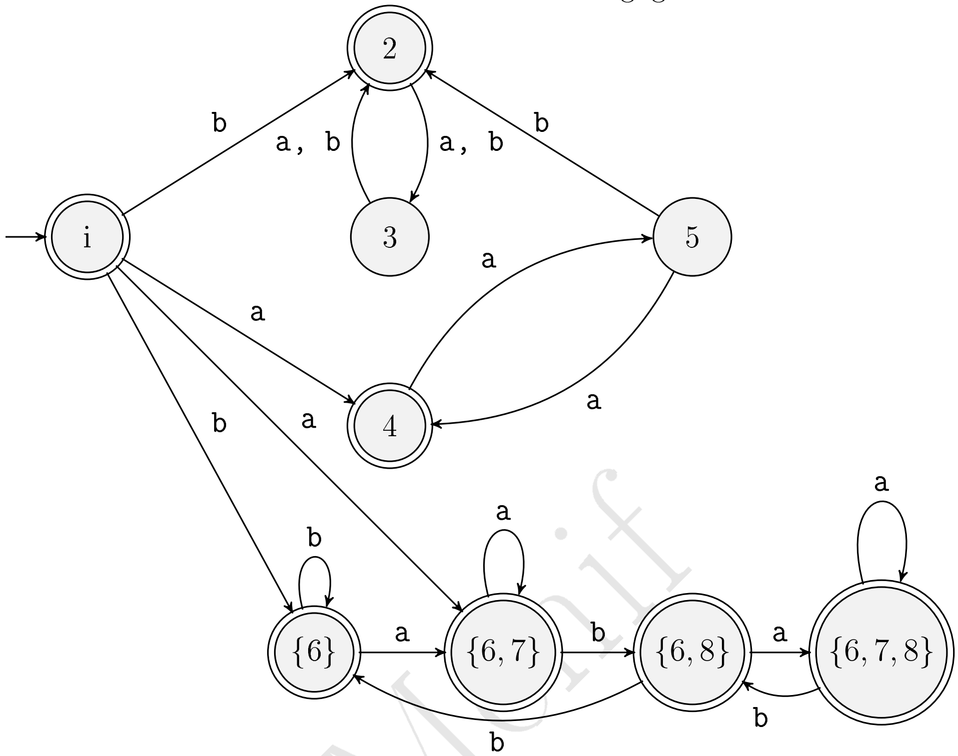
Nous remplaçons L_2 et L_4 par leurs solutions dans L_1, nous obtenons l'expression régulière dénotant le langage $L(A_1)$.

$L_1 = b\,((a+b)\,(a+b))^* + a\,[(aa)^*((ab)((a+b)(a+b))^* + \varepsilon)]$

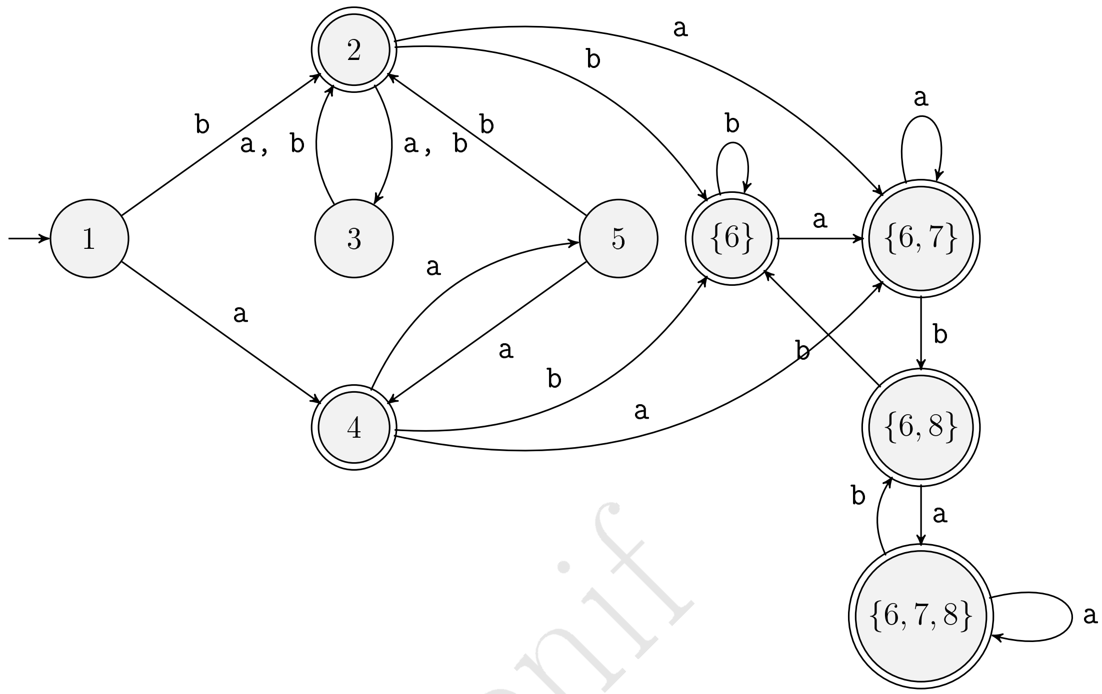
4. L'automate minimal équivalent à A_1



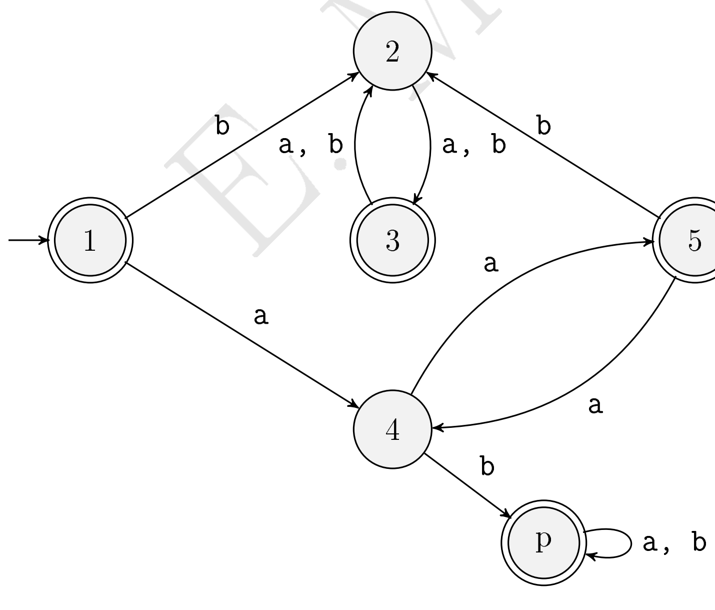
5. L'automate reconnaissant l'union des deux langages est :



6. L'automate qui reconnait $L(A_1).L(A_2)$



7. $L(A_5) = \Sigma^* \setminus L(A_1)$ alors $L(A_5)$ est le complément de $L(A_1)$



Exercice 7 : L'expression régulière est : $a(c_1a_2 + c_2a_3)a_4$