Analyse Numérique 1

Chap.1 : Introduction

R	C
Transposé (T)	Transconjugé (*)
$<Ax,y> = <x,A^t y>$	$<Ax,y>=<x,A^* y>$
Symétrique ($A^t = A$)	Hermitienne ($A^*=A$)
A Orthogonale <=> ($A^tA=AA^t=I$ et $A^{-1}=A^t$)	A Unitaire <=> ($A^*A=AA^*=I$ et $A^{-1}=A^*$)
A Orthogonale => $\|\|Ax\|\|=\|\|x\|\|$	U Unitaire => $\|\|Ux\|\|=\|\|x\|\|$ $\|\|U\|\|=1$
Théoreme Spectral : A Symétrique => Existe O Orthogonale et D Diagonale tq $A = O^tDO$	Théoreme Spectral : A Hermitienne => Existe U Unitaire et D Diagonale tq $A = U^*DU$
A def positive <=> tous ses VP sont >0	A def positive <=> tous ses VP sont >0

Det(Matrice Triangulaire/Diagonale) = Produit des éléments de la diagonale = Produit des val propres

Matrices Definies positives :

Soit A symétrique(Hermitienne).

A matrice definie positive <=> {<Ax,x> >= 0 et (<Ax,x> = 0 <=> x=0) }

ou

{(Methode de Sylvester)Les déterminant des sous matrices de A sont >0}

Calcul de A^{-1} :

A^{-1}= 1/det(A) . Comatrice^{t}(A)

Exple :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = +6$$

$$\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\text{d'où } B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs et Vecteurs propres :

Valeurs :

Les racines du poly caractéristique : det(Xid-A)

Vecteurs :

AV = Valprop.V

Rayon spectral = max|lamda|

Normes Matricielles :

$||A||_1$= max sur colones (somme des valeurs absolus des élement de chaque colone)

$||A||_{infinie}$ = max sur les lignes (Somme des valeurs absolues des élements)

$||A||_2$ = racine(rayon spectral(A*A))

[Si de plus A normale (A*A=AA*) alors $||A||_2$=rayon spectral(A)]

Norme Subordonné <=> {||Id||= 1
{||Ax||<||A||.||x||

Conditionnement d'une matrice:

$Cond_p(A) = ||A||_p . ||A^{-1}||_p$

Chap.2 : Méthodes directes de resolution des systémes linéaires

Opérations élémentaires sur les lignes :

*La multiplication se fait toujours a gauche

Multiplication par un scalaire α <=> matrice identité avec α a l'indice ii
Permutation de I et j <=> matrice identité avec Id[I,j]=id[j,i] = 1 et Id[i,i]=id[j,j] = 0
Opération Li=Li + α.Lj <=> matrice identité avec id[I,j] = α

Methodes de resolution :
Gauss Classique (On n'effectue pas des permutations sauf si on trouve un pivot nul)
Gauss pivot total (On effectue des changements pour avoir le plus grand pivot (sur lignes & colones))
Gauss pivot partiel (On effectue des permutations pour avoir le plus grand pivot dans la partie qu'on est en train de travailler dessous (sur lignes uniquemenet))

Factorisation LU :

Critére : Les sous matrices principales sont inversibles
A=LU
{Ax=b <=> LU.x=B <=> {Ux = y
{Ly=B
Si on trouve des permutations lors de methode gauss classique la factorisatin devient PA = LU
{Ax=b <=> P.Ax = Pb <=> PLU.x=PB <=> {Ux = y
{Ly = PB

$U = P^3\ E^2\ P2\ E1\ A$

$A = L^1\ P^2\ L^2\ P^3\ U$

Donc

$A = P^2 P^3 LA^1 LA^2 U$

Avec :

$LA^1 = P^3 P^2 L^1 P^2 P^3$

$LA^2 = P^3 L^2 P^3$

=> PA = LU

Avec :

$P = P^3 P^2$

$L = LA^1 LA^2$

Factorisation de Cholesky :

Conditions :

*Symétrique & def positive

*Inversible

Méthode :

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

$$LL^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix}$$

On Identifie $L.L^t = A$

Si il nous demande de resoudre un systéme avec la facto de Cholesky :

$Ax = B$

$\Rightarrow L.L^t x = B$

$\Rightarrow Ly = B \;\&\; L^t x = y$

Si la question est : 'En déduire a partir de la facto LU' :

On pose $A = RDR^T$

Chap. 3 : Methodes itératives de resolution

Systeme $Ax = b$
Il faut écrire A sous la forme $A = M - N$

On prend :

$M = \mathrm{Diag}(A)$

$N = E + F$:

$E = -(A_{i>j})$ (Matrice des Sous-diag)

$F = -(A_{i<j})$ (Matrice des Sur-diag)

Methode De Jacobi :

J = Matrice de Jacobi = $M^{-1}(E+F)$

Ou bien:

Si la matrice A est a diagonale strict dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i, \ \ 1 \leq i \leq n, \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

, La méthode de Jacobi est convergente.

Condition de convergence de la methode :

- ***RaySpec(J) < 1***

Ax = b <=> (M-N)x = b <=> $x^{k+1} = Jx^{k} + M^{-1}$ b

Algorithme :

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER
début
  pour $i = 1$ **à** n **faire**
    $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
  nb $\leftarrow 0$
  tant que *($\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon$) et (nb $<$ MAXITER)* **faire**
    nb $\leftarrow$ nb$+1$
    pour $i = 1$ **à** n **faire**
      $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
    pour $i = 1$ **à** n **faire**
      $$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$
fin

Methode de Relaxation :

$A = M - N$
$M = 1/w . D - E$
$N=(1-w)/w D + F$

Matrice d'itération $L_w=M^{-1}N$

Etapes :
On cherche w pour lesquels la methode cv

On cherche w optimal qui verifie RayonSepc(L_w) =

inf(RayonSpec(L_w))

Le systéme devient $x_{k+1}= L_w x_k + M^{-1} b$

- **{La méthode de relaxation cv => w in]0,2[}<=> qqs w in R\]0,2[la methode div**
- ***Si A est Hermitienne (Symétrique) def positive* => *{*w in]0,2[<=> La methode de relaxation cv}**

Condition Nécessaire :

- **Il faut que le rayon spectral de la matrice d'itération soit *<1***

Condition Nécessaire et suffisante :

- **A Hermitienne def positive => { Méthode de relaxation cv <=> w in]0,2[}**

Gauss-Seidel (Cas Particulier w=1)

Algorithme :

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER

début

  pour $i = 1$ **à** n **faire**

    $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$

  nb $\leftarrow 0$

  tant que *($\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon$) et (nb $<$ MAXITER)* **faire**

    nb $\leftarrow$ nb$+1$

    pour $i = 1$ **à** n **faire**

      $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$

    pour $i = 1$ **à** n **faire**

$$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$

fin

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL modifie l'algorithme de JACOBI pour utiliser à chaque itération les valeurs x_i^{k+1} déjà calculées

Jacobi A diag strict dominante / ray spec <1

Gauss Seidel A sym def pos w in 0,2