Ecole Nationale d' Ingénieurs de Carthage

Devoir surveillé d'Analyse Numérique

Classes : 1ère année ING-INFO — Durée : **1h30**
Date : 12 Mars 2019 — Nbre de pages : **2**

Les documents ne sont pas autorisés.

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1 (2 points)

On s'intéresse au nombre d'opérations élémentaires (additions/soustractions, multiplications, divisions) nécessaires au calcul de $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$ pour x, $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et $\{y_0, \ldots, y_n\}$ donnés.

1. Donner le nombre d'opérations élémentaires pour calculer chaque polynôme de Lagrange $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
2. En déduire le nombre total d'opérations élémentaires pour calculer $P_n(x)$.

Exercice 2 (5 points)

Calculer le polynôme d'interpolation P_3 relatif aux points $(x_i, y_i), i = 0..3$, suivants

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y_i	0	1	0	-1

en utilisant la base de Lagrange puis celle de Newton.

Exercice 3 (5 points)

Soit $f(x) = x^3 - 3$. On souhaite calculer la racine réelle α de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de point fixe associée à la fonction

$$g(x) = (1-\beta)x^3 + (1 - \frac{\beta}{3})x + \frac{\beta}{x^2} + 3(\beta - 1)$$

où β est un paramètre réel.

1. Vérifier que, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, α est un point fixe de g.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de β la méthode proposée est-elle d'ordre supérieur à un ?
3. Existe-t-il une valeur de β telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à 2 ?

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage

Exercice 4 (8 points)

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$. On note $I = [\frac{3}{2}, 2]$

1. Montrer que que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α dans $]\frac{3}{2}, 2[$.
2. En utilisant la méthode de dichotomie sur I, quel est le nombre n_0 d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
3. Calculer une valeur approchée de α à 10^{-1} près, par la méthode de dichotomie.
4. On considère la méthode de point fixe associée à la fonction $g(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
   (a) Montrer que cette méthode est localement convergente vers α, et déterminer son ordre de convergence.
   (b) Montrer qu'elle est globalement convergente sur I.
   (c) Trouver une constante $C > 0$ telle que, si $x_0 \in I$,
   $$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   (d) En prenant $x_0 = 1.75$, déterminer le nombre n_1 d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
5. Ecrire la méthode de Newton pour la recherche d'une valeur approchée de α.
6. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe associée à g, laquelle choisiriez-vous pour calculer une approximation de α ? Justifier votre réponse.

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage

Corrigé

Exercice 1

1. Pour calculer $L_i(x)$ on doit répéter n fois l'instruction $L_i \leftarrow L_i * \dfrac{x - x(j))}{x(i) - x(j)}$, soit $4n$ opérations élémentaires.
2. Pour calculer $P_n(x)$ on doit répéter $(n+1)$ fois l'instruction $P \leftarrow P + y(i) \star L_i(x)$, soit au total $(n+1)(4n+2)$ opérations élémentaires.

Exercice 2

Forme de Lagrange

$$\begin{aligned} P_3(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) \\ &= y_1L_1(x) + y_3L_3(x) \\ &= \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)(x-3\frac{\pi}{2}) - \frac{4}{3\pi^3}x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi) \end{aligned}$$

Forme de Newton : Table des différences divisées

x_i	y_i	ordre 1	ordre 2	ordre 3
0	$\boxed{0}$			
		$\boxed{\frac{2}{\pi}}$		
$\frac{\pi}{2}$	1		$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$	
		$-\frac{2}{\pi}$		$\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$
π	0		0	
		$-\frac{2}{\pi}$		
$\frac{3\pi}{2}$	-1			

$P_3(x) = \dfrac{2}{\pi}x - \dfrac{4}{\pi^2}x(x-\dfrac{\pi}{2}) + \dfrac{8}{3\pi^3}x(x-\dfrac{\pi}{2})(x-\pi).$

Exercice 3

1. $$g(\alpha) = (1-\beta)\alpha^3 + (1-\frac{\beta}{3})\alpha + \frac{\beta}{\alpha^2} + 3(\beta-1)$$

$$\begin{aligned} &= 3(1-\beta) + (1-\frac{\beta}{3})\alpha + \frac{\beta}{\alpha^2} + 3(\beta-1) \quad (f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3) \\ &= 3(1-\beta) + (1-\frac{\beta}{3})\alpha + \frac{\beta}{3}\alpha + 3(\beta-1) \quad (\alpha^2 = \frac{3}{\alpha}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha$ est un point fixe de g, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

2. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. L'ordre de la méthode est supérieur à 1 si $g'(\alpha) = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 3(1-\beta)x^2 + (1-\dfrac{\beta}{3}) - \dfrac{2\beta}{x^3}$.
Pour $x = \alpha$, on obtient $g'(\alpha) = 3(1-\beta)\alpha^2 + (1-\dfrac{\beta}{3}) - \dfrac{2\beta}{3}$. $(\alpha^3 = 3)$

$$\begin{aligned} g'(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3(1-\beta)\alpha^2 + (1-\frac{\beta}{3}) - \frac{2\beta}{3} = 0. \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\beta)(3\alpha^2+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\beta = 1}. \qquad (3\alpha^2 + 1 \neq 0) \end{aligned}$$

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage

3. L'ordre de la méthode est supérieur à 2 si $g'(\alpha) = 0$ *et* $g''(\alpha) = 0$.
   On a $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$. Vérifions alors pour $\beta = 1$ si $g''(\alpha) = 0$.
   En prenant $\beta = 1$, on obtient $g'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{x^3}$ et $g''(x) = \dfrac{6}{x^4}$ ce qui donne, pour $x = \alpha$,

$$g''(\alpha) = \frac{6}{\alpha^4} = \frac{2}{\alpha} \neq 0,$$

   donc on ne peut pas avoir un ordre supérieur à 2.

Exercice 4

1. f continue sur I, $f(\dfrac{3}{2})f(2) = -1 \times 3 < 0$, alors d'après le T.V.I $\exists \alpha \in]\dfrac{3}{2}, 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus f est strictement croissante sur I ($f'(x) = 6x(x-1) > 0 \; \forall x \in I$), d'où l'unicité de α.

2. Le nombre d'itérations n_0 assurant une précision $\epsilon = 10^{-6}$ vérifie $\dfrac{2 - 3/2}{2^{n_0}} \leq 10^{-6}$

$$\Leftrightarrow 2^{(n_0+1)} \geq 10^6 \Leftrightarrow n_0 \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \simeq 18,93$$

   Donc $n_0 = 19$ itérations.

3. $[a_0, b_0] = [\frac{3}{2}, 2]$, $f(\frac{3}{2}) = -1$, $f(2) = 3$, $x_0 = \frac{2+3/2}{2} = \frac{7}{4}$

$$\begin{array}{llll} f(\frac{7}{4}) = 0.53 > 0 & \Rightarrow & [a_1, b_1] = [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] & , \quad x_1 = \frac{7/4+3/2}{2} = \frac{13}{8} \\ f(\frac{13}{8}) = -0.34 < 0 & \Rightarrow & [a_2, b_2] = [\frac{13}{8}, \frac{7}{4}] & , \quad x_2 = \frac{7/4+13/8}{2} = \frac{27}{16} \\ f(\frac{27}{16}) = 0.07 > 0 & \Rightarrow & [a_3, b_3] = [\frac{13}{8}, \frac{27}{16}] & \end{array}$$

   $\dfrac{27}{16} - \dfrac{13}{8} = 0.0625 < 10^{-1}$ donc la solution $\alpha \in [\dfrac{13}{8}, \dfrac{27}{16}] = [1.625, 1.687]$

4. (a) $g(\alpha) = \left(\dfrac{3\alpha^2+1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{2\alpha^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \alpha$ donc α est un point fixe de g.
   g est dérivable sur I et $g'(x) = \dfrac{1}{3}(3x)(g(x))^{-2} = \dfrac{x}{(g(x))^2}$.
   Pour $x = \alpha$, $g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} < 1$ ($\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$), donc la méthode est local. convergente.
   Comme $g'(\alpha) \neq 0$ alors la méthode est d'ordre 1.

   (b) $g'(x) = x\left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > 0$, $\forall x \in I$ donc g est strictement croissante sur I.
   Ce qui donne $\forall x \in I$, $g(3/2) \leq g(x) \leq g(2)$.
   $g(2) \simeq 1.866 < 2$ et $g(3/2) \simeq 1.57 > \frac{3}{2}$. Ainsi $g(I) \subset I$ **(1)**
   $g''(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1-x^2}{3x^2+1}\right) < 0$, $\forall x \in I$, donc g est strictement décroissante sur I et par suite $0 < g'(2) \leq g'(x) \leq g'(3/2) \simeq 0.608 < 1$, $\forall x \in I$.
   g dérivable et $|g'(x)| \leq g'(3/2) < 1$, $\forall x \in I \Rightarrow g$ est contractante sur I **(2)**.
   Grâce au théorème de point fixe, **(1)** et **(2)** donnent le résultat.

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage

(c) On montre par recurrence que si $x_0 \in I$ alors $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($g(I) \subset I$).
Le T.A.F appiquée à f montre qu'il existe ξ_n entre x_n et α tel que

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi_n)(x_n - \alpha) \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq \max_{x \in I} |g'(x)||x_n - \alpha|$$

(g' continue sur I donc g' est bornée et atteint ses bornes).
En prenant $C = \max_{x \in I} |g'(x)| = g'(3/2) \simeq 0.608$, on obtient

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha| \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(d) En utilisant l'inégalité précédente on montre par recurrence que

$$|x_n - \alpha| \leq C^n |x_0 - \alpha| \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour $x_0 = 1.75$ (milieu de $[\frac{3}{2}, 2]$), on a $|x_0 - \alpha| \leq 0.25$ et la formule d'estimation d'erreur s'écrit

$$|x_n - \alpha| \leq 0.25 \cdot C^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc le nombre d'itérations n_1 assurant une précision $\epsilon = 10^{-6}$ vérifie

$$0.25 \cdot C^{n_1} \leq 10^{-6} \ \text{ ou encore } \ n_1 \geq \frac{\ln(25 \cdot 10^4)}{\ln(1/C)} \simeq 24.9$$

$n_1 = 25$ itérations.

5. <u>méthode de Newton</u>

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{4x_n^3 - 3x_n^2 + 1}{6x_n^2 - 6x_n}, \qquad n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

6. α étant un zéro simple de f ($f'(\alpha) = 6\alpha(\alpha - 1) \neq 0$), donc la méthode de Newton converge vers α avec un ordre ≥ 2, tandisque la méthode de point fixe associée à $g(x) = \left(\frac{3x^2+1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ converge linéairement, on choisira alors la méthode de Newton.

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage