



## PHS4700

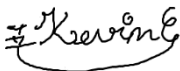

### Physique pour les applications multimédia Automne 2017

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

**Numéro de devoir : 04**

**Numéro de l'équipe : 07**

**Numéro du groupe : 01**

Nom: Bourgault	Prénom : Gabriel	matricule: 1794069
Signature :		
Nom: Chan	Prénom : Kevin Ka Hin	matricule: 1802812
Signature : 		
Nom: Nguyen	Prénom : Kenny	matricule: 1794914
Signature : 		
Nom: Silva-Pinto	Prénom : Nuno	matricule: 1799144
Signature :		

## Table des matières

Introduction .....	2
Théorie et équations .....	3
Équations utilisées pour choisir la direction des rayons lumineux .....	3
Équations utilisées pour déterminer si les rayons lumineux touchent le bloc cylindrique transparent ou le bloc rectangulaire.....	5
Cylindre transparent.....	5
Bloc rectangulaire .....	5
Équations pour déterminer la direction du rayon lumineux qui atteint une des surfaces du bloc cylindrique transparent .....	6
Équations de réflexion.....	6
Équations de réfraction .....	7
Équations pour trouver la position de l'image virtuelle .....	7
Justification du nombre de directions utilisées pour nos simulations.....	8
Présentation et analyse des résultats.....	9
Représentation visuelle des simulations .....	10
Analyse du cas #1 .....	14
Analyse du cas #2 .....	14
Analyse du cas #3 .....	15
Notes additionnelles (voir Fig. 5 à la page suivante) .....	15
Analyse du cas #4 .....	17
Vérifications effectuées pour assurer la précision de nos simulations.....	17
Conclusion .....	18

## Introduction

Ce quatrième et dernier devoir a pour but d'étudier l'image qui est perçue par un observateur immergé dans un fluide suite à la réflexion et la réfraction d'un ou de plusieurs rayons lumineux (photons). L'observateur regarde un bloc cylindrique transparent qui contient un bloc rectangulaire de métal opaque coloré.

Nous nous intéressons alors à quatre cas différents :

1. L'observateur est au point  $r_0 = (0, 0, 5)$  cm. L'indice de réfraction du milieu est 1. L'indice de réfraction du cylindre transparent est 1.
2. L'observateur est au point  $r_0 = (0, 0, 5)$  cm. L'indice de réfraction du milieu est 1. L'indice de réfraction du cylindre transparent est 1.5.
3. L'observateur est au point  $r_0 = (0, 0, 0)$  cm. L'indice de réfraction du milieu est 1. L'indice de réfraction du cylindre transparent est 1.5.
4. L'observateur est au point  $r_0 = (0, 0, 5)$  cm. L'indice de réfraction du milieu est 1.2. L'indice de réfraction du cylindre transparent est 1.

Nous nous basons alors sur la méthode Monte-Carlo pour effectuer nos simulations : nous suivons la trajectoire d'un photon généré aléatoirement. Les angles de sa direction sont contenus dans un intervalle précis afin de minimiser le nombre de simulations. Certaines conditions fournies dans l'énoncé servent au rejet ou non du photon suite à la simulation.

Ainsi, le rapport suivant contient la théorie ainsi que les équations auxquelles nous nous sommes tournés pour nous aider à programmer la fonction Devoir4.m. Cette section sera par la suite appuyée par la présentation ainsi que l'analyse des résultats que nous avons obtenus. Finalement, une brève discussion des problèmes rencontrés servira de conclusion à ce devoir.

## Théorie et équations

### Équations utilisées pour choisir la direction des rayons lumineux

Les équations ci-dessous permettent le calcul des angles polaires maximal et minimal optimaux ainsi que les angles azimutaux maximal et minimal optimaux. Ces valeurs nous permettent de réduire le nombre de simulations possibles, car on ne fait que considérer les angles où le rayon lumineux peut toucher au moins le cylindre transparent.

Sur le plan xy, la projection du cylindre est un cercle (cercle b). Nous traçons un vecteur allant de la position de l'observateur au centre du cercle b (vecteur OB). L'angle du vecteur OB est un angle médian.

$$\phi_{OB} = \tan^{-1} \frac{y_{OB}}{x_{OB}}$$

*Équation 1*

Le diamètre perpendiculaire au vecteur OB relie deux points du cercle b : un pour l'angle azimutal minimal (point A), l'autre pour l'angle azimutal maximal (point C). Cela forme deux triangles symétriques, dont les angles AOB et AOC ont la même valeur (angle  $\phi$ ).

$$\phi = \tan^{-1} \frac{R_b}{||\vec{OB}||}$$

*Équation 2*

On obtient l'angle azimutal minimal ( $\phi_-$ ) en soustrayant l'angle médian par ( $\phi$ ) et l'angle azimutal maximal ( $\phi_+$ ) en ajoutant ( $\phi$ ) à l'angle médian.

$$\phi_- = \phi_{OB} - \phi$$

$$\phi_+ = \phi_{OB} + \phi$$

*Équation 3*

La projection du cylindre sur le plan xz est un rectangle isométrique à la projection du cylindre sur le plan yz. Nous traçons un vecteur  $OB_i$  allant de l'observateur jusqu'à un coin du rectangle pour chaque coin du rectangle, puis nous calculons l'angle polaire de chaque vecteur  $OB_i$ .

$$\theta_{OB_i} = \tan^{-1} \frac{x_{OB}}{z_{OB}}$$

*Équation 4*

Si un coin  $i$  du rectangle a une composante  $z$  inférieure à celle de la position de l'observateur (ce qui est le cas dans le cas 1, 2 et 4), nous calculons l'angle du segment  $OB$  par rapport à  $\theta = \pi/2$  et nous ajoutons  $\pi/2$  à l'angle  $\theta_{OB_i}$ .

$$\theta_{OB_i} = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{z_{OB}}{x_{OB}}$$

*Équation 5*

Nous comparons ensuite tous les angles polaires, peu importe qu'ils soient obtenus avec l'équation 4 ou 5. Les angles polaires minimal ( $\theta_-$ ) et maximal ( $\theta_+$ ) sont respectivement le plus petit et le plus grand angle parmi tous les angles trouvés.

Après avoir déterminé les angles polaires maximal et minimal ainsi que les angles azimutaux maximal et minimal, il est possible d'utiliser l'équation 6 pour déterminer un nombre de directions à choisir.

$$\theta_n = \theta_- + \frac{(\theta_+ - \theta_-)}{2N}(2n - 1)$$

$$\phi_m = \phi_- + \frac{(\phi_+ - \phi_-)}{2M}(2m - 1)$$

*Équation 6*

Finalement, l'équation 4 nous permet d'obtenir la direction de notre rayon lumineux avec les angles (en radians) obtenus par l'équation 3.

$$\vec{\Omega}_{n,m} = (\sin(\theta_n) \cos(\phi_m), \sin(\theta_n) \sin(\phi_m), \cos(\theta_n))^T$$

*Équation 7*

## Équations utilisées pour déterminer si les rayons lumineux touchent le bloc cylindrique transparent ou le bloc rectangulaire

### Cylindre transparent

Pour le bloc cylindrique transparent, c'est l'intersection entre un cercle et une droite qui permet de déterminer si un rayon lumineux touche ou non. Mathématiquement, pour trouver le point de collision en x et en y, nous utilisons l'équation de droite correspondant au rayon lumineux et nous la remplaçons dans l'équation du cercle ( $r^2 = x^2 + y^2$ ). Cela nous donne une équation parabolique : en la mettant égale à 0, nous pouvons isoler deux points. Le premier point correspond à la collision entre le rayon lumineux et le cylindre (en x et en y). Le deuxième point est invalide, car il représente une collision qui n'existe pas. Avec les valeurs x et y trouvées, nous pouvons remplacer dans l'équation de la droite pour trouver la valeur de z.

### Bloc rectangulaire

Pour le bloc rectangulaire, c'est l'intersection entre un plan et une droite qui permet de déterminer si un rayon lumineux touche ou non. Le plan correspond à l'une des six faces et la droite correspond au rayon lumineux. Pour déterminer le point de collision, nous commençons par définir l'équation d'un plan avec ces formules :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

*Équation 8*

$$D = -(A * x(t) + B * y(t) + C * z(t))$$

*Équation 9*

où (A, B, C) correspond au vecteur direction de la normale et (x(t), y(t), z(t)) un point quelconque sur le plan.

Nous utilisons ensuite les équations paramétriques d'une droite :

$$x = a * t + a0$$

$$y = b * t + b0$$

$$z = c * t + c0$$

*Équation 10*

où  $(a, b, c)$  correspondent au vecteur direction de la droite,  $(a_0, b_0, c_0)$  correspondent à un point quelconque et la variable  $t$  correspond à une position quelconque sur la droite.

Pour trouver le point d'intersection, nous entrons les équations paramétriques de la droite dans la formule du plan. Nous isolons ensuite  $t$  :

$$t = - \frac{D + A * a_0 + B * b_0 + C * c_0}{A * a + B * b + C * c}$$

*Équation 11*

Enfin, nous entrons  $t$  dans les équations paramétriques. Les valeurs obtenues correspondent aux coordonnées du point de collision. Comme un plan défini par son équation est infini, on vérifie ensuite si le point est situé dans la borne de la face de notre bloc. Si le déterminant de l'équation vaut zéro, alors la droite est parallèle au plan. Nous en concluons qu'il n'y a aucune collision (la droite ne touche pas le plan) ou qu'il y a une infinité de collisions (la droite est sur le plan).

## Équations pour déterminer la direction du rayon lumineux qui atteint une des surfaces du bloc cylindrique transparent

### Équations de réflexion

Dans le cas où le rayon lumineux est réfléchi, nous avons utilisé la première loi de Snell-Descartes : le sinus de l'angle d'incidence est égal au sinus de l'angle de réflexion. Dans les notes de cours, l'équation (7.13) représente une étape intermédiaire pour trouver la loi et c'est celle qui correspond à l'équation 5. Ceci nous permet d'obtenir le vecteur unitaire du rayon lumineux après réflexion. Ici,  $\hat{i}$  correspond au vecteur normal unitaire sortant de la surface. Les vecteurs  $\hat{j}$  et  $\hat{k}$  correspondent aux équations (7.10) et (7.11) des notes de cours. Elles sont représentées par l'équation 6.

$$\hat{u}_r = \hat{u}_i - 2\hat{i}(\hat{u}_i \cdot \hat{i}) = \cos\theta_i \hat{i} + \sin\theta_i \hat{k}.$$

*Équation 12*

$$\hat{j} = \frac{\hat{u}_i \times \hat{i}}{|\hat{u}_i \times \hat{i}|},$$

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}.$$

*Équation 13*

### Équations de réfraction

Dans le cas où le rayon lumineux est réfracté, nous avons utilisé la deuxième loi de Snell-Descartes. Cela correspond à l'équation (7.31) dans les notes de cours. Elle indique que le sinus de l'angle de réfraction est donné par :

$$\sin \theta_t = \left( \frac{n_i}{n_t} \right) \sin \theta_i$$

*Équation 14*

L'angle critique sera nécessaire pour savoir si le rayon lumineux subira une réfraction ou une réflexion.

$$\theta_{max} = \left| \arcsin \frac{n_t}{n_i} \right|$$

*Équation 15*

### Équations pour trouver la position de l'image virtuelle

Pour déterminer la position de l'image virtuelle, il faut tout d'abord reprendre l'équation 4. La direction initiale de notre rayon lumineux sera nécessaire pour le calcul de la position de l'image virtuelle.

Ensuite, il faudra déterminer la distance parcourue totale  $d$  par le rayon avant qu'il ne touche une des faces du bloc de métal. Pour ce faire, on ajoute la distance parcourue depuis le dernier point de collision à la distance parcourue actuelle. La distance totale est alors donnée par la somme de ces distances. Elle correspond à l'équation (7.45) du cours.

$$d = \sum_{i=1}^I |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$$

*Équation 16*

Finalement, la position de l'image virtuelle vue par l'observateur est donnée par l'équation 11. Ici,  $\vec{r}_0$  correspond à la position de l'observateur,  $d$  à la distance totale parcourue et  $d\vec{\Omega}_{n,m}$  au vecteur unitaire donnant la direction initiale du rayon lumineux.

$$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + d\vec{\Omega}_{n,m}$$

*Équation 17*



## Justification du nombre de directions utilisées pour nos simulations

Dans le but de minimiser les calculs tout en nous assurant que toutes les surfaces du bloc cylindrique que l'observateur voit soient suffisamment échantillonnées, il fallait choisir un nombre de directions  $N$  en  $\theta$  et un nombre de directions  $M$  en  $\varphi$ . En effet, plus on augmente les valeurs de  $N$  et  $M$ , plus on obtient un échantillon large de rayons : cela améliore la précision de l'image virtuelle affichée par notre programme.

Pour le cas où la position de l'observateur correspondait à  $\vec{r}_0 = (0, 0, 5)$  cm, les valeurs de  $\theta$  se trouvaient environ dans l'intervalle  $[7, 150]$  degrés : cela correspond à 143 degrés de différence entre  $\theta_{\min}$  et  $\theta_{\max}$ . En doublant cette valeur, **on obtient environ 250, soit la valeur de notre  $N$** . Cette valeur indique que nous avons un rayon à chaque 0.5 degré environ. Quant aux valeurs de  $\varphi$ , elles se trouvaient environ dans l'intervalle  $[25, 65]$  degrés : cela correspond à 40 degrés de différence entre  $\varphi_{\min}$  et  $\varphi_{\max}$ . En doublant cette valeur, **on obtient environ 100, soit la valeur de notre  $M$** .

Pour le cas où la position de l'observateur correspondait à  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$  cm, les valeurs de  $\theta$  se trouvaient environ dans l'intervalle  $[5, 72]$  degrés : cela correspond à une différence de 67 degrés. En doublant, nous obtenons une valeur de  $N$  souhaitée d'environ 150. La valeur de  $M$  souhaitée ne change pas ici : elle correspond encore à  $M = 100$ .

En conclusion, nous avons retenu les valeurs de  **$N = 250$  et de  $M = 100$**  parce que nous simulons trois cas sur quatre où la position de l'observateur correspond à  $\vec{r}_0 = (0, 0, 5)$  cm. Ainsi, la valeur de  $N$  choisi pour ces trois cas comprend la valeur de  $N$  souhaitée pour le dernier cas ( $N = 150$ ) : nous n'aurons qu'un échantillon plus élevé d'angles  $\theta$  pour ce cas, mais cela n'est pas grave. Les valeurs de  $N$  et de  $M$  choisies nous permettent d'avoir un rayon lumineux par 0.5 degré dans notre échantillon, environ. La précision obtenue est satisfaisante.

## Présentation et analyse des résultats

**Tableau 1 : Conditions initiales pour les quatre cas à simuler**

Cas	nout	nin	poso
1	[0 0]	[20 0 2]	[0 0 5]
2	[0 0]	[30 0 2]	[0 0 5]
3	[0 0]	[20 0 2]	[0 0 0]
4	[0 0]	[10 10 1]	[0 0 5]

## Représentation visuelle des simulations

Cette section offre un visuel de nos simulations. Les faces sont colorées sur la version électronique du rapport.

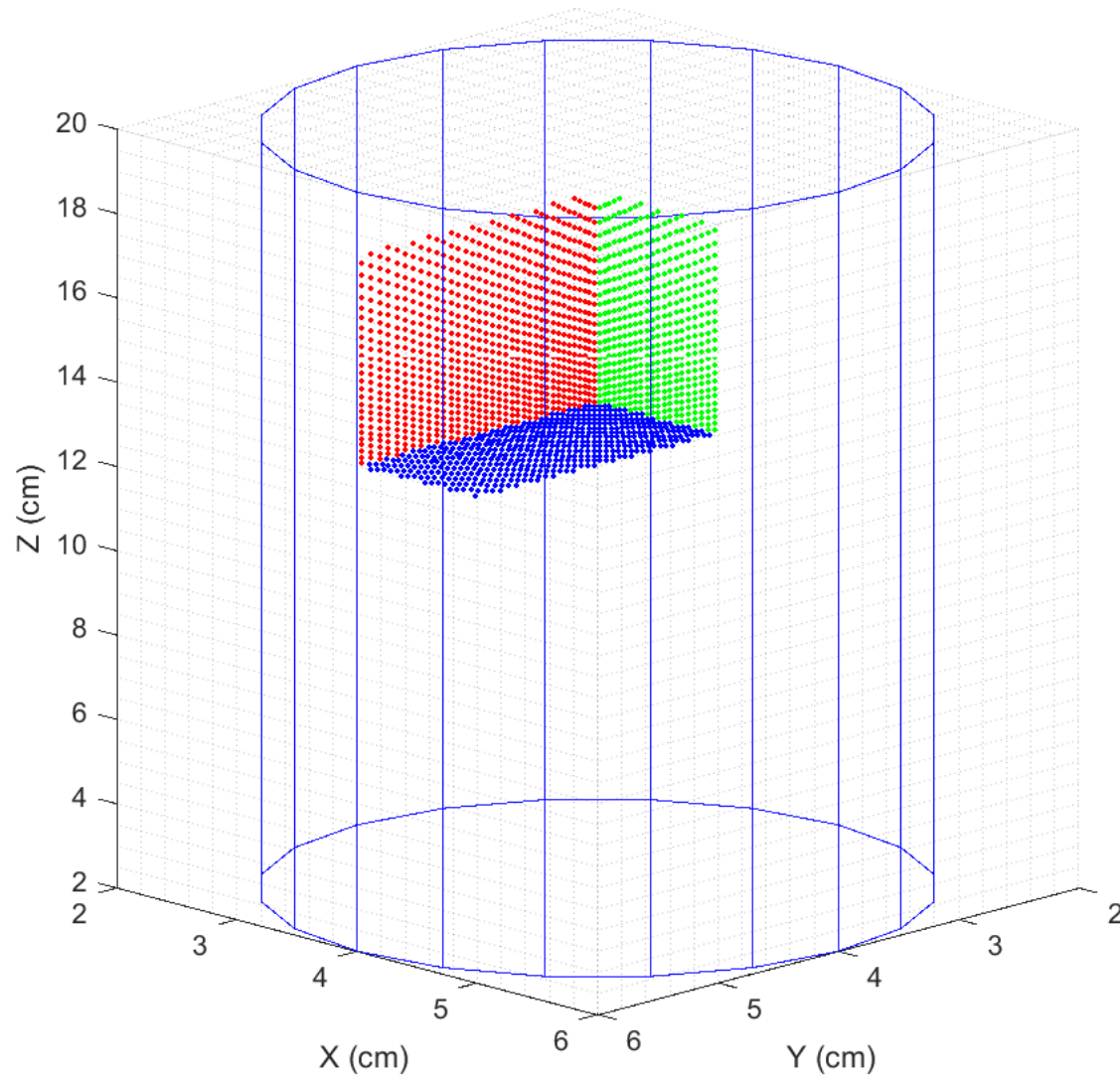


Figure 1 : Image virtuelle vue par l'observateur (Cas 1).

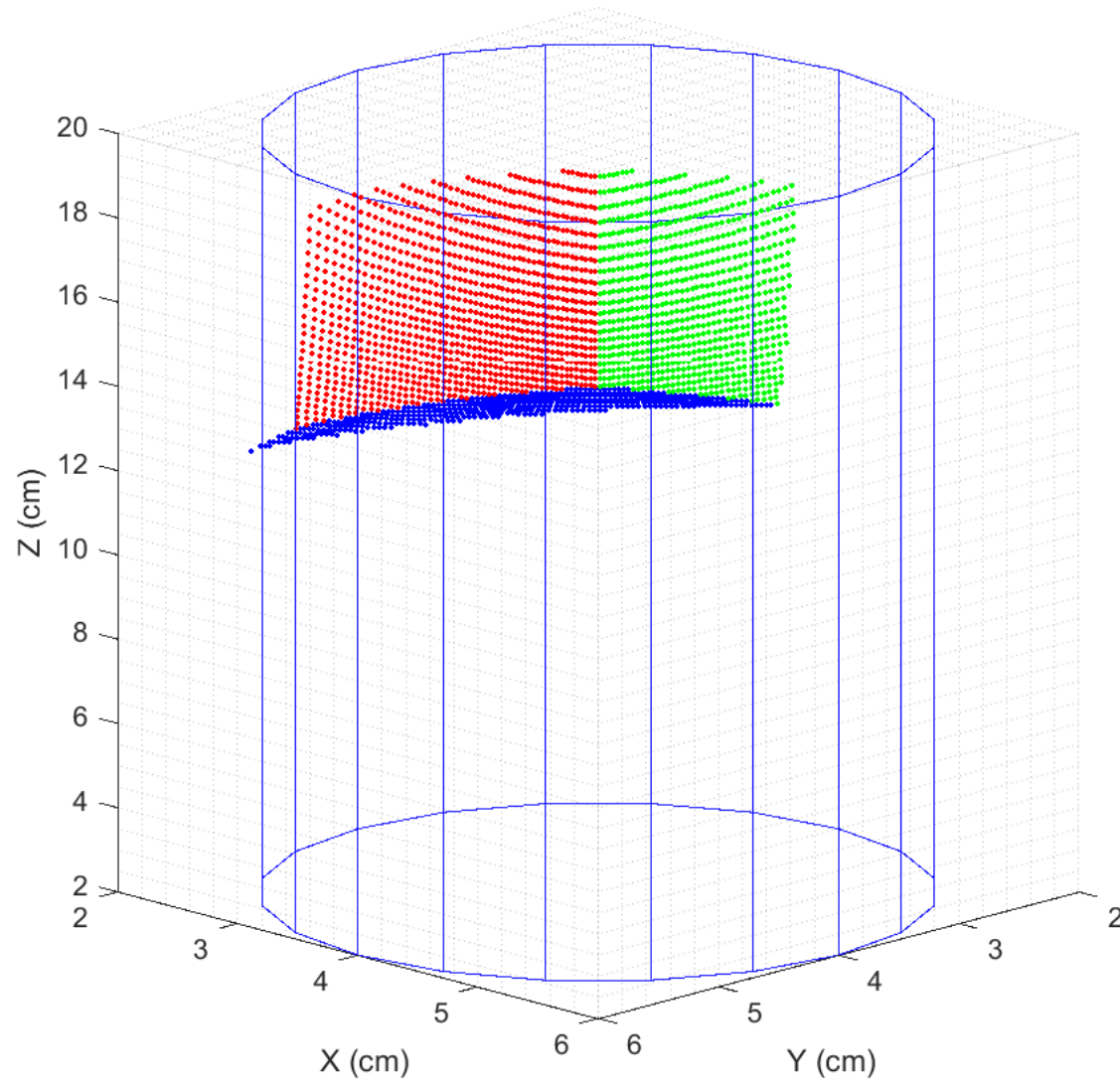


Figure 2 : Image virtuelle vue par l'observateur (Cas 2).

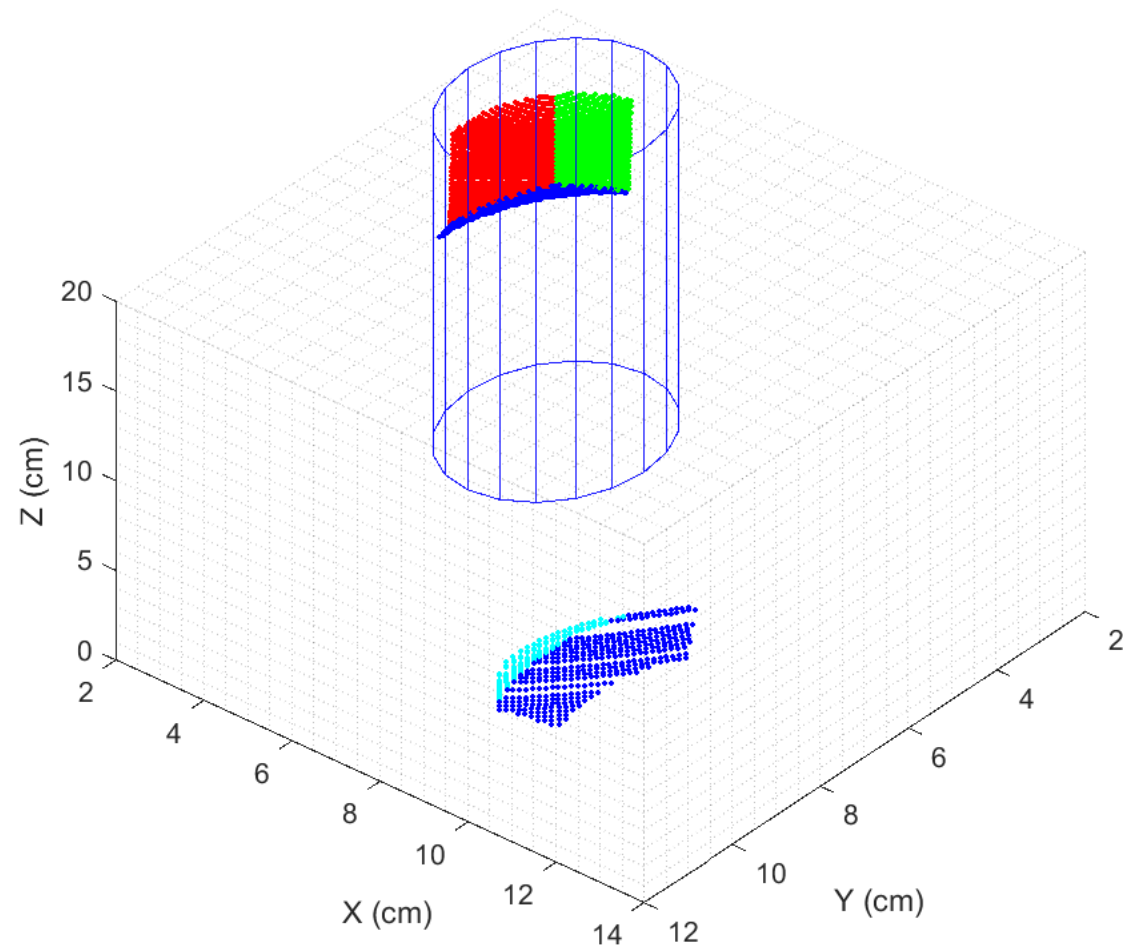


Figure 3 : Image virtuelle vue par l'observateur (Cas 3).

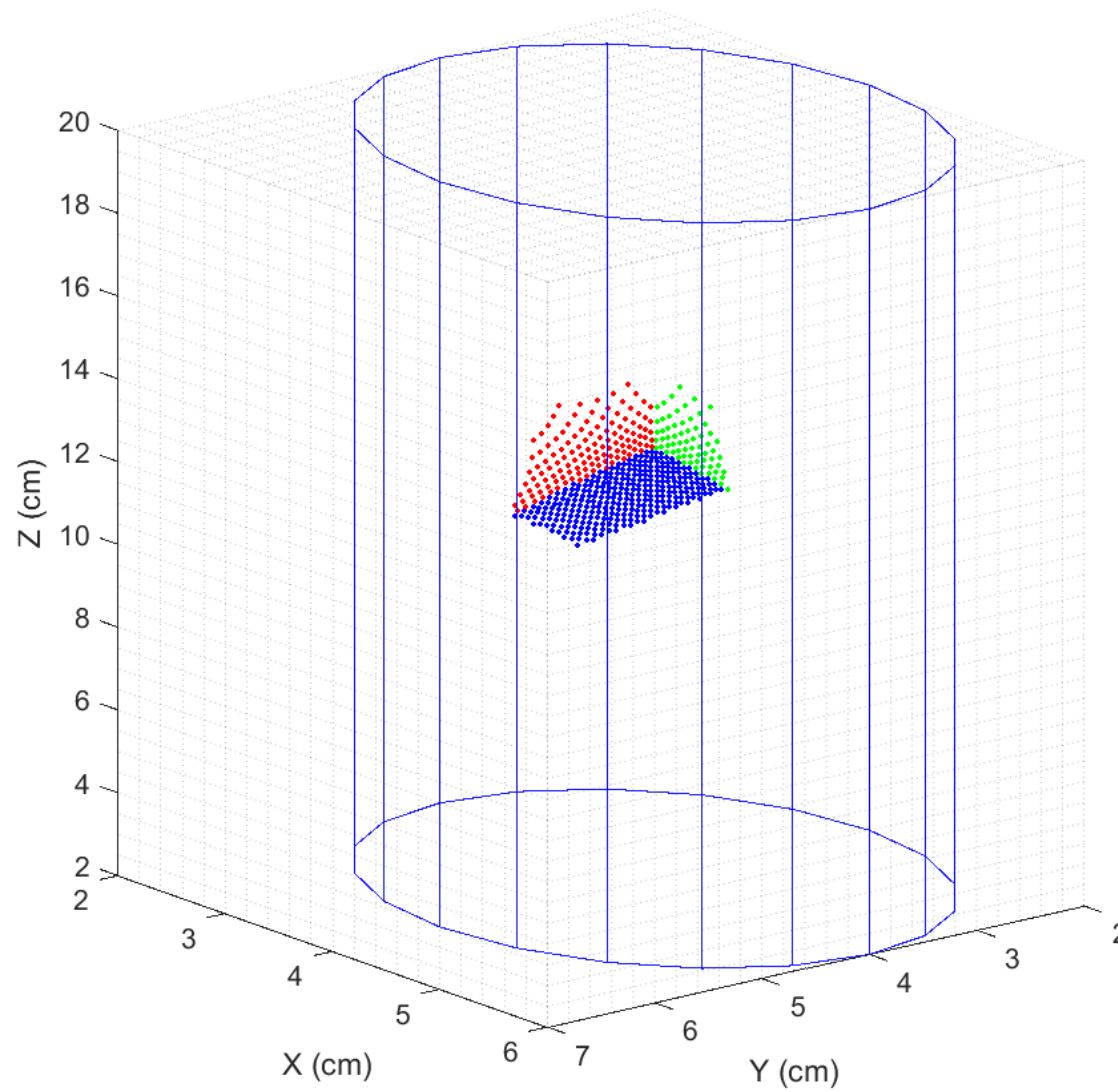


Figure 4 : Image virtuelle vue par l'observateur (Cas 4).

### Analyse du cas #1

Dans ce cas-ci, l'image virtuelle du bloc rectangulaire de métal opaque coloré correspond à ses dimensions réelles. Puisque, l'indice de réfraction du milieu est égal à l'indice de réfraction du cylindre transparent, les rayons lumineux ne sont alors pas déviés du tout par le phénomène de réfraction. L'observateur se trouve à la position  $\vec{r}_0 = (0 \ 0 \ 5) \text{ cm}$ .

Les faces rouge (1), verte (3) et bleue (5) sont les faces que l'observateur peut voir, sans se déplacer.

### Analyse du cas #2

Dans ce cas-ci, l'image virtuelle du bloc rectangulaire de métal opaque coloré est déformée par rapport à ses dimensions réelles. Puisque l'indice de réfraction du milieu est plus petit que l'indice de réfraction du cylindre transparent, les rayons lumineux sont déviés de sorte qu'ils se rapprochent de la normale : leurs angles incidents sont plus grands que leurs angles de réfraction.

Cela cause une sorte d'agrandissement de l'objet : l'angle auquel les rayons lumineux atteignent les yeux de l'observateur est plus grand que l'angle auquel ils atteindraient l'observateur au cas 1. C'est le phénomène que l'on observe avec l'eau. La position de l'observateur est la même qu'au cas #1 : il se trouve à la position  $\vec{r}_0 = (0 \ 0 \ 5) \text{ cm}$ . En comparant les deux images virtuelles obtenues, nous voyons que l'observateur voit la même chose qu'au cas #1, mais « agrandie » et, par conséquent, déformée.

Les faces rouge (1), verte (3) et bleue (5) sont les faces que l'observateur peut voir, sans se déplacer.

### Analyse du cas #3

Dans ce cas-ci, l'image virtuelle du bloc rectangulaire de métal opaque coloré est déformée par rapport à ses dimensions réelles. Puisque l'indice de réfraction du milieu est plus petit que l'indice de réfraction du cylindre transparent, les rayons lumineux sont déviés de sorte qu'ils se rapprochent de la normale : leurs angles incidents sont plus grands que leurs angles de réfraction.

Nous conservons les mêmes paramètres de simulation qu'au cas #2, sauf que nous modifions la position de l'observateur. Il se trouve à la position  $\vec{r}_0 = (0 \ 0 \ 0)$  cm. Cela lui permet de voir la même image virtuelle qu'au cas #2. Les angles verticaux ( $\theta$ ) minimum et maximum auxquels un rayon lumineux valide peut être associé sont différents : il voit donc la même image, sous d'autres angles.

Les faces rouge (1), verte (3) et bleue (5) sont les faces que l'observateur peut voir, sans se déplacer.

### Notes additionnelles (voir Fig. 5 à la page suivante)

Il est à noter qu'il existe des rayons lumineux dont l'image virtuelle se trouve en dehors du cylindre transparent. Cela est dû à la réflexion interne.

En effet, la formule pour trouver la position de l'image virtuelle correspond à l'équation 17 :

$$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + d\vec{\Omega}_{n,m}$$

Ainsi, la réflexion interne permet au rayon lumineux de toucher une des faces du bloc rectangulaire de métal opaque coloré. Cependant, la grande distance qu'il a parcourue fait en sorte que nous retrouvons son image virtuelle derrière le cylindre transparent à une distance significative. Nous nous retrouvons ainsi avec deux images virtuelles disjointes. L'observateur peut voir une partie de la face cyan (2) dans la deuxième image virtuelle.



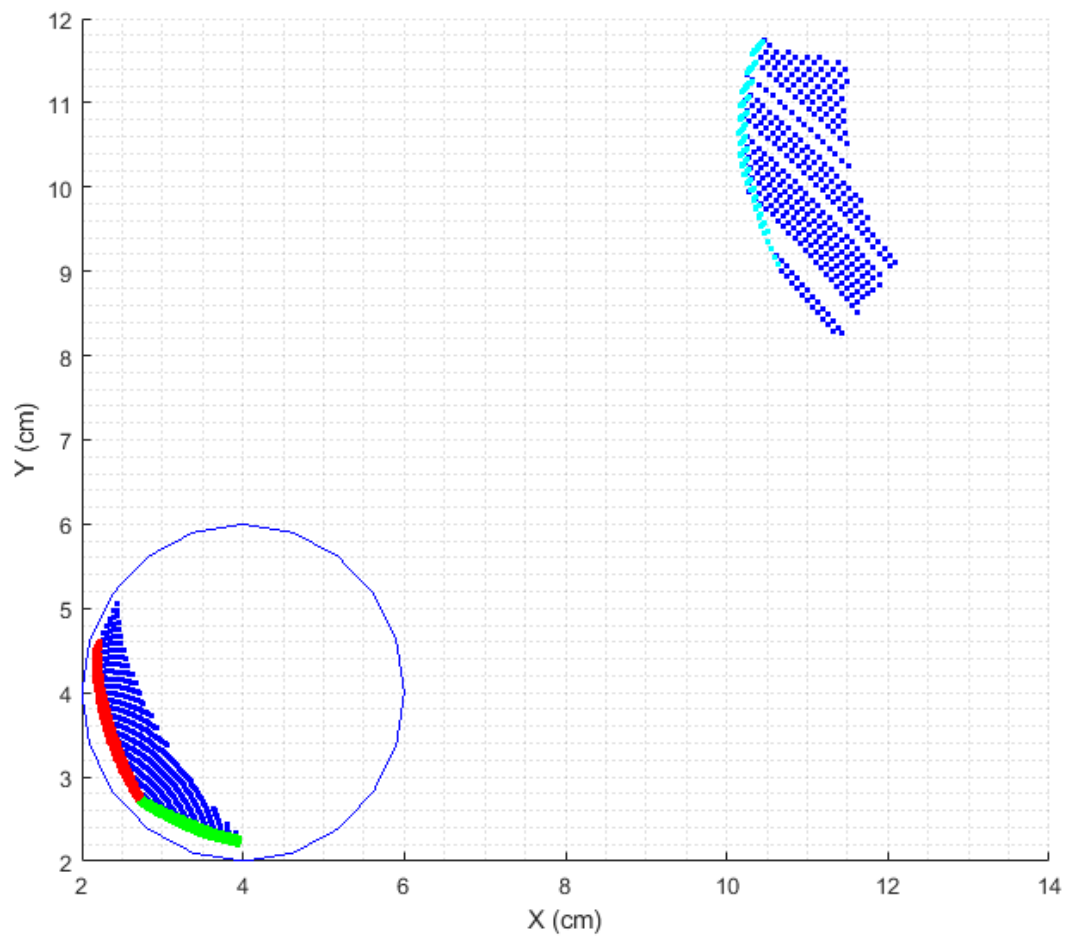


Figure 5 : Image virtuelle vue par l'observateur (Cas 3) – Vue du dessus.

### Analyse du cas #4

Dans ce cas-ci, l'image virtuelle du bloc rectangulaire de métal opaque coloré est déformée par rapport à ses dimensions réelles. Puisque l'indice de réfraction du milieu est plus grand que l'indice de réfraction du cylindre transparent, les rayons lumineux sont déviés de sorte qu'ils s'éloignent de la normale : leurs angles incidents sont plus petits que leurs angles de réfraction.

Ici, nous observons l'effet contraire de celui des cas #2 et #3. L'observateur se trouve à la position  $\vec{r}_0 = (0 \ 0 \ 5)$  cm comme au cas #2. L'image virtuelle paraît plus petite que ses dimensions réelles.

Les faces rouge (1), verte (3) et bleue (5) sont les faces que l'observateur peut voir, sans se déplacer. Cependant, les faces rouge et verte sont vraiment plus petites que celles observées au cas #1. Bref, l'observateur voit la même image qu'au cas #1, mais « minimisée » et, par conséquent, plus petite.

### Vérifications effectuées pour assurer la précision de nos simulations

Nous nous sommes basés sur la situation #1 pour vérifier que l'ensemble de nos calculs était correct. En effet, l'indice de réfraction du milieu ainsi que l'indice de réfraction du cylindre transparent, comme mentionné précédemment, sont identiques. Cela fait en sorte que le rayon lumineux ne fait que continuer son chemin sans modification de sa direction : l'image virtuelle obtenue correspond à celle que nous obtenons si nous avons un cylindre transparent contenant un bloc coloré sur notre table, devant nous.

Comme mentionné dans une section précédente, nous avons décidé d'échantillonner un rayon par 0.5 degré afin d'obtenir une précision satisfaisante au niveau de l'image virtuelle obtenue, et ce, avec quelques degrés de marge de manœuvre. En effet, nous avons pris un intervalle de degrés minimum et maximum, pour le calcul du N et du M, plus grand que l'intervalle utilisé réellement dans nos simulations.

## Conclusion

Pour conclure ce cours difficile, ce devoir nous en a fait voir de toutes les couleurs : nous avons pu reprendre quelques connaissances MATLAB acquises au cours des devoirs précédents pour nous faciliter la vie. Cependant, nous avons quand même rencontré quelques problèmes majeurs.

Au niveau de la détermination du bon point de collision entre le rayon lumineux et le cylindre transparent, nous avons eu beaucoup de misère à déterminer laquelle des deux intersections droite-cercle trouvées était la bonne. Finalement, nous avons opté pour une solution combinant deux conditions à respecter :

1. Nous ne regardons que les points de la droite correspondant au rayon lumineux qui sont dans la bonne direction (celle du rayon).
2. Si les deux points d'intersection sont dans la bonne direction, nous choisissons celui qui est à la distance la moins grande du point de départ du rayon lumineux.

Au niveau de la programmation, nous avons quelques bogues critiques qui nous empêchaient d'obtenir les résultats souhaités : la très grande partie de ces bogues étaient due à des erreurs d'inattention. En effet, dans notre empressement de coder, nous avons tendance à copier-coller la même variable à des endroits différents, alors que ce n'était pas la variable voulue. Cela nous a pris beaucoup de temps pour le remarquer, car nous avons une grande confiance envers notre code, ainsi qu'envers chacun de nos coéquipiers.

Finalement, ce devoir s'est déroulé avec beaucoup moins de problèmes graves que les devoirs précédents : l'optique est un peu plus facile à visualiser, car ce n'est à la base que des acrobaties de géométrie et des pirouettes de vecteur.