Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137,№19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
   Не существует явного определения множества.
   Пусть A некоторое мн-во, тогда существует 2 способа задания мн-ва

   (a) A = {1,2,3,4,5} - явное задание эл-тов мн-ва

   (b) Пусть $\Phi(x)$- некоторое условие, тогда
   A = $\{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множествами с помощью некоторого условия $\Phi(x)$

   Пусть A, B- некоторые множества

   Обозначение (Подмножетсво)**.** A - подмножетсво B, если $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

   Обозначение (Собстевенное подмножетсво)**.** A - собстевенное подмножетсво B, если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

   Обозначение (Пустое множество)**.** $\emptyset$ - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

   Обозначение (Множество всех подмножетсв множества A)**.** $P(A) = \{\ C \mid C \subseteq A\ \}$

   Обозначение (Универсум)**.** Универсум (условное множество все множеств) U

   Операции над множествами:

   - Объединение множеств:
     $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
   - Пересечение множеств:
     $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
   - Разность множеств:
     $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
   - Дополнение множества:
     $\neg A = \{\ x \mid x \in\ U \wedge x \notin A\}$
   - Симметрическая разность множеств:
     $A\ \Delta\ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A\ \cup\ B) \setminus (B\ \cup\ A)$

   Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств
  $\bigcup S = \{ \ x \mid \exists A_i \in \ S \ : x \ \in \ A_i \ \}$
- Пересечение семейства множеств
  $\bigcap S = \{ \ x \mid \forall A_i \in \ S \ : x \ \in \ A_i \ \}$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

   Определение (Упорядоченный набор (кортеж))**.** Упорядоченный набор (кортеж) длинны n определяется по индукции
   $<>= \emptyset$
   $< a >= a$
   $< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$
   ...
   $< a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n >=<< a_1, a_2, ..., a_{n-1}) >, a_n >$

   Определение (пара)**.** Набор $< a, b >$ длинны 2 называют *парой*

   Предложение (о равенстве n-ок)**.** Если
   $< a_1, ..., a_n >=< b_1, ..., b_n >\Leftrightarrow a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$

   Доказательство. для $n = 1$ очевидно в обе стороны. Докажем для $n = 2$:
   $< a_1, a_2 >=< b_1, b_2 >\Leftrightarrow \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$
   Пусть $a_1 = a_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \\ \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\} \end{array}\right. \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2$
   для $b_1 = b_2$ аналогично.
   Расмотрим $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$
   $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{a_1\} = \{b_1\} \\ \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \end{array}\right. \Rightarrow \{a_1\} = \{b_1\} \Rightarrow a_1 = b_1$
   По аналогии для $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$
   Т.к справедливо для $n = 2$, а определение n-ок индуктивно следовательно верно для n □

   Определение (Декартово произведение)**.** Пусть даны множества $A_1, ..., A_n$, тогда их декартовым произведением называют
   $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, ..., a_n > \mid \forall i \in \{1, ..., n\} \ a_i \in A_i\}$

   Определение (Декартова степень)**.** В случае, если $A_1 = A_2 = ... = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество
$C \subseteq A \times B$

Определение. Обратным бинарным отношением называется
$R^{-1} = \{< y; x > | \ < x; y >\in R\}$

Определение. Произведением бинарных отношений называется
$R_1 \times R_2 = \{< x; z > |\exists z| \ < x; y >\in R_1 \wedge < y; z >\in R_2\}$

Лемма (Лемма о бинарных отношениях)**.** *Для любых бинарных отношений* R_1, R_2, R_3*:*

(a) $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$

(b) $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$

Доказательство. (a) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.
Пусть $< x; t >\in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; t >\in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $< y; z >\in R_2$ и $< z; t >\in R_3$. Получаем, что $< x; z >\in R_1 \cdot R_2$ и $< x; t >\in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(b) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.
Пусть $< z; x >\in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; z >\in R_2$. Тогда $< y; x >\in R_1^{-1}$ и $< z; y >\in R_2^{-1}$. Получаем, что $< z; x >\in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

□

4. Область определения отношения, множество значений отношения, образ и прообраз множества относительно отношений, функция, замечание о равенстве функций, тождественная функция.

Определение (Функция)**.** Бинарное отношени f называется функцией, если выполняется: $< x, y_1 >, < x, y_2 >\in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Определение (Область определния)**.** $dom(f) = \{x| \ \exists y :< x, y >\in f\}$

Определение (Область значений)**.** $ran(f) = \{y| \ \exists x :< x, y >\in f\}$

Обозначение. f - функция из A в B, если f - функция, $dom(f) = A$ и $ran(f) \subseteq B$
Тогда функцию обозначают $f : A \to B$

Замечание. Если $f : A \to B$ и $x \in A$, то существует единственный y такой, что $< x, y >\in f$. Этот y лежит в B, называется *значение* функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Замечание (о равенстве функций)**.** Если f, g - функции, то $f = g \Leftrightarrow dom(f) = dom(g)$ и $\forall x \in dom(f) \ \ f(x) = g(x)$

Определение (Тождественная функция)**.** Для любого множества A $\exists f = \{< x, x > | x \in A\} = id_A$. Ясно, что $id_A : A \to B$ и $\forall x \in A$ $id_A(x) = x$

5. Композиция функций, лемма о композиции функций:

   Определение (Композиция функций)**.** Если f и g - функции, то их *композиция* $g \circ f$ определяется, как произведение бинарных отношений $f \cdot g$ (В обратном порядке)

   Лемма (о композиции функций)**.** *Если* $f : A \to B, g : B \to C$*, то их композицией* $g \circ f : A \to C$ *и* $[g \circ f](x) = g(f(x))$ *при* $x \in A$

6. Сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция, лемма о свойствах биекций
   Пусть $f : A \to B$

   Определение (Сюръекция)**.** f - функция из A *на* B (*сюрьективная функция, сюрьекция*), если $\forall y \in B$ $\exists x \in A \mid f(x) = y$

   Обозначение (Сюръекция)**.** $f : A \underset{на}{\longrightarrow} B$.

   Определение (Инъекция)**.** f - инъективная функция (*1 - 1 функция, инъекция*), если $\forall x_1, x_2 \in A$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$

   Обозначение (Инъекция)**.** $f : A \xrightarrow{1-1} B$

   Определение (Биекция)**.** f - *биекция* из A на B, если f одновременно и инъекция, и сюръекция.

   Обозначение (Биекция)**.** $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$

   Определение (Обратная функция)**.** Запись f^{-1} означает обратное бинарное отношение к f. Если f^{-1} при этом является функцией, то она называется *обратной функцией* к f.

   Лемма (о свойствах биекций)**.**

   (a) *Если* $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$*, то* $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$, $f^{-1}(f(x)) = x$ $\forall x \in A$ *и* $f(f^{-1}(y)) = y$ $\forall y \in B$.

   (b) *Если* $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$, $g : B \xrightarrow[на]{1-1} C$*, то* $f \circ g : A \xrightarrow[на]{1-1} C$.

   Доказательство. (a) Покажем, что f^{-1} - функция.
   Пусть $< y, x_1 >, < y, x_2 > \in f^{-1}$. Тогда $< x_1, y >, < x_2, y > \in f$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Поскольку f инъективна, $x_1 = x_2$.
   Ясно, что $dom(f^{-1}) = ran(f)$ и $ran(f^{-1}) = dom(f)$. Поскольку f сюръективна, $ran(f) = B = dom(f^{-1})$. Поскольку $ran(f^{-1}) = A$, f^{-1} сюръективна. Инъективность f^{-1} легко проверяется. Тем самым $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$.
   Покажем, что $f^{-1}(f(x)) = x$ при $x \in A$. Пусть $x \in A$ и $y = f(x)$. Тогда $< x, y > \in f$ и $< y, x > \in f^{-1}$. Получаем, что $f^{-1}(y) = x$.

(b) выше доказано, что $g \circ f : A \to C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$. Инъективность: если $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, то $f(x_1) = f(x_2)$ и отсюда $x_1 = x_2$. Сюръективность доказывается похожим способом.

$\square$

7. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности, лемма о классах эквивалентности.

8. Частичный порядок, ч.у.м., минимальные, максимальные, наименьшие, наибольшие элементы, связи между ними. Замечание о строгом порядке.

9. Фундированные частичные порядки, критерий фундированности порядка.

10. Предложение об индукции в фундированном ч.у.м., изоморфизм ч.у.м., замечание об изоморфизме ч.у.м.

11. Линейные порядки, л.у.м., начальные сегменты и отрезки, лемма о свойствах начальных сегментов.

12. Изоморфизм ч.у.м., изоморфизм л.у.м., признак изоморфизма л.у.м., лемма о монотонной инъекции в.у.м.

13. Полный порядок, в.у.м., лемма о начальных сегментах в.у.м.

    Определение (Вполне упорядоченное множество). *Вполне упорядоченное множество* (в.у.м) - это пара $(A, \leq)$, где $\leq$ - линейный фундированный порядок на A. Иногда такой порядок называют *полным.*

    Лемма (о начальных сегментах в.у.м.). *Любой начальный сегмент в.у.м. $(A, \leq)$ либо равен A, либо является начальным отрезком.*

    Доказательство. Пусть S - начальный сегмент в A и $S \neq A$. Тогда $A \backslash S \neq \emptyset$. Пусть x - минимальный элемент в $A \backslash S$. Покажем, что $S = A_x$. Если $y \in S$, то либо $y < x$, либо $x \leq y$. Второй случай невозможен, так как тогда $x \in S$. $\square$

14. Предложение об изоморфизме начальных сегментов, теорема о сравнимости в.у.м. (без доказательства).

    Предложение (об изоморфизме начальных сегментов). Различные начальные сегменты в.у.м. не могут быть изоморфны друг другу.

    Доказательство. Пусть S_1 и S_2 - два различных сегмента в.у.м. $(A, \leq$ $)$. Тогда сначала докажем лемму о том, что если $(A, \leq)$ - в.у.м. и $f : A \xrightarrow{1-1} A$ - монотонная инъекция, то $f(x) \geq x \ \forall x \in A$.
    Заметим: если $x, y \in A$ и $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Из монотонности получаем, что $f(x) \leq f(y)$, а из инъективности - что $f(x) \neq f(y)$.
    Допустим, что утверждение неверно: существует $x \in A \mid f(x) \not\geq x$. Поскольку ряд линеен, $f(x) < x$. Тогда
    $f(f(x)) < f(x)$, $f(f(f(x))) < f(f(x))$, и т.д.

Получаем последовательность $x > f(x) > f(f(x)) > ...$, противоречие.

По доказанной лемме $S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$. Пусть $S_1 \subseteq S_2$. Выберем $x_0 \in S_2 \backslash S_1$.
Мы рассматриваем эти сегменты как в.у.м. с индуцированным из A порядком. Допустим, что $f : S_2 \to S_1$ - изоморфизм. Рассматривая f как функцию из S_2 в S_2, видим, что она инъективна и монотонна. Следовательно, $f(x_0) \geq x_0$. Поскольку S_1 начальный сегмент и $f(x_0) \in S_1$, получаем, что $x_0 \in S_1$, противоречие. □

Теорема (о сравнимости в.у.м.). *Если даны два в.у.м., то одно из них изоморфно начальному сегменту другого.*

15. Аксиома выбора, лемма Цорна (без доказательства), теорема Цермело (без доказательства), эквивалентность утверждений.

16. Парадокс Рассела, аксиоматика ZFC.

    Парадокс (Парадокс Рассела). Рассмотрим совокупность: $M_R = \{A \mid A$ - множество и $A \notin A\}$.
    Предположим, что само M_R является множеством. Возможны два варианта:

    (a) $M_R \notin M_R$. Тогда $A - M_R$ подходит под определние, и $M_R \notin M_R$. Противоречие.

    (b) $M_R \in M_R$. Вновь полагая, $A = M_R$, получаем, что по определению $M_R \notin M_R$. Противоречие.

    Это рассуждение показывает, что совокупность M_R нельзя считать множеством.

    Аксиоматика ZFC.
    Можно с собой на листочке!!!

17. Равномощные множества, замечание о равномощности.

    Обозначение (мощность множества). Мнощность множества A обозначается $|A|$.

    Определение (равномощные множества). Говорим, что множества A и B равномощные, если существует биекция $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$.
    Обозначим это символической записью $|A| = |B|$.

    Замечание (о равномощности). Равномощность обладает свойствами отношения эквивалентности - для любых множеств A, B, C верно:

    (a) $|A| = |A|$;

    (b) $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$;

    (c) $|A| = |B|$ и $|B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$;

Доказательство. Следует из леммы о свойствах биекций. □

18. Лемма о порядке на мощностях.

Лемма (Лемма о порядке на мощностях)**.** *Для всяких непустых множеств A и B следующие условия эквиваленты:*

(a) $|A| \leq |B|$

(b) Существует функция $g : B \xrightarrow{HA} A$

(c) A *равномощно некоторому подмножеству* B

Доказательство.

(a) $a \Rightarrow c$
Пусть $|A| \leq |B|$.
Тогда существует $f : A \xrightarrow{1-1} B$.
Тогда $ran(f) \subseteq B$ и $f : A \xrightarrow[на]{1-1} ran(f)$.

(b) $c \Rightarrow b$
Пусть $h : B_1 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A$, где $B_1 \subseteq B$.
Выберем произвольное $a_0 \in A$ и построим $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$ так: $g(y) = \begin{cases} h(y), \text{если} y \in B_1 \\ a_0, \text{если} y \in B \backslash B_1 \end{cases}$

(c) $b \Rightarrow a$
Пусть $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$.
Построим $f : B \to A$.
Рассмотрим $x \in A$
Множество $\{y \in B| \ g(y) = x\}$ непусто.
Выберем в качестве $f(x)$ некоторый элемент из этого множества.
Проверим, что f инъективна. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$
Тогда $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а по построению $g(f(x_i)) = x_i$ при $i = 1, 2$.

□

19. Теорема Кантора-Бернштейна.

20. Теорема о сравнимости мощностей, теорема Кантора.

21. Конечные, бесконечные, счетные, континуальные множества, описание не более чем счетных множеств.

Определение (Конечное множество)**.** Множество A называется *конечным множеством мощности* k, если $|A| = |\mathbb{N}_k|$, где $k \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}_k = \{x \in \mathbb{N} | x < k\}$

Определение (Бесконечное множество)**.** Множество *бесконечно*, если оно не является конечным.

Определение (Счётное множество)**.** Множество A *счётно*, если $|A| = |\mathbb{N}|$.

Определение (Континуальное множество)**.** Множество A *континуально*, если $|A| = |\mathbb{R}|$.

Определение (Не более чем счётное множество)**.** Множество A *не более чем счётно*, если $|A| \le |\mathbb{N}|$

Следствие (Описание не более чем счётных множеств)**.** Множество не более чем счётно тогда и только тогда, когда оно конечно или счётно.

Доказательство. $\Leftarrow$: счётное множество не более чем счётно. Если A конечно, то $|A| = |\mathbb{N}_k| \le |\mathbb{N}|$.
$\Rightarrow$: Пусть A не более чем счётно. Предположим, что оно бесконечно. Тогда в A есть счётное подмножество B. Получаем, что $|\mathbb{N}| - |B| \le |A| \le |\mathbb{N}|$. По теореме Кантора-Бернштейна $|A| = |\mathbb{N}|$. □

22. Лемма о сохранении мощностей, теорема о мощности объединения (без доказательства).

    Лемма (Лемма о сохранении мощностей)**.**

    (a) Если $|A| = |A_1|$ и $|B| = |B_1|$, то $|A \times B| = |A_1 \times B_1|$

    (b) Если при этом $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$

    Доказательство.

    (a) Пусть даны биекции
    $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1$ и $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B_1$.
    Построим $h : A \times B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \times B_1$ так: $h_1(< x; y >) =< f(x), g(y) >$.
    Легко проверить, что h_1 - нужная биекция.

    (b) Построим $h_2 : A \cup B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \cup B_1$ так: $h_2(x) = \begin{cases} f(x), \text{если} x \in A \\ g(x), \text{если} x \in B \end{cases}$
    Условие $A \cap B = \emptyset$ гарантирует, что определение корректно. Вновь нетрудно доказать, что h_2 - биекция. Проверим в качестве примера, что h_2 инъективна. Пусть $h_2(x) = h_2(y)$. Если $x, y \in A$, то получаем $f(x) = f(y)$ и $x = y$. Если $x, y \in B$, рассуждения аналогичны. Если же $x \in A, y \in B$ (или наоборот), то $h_2(x) \in A_1$ и $h_2(y) \in B_1$, что невозможно в силу $A_1 \cap B_2 = \emptyset$.

    □

    Лемма (о мощности объединения)**.** *Если хотя бы одно из множеств A, B бесконечно, то $|A \cup B| = max\{|A|, |B|\}$.*

23. Теорема о мощности квадрата бесконечного множества (доказательства для счетного и континуального), теорема о мощности произведения (без доказательства).

Теорема (о мощности квадрата бесконечного множества)**.** *Если A - бесконеное множество, то* $|A \times A| = |A|$

Доказательство.

- Докажем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
  Построим $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $f(x, y) = 2^x + 3^y$
  $g(x) =< x, 0 >$
  Заметим, что обе функции инъективны, а значит $\begin{cases} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}| \\ |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |\mathbb{N}| \end{cases}$
  тогда по теореме *Кантора-Бернштейна* получаем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
- Докажем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$
  По аналогии с $\mathbb{N}$ построим две инъекции:

  (a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$
  Для построения данной функции докажем, равномощность $\mathbb{R}$ и $(0, 1)$:
  Для этого построим биекцию $h : (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{R}$
  $h(x) = ctg(x * \pi)$ - функция биекция из-за $E(ctgx) = \mathbb{R}$
  Значит $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$
  Докажем, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $(0, 1) \times (0, 1)$:
  Для этого построим $w : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  $w(x, y) =< h(x), h(y) >$
  Значит $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |(0, 1) \times (0, 1)|$
  Построим инъекцию $u : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow{1-1} (0, 1)$
  $u(x, y) = 0, \frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} ...$
  Где $x = 0, a_1 a_2 ...$, а $y = 0, b_1 b_2 ...$
  Т.к в формуле присутсвует умножение на 10, то на каждое число из $\frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} ...$ отводится по две цифры, т.е $\frac{10*4}{2} = 20$, а $\frac{10*9}{2} = 45$, также $\frac{10*0}{2} = 00$
  u - инъекция, тогда $f(x, y) = h \circ u \circ w^{-1}(x, y)$

  (b) $g : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  Построим $g(x) =< x, 0 >$

  Т.к f и g - инъекции, значит значит $\begin{cases} |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}| \\ |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \geq |\mathbb{R}| \end{cases}$ тогда по теореме *Кантора-Бернштейна* получаем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

□

Теорема (о мощности произведения)**.** *Если A, B - непустые множества и одно из них бесконечно, то:*
$|A \times B| = max\{|A|, |B|\}$

24. Континуум-гипотеза, теорема Гёделя-Коэна (без доказательства), обобщенная континуумгипотеза.

Гипотеза (Континуум-гипотеза)**.** Не существует множества A такого, что
$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

Теорема (Теорема Гёделя-Коэна)**.** *Если теория множеств ZFC непротиворечива, то континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках ZFC.*

Гипотеза (Обобщенная континуумгипотеза)**.** Если множество B - бесконечно, то не существует множества A такого, что
$|B| < |A| < |P(B)|$

25. Ординалы, лемма об элементах ординала

    Определение (Ординал)**.** Ординалом называется транзитивное множество все элементы которого сравнимы относительно включения.

    Определение (Транзитивное множество)**.** Множество α называется транзитивным, если из $x \in \alpha$ и $y \in x$ следует, что $x \in \alpha$.

    Лемма (Лемма об элементах ординала)**.** *Если α - ординал и $\beta \in \alpha$, то β - ординал.*

    Доказательство. Пусть $x, y \in \beta$. Тогда $x, y \in \alpha$. Следовательно, x и y равны или сравнимы относительно $\in$. Докажем, что β транзитивно. Пусть $y \in x \in \beta$. Тогда $x \in \alpha$ и $y \in \alpha$. Возможны три случая:

    (a) $\beta \in y$ Тогда получаем, что $\beta \in y \in x \in \beta$ - противоречие.
    (b) $\beta = y$ Получаем, что $\beta \in x \in \beta$ - противоречие.
    (c) $y \in \beta$. Следовательно, β - ординал.

    □

26. Лемма о порядке на ординалах, теорема о свойствах ординалов.

    Лемма (о порядке на ординалах)**.** *Для любых ординалов α, β равносильно:*

    (a) $\alpha \leq \beta$;
    (b) $\alpha \subseteq \beta$.

    Доказательство. (a $\Rightarrow$ b): если $\alpha = \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$. Если же $\alpha \in \beta$ и $x \in \alpha$, то $x \in \beta$
    (b $\Rightarrow$ a): если $\alpha = \beta$, то $\alpha \leq \beta$. Предположим, что $\alpha \subset \beta$. Тогда $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$. По аксиоме регулярности $\exists \gamma \in \beta \backslash \alpha$ т. ч. $\gamma \cap (\beta \backslash \alpha) \neq \emptyset$. Покажем, что $\alpha = \gamma$.
    Если $x \in \gamma$, то $x \in \beta$ и $x \notin \beta \backslash \alpha$, следовательно, $x \in \alpha$.
    Если $x \in \alpha$, то $x \in \beta$ и возможны три случая:

    (a) $\gamma \in x$. Тогда $\gamma \in \alpha$, противоречие.
    (b) $\gamma = x$. Вновь $\gamma \in \alpha$, противоречие.
    (c) $x \in \gamma$.

Получаем, что $\alpha \in \beta$ и $\alpha \leq \beta$. □

Теорема (о свойствах ординалов)**.** *Класс ординалов с порядком* $\leq$ *обладает свойствами в.у.м. - для любых ординалов* α, β, γ *верно:*

(a) $\alpha \leq \alpha$*;*

(b) $\alpha \leq \beta$ *и* $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$*;*

(c) $\alpha \leq \beta$ *и* $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$*;*

(d) $\alpha \leq \beta$ *или* $\beta \leq \alpha$*;*

(e) в любом непустом множестве ординалов есть минимальный элемент.

Доказательство. (a) очевидно.

(b) если $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \subseteq \alpha$, то $\alpha = \beta$.

(c) если $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \subseteq \gamma$, то $\alpha \subseteq \gamma$.

(d) пусть $\delta = \alpha \cap \beta$. Легко проверить, что δ является ординалом. По лемме о порядке на ординалах $\delta \leq \alpha$ и $\delta \leq \beta$. Если $\delta = \alpha$ или $\delta = \beta$, утверждение доказано. Допустим, что $\delta \neq \alpha, \beta$. Тогда $\delta \in \alpha, \delta \in \beta$ и $\delta \in \alpha \cap \beta = \delta$, противоречие.

(e) пусть S - непустое множество ординалов. По аксиоме регулярности $\exists \alpha \in S$, т.ч. $\alpha \cap S = \emptyset$. Если $\beta < \alpha$, то $\beta \in \alpha$ и $\beta \notin S$. Ясно, что α - минимальный элемент в S.

□

27. Предложение о супремуме множества ординалов (без доказательства), теорема о связи в.у.м. и ординалов (без доказательства), предложение о принципе трансфинитной индукции (без доказательства).

Предложение (о супремуме множества ординалов)**.** Пусть A - некоторое множество ординалов. Тогда $\cup A$ - ординал, являющийся супремумом множества A.

Теорема (о связи в.у.м. и ординалов)**.** *Для любого в.у.м. существует единственный изоморфный ему ординал.*

Предложение (о трансфинитной индукции)**.** Пусть $\Phi(x)$ - некоторое условие. Пусть для любого ординала α из того, что $\Phi(\beta)$ верно для всех $\beta < \alpha$, следует, что верно $\Phi(\alpha)$. Тогда $\Phi(\alpha)$ верно для всех ординалов α.

28. Сумма и произведение ординалов, кардинал, мощность множества.

Предложение (принцип трансфинитной рекурсии)**.** Пусть существует условие, которое для каждого ординала α однозначно задаёт некоторое множество f_α в предположении, что при $\beta < \alpha$ множества f_β уже определены. Тогда каждому ординалу α действительно можно сопоставить множество f_α так, чтобы указанная связь между f_α и f_β, $\beta < \alpha$ выполнялась. При этом f_α определено однозначно.

Пример. На классе ординалов можно задать операции $+$ и $\cdot$ так, что для любых ординалов α, β будет верно:

(a) $\alpha + 0 = \alpha$ и $\alpha \cdot 0 = 0$;

(b) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ и $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$;

(c) $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \beta | \beta < \lambda\}$ и $\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \beta | \beta < \lambda\}$, если λ - предельный ординал.

Доказательство. Зафиксируем γ и определим $\gamma + \alpha$ трансфинитной рекурсией по α. Предположим, что при $\beta < \alpha$ ординал $\gamma + \beta$ уже определён. Определим $\gamma + \alpha$, просто повторив формулировку для трёх случаев:

(a) $\alpha = 0$, тогда $\gamma + \alpha = \gamma$;

(b) $\alpha = \beta + 1$, тогда $\gamma + \alpha = (\gamma + \beta) + 1$;

(c) α - предельный, тогда $\gamma + \alpha = \sup\{\gamma + \beta | \beta < \alpha\}$.

Произведение $\gamma \cdot \alpha$ определяется аналогично. □

Определение (Кардинал)**.** Ординал μ называется *кардиналом*, если он не равномощен никакому строго меньшему ординалу.

Определение (Мощность множества)**.** *Мощность* множества A - это единствееный кардинал, равномощный A, т.е. $|\mu_A| = |A|$.

29. Алфавит ИВ, формула ИВ, подформула, представление формул ИВ.

30. Принцип математической индукции и возвратной индукции.

    Определение (Принцип математической индукции)**.** Если $\Delta(0)$ истинно и для всех n из истинности $\Delta(n)$ следует истинность $\Delta(n+1)$, то $\Delta(n)$ истинно для всех n.

    Определение (Возвратная индукция)**.** Пусть для каждого n из того, что $\Delta(k)$ истинно при любом $k < n$, следует, что истинно $\Delta(n)$. Тогда $\Delta(n)$ истинн для всех n.

    Доказательство. Оба принципа индукции легко вытекают из следующего факта: в любом непустом множестве натуральных числе есть минимальный элемент. Покажем, как отсюда выводится возвратная индукция.
    Допустим, что $\Delta(n)$ ложно при некотором n. Рассмотрим множество $A = \{n | \Delta(n) \text{ ложно}\}$. Оно не пусто, следовательно, в нём есть минимальный элемент n_0. Тогда $\Delta(n_0)$ ложно, а если $n < n_0$, то $n \notin A$ и $\Delta(n)$ истинно. Получаем, что $\Delta(n_0)$ тоже истинно, противоречие. □

31. Алфавит ИС, секвенция, аксиома, правило вывода, дерево вывода, доказуемость, пример вывода.

32. Семантика ИВ: означивание, значение формулы при означивании, выполнимые, опровержимые, тождественно истинные, тождественно ложные формулы, примеры.

33. Тождественно истинные секвенции, теорема о корректности ИС.

Определение (Тождественно истинные секвенции)**.** Секвенция называется тождественно истинной, если она истинна при любом означивании переменных.

Теорема (о корректности ИС)**.** *Любая доказуемая в ИС секвенция тождественно истинна.*

Доказательство. Пусть S - доказуемая секвенция, D - её дерево вывода. Индукцией по числу секвенций в D докажем, что S тождественно истинна.
Предположим, что в D одна секвенция. Тогда она совпадает с S и является аксиомой вида $\Phi \vdash \Phi$. Ясно, что она тождественно истинна.
Предположим, что в D n секвенций, $n > 1$, и для меньшего числа секвенций утверждение уже доказано. Дерево D имеет вид $\frac{D_1;\ldots;D_k}{S}$, где D_i - деревья вывода секвенций S_i, а $\frac{S_1;\ldots;S_k}{S}$ - правило вывода. По предположению индукции все S_i, $i \leq k$, тождественно истинны. Чтобы доказать, что S тождественно истинна, нужно перебрать все возможные правила вывода.
Рассмотрим случай, когда последнее правило в D имеет вид $\frac{\Gamma\vdash\Phi;\Gamma\vdash(\Phi\to\Psi)}{\Gamma\vdash\Psi}$. Рассмотрим произвольное означивание и покажем, что секвенция $\Gamma \vdash \Psi$ истинна при этом означивании. Если одна из формул в Γ ложна, секвенция истинна. Предположим, все формулы в Γ истинны. Тогда истинны формулы Φ и $(\Phi \to \Psi)$. Ясно, что Ψ тоже истинна.
Остальные правила разбираются аналогично. □

34. Допустимые правила вывода, примеры.

35. Лемма об основных эквивалентностях, теорема о замене для ИВ.

Лемма (об основных эквивалентностях)**.** *Для любых формул* Φ, Ψ, Φ', Ψ' *и* Δ *верно:*

(a) $\Phi \equiv \Phi$*;*
(b) $\Phi \equiv \Psi \Rightarrow \Psi \equiv \Phi$*;*
(c) $\Phi \equiv \Psi, \Psi \equiv \Delta \Rightarrow \Phi \equiv \Delta$*;*
(d) $\Phi \equiv \Phi' \Rightarrow \neg\Phi \equiv \neg\Phi'$*;*
(e) $\Phi \equiv \Phi', \Psi \equiv \Psi' \Rightarrow (\Phi' \circ \Psi) \equiv (\Phi' \circ \Psi')$*, где* $\circ \in \{\ \&, \vee, \to\}$.

Доказательство. Пункты $a), b)$ очевидны; c): предположим, что доказуемы секвенции $\Phi \vdash \Psi, \Psi \vdash \Phi, \Psi \vdash \Delta, \Delta \vdash \Psi$. Покажем доказуемость секвенции $\Phi \vdash \Delta$, построив допустимое дерево:

$$\dfrac{\Phi \vdash \Psi \quad \dfrac{\Phi \vdash \Delta}{\Phi, \Psi \vdash \Delta}}{\Phi \vdash \Delta}$$

Дерево для $\Delta \vdash \Phi$ строится симметрично. Далее будем указывать только деревья.
$d)$:

$$\frac{\Phi^{'} \vdash \Phi}{\neg\Phi \vdash \neg\Phi^{'}}$$

$e)$: построим три дерева для случаев $\circ = \rightarrow, \circ = \&$ и $\circ = \vee$. Далее мы иногда будем пропускать структурные правила, соединяя несколько структурных правил с одним основным или допустимым в один переход дерева.

$$\cfrac{\cfrac{\Phi^{'} \vdash \Phi; \quad (\Phi \rightarrow \Psi) \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi^{'} \vdash \Psi;} \qquad \cfrac{\Psi \vdash \Psi^{'}}{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi^{'}, \Psi \vdash \Psi^{'}}}{\cfrac{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi^{'} \vdash \Psi^{'}}{(\Phi \rightarrow \Psi) \vdash (\Phi^{'} \rightarrow \Psi')}}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Phi \vdash \Phi^{'}}{\Phi, \Psi \vdash \Phi^{'}}}{(\Phi\&\Psi) \vdash \Phi^{'};} \qquad \cfrac{\cfrac{\Psi \vdash \Psi^{'}}{\Phi, \Psi \vdash \Psi^{'}}}{(\Phi\&\Psi) \vdash \Psi'}}{(\Phi\&\Psi) \vdash (\Phi^{'}\&\Psi^{'})} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\Phi \vdash \Phi^{'}}{\Phi \vdash (\Phi^{'} \vee \Psi^{'});} \qquad \cfrac{\Psi \vdash \Psi^{'}}{\Psi \vdash (\Phi^{'} \vee \Psi^{'})}}{(\Phi \vee \Psi) \vdash (\Phi^{'} \vee \Psi^{'})}$$

$\square$

Теорема (о замене для ИВ)**.** *Пусть* Ψ *- подформула формулы* Φ*. Обозначим через* $\Phi^{'}$ *результат замены* Ψ *на* $\Psi^{'}$*. Если* $\Psi \equiv \Psi^{'}$*, то и* $\Phi \equiv \Phi^{'}$*.*

Доказательство. Индукцией по $|\Phi|$ докажем, что $\Phi^{'}$ - формула, эквивалентная Φ. Если $\Phi = \Psi$, то $\Phi^{'} = \Psi^{'}$ и $\Phi \equiv \Phi^{'}$. Поэтому будем рассматривать только случай $\Phi \neq \Psi$.
Пусть $|\Phi| = 1$. Тогда $\Phi = \Psi$, и этот случай уже рассмотрен.
Пусть $|\Phi| > 1$, и для формул меньшей длины утверждение уже доказано. Если $\Phi = \neg\Phi_1$, то Ψ - подформула Φ_1, и по предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1^{'}$. Тогда $\Phi = \neg\Phi_1 \equiv \neg\Phi_1^{'} = \Phi^{'}$
Если $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2)$, где $\circ \in \{\&, \vee, \rightarrow\}$, то Ψ - подформула Φ_1 или Φ_2. Предположим, что Ψ - подформула Φ_1. По предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1^{'}$, отсюда $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \equiv (\Phi_1^{'} \circ \Phi_2) = \Phi^{'}$. $\square$

36. Д.н.ф., к.н.ф., теорема о приведении к д.н.ф. и к.н.ф.
37. Предложение о тождественно истинных к.н.ф.
38. Теорема о полноте ИС.
39. Совершенные нормальные формы, теорема о совершенных нормальных формах.

40. Гильбертовское исчисление высказываний: аксиоматика, выводимость, примеры выводов.
41. Теорема о дедукции.
42. Связь гильбертовского и секвенциального исчисления.