Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137,№19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
   Не существует явного определения множества.
   Пусть A некоторое мн-во, тогда существует 2 способа задания мн-ва

   (a) A = {1,2,3,4,5} - явное задание эл-тов мн-ва

   (b) Пусть $\Phi(x)$- некоторое условие, тогда
   A = $\{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множествами с помощью некоторого условия $\Phi(x)$

   Пусть A, B- некоторые множества

   Обозначение (Подмножетсво). A - подмножетсво B, если $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

   Обозначение (Собстевенное подмножетсво). A - собстевенное подмножетсво B, если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

   Обозначение (Пустое множество). $\emptyset$ - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

   Обозначение (Множество всех подмножетсв множества A). $P(A) = \{\ C \mid C \subseteq A\ \}$

   Обозначение (Универсум). Универсум (условное множество все множеств) U

   Операции над множествами:

   - Объединение множеств:
     $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
   - Пересечение множеств:
     $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
   - Разность множеств:
     $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
   - Дополнение множества:
     $\neg A = \{\ x \mid x \in\ U \wedge x \notin A\}$
   - Симметрическая разность множеств:
     $A\ \Delta\ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A\ \cup\ B) \setminus (B\ \cup\ A)$

Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств
  $\bigcup S = \{\ x \mid \exists A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$
- Пересечение семейства множеств
  $\bigcap S = \{\ x \mid \forall A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

Определение (Упорядоченный набор (кортеж))**.** Упорядоченный набор (кортеж) длинны n определяется по индукции
$<>= \emptyset$
$< a >= a$
$< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$
...
$< a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n >=<< a_1, a_2, ..., a_{n-1}) >, a_n >$

Определение (пара)**.** Набор $< a, b >$ длинны 2 называют *парой*

Теорема (Предложение о равенстве n-ок)**.** *Если*
$< a_1, ..., a_n >=< b_1, ..., b_n >\Leftrightarrow a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$

Доказательство. для $n = 1$ очевидно в обе стороны. Докажем для $n = 2$:
$< a_1, a_2 >=< b_1, b_2 >\Leftrightarrow \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$
Пусть $a_1 = a_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{a_1\} = \{b_1, b_2\} \\ \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}\end{array}\right. \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2$
для $b_1 = b_2$ аналогично.
Расмотрим $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{a_1\} = \{b_1\} \\ \{a_1\} = \{b_1, b_2\}\end{array}\right. \Rightarrow \{a_1\} = \{b_1\} \Rightarrow a_1 = b_1$
По аналогии для $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$
Т.к справедливо для $n = 2$, а определение n-ок индуктивно следовательно верно для n ☐

Определение (Декартово произведение)**.** Пусть даны множества $A_1, ..., A_n$, тогда их декартовым произведением называют
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, ..., a_n > \mid \forall i \in \{1, ..., n\}\ a_i \in A_i\}$

Определение (Декартова степень)**.** В случае, если $A_1 = A_2 = ... = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество
$C \subseteq A \times B$

Определение. Обратным бинарным отношением называется
$R^{-1} = \{< y; x > | \ < x; y > \in R\}$

Определение. Произведением бинарных отношений называется
$R_1 \times R_2 = \{< x; z > |\exists z| \ < x; y > \in R_1 \wedge < y; z > \in R_2\}$

Лемма (Лемма о бинарных отношениях)**.** *Для любых бинарных отношений R_1, R_2, R_3:*

(a) $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$

(b) $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$

Доказательство. (a) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.
Пусть $< x; t > \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $< x; y > \in R_1$ и $< y; t > \in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $< y; z > \in R_2$ и $< z; t > \in R_3$. Получаем, что $< x; z > \in R_1 \cdot R_2$ и $< x; t > \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(b) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.
Пусть $< z; x > \in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $< x; y > \in R_1$ и $< y; z > \in R_2$. Тогда $< y; x > \in R_1^{-1}$ и $< z; y > \in R_2^{-1}$. Получаем, что $< z; x > \in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

$\square$