Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137,№19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
   Не существует явного определения множества.
   Пусть A некоторое мн-во, тогда существует 2 способа задания мн-ва

   (a) A = {1,2,3,4,5} - явное задание эл-тов мн-ва

   (b) Пусть $\Phi(x)$- некоторое условие, тогда
   A = $\{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множествами с помощью некоторого условия $\Phi(x)$

   Пусть A, B- некоторые множества

   Обозначение (Подмножетсво). A - подмножетсво B, если $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

   Обозначение (Собстевенное подмножетсво). A - собстевенное подмножетсво B, если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

   Обозначение (Пустое множество). $\emptyset$ - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

   Обозначение (Множество всех подмножетсв множества A). $P(A) = \{\ C \mid C \subseteq A\ \}$

   Обозначение (Универсум). Универсум (условное множество все множеств) U

   Операции над множествами:

   - Объединение множеств:
     $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
   - Пересечение множеств:
     $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
   - Разность множеств:
     $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
   - Дополнение множества:
     $\neg A = \{\ x \mid x \in\ U \wedge x \notin A\}$
   - Симметрическая разность множеств:
     $A\ \Delta\ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A\ \cup\ B) \setminus (B\ \cup\ A)$

Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств
  $\bigcup S = \{\ x \mid \exists A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$
- Пересечение семейства множеств
  $\bigcap S = \{\ x \mid \forall A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

Определение (Упорядоченный набор (кортеж))**.** Упорядоченный набор (кортеж) длинны n определяется по индукции
$<>= \emptyset$
$< a >= a$
$< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$
...
$< a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n >=<< a_1, a_2, ..., a_{n-1}) >, a_n >$

Определение (пара)**.** Набор $< a, b >$ длинны 2 называют *парой*

Предложение (о равенстве n-ок)**.** Если
$< a_1, ..., a_n >=< b_1, ..., b_n >\Leftrightarrow a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$

Доказательство. для $n = 1$ очевидно в обе стороны. Докажем для $n = 2$:
$< a_1, a_2 >=< b_1, b_2 >\Leftrightarrow \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$
Пусть $a_1 = a_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{a_1\} = \{b_1, b_2\} \\ \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}\end{array}\right. \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2$
для $b_1 = b_2$ аналогично.
Расмотрим $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{a_1\} = \{b_1\} \\ \{a_1\} = \{b_1, b_2\}\end{array}\right. \Rightarrow \{a_1\} = \{b_1\} \Rightarrow a_1 = b_1$
По аналогии для $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$
Т.к справедливо для $n = 2$, а определение n-ок индуктивно следовательно верно для n ☐

Определение (Декартово произведение)**.** Пусть даны множества $A_1, ..., A_n$, тогда их декартовым произведением называют
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, ..., a_n > \mid \forall i \in \{1, ..., n\}\ a_i \in A_i\}$

Определение (Декартова степень)**.** В случае, если $A_1 = A_2 = ... = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество
$C \subseteq A \times B$

Определение. Обратным бинарным отношением называется
$R^{-1} = \{< y; x > | \ < x; y >\in R\}$

Определение. Произведением бинарных отношений называется
$R_1 \times R_2 = \{< x; z > |\exists z| \ < x; y >\in R_1 \wedge < y; z >\in R_2\}$

Лемма (Лемма о бинарных отношениях)**.** *Для любых бинарных отношений R_1, R_2, R_3:*

(a) $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$

(b) $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$

Доказательство. (a) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.
Пусть $< x; t >\in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; t >\in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $< y; z >\in R_2$ и $< z; t >\in R_3$. Получаем, что $< x; z >\in R_1 \cdot R_2$ и $< x; t >\in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(b) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.
Пусть $< z; x >\in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; z >\in R_2$. Тогда $< y; x >\in R_1^{-1}$ и $< z; y >\in R_2^{-1}$. Получаем, что $< z; x >\in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

□

4. Область определения отношения, множество значений отношения, образ и прообраз множества относительно отношений, функция, замечание о равенстве функций, тождественная функция.

Определение (Функция)**.** Бинарное отношени f называется функцией, если выполняется: $< x, y_1 >, < x, y_2 >\in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Определение (Область определния)**.** $dom(f) = \{x| \ \exists y :< x, y >\in f\}$

Определение (Область значений)**.** $ran(f) = \{y| \ \exists x :< x, y >\in f\}$

Обозначение. f - функция из A в B, если f - функция, $dom(f) = A$ и $ran(f) \subseteq B$
Тогда функцию обозначают $f : A \to B$

Замечание. Если $f : A \to B$ и $x \in A$, то существует единственный y такой, что $< x, y > \in f$. Этот y лежит в B, называется *значение* функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Замечание (о равенстве функций)**.** Если f, g - функции, то $f = g \Leftrightarrow dom(f) = dom(g)$ и $\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x)$

Определение (Тождественная функция)**.** Для любого множества A $\exists f = \{< x, x > | x \in A\} = id_A$. Ясно, что $id_A : A \to B$ и $\forall x \in A \ id_A(x) = x$

5. Композиция функций, лемма о композиции функций:

   Определение (Композиция функций)**.** Если f и g - функции, то их *композиция* $g \circ f$ определяется, как произведение бинарных отношений $f \cdot g$ (В обратном порядке)

   Лемма (о композиции функций)**.** *Если $f : A \to B, g : B \to C$, то их композицией $g \circ f : A \to C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$ при $x \in A$*

6. Сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция, лемма о свойствах биекций
   Пусть $f : A \to B$

   Определение (Сюръекция)**.** f - функция из A *на* B (*сюръективная функция, сюръекция*), если $\forall y \in B \ \exists x \in A \mid f(x) = y$

   Обозначение (Сюръекция)**.** $f : A \underset{на}{\longrightarrow} B$.

   Определение (Инъекция)**.** f - инъективная функция (*1 - 1 функция, инъекция*), если $\forall x_1, x_2 \in A$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$

   Обозначение (Инъекция)**.** $f : A \xrightarrow{1-1} B$

   Определение (Биекция)**.** f - *биекция* из A на B, если f одновременно и инъекция, и сюръекция.

   Обозначение (Биекция)**.** $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$

   Определение (Обратная функция)**.** Запись f^{-1} означает обратное бинарное отношение к f. Если f^{-1} при этом является функцией, то она называется *обратной функцией* к f.

   Лемма (о свойствах биекций)**.**

   (a) *Если $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$, то $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$, $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$ и $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$.*
   (b) *Если $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$, $g : B \xrightarrow[на]{1-1} C$, то $f \circ g : A \xrightarrow[на]{1-1} C$.*

Доказательство. (a) Покажем, что f^{-1} - функция.

Пусть $< y, x_1 >, < y, x_2 > \in f^{-1}$. Тогда $< x_1, y >, < x_2, y > \in f$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Поскольку f инъективна, $x_1 = x_2$.

Ясно, что $dom(f^{-1}) = ran(f)$ и $ran(f^{-1}) = dom(f)$. Поскольку f сюръективна, $ran(f) = B = dom(f^{-1})$. Поскольку $ran(f^{-1}) = A$, f^{-1} сюръективна. Инъективность f^{-1} легко проверяется. Тем самым $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$.

Покажем, что $f^{-1}(f(x)) = x$ при $x \in A$. Пусть $x \in A$ и $y = f(x)$. Тогда $< x, y > \in f$ и $< y, x > \in f^{-1}$. Получаем, что $f^{-1}(y) = x$.

(b) выше доказано, что $g \circ f : A \to C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$. Инъективность: если $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, то $f(x_1) = f(x_2)$ и отсюда $x_1 = x_2$. Сюръективность доказывается похожим способом.

□

7. Полный порядок, в.у.м., лемма о начальных сегментах в.у.м.

Определение (Вполне упорядоченное множество)**.** *Вполне упорядоченное множество* (в.у.м) - это пара $(A, \leq)$, где $\leq$ - линейный фундированный порядок на A. Иногда такой порядок называют *полным.*

Лемма (о начальных сегментах в.у.м.)**.** *Любой начальный сегмент в.у.м. $(A, \leq)$ либо равен A, либо является начальным отрезком.*

Доказательство. Пусть S - начальный сегмент в A и $S \neq A$. Тогда $A \backslash S \neq \emptyset$. Пусть x - минимальный элемент в $A \backslash S$. Покажем, что $S = A_x$. Если $y \in S$, то либо $y < x$, либо $x \leq y$. Второй случай невозможен, так как тогда $x \in S$. □

8. Парадокс Рассела, аксиоматика ZFC.

Парадокс (Парадокс Рассела)**.** Рассмотрим совокупность: $M_R = \{A \mid A$ - множество и $A \notin A\}$.

Предположим, что само M_R является множеством. Возможны два варианта:

(a) $M_R \notin M_R$. Тогда $A - M_R$ подходит под определние, и $M_R \notin M_R$. Противоречие.

(b) $M_R \in M_R$. Вновь полагая, $A = M_R$, получаем, что по определению $M_R \notin M_R$. Противоречие.

Это рассуждение показывает, что совокупность M_R нельзя считать множеством.

Аксиоматика ZFC.
Можно с собой на листочке!!!

9. Лемма о порядке на мощностях.

Лемма (Лемма о порядке на мощностях)**.** *Для всяких непустых множеств A и B следующие условия эквиваленты:*

(a) $|A| \leq |B|$

(b) Существует функция $g : B \xrightarrow{HA} A$

(c) A *равномощно некоторому подмножеству* B

Доказательство.

(a) $a \Rightarrow c$
Пусть $|A| \leq |B|$.
Тогда существует $f : A \xrightarrow{1-1} B$.
Тогда $ran(f) \subseteq B$ и $f : A \xrightarrow[\textit{на}]{1-1} ran(f)$.

(b) $c \Rightarrow b$
Пусть $h : B_1 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A$, где $B_1 \subseteq B$.
Выберем произвольное $a_0 \in A$ и построим $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$ так: $g(y) = \begin{cases} h(y), \text{если} y \in B_1 \\ a_0, \text{если} y \in B \backslash B_1 \end{cases}$

(c) $b \Rightarrow a$
Пусть $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$.
Построим $f : B \to A$.
Рассмотрим $x \in A$
Множество $\{y \in B |\ g(y) = x\}$ непусто.
Выберем в качестве $f(x)$ некоторый элемент из этого множества.
Проверим, что f инъективна. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$
Тогда $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а по построению $g(f(x_i)) = x_i$ при $i = 1, 2$.

□

10. Лемма о сохранении мощностей, теорема о мощности объединения (без доказательства).

Лемма (Лемма о сохранении мощностей)**.**

(a) Если $|A| = |A_1|$ *и* $|B| = |B_1|$*, то* $|A \times B| = |A_1 \times B_1|$

(b) Если при этом $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$*, то* $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$

Доказательство.

(a) Пусть даны биекции
$f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1$ и $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B_1$.
Построим $h : A \times B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \times B_1$ так: $h_1(< x; y >) =< f(x), g(y) >$.
Легко проверить, что h_1 - нужная биекция.

(b) Построим $h_2 : A \cup B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \cup B_1$ так: $h_2(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если} x \in A \\ g(x), \text{ если} x \in B \end{cases}$
Условие $A \cap B = \emptyset$ гарантирует, что определение корректно. Вновь нетрудно доказать, что h_2 - биекция. Проверим в качестве примера, что h_2 инъективна. Пусть $h_2(x) = h_2(y)$. Если $x, y \in A$, то получаем $f(x) = f(y)$ и $x = y$. Если $x, y \in B$, рассуждения аналогичны. Если же $x \in A, y \in B$ (или наоборот), то $h_2(x) \in A_1$ и $h_2(y) \in B_1$, что невозможно в силу $A_1 \cap B_2 = \emptyset$.

□

Лемма (о мощности объединения). *Если хотя бы одно из множеств A, B бесконечно, то $|A \cup B| = max\{|A|, |B|\}$.*

11. Континуум-гипотеза, теорема Гёделя-Коэна (без доказательства), обобщенная континуумгипотеза.

Гипотеза (Континуум-гипотеза). Не существует множества A такого, что
$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

Теорема (Теорема Гёделя-Коэна). *Если теория множеств ZFC непротиворечива, то континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках ZFC.*

Гипотеза (Обобщенная континуумгипотеза). Если множество B - бесконечно, то не существует множества A такого, что
$|B| < |A| < |P(B)|$

12. Ординалы, лемма об элементах ординала

Определение (Ординал). Ординалом называется транзитивное множество все элементы которого сравнимы относительно включения.

Определение (Транзитивное множество). Множество α называется транзитивным, если из $x \in \alpha$ и $y \in x$ следует, что $x \in \alpha$.

Лемма (Лемма об элементах ординала). *Если α - ординал и $\beta \in \alpha$, то β - ординал.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \beta$. Тогда $x, y \in \alpha$. Следовательно, x и y равны или сравнимы относительно $\in$. Докажем, что β транзитивно. Пусть $y \in x \in \beta$. Тогда $x \in \alpha$ и $y \in \alpha$. Возможны три случая:

(a) $\beta \in y$ Тогда получаем, что $\beta \in y \in x \in \beta$ - противоречие.

(b) $\beta = y$ Получаем, что $\beta \in x \in \beta$ - противоречие.

(c) $y \in \beta$. Следовательно, β - ординал.

$\square$