

Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137, №19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
Не существует явного определения множества.
Пусть А некоторое мн-во, тогда существует 3 способа задания мн-ва

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ - явное задание эл-тов мн-ва
- (b) Пусть $\Phi(x)$ - некоторое условие, тогда
 $A = \{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множествами с помощью некоторого условия $\Phi(x)$
- (c) С помощью рекурентного соотношения.
Пример: a_n - числа Фибоначчи, тогда
 $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Пусть А, В- некоторые множества

Обозначение (Подмножество). А - подмножество В, если
 $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

Обозначение (Собственное подмножество). А - собственное подмножество В, если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

Обозначение (Пустое множество). \emptyset - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

Обозначение (Множество всех подмножеств множества A).

$$P(A) = \{ C \mid C \subseteq A \}$$

Обозначение (Универсум). Универсум (условное множество всех множеств) U

Операции над множествами:

- Объединение множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Пересечение множеств:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Разность множеств:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Дополнение множества:

$$\neg A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

- Симметрическая разность множеств:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств

$$\bigcup S = \{x \mid \exists A_i \in S : x \in A_i\}$$

- Пересечение семейства множеств

$$\bigcap S = \{x \mid \forall A_i \in S : x \in A_i\}$$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

Определение (Упорядоченный набор (кортеж)). Упорядоченный набор (кортеж) длины n определяется по индукции

$$<> = \emptyset$$

$$< a > = a$$

$$< a, b > = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

...

$$< a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n > = < a_1, a_2, \dots, a_{n-1} >, a_n >$$

Определение (пара). Набор $\langle a, b \rangle$ длины 2 называют *парой*

Предложение (о равенстве n-ок). Если

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

Доказательство. для $n = 1$ очевидно в обе стороны. Докажем для $n = 2$:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \Leftrightarrow \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\text{Пусть } a_1 = a_2 \Rightarrow \begin{cases} \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \\ \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\} \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2$$

для $b_1 = b_2$ аналогично.

Рассмотрим $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{a_1\} = \{b_1\} \\ \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \end{cases} \xrightarrow{\text{Так как } b_1 \neq b_2} \{a_1\} = \{b_1\} \Rightarrow a_1 = b_1$$

По аналогии для $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$

Т.к справедливо для $n = 2$, а определение n-ок индуктивно следовательно верно для n □

Определение (Декартово произведение). Пусть даны множества A_1, \dots, A_n , тогда их декартовым произведением называют $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} a_i \in A_i\}$

Определение (Декартова степень). В случае, если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество $C \subseteq A \times B$

Определение. Обратным бинарным отношением называется $R^{-1} = \{<y; x> \mid <x; y> \in R\}$

Определение. Произведением бинарных отношений называется

$$R_1 \times R_2 = \{<x; z> \mid \exists y \quad <x; y> \in R_1 \wedge <y; z> \in R_2\}$$

Лемма (Лемма о бинарных отношениях). Для любых бинарных отношений R_1, R_2, R_3 :

$$(a) \quad R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$$

$$(b) \quad (R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$$

Доказательство. (а) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.

Пусть $<x; t> \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $<x; y> \in R_1$ и $<y; t> \in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $<y; z> \in R_2$ и $<z; t> \in R_3$. Получаем, что $<x; z> \in R_1 \cdot R_2$ и $<x; t> \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(б) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.

Пусть $<z; x> \in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $<x; y> \in R_1$ и $<y; z> \in R_2$. Тогда $<y; x> \in R_1^{-1}$ и $<z; y> \in R_2^{-1}$. Получаем, что $<z; x> \in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

□

4. Область определения отношения, множество значений отношения, образ и прообраз множества относительно отношений, функция, замечание о равенстве функций, тождественная функция.

Определение (Функция). Бинарное отношение f называется функцией, если выполняется: $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Определение (Область определения). $dom(f) = \{x \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in f\}$

Определение (Область значений). $ran(f) = \{y \mid \exists x : \langle x, y \rangle \in f\}$

Обозначение. f - функция из A в B , если f - функция, $dom(f) = A$ и $ran(f) \subseteq B$

Тогда функцию обозначают $f : A \rightarrow B$

Замечание. Если $f : A \rightarrow B$ и $x \in A$, то существует единственный y такой, что $\langle x, y \rangle \in f$. Этот y лежит в B , называется значение функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Замечание (о равенстве функций). Если f, g - функции, то $f = g \Leftrightarrow dom(f) = dom(g)$ и $\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x)$

Доказательство.

\Rightarrow очевидно

\Leftarrow пусть $\langle x, y \rangle \in f \Rightarrow x \in dom(f)$ и $y = f(x) \xrightarrow{\text{т.к } f(x)=g(x)}$
 $y = g(x) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in g \xrightarrow{\text{в силу произвольности выбора}} f(x) \leq g(x)$

Обратное по аналогии \square

Определение (Тождественная функция). Для любого множества A

$\exists f = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\} = id_A$.

Ясно, что $id_A : A \rightarrow A$

и $\forall x \in A \quad id_A(x) = x$

5. Композиция функций, лемма о композиции функций:

Определение (Композиция функций). Если f и g - функции, то их композиция $g \circ f$ определяется, как произведение бинарных отношений $f \cdot g$ (В обратном порядке)

Лемма (о композиции функций). *Если $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, то их композицией $g \circ f : A \rightarrow C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$ при $x \in A$*

Покажем, что $g \circ f$ — функция. Пусть $\langle x, z_1 \rangle, \langle x, z_2 \rangle \in g \circ f$. Тогда существует y_1 т. ч. $\langle x, y_1 \rangle \in f$ и $\langle y_1, z_1 \rangle \in g$, и существует y_2 т. ч. $\langle x, y_2 \rangle \in f$ и $\langle y_2, z_2 \rangle \in g$. Получаем, что $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$.

Покажем, что $\text{dom}(g \circ f) = A$. Пусть $x \in \text{dom}(g \circ f)$. Тогда существует z т. ч. $\langle x, z \rangle \in g \circ f$, и существует y т. ч. $\langle x, y \rangle \in f$, $\langle y, z \rangle \in g$. Получаем, что $x \in \text{dom}(f) = A$. Тем самым

$$\text{dom}(g \circ f) \subseteq A.$$

Пусть $x \in A$. Существует y т. ч. $\langle x, y \rangle \in f$. Тогда $y \in \text{ran}(f)$ и $y \in B = \text{dom}(g)$. Следовательно, существует z т. ч. $\langle y, z \rangle \in g$. Получаем, что $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ и $x \in \text{dom}(g \circ f)$. Тем самым

$$A \subseteq \text{dom}(g \circ f).$$

Из последнего рассуждения ясно, что $y = f(x)$, $z = g(y)$ и $z = [g \circ f](x)$. Тем самым $[g \circ f](x) = g(f(x))$.

Подобным образом можно показать, что $\text{ran}(g \circ f) \subseteq C$.

6. Сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция, лемма о свойствах биекций

Пусть $f : A \rightarrow B$

Определение (Сюръекция). f - функция из A на B (*сюръективная функция, сюрбекция*), если $\forall y \in B \exists x \in A | f(x) = y$

Обозначение (Сюръекция). $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$.

Определение (Инъекция). f - инъективная функция (*1 - 1 функция, инбекция*), если $\forall x_1, x_2 \in A$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$

Обозначение (Инъекция). $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Определение (Биекция). f - биекция из A на B , если f одновременно и инъекция, и сюръекция.

Обозначение (Биекция). $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$

Определение (Обратная функция). Запись f^{-1} означает обратное бинарное отношение к f . Если f^{-1} при этом является функцией, то она называется *обратной функцией* к f .

Лемма (о свойствах биекций).

(a) Если $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$, то $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A$, $f^{-1}(f(x)) = x \forall x \in A$ и $f(f^{-1}(y)) = y \forall y \in B$.

(b) Если $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$, $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C$, то $g \circ f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C$.

Доказательство. (a) Покажем, что f^{-1} - функция.

Пусть $\langle y, x_1 \rangle, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$. Тогда $\langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle \in f$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Поскольку f инъективна, $x_1 = x_2$.

Ясно, что $\text{dom}(f^{-1}) = \text{ran}(f)$ и $\text{ran}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$. Поскольку f сюръективна, $\text{ran}(f) = B = \text{dom}(f^{-1})$. Поскольку $\text{ran}(f^{-1}) = A$, f^{-1} сюръективна. Инъективность f^{-1} легко проверяется. Тем самым $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A$.

Покажем, что $f^{-1}(f(x)) = x$ при $x \in A$. Пусть $x \in A$ и $y = f(x)$. Тогда $\langle x, y \rangle \in f$ и $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$. Получаем, что $f^{-1}(y) = x$.

(b) выше доказано, что $g \circ f : A \rightarrow C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$.
 Инъективность: если $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, то $f(x_1) = f(x_2)$ и отсюда $x_1 = x_2$. Сюръективность доказывается похожим способом.

□

7. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности, лемма о классах эквивалентности.

Пусть R — бинарное отношение на множестве A , т. е. $R \subseteq A^2$.

Говорим, что:

R симметрично, если $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$;

R антисимметрично, если $\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b$;

R транзитивно, если $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$;

R иррефлексивно, если $\langle a, a \rangle \notin R$ для любого a ;

R рефлексивно на A , если $\langle a, a \rangle \in R$ для любого $a \in A$.

Отношение эквивалентности на множестве A — это бинарное отношение $R \subseteq A^2$, которое симметрично, транзитивно и рефлексивно на A .

Вместо записи $\langle x, y \rangle \in R$ часто будем использовать краткое обозначение xRy и говорить, что x и y эквивалентны относительно R . Если $x \in A$, то множество $x/R = \{y \in A \mid xRy\}$ называется классом эквивалентности элемента x . Множество всех классов эквивалентности $A/R = \{x/R \mid x \in A\}$ называется фактормножеством A по R .

Семейство $D \subseteq P(A)$ назовём разбиением множества A , если верно:

- 1) любое множество $B \in D$ непусто;
- 2) если $B_1, B_2 \in D$ и $B_1 \neq B_2$, то $B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
- 3) для любого $x \in A$ существует $B \in D$ т. ч. $x \in B$.

Лемма (о классах эквивалентности). Если R — отношение эквивалентности на A , то A/R — разбиение множества A .

Если $x \in A$, то $x \in x/R$. Отсюда сразу получаем 1) и 3).

2): пусть $x/R, y/R \in A/R$ и $x/R \cap y/R \neq \emptyset$. Покажем, что тогда $x/R = y/R$. Пусть $z \in x/R \cap y/R$. Тогда верно xRz и yRz , отсюда zRy в силу симметричности и xRy в силу транзитивности, а отсюда yRx .

Покажем, что $x/R \subseteq y/R$. Если $t \in x/R$, то xRt и yRt . Следовательно, $t \in y/R$. Аналогично получаем, что $y/R \subseteq x/R$.

8. Частичный порядок, ч.у.м., минимальные, максимальные, наименьшие, наибольшие элементы, связи между ними. Замечание о строгом порядке.

2.5. Частично упорядоченные множества

Частичный порядок на множестве A — это бинарное отношение $R \subseteq A^2$, которое антисимметрично, транзитивно и рефлексивно на A . *Частично упорядоченное множество* (ч.у.м.) — это пара (A, R) , где R — частичный порядок на A .

В дальнейшем, как правило, для частичных порядков будет использоваться символ \leqslant и его модификации. Как и раньше, вместо записи $\langle x, y \rangle \in \leqslant$ используем сокращение $x \leqslant y$ и говорим, что x меньше или равен y относительно порядка \leqslant .

Пусть \leqslant — частичный порядок на A , $x \in A$. Говорим, что:

x — наибольший элемент в ч.у.м. (A, \leqslant) , если $y \leqslant x$ для всех $y \in A$;

x — наименьший элемент, если $x \leqslant y$ для всех $y \in A$;

x — максимальный элемент, если для любого $y \in A$ из $x \leqslant y$ следует, что $x = y$;

x — минимальный элемент, если для любого $y \in A$ из $y \leqslant x$ следует, что $x = y$;

Замечание. Наибольший элемент (если он существует) единственен и является максимальным, а наименьший (если существует) единственен и является минимальным.

Допустим, что x_1, x_2 — два наибольших элемента. Тогда по определению $x_1 \leqslant x_2$ и $x_2 \leqslant x_1$. В силу антисимметричности $x_1 = x_2$.

Покажем, что x_1 — максимальный элемент. Пусть $x_1 \leqslant y$. Тогда по определению наибольшего элемента $y \leqslant x_1$, следовательно, $x_1 = y$.

Обозначим через $x < y$ то, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

Замечание (о строгом порядке). Если \leqslant — частичный порядок на A , то $<$ — иррефлексивное и транзитивное отношение на A .

Иррефлексивность $<$ верна по определению. Покажем, что $<$ транзитивно. Пусть $x < y$ и $y < z$. Тогда $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, $x \neq y$ и

$y \neq z$. Отсюда $x \leq z$. Допустим, что $x = z$. Тогда $x \leq y, y \leq x$ и $x = y, \uparrow\downarrow$.

Пусть (A, \leq_A) — ч.у.м. и $B \subseteq A$. Тогда мы можем сузить порядок \leq_A на B , определяя порядок \leq_B как $\leq_A \cap B^2$. Это означает, что $x \leq_B y \Leftrightarrow x \leq_A y$ при $x, y \in B$.

Замечание. $\leq_A \cap B^2$ — частичный порядок на B .

Отношение \leq_B называется *индуцированным порядком* на B .

Иногда мы будем говорить о множестве B как о ч.у.м., подразумевая под этим ч.у.м. $(B, \leq_A \cap B^2)$.

Частичный порядок \leq на A называется *фундированным*, если в любом непустом $B \subseteq A$ есть минимальный (в B) элемент.

9. Фундированные частичные порядки, критерий фундированности порядка.

Частичный порядок \leq на A называется *фундированным*, если в любом непустом $B \subseteq A$ есть минимальный (в B) элемент.

Предложение (критерий фундированности порядка).

Частичный порядок \leq на A является фундированным \Leftrightarrow в A нет бесконечно убывающей последовательности $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$

(\Rightarrow) : пусть \leq является фундированным порядком. Допустим, что в A есть последовательность $a_0 > a_1 > \dots$. Рассмотрим множество $B = \{a_0, a_1, \dots\}$. По условию в B есть минимальный элемент a_n . Но $a_{n+1} < a_n, \uparrow\downarrow$.

(\Leftarrow) : пусть в A нет бесконечно убывающих последовательностей. Допустим, что \leq не является фундированным. Тогда существует непустое $B \subseteq A$, в котором нет минимального элемента. Выберем произвольный $a_0 \in B$. Поскольку он не минимален, в B существует $a_1 \leq a_0$ т. ч. $a_1 \neq a_0$, т. е. $a_1 < a_0$. Далее, существует $a_2 < a_1, a_3 < a_2$ и т. д. Получаем убывающую последовательность, $\uparrow\downarrow$.

10. Предложение об индукции в фундированном ч.у.м., изоморфизм ч.у.м., замечание об изоморфизме ч.у.м.

Предложение (об индукции в фундированном ч.у.м.).

Пусть (A, \leq) — ч.у.м. с фундированным порядком, B — некоторое подмножество A . Предположим, что для любого $x \in A$ из того, что $y \in B$ для всех $y < x$, следует, что $x \in B$. Тогда $B = A$.

|| Допустим, что $B \neq A$. Тогда $C = A \setminus B$ непусто. Пусть x — минимальный элемент в C . Если $y < x$, то $y \notin C$, следовательно, $y \in B$. По условию из этого следует, что $x \in B$, $\uparrow\downarrow$.

Пусть даны два ч.у.м. (A, \leq_A) и (B, \leq_B) . Функция $f : A \rightarrow B$ называется *монотонной*, если

$$x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y);$$

f — изоморфизм между (A, \leq_A) и (B, \leq_B) , если f — биекция из A на B и $x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)$ при любых $x, y \in A$.

Ч.у.м. называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Обозначим это как $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$.

Замечание. Изоморфность обладает свойствами отношения эквивалентности:

- $(A, \leq_A) \cong (A, \leq_A)$;
- если $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$, то $(B, \leq_B) \cong (A, \leq_A)$;
- если $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$ и $(B, \leq_B) \cong (C, \leq_C)$, то $(A, \leq_A) \cong (C, \leq_C)$.

|| а): функция id_A является искомым изоморфизмом; б): если $f : A \rightarrow B$ — изоморфизм, то $f^{-1} : B \rightarrow A$ — тоже изоморфизм; в): если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ — изоморфизмы, то $g \circ f$ — тоже изоморфизм. Всё это легко проверяется.

11. Линейные порядки, л.у.м., начальные сегменты и отрезки, лемма о свойствах начальных сегментов.

2.6. Линейно упорядоченные множества

Пусть \leqslant — частичный порядок на A , $x, y \in A$. Говорим, что x, y сравнимы относительно \leqslant , если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Частичный порядок \leqslant называется *линейным*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для любых $x, y \in A$, т. е. если любые два элемента в A сравнимы. В этом случае пара (A, \leqslant) называется *линейно упорядоченным множеством* (л.у.м.).

Замечание. Если (A, \leqslant) — л.у.м. и элемент $x \in A$, то:

- x является минимальным тогда и только тогда, когда является наименьшим;
- x является максимальным тогда и только тогда, когда является наибольшим.

Множество $S \subseteq A$ называется *начальным сегментом* л.у.м. (A, \leqslant) , если для любых $x, y \in A$ из $x \in S$ и $y \leqslant x$ следует $y \in S$.

Лемма (о свойствах начальных сегментов). Пусть дано л.у.м. (A, \leqslant) . Тогда:

- если S_1, S_2 — начальные сегменты, то $S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$;
- если S — начальный сегмент, а x — минимальный элемент в $A \setminus S$, то $S \cup \{x\}$ — тоже начальный сегмент;
- объединение любого семейства начальных сегментов — снова начальный сегмент.

a): предположим, что $S_1 \not\subseteq S_2$, и покажем, что $S_2 \subseteq S_1$. Пусть $x \in S_1 \setminus S_2$. Рассмотрим $y \in S_2$. Случай $x \leqslant y$ невозможен, так как тогда $x \in S_2$. Значит, $y \leqslant x$. Получаем, что $y \in S_1$.

b): пусть $z \in S \cup \{x\}$ и $y \leqslant z$. Покажем, что $y \in S \cup \{x\}$. Если $z \in S$, то $y \in S$. Пусть $z = x$. Если $y = x$, то $y \in S \cup \{x\}$. Если же $y < x$, то y не может лежать в $A \setminus S$. Значит, $y \in S$.

c): пусть D — семейство начальных сегментов и $S' = \bigcup_{S \in D} S$. Проверим, что S' — начальный сегмент. Пусть $x \in S'$ и $y \leqslant x$. Тогда существует $S \in D$ т. ч. $x \in S$. Следовательно, $y \in S$ и $y \in S'$.

Начальным отрезком л.у.м. (A, \leqslant) , отсекаемым элементом $x \in A$, называется множество $A_x = \{y \in A \mid y < x\}$.

Замечание. Начальный отрезок всегда является начальным сегментом.

12. Изоморфизм ч.у.м., изоморфизм л.у.м., признак изоморфизма л.у.м., лемма о монотонной инъекции в.у.м.

f — изоморфизм между (A, \leq_A) и (B, \leq_B) , если f — биекция из A на B и $x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)$ при любых $x, y \in A$.

Ч.у.м. называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Обозначим это как $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$.

Замечание. Изоморфность обладает свойствами отношения эквивалентности:

- a) $(A, \leq_A) \cong (A, \leq_A)$;
- b) если $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$, то $(B, \leq_B) \cong (A, \leq_A)$;
- c) если $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$ и $(B, \leq_B) \cong (C, \leq_C)$, то $(A, \leq_A) \cong (C, \leq_C)$.

||| a): функция id_A является искомым изоморфизмом; b): если $f : A \rightarrow B$ — изоморфизм, то $f^{-1} : B \rightarrow A$ — тоже изоморфизм; c): если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ — изоморфизмы, то $g \circ f$ — тоже изоморфизм. Всё это легко проверяется.

Лемма (признак изоморфизма л.у.м.). Если (A, \leq) , (B, \leq) — л.у.м. и $f : A \rightarrow B$ — монотонная биекция, то f — изоморфизм.

||| Нужно лишь проверить переход $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$. Пусть $f(x) \leq f(y)$. Допустим, что $x \not\leq y$. Тогда $y \leq x$, $f(y) \leq f(x)$ и $f(y) = f(x)$. В силу инъективности $x = y$, $\uparrow\downarrow$.

Лемма. Если (A, \leq) — в.у.м. и $f : A \xrightarrow{\text{1-1}} A$ — монотонная инъекция, то $f(x) \geq x$ при всех $x \in A$.

||| Заметим: если $x, y \in A$ и $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Из монотонности получаем, что $f(x) \leq f(y)$, а из инъективности — что $f(x) \neq f(y)$.

Допустим, что утверждение неверно: существует $x \in A$ т. ч. $f(x) \not\geq x$. Поскольку порядок линеен, $f(x) < x$. Тогда

$$f(f(x)) < f(x), f(f(f(x))) < f(f(x)), \text{ и т. д.}$$

Получаем последовательность $x > f(x) > f(f(x)) > \dots, \uparrow\downarrow$.

13. Полный порядок, в.у.м., лемма о начальных сегментах в.у.м.

Определение (Вполне упорядоченное множество). *Вполне упорядоченное множество* (в.у.м) — это пара (A, \leq) , где \leq — линейный фундированный порядок на A . Иногда такой порядок называют *полным*.

Лемма (о начальных сегментах в.у.м.). *Любой начальный сегмент в.у.м. (A, \leq) либо равен A , либо является начальным отрезком.*

Доказательство. Пусть S - начальный сегмент в A и $S \neq A$. Тогда $A \setminus S \neq \emptyset$. Пусть x - минимальный элемент в $A \setminus S$. Покажем, что $S = A_x$. Если $y \in S$, то либо $y < x$, либо $x \leq y$. Второй случай невозможен, так как тогда $x \in S$. \square

14. Предложение об изоморфизме начальных сегментов, теорема о сравнимости в.у.м. (без доказательства).

Предложение (об изоморфизме начальных сегментов). *Различные начальные сегменты в.у.м. не могут быть изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 - два различных сегмента в.у.м. (A, \leq) . Тогда сначала докажем лемму о том, что если (A, \leq) - в.у.м. и $f : A \xrightarrow{1-1} A$ - монотонная инъекция, то $f(x) \geq x \forall x \in A$. Заметим: если $x, y \in A$ и $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Из монотонности получаем, что $f(x) \leq f(y)$, а из инъективности - что $f(x) \neq f(y)$. Допустим, что утверждение неверно: существует $x \in A$ | $f(x) \not\geq x$. Поскольку ряд линеен, $f(x) < x$. Тогда $f(f(x)) < f(x)$, $f(f(f(x))) < f(f(x))$, и т.д. Получаем последовательность $x > f(x) > f(f(x)) > \dots$, противоречие.

По доказанной лемме $S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$. Пусть $S_1 \subseteq S_2$. Выберем $x_0 \in S_2 \setminus S_1$.

Мы рассматриваем эти сегменты как в.у.м. с индуцированным из A порядком. Допустим, что $f : S_2 \rightarrow S_1$ - изоморфизм. Рассматривая f как функцию из S_2 в S_2 , видим, что она инъективна и монотонна. Следовательно, $f(x_0) \geq x_0$. Поскольку S_1 начальный сегмент и $f(x_0) \in S_1$, получаем, что $x_0 \in S_1$, противоречие. \square

Теорема (о сравнимости в.у.м.). *Если даны два в.у.м., то одно из них изоморфно начальному сегменту другого.*

15. Аксиома выбора, лемма Цорна (без доказательства), теорема Цермело (без доказательства), эквивалентность утверждений.

Аксиома выбора. Для любого множества A существует функция $f : P(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ т. ч. $f(X) \in X$ для всех $X \in P(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Пусть (A, \leq) — ч.у.м. Подмножество $B \subseteq A$ называется *цепью*, если любые два элемента из B сравнимы, т. е. $x \leq y$ или $y \leq x$ для любых $x, y \in B$.

Элемент $x \in A$ называется *верхней гранью* подмножества $B \subseteq A$, если $y \leq x$ для всех $y \in B$, и *нижней гранью*, если $x \leq y$ для всех $y \in B$. Если в множестве всех верхних граней B есть наименьший элемент, то он называется *супремумом* B и обозначается $\sup(B)$. Наибольший элемент множества всех нижних граней называется *инфимумом* B и обозначается $\inf(B)$.

Лемма Цорна (принцип максимума). Если в ч.у.м. у каждой цепи есть верхняя грань, то в этом ч.у.м. есть максимальный элемент.

Говорим, что множество можно *вполне упорядочить*, если на нём существует линейный фундированный порядок, т. е. порядок, при котором оно станет вполне упорядоченным.

Теорема Цермело. Любое множество можно вполне упорядочить.

Ниже будет показано, что аксиома выбора, лемма Цорна и теорема Цермело в некотором смысле равносильны.

16. Парадокс Рассела, аксиоматика ZFC.

Парадокс (Парадокс Рассела). Рассмотрим совокупность: $M_R = \{A \mid A - \text{множество и } A \notin A\}$.

Предположим, что само M_R является множеством. Возможны два варианта:

- (a) $M_R \notin M_R$. Тогда $A - M_R$ подходит под определение, и $M_R \notin M_R$. Противоречие.
- (b) $M_R \in M_R$. Вновь полагая, $A = M_R$, получаем, что по определению $M_R \notin M_R$. Противоречие.

Это рассуждение показывает, что совокупность M_R нельзя считать множеством.

Аксиоматика ZFC.

Можно с собой на листочке!!!

17. Равномощные множества, замечание о равномощности.

Обозначение (мощность множества). Мощность множества A обозначается $|A|$.

Определение (равномощные множества). Говорим, что множества A и B равномощные, если существует биекция $f : A \xrightarrow[\text{на}]{} B$. Обозначим это символической записью $|A| = |B|$.

Замечание (о равномощности). Равномощность обладает свойствами отношения эквивалентности - для любых множеств A, B, C верно:

- (a) $|A| = |A|$;
- (b) $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$;
- (c) $|A| = |B|$ и $|B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$;

Доказательство. Следует из леммы о свойствах биекций. □

18. Лемма о порядке на мощностях.

Лемма (Лемма о порядке на мощностях). Для всяких непустых множеств A и B следующие условия эквивалентны:

- (a) $|A| \leq |B|$
- (b) Существует функция $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$
- (c) A равномочно некоторому подмножеству B

Доказательство.

(a) $a \Rightarrow c$

Пусть $|A| \leq |B|$.

Тогда существует $f : A \xrightarrow{\text{на}^{1-1}} B$.

Тогда $\text{ran}(f) \subseteq B$ и $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \text{ran}(f)$.

(b) $c \Rightarrow b$

Пусть $h : B_1 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A$, где $B_1 \subseteq B$.

Выберем произвольное $a_0 \in A$ и построим $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$ так:

$$g(y) = \begin{cases} h(y), & \text{если } y \in B_1 \\ a_0, & \text{если } y \in B \setminus B_1 \end{cases}$$

(c) $b \Rightarrow a$

Пусть $g : B \xrightarrow[\text{на}]{} A$.

Построим $f : B \rightarrow A$.

Рассмотрим $x \in A$

Множество $\{y \in B \mid g(y) = x\}$ непусто.

Выберем в качестве $f(x)$ некоторый элемент из этого множества. Проверим, что f инъективна. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$

Тогда $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а по построению $g(f(x_i)) = x_i$ при $i = 1, 2$.

□

19. Теорема Кантора-Бернштейна.

Теорема Кантора – Бернштейна. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

По условию существуют $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} A$. Тогда $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} A$. Построим последовательность $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ так: $A_0 = A$, $A_1 = \text{ран}(g)$ и $A_{n+2} = g \circ f[A_n]$ при $n \in \mathbb{N}$.

Проверим, что $A_n \supseteq A_{n+1}$ индукцией по n . При $n = 0, 1$ это очевидно. Если $n \geq 2$, то уже доказано, что $A_{n-2} \supseteq A_{n-1}$, отсюда $g \circ f[A_{n-2}] \supseteq g \circ f[A_{n-1}]$.

Положим $M_n = A_n \setminus A_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Лемма 1. Множества D, M_0, M_1, \dots попарно не пересекаются, а их объединение равно A .

▷ Допустим, что $D \cap M_n \neq \emptyset$, и $x \in D \cap M_n$. Тогда $x \in A_{n+1}$ и $x \in A_n \setminus A_{n+1}$, $\uparrow\downarrow$.

Допустим, что $M_n \cap M_k \neq \emptyset$ при $n < k$, и $x \in M_n \cap M_k$. Тогда $x \in A_n \setminus A_{n+1}$ и $x \in A_k$, где $A_k \subseteq A_{n+1}$, $\uparrow\downarrow$.

Тем самым эти множества попарно не пересекаются. Рассмотрим $x \in A$ и покажем, что он попадёт в одно из них. Предположим, что $x \notin D$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ т. ч. $x \notin A_n$. Найдём наименьшее n с таким свойством. Тогда $n \neq 0$ и $x \in A_{n-1} \setminus A_n$. \square

Лемма 2. $g \circ f[M_n] = M_{n+2}$.

▷ (\subseteq) : пусть $x \in M_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Тогда $g \circ f(x) \in A_{n+2} = g \circ f[A_n]$. Допустим, что $g \circ f(x) \in A_{n+3} = g \circ f[A_{n+1}]$. Тогда существует $x' \in A_{n+1}$ т. ч. $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Из инъективности $x = x'$ и $x \in A_{n+1}$, $\uparrow\downarrow$.

(\supseteq) : пусть $y \in A_{n+2} \setminus A_{n+3}$. Найдётся $x \in A_n$ т. ч. $y = g \circ f(x)$. Если $x \in A_{n+1}$, то $y \in A_{n+3}$, что невозможно. Получаем, что $x \in A_n \setminus A_{n+1} = M_n$. \square

Построим $h : A \rightarrow A$ так:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in D \text{ или } x \in M_{2t+1}, t \in \mathbb{N}; \\ g \circ f(x), & \text{если } x \in M_{2t}, t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $h : A \xrightarrow{1-1} A$ и $\text{ран}(h) = D \cup \bigcup_{n \geq 1} M_n$.

Последнее множество равно A_1 , следовательно, $h : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1$ и $|A| = |A_1|$. Поскольку $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1$, получаем, что $|A_1| = |B|$.

20. Теорема о сравнимости мощностей, теорема Кантора.

Теорема (о сравнимости мощностей). Если A, B — множества, то $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.

По теореме Цермело A и B можно вполне упорядочить: найдутся порядки \leq_A и \leq_B т. ч. (A, \leq_A) и (B, \leq_B) — в.у.м. По теореме о сравнимости в.у.м. одно из них изоморфно начальному сегменту второго. Предположим, что (A, \leq_A) изоморфно S — начальному сегменту (B, \leq_B) . Тогда $|A| = |S| \leq |B|$.

Теорема Кантора. $|A| < |P(A)|$ для любого множества A .

Покажем, что $|A| \leq |P(A)|$. Построим $f : A \rightarrow P(A)$ так: $f(x) = \{x\}$. Ясно, что f инъективна.

Допустим теперь, что $|A| = |P(A)|$. Тогда существует биекция $g : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} P(A)$. Положим $B = \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$. Поскольку $B \in P(A)$, найдётся $x_0 \in A$ т. ч. $g(x_0) = B$. Тогда либо $x_0 \in B$, либо $x_0 \notin B$. Если $x_0 \in B$, то $x_0 \in g(x_0)$ и $x_0 \notin B$. Если же $x_0 \notin B$, то $x_0 \notin g(x_0)$ и $x_0 \in B$. $\uparrow \downarrow$.

Заметим, что теорема Кантора тоже показывает, что множества всех множеств не существует: если M — множество всех множеств, то $P(M) \subseteq M$, и тем самым $|P(M)| \leq |M|$. Это рассуждение называется *парадоксом Кантора*.

Множество A называется *конечным множеством мощности* k , если $|A| = |\mathbb{N}_k|$, где $k \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}_k = \{x \in \mathbb{N} \mid x < k\}$. Множество *бесконечно*, если оно не является конечным. Множество A *счётно*, если $|A| = |\mathbb{N}|$, и *континуально*, если $|A| = |\mathbb{R}|$, где \mathbb{R} — множество вещественных чисел.

Мы не будем доказывать некоторые простые свойства конечных множеств, считая их очевидными: например то, что подмножество конечного множества является конечным. Они могут быть доказаны через свойства натуральных чисел и индукцию.

21. Конечные, бесконечные, счетные, континуальные множества, описание не более чем счетных множеств.

Определение (Конечное множество). Множество A называется *конечным множеством мощности* k , если $|A| = |\mathbb{N}_k|$, где $k \in \mathbb{N}$,

а $\mathbb{N}_k = \{x \in \mathbb{N} | x < k\}$

Определение (Бесконечное множество). Множество *бесконечно*, если оно не является конечным.

Определение (Счётное множество). Множество A *счётно*, если $|A| = |\mathbb{N}|$.

Определение (Континуальное множество). Множество A *континуально*, если $|A| = |\mathbb{R}|$.

Определение (Не более чем счётное множество). Множество A *не более чем счётно*, если $|A| \leq |\mathbb{N}|$

Следствие (Описание не более чем счётных множеств). Множество не более чем счётно тогда и только тогда, когда оно конечно или счётно.

Доказательство. \Leftarrow : счётное множество не более чем счётно. Если A конечно, то $|A| = |\mathbb{N}_k| \leq |\mathbb{N}|$.

\Rightarrow : Пусть A не более чем счётно. Предположим, что оно бесконечно. Тогда в A есть счётное подмножество B . Получаем, что $|\mathbb{N}| - |B| \leq |A| \leq |\mathbb{N}|$. По теореме Кантора-Бернштейна $|A| = |\mathbb{N}|$. \square

22. Лемма о сохранении мощностей, теорема о мощности объединения (без доказательства).

Лемма (Лемма о сохранении мощностей).

(a) Если $|A| = |A_1|$ и $|B| = |B_1|$, то $|A \times B| = |A_1 \times B_1|$

(b) Если при этом $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$

Доказательство.

(a) Пусть даны биекции

$$f : A \xrightarrow[\text{на}]{}^{1-1} A_1 \text{ и } g : B \xrightarrow[\text{на}]{}^{1-1} B_1.$$

Построим $h : A \times B \xrightarrow[\text{на}]{}^{1-1} A_1 \times B_1$ так: $h_1(< x; y >) = < f(x), g(y) >$. Легко проверить, что h_1 - нужная биекция.

(b) Построим $h_2 : A \cup B \xrightarrow[\text{на}]{}^{1-1} A_1 \cup B_1$ так: $h_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A \\ g(x), & \text{если } x \in B \end{cases}$

Условие $A \cap B = \emptyset$ гарантирует, что определение корректно.

Вновь нетрудно доказать, что h_2 - биекция. Проверим в качестве примера, что h_2 инъективна. Пусть $h_2(x) = h_2(y)$. Если $x, y \in A$, то получаем $f(x) = f(y)$ и $x = y$. Если $x, y \in B$, рассуждения аналогичны. Если же $x \in A, y \in B$ (или наоборот), то $h_2(x) \in A_1$ и $h_2(y) \in B_1$, что невозможно в силу $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

□

Лемма (о мощности объединения). *Если хотя бы одно из множеств A, B бесконечно, то $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$.*

23. Теорема о мощности квадрата бесконечного множества (доказательства для счетного и континуального), теорема о мощности произведения (без доказательства).

Теорема (о мощности квадрата бесконечного множества). *Если A - бесконечное множество, то $|A \times A| = |A|$*

Доказательство.

- Докажем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

Построим $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f(x, y) = 2^x + 3^y$$

$$g(x) = < x, 0 >$$

Заметим, что обе функции инъективны, а значит $\begin{cases} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}| \\ |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |\mathbb{N}| \end{cases}$

тогда по теореме *Кантора-Бернштейна* получаем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

- Докажем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

По аналогии с \mathbb{N} построим две инъекции:

$$(a) f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{1-1}} \mathbb{R}$$

Для построения данной функции докажем, равномощность \mathbb{R} и $(0, 1)$:

Для этого построим биекцию $h : (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{} \mathbb{R}$

$h(x) = ctg(x * \pi)$ - функция биекция из-за $E(ctgx) = \mathbb{R}$

Значит $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$

Докажем, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $(0, 1) \times (0, 1)$:

Для этого построим $w : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$w(x, y) = < h(x), h(y) >$

Значит $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |(0, 1) \times (0, 1)|$

Построим инъекцию $u : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow{\text{1-1}} (0, 1)$

$u(x, y) = 0, \frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} \dots$

Где $x = 0, a_1 a_2 \dots$, а $y = 0, b_1 b_2 \dots$

Т.к в формуле присутствует умножение на 10, то на каждое число из $\frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} \dots$ отводится по две цифры, т.е $\frac{10*4}{2} = 20$, а $\frac{10*9}{2} = 45$, также $\frac{10*0}{2} = 00$

u - инъекция, тогда $f(x, y) = h \circ u \circ w^{-1}(x, y)$

$$(b) g : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{1-1}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Построим $g(x) = < x, 0 >$

Т.к f и g - инъекции, значит значит $\begin{cases} |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}| \\ |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \geq |\mathbb{R}| \end{cases}$ тогда по теореме *Кантора-Бернштейна* получаем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

□

Теорема (о мощности произведения). *Если A, B - непустые множества и одно из них бесконечно, то:*

$$|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$$

24. Контигуум-гипотеза, теорема Гёделя-Коэна (без доказательства), обобщенная континуумгипотеза.

Гипотеза (Контигуум-гипотеза). Не существует множества A такого, что

$$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$$

Теорема (Теорема Гёделя-Коэна). *Если теория множеств ZFC непротиворечива, то континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках ZFC.*

Гипотеза (Обобщенная континуумгипотеза). Если множество B - бесконечно, то не существует множества A такого, что

$$|B| < |A| < |P(B)|$$

25. Ординалы, лемма об элементах ординала

Определение (Ординал). Ординалом называется транзитивное множество все элементы которого сравнимы относительно включения.

Определение (Транзитивное множество). Множество α называется транзитивным, если из $x \in \alpha$ и $y \in x$ следует, что $y \in \alpha$.

Лемма (Лемма об элементах ординала). *Если α - ординал и $\beta \in \alpha$, то β - ординал.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \beta$. Тогда $x, y \in \alpha$. Следовательно, x и y равны или сравнимы относительно \in . Докажем, что β транзитивно. Пусть $y \in x \in \beta$. Тогда $x \in \alpha$ и $y \in \alpha$. Возможны три случая:

- (a) $\beta \in y$ Тогда получаем, что $\beta \in y \in x \in \beta$ - противоречие.
- (b) $\beta = y$ Получаем, что $\beta \in x \in \beta$ - противоречие.
- (c) $y \in \beta$. Следовательно, β - ординал.

□

26. Лемма о порядке на ординалах, теорема о свойствах ординалов.

Лемма (о порядке на ординалах). Для любых ординалов α, β равносильно:

- (a) $\alpha \leq \beta$;
- (b) $\alpha \subseteq \beta$.

Доказательство. (a \Rightarrow b): если $\alpha = \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$. Если же $\alpha \in \beta$ и $x \in \alpha$, то $x \in \beta$

(b \Rightarrow a): если $\alpha = \beta$, то $\alpha \leq \beta$. Предположим, что $\alpha \subset \beta$. Тогда $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. По аксиоме регулярности $\exists \gamma \in \beta \setminus \alpha$ т. ч. $\gamma \cap (\beta \setminus \alpha) \neq \emptyset$. Покажем, что $\alpha = \gamma$.

Если $x \in \gamma$, то $x \in \beta$ и $x \notin \beta \setminus \alpha$, следовательно, $x \in \alpha$.

Если $x \in \alpha$, то $x \in \beta$ и возможны три случая:

- (a) $\gamma \in x$. Тогда $\gamma \in \alpha$, противоречие.
- (b) $\gamma = x$. Вновь $\gamma \in \alpha$, противоречие.
- (c) $x \in \gamma$.

Получаем, что $\alpha \in \beta$ и $\alpha \leq \beta$. □

Теорема (о свойствах ординалов). Класс ординалов с порядком \leq обладает свойствами в.у.м. - для любых ординалов α, β, γ верно:

- (a) $\alpha \leq \alpha$;
- (b) $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$;
- (c) $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$;
- (d) $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$;
- (e) в любом непустом множестве ординалов есть минимальный элемент.

Доказательство. (a) очевидно.

- (b) если $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \subseteq \alpha$, то $\alpha = \beta$.
- (c) если $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \subseteq \gamma$, то $\alpha \subseteq \gamma$.
- (d) пусть $\delta = \alpha \cap \beta$. Легко проверить, что δ является ординалом.
По лемме о порядке на ординалах $\delta \leq \alpha$ и $\delta \leq \beta$. Если $\delta = \alpha$ или $\delta = \beta$, утверждение доказано. Допустим, что $\delta \neq \alpha, \beta$. Тогда $\delta \in \alpha, \delta \in \beta$ и $\delta \in \alpha \cap \beta = \delta$, противоречие.
- (e) пусть S - непустое множество ординалов. По аксиоме регулярности $\exists \alpha \in S$, т.ч. $\alpha \cap S = \emptyset$. Если $\beta < \alpha$, то $\beta \in \alpha$ и $\beta \notin S$. Ясно, что α - минимальный элемент в S .

□

27. Предложение о супремуме множества ординалов (без доказательства), теорема о связи в.у.м. и ординалов (без доказательства), предложение о принципе трансфинитной индукции (без доказательства).

Предложение (о супремуме множества ординалов). Пусть A - некоторое множество ординалов. Тогда $\cup A$ - ординал, являющийся супремумом множества A .

Теорема (о связи в.у.м. и ординалов). Для любого в.у.м. существует единственный изоморфный ему ординал.

Предложение (о трансфинитной индукции). Пусть $\Phi(x)$ - некоторое условие. Пусть для любого ординала α из того, что $\Phi(\beta)$ верно для всех $\beta < \alpha$, следует, что верно $\Phi(\alpha)$. Тогда $\Phi(\alpha)$ верно для всех ординалов α .

28. Сумма и произведение ординалов, кардинал, мощность множества.

Предложение (принцип трансфинитной рекурсии). Пусть существует условие, которое для каждого ординала α однозначно задаёт некоторое множество f_α в предположении, что при $\beta < \alpha$

множества f_β уже определены. Тогда каждому ординалу α действительно можно сопоставить множество f_α так, чтобы указанная связь между f_α и f_β , $\beta < \alpha$ выполнялась. При этом f_α определено однозначно.

Пример. На классе ординалов можно задать операции $+$ и \cdot так, что для любых ординалов α, β будет верно:

- (a) $\alpha + 0 = \alpha$ и $\alpha \cdot 0 = 0$;
- (b) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ и $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$;
- (c) $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \beta | \beta < \lambda\}$ и $\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \beta | \beta < \lambda\}$, если λ - предельный ординал.

Доказательство. Зафиксируем γ и определим $\gamma + \alpha$ трансфинитной рекурсией по α . Предположим, что при $\beta < \alpha$ ординал $\gamma + \beta$ уже определён. Определим $\gamma + \alpha$, просто повторив формулировку для трёх случаев:

- (a) $\alpha = 0$, тогда $\gamma + \alpha = \gamma$;
- (b) $\alpha = \beta + 1$, тогда $\gamma + \alpha = (\gamma + \beta) + 1$;
- (c) α - предельный, тогда $\gamma + \alpha = \sup\{\gamma + \beta | \beta < \alpha\}$.

Произведение $\gamma \cdot \alpha$ определяется аналогично. \square

Определение (Кардинал). Ординал μ называется *кардиналом*, если он не равномощен никакому строго меньшему ординалу.

Определение (Мощность множества). *Мощность* множества A - это единственный кардинал, равномощный A , т.е. $|\mu_A| = |A|$.

29. Алфавит ИВ, формула ИВ, подформула, представление формул ИВ.

Алфавит ИВ состоит из трёх частей:

- (а) Пророзициональные символы (Заглавные буквы латинского алфавита, возможно, с индексами);

(b) Логические связки:

- \neg - отрицание
- \wedge - конъюнкция
- \vee - дизъюнкция
- \rightarrow - импликация

(c) Вспомогательные символы (запятая „,”);

Формула исчисления высказываний:

- (a) Пропозициональная переменная (Она же - атомарная формула);
- (b) Если A и B - формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ - формулы.
- (c) Других формул нет.

Определение (Подформула формулы A). Подформула формулы A - любое подслово слова A , которое само является формулой.

Пусть $\Delta(n)$ - некоторое высказывание, которое для любого n принимает значение истина или ложь.

Предложение (о представлении формул исчисления высказываний). Всякая неатомарная формула исчисления высказываний единственным образом представима в одном из следующих видов:

- $\neg \Phi$;
- $(\Phi \wedge \Psi)$;
- $(\Phi \vee \Psi)$;
- $(\Phi \Rightarrow \Psi)$

Для некоторых Φ и Ψ .

30. Принцип математической индукции и возвратной индукции.

Определение (Принцип математической индукции). Если $\Delta(0)$ истинно и для всех n из истинности $\Delta(n)$ следует истинность $\Delta(n + 1)$, то $\Delta(n)$ истинно для всех n .

Определение (Возвратная индукция). Пусть для каждого n из того, что $\Delta(k)$ истинно при любом $k < n$, следует, что истинно $\Delta(n)$. Тогда $\Delta(n)$ истинно для всех n .

Доказательство. Оба принципа индукции легко вытекают из следующего факта: в любом непустом множестве натуральных числе есть минимальный элемент. Покажем, как отсюда выводится возвратная индукция.

Допустим, что $\Delta(n)$ ложно при некотором n . Рассмотрим множество $A = \{n | \Delta(n) \text{ ложно}\}$. Оно не пусто, следовательно, в нём есть минимальный элемент n_0 . Тогда $\Delta(n_0)$ ложно, а если $n < n_0$, то $n \notin A$ и $\Delta(n)$ истинно. Получаем, что $\Delta(n_0)$ тоже истинно, противоречие. \square

31. Алфавит ИС, секвенция, аксиома, правило вывода, дерево вывода, доказуемость, пример вывода.

1.3. Исчисление секвенций (ИС)

Алфавит ИС получается из алфавита ИВ добавлением символов \vdash («выводится») и запятой. *Секвенция* — слово одного из следующих видов:

$$\begin{aligned}\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi & \quad (\text{«из } \Phi_1, \dots, \Phi_n \text{ выводится } \Psi\text{»}), \\ \Phi_1, \dots, \Phi_n & \vdash \quad (\text{«набор } \Phi_1, \dots, \Phi_n \text{ противоречив»}), \\ \vdash \Psi & \quad (\text{«}\Psi\text{ выводима»}),\end{aligned}$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ — формулы, $n \geq 1$. При этом Φ_1, \dots, Φ_n называются *посылками* секвенции, а Ψ — её *заключением*.

Исчисление секвенций ИС задаётся аксиомами и правилами вывода. В приведённом ниже списке правила Φ, Ψ, Δ обозначают некоторые формулы, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ — конечные наборы формул (может быть, пустые).

Аксиомы ИС: все секвенции вида $\Phi \vdash \Phi$

Правила вывода ИС:

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)} \text{ (введение \&),}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}{\Gamma \vdash \Phi} \text{ (удаление \&),} \quad \frac{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi} \text{ (удаление \&),}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)} \text{ (введение \vee),} \quad \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)} \text{ (введение \vee),}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi); \quad \Gamma, \Phi \vdash \Delta; \quad \Gamma, \Psi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ (удаление \vee),}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)} \text{ (введение } \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi} \text{ (удаление } \rightarrow),$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg \Phi} \text{ (введение } \neg), \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi} \text{ (добавление заключения),}$$

$$\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi} \text{ (удален. } \neg), \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash} \text{ (сведение к противоречию),}$$

$$\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (перестановка),} \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi} \text{ (добавление посылки).}$$

Определим теперь понятие *дерева вывода секвенции* в ИС:

1) аксиома является деревом вывода этой аксиомы;

2) если $\frac{S_1; \dots; S_k}{S}$ — правило вывода ИС, $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ — деревья выводов секвенций S_1, \dots, S_k соответственно, то $\frac{\mathcal{D}_1; \dots; \mathcal{D}_k}{S}$ — дерево вывода секвенции S .

Секвенция S доказуема в ИС, если существует дерево вывода этой секвенции.

Пример. Секвенции $\Phi \vdash \neg \neg \Phi$ и $\neg \neg \Phi \vdash \Phi$ доказуемы в ИС.

Построим два дерева вывода:			
$\Phi \vdash \Phi$	$\frac{\neg \Phi \vdash \neg \Phi}{\neg \Phi, \Phi \vdash \neg \Phi}$	$\frac{\neg \Phi \vdash \neg \Phi}{\neg \Phi, \neg \neg \Phi \vdash \neg \Phi}$	$\frac{\neg \neg \Phi \vdash \neg \neg \Phi}{\neg \neg \Phi, \neg \Phi \vdash \neg \neg \Phi}$
$\Phi, \neg \Phi \vdash \Phi;$	$\Phi, \neg \Phi \vdash \neg \Phi$	$\neg \neg \Phi, \neg \Phi \vdash \neg \Phi;$	$\neg \neg \Phi, \neg \Phi \vdash \neg \neg \Phi$
$\frac{\Phi, \neg \Phi \vdash}{\Phi \vdash \neg \neg \Phi}$	$\frac{\neg \neg \Phi, \neg \Phi \vdash}{\neg \neg \Phi \vdash \Phi}$		

32. Семантика ИВ: означивание, значение формулы при означивании, выполнимые, опровергимые, тождественно истинные, тождественно ложные формулы, примеры.

Логические связки можно рассматривать как операции на логических величинах **и** (“истина”) и **л** (“ложь”), которые определяются так:

P	Q	$(P \& Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \rightarrow Q)$
и	и	и	и	и
и	л	л	и	л
л	и	л	и	и
л	л	л	л	и

P	$\neg P$
и	л
л	и

Пусть M — некоторое множество пропозициональных переменных. Назовём *означиванием пропозициональных переменных* из M соответствие γ , которое каждой переменной P из M сопоставляет значение $\gamma(P)$ из множества **{и, л}**.

Если Φ — формула и γ — означивание, при котором каждая переменная из Φ получает некоторое значение, то *значение формулы* Φ при означивании γ , $\Phi[\gamma]$ может быть определено индукцией по длине формулы:

- 1) если Φ — переменная P , то $\Phi[\gamma] = \gamma(P)$;
- 2) если $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2)$, где $\circ \in \{\&, \vee, \rightarrow\}$, то $\Phi[\gamma] = \Phi_1[\gamma] \circ \Phi_2[\gamma]$ (см. таблицу выше);
- 3) если $\Phi = \neg\Phi_1$, то $\Phi[\gamma] = \neg\Phi_1[\gamma]$.

Замечание. Значение формулы Φ при означивании γ зависит от значений только тех переменных, которые входят в Φ .

Ясно, что, если не все переменные формулы Φ получают значения при означивании γ , говорить о $\Phi[\gamma]$, вообще говоря, бессмысленно. Договоримся, что всякий раз, когда речь идёт о значении формулы при означивании γ , неявно подразумевается условие, что все её переменные обязательно получают какие-то значения.

Формула называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если она принимает значение **и** (**л**) при любом означивании переменных.

Пусть фиксировано некоторое означивание. Секвенция вида $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ *истинна* при этом означивании, если Ψ истинна или хотя бы одна из Φ_i ложна. Секвенция вида $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash$ *истинна*, если хотя бы одна из Φ_i ложна. Секвенция $\vdash \Psi$ *истинна*, если формула Ψ истинна.

Секвенция называется *тождественно истинной*, если она истинна при любом означивании переменных.

Теорема (о корректности ИС). Любая доказуемая в ИС секвенция тождественно истинна.

Пусть S — доказуемая секвенция, \mathcal{D} — её дерево вывода. Индукцией по числу секвенций в \mathcal{D} докажем, что S тождественно истинна.

Предположим, что в \mathcal{D} одна секвенция. Тогда она совпадает с S и является аксиомой вида $\Phi \vdash \Phi$. Ясно, что она тождественно истинна.

Предположим, что в \mathcal{D} n секвенций, $n > 1$, и для меньшего числа секвенций утверждение уже доказано. Дерево \mathcal{D} имеет вид $\frac{\mathcal{D}_1; \dots; \mathcal{D}_k}{S}$, где \mathcal{D}_i — деревья вывода секвенций S_i , а $\frac{S_1; \dots; S_k}{S}$ — правило вывода. По предположению индукции все S_i , $i \leq k$, тождественно истинны. Чтобы доказать, что S тождественно истинна, нужно перебрать все возможные правила вывода.

Рассмотрим случай, когда последнее правило в \mathcal{D} имеет вид $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi}$. Рассмотрим произвольное означивание и

покажем, что секвенция $\Gamma \vdash \Psi$ истинна при этом означивании. Если одна из формул в Γ ложна, секвенция истинна. Предположим, что все формулы в Γ истинны. Тогда истинны формулы Φ и $(\Phi \rightarrow \Psi)$. Ясно, что Ψ тоже истинна.

Остальные правила разбираются аналогично.

33. Тождественно истинные секвенции, теорема о корректности ИС.

Определение (Тождественно истинные секвенции). Секвенция называется тождественно истинной, если она истинна при любом означивании входящих в неё переменных.

Теорема (о корректности ИС). *Любая доказуемая в ИС секвенция тождественно истинна.*

Доказательство. Пусть S — доказуемая секвенция, D — её дерево вывода. Индукцией по числу секвенций в D докажем, что S

тождественно истинна.

Предположим, что в D одна секвенция. Тогда она совпадает с S и является аксиомой вида $\Phi \vdash \Phi$. Ясно, что она тождественно истинна.

Предположим, что в D n секвенций, $n > 1$, и для меньшего числа секвенций утверждение уже доказано. Дерево D имеет вид $\frac{D_1; \dots; D_k}{S}$, где D_i - деревья вывода секвенций S_i , а $\frac{S_1; \dots; S_k}{S}$ - правило вывода. По предположению индукции все S_i , $i \leq k$, тождественно истинны. Чтобы доказать, что S тождественно истинна, нужно перебрать все возможные правила вывода.

Рассмотрим случай, когда последнее правило в D имеет вид $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi}$. Рассмотрим произвольное означивание и покажем, что секвенция $\Gamma \vdash \Psi$ истинна при этом означивании. Если одна из формул в Γ ложна, секвенция истинна. Предположим, все формулы в Γ истинны. Тогда истинны формулы Φ и $(\Phi \rightarrow \Psi)$. Ясно, что Ψ тоже истинна.

Остальные правила разбираются аналогично. \square

34. Допустимые правила вывода, примеры.

Предложение (о допустимых в ИС правилах). Следующие правила допустимы в ИС:

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Psi} \text{ (сечение), } \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Delta; \Gamma, \Psi \vdash \Delta}{\Gamma, (\Phi \vee \Psi) \vdash \Delta} \text{ (разбор случаев),}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi} \text{ (удаление } \rightarrow\text{), } \frac{\Gamma, \Phi, \Psi \vdash \Delta}{\Gamma, (\Phi \& \Psi) \vdash \Delta} \text{ (соединение посылок),}$$

$$\frac{\Gamma, (\Phi \& \Psi) \vdash \Delta}{\Gamma, \Phi, \Psi \vdash \Delta} \text{ (разделение посылок), } \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \neg \Psi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg \Psi \vdash \neg \Phi} \text{ (контрапозиция), } \frac{\Gamma, \Phi \vdash \neg \Psi}{\Gamma, \Psi \vdash \neg \Phi} \text{ и } \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg \Psi \vdash \Phi}$$

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi}{\Delta_1, \dots, \Delta_m \vdash \Psi} \text{ и } \frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Delta}{\Delta_1, \dots, \Delta_m \vdash \Delta} \text{ (структурные), где } \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \subseteq \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}.$$

Докажем допустимость правила $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\Psi \vdash \neg\Phi}$, построив следующее дерево:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \Phi, \neg\Psi \vdash \Psi} \quad \frac{\neg\Psi \vdash \neg\Psi}{\vdots}}{\Gamma, \neg\Psi, \Phi \vdash \Psi; \quad \frac{\Gamma, \neg\Psi, \Phi \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \neg\Psi, \Phi \vdash}}{\Gamma, \neg\Psi \vdash \neg\Phi}.$$

Пример. Доказуема секвенция $\vdash \Phi \vee \neg\Phi$.

Построим допустимое дерево вывода, используя новые правила:

$$\frac{\frac{\frac{\neg\Phi \vdash \neg\Phi}{\neg\Phi \vdash \Phi \vee \neg\Phi} \quad \frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \Phi \vee \neg\Phi}}{\neg(\Phi \vee \neg\Phi) \vdash \Phi; \quad \frac{\neg(\Phi \vee \neg\Phi) \vdash \neg\Phi}{\neg(\Phi \vee \neg\Phi) \vdash}}{\neg(\Phi \vee \neg\Phi) \vdash}}{\vdash \Phi \vee \neg\Phi}.$$

35. Лемма об основных эквивалентностях, теорема о замене для ИВ.

Лемма (об основных эквивалентностях). Для любых формул Φ, Ψ, Φ', Ψ' и Δ верно:

- (a) $\Phi \equiv \Phi$;
- (b) $\Phi \equiv \Psi \Rightarrow \Psi \equiv \Phi$;
- (c) $\Phi \equiv \Psi, \Psi \equiv \Delta \Rightarrow \Phi \equiv \Delta$;
- (d) $\Phi \equiv \Phi' \Rightarrow \neg\Phi \equiv \neg\Phi'$;
- (e) $\Phi \equiv \Phi', \Psi \equiv \Psi' \Rightarrow (\Phi' \circ \Psi) \equiv (\Phi' \circ \Psi')$, где $\circ \in \{ \&, \vee, \rightarrow \}$.

Доказательство. Пункты a), b) очевидны; c): предположим, что доказуемы секвенции $\Phi \vdash \Psi, \Psi \vdash \Phi, \Psi \vdash \Delta, \Delta \vdash \Psi$. Покажем доказуемость секвенции $\Phi \vdash \Delta$, построив допустимое дерево:

$$\frac{\Phi \vdash \Delta}{\Phi \vdash \Psi \quad \frac{\Phi, \Psi \vdash \Delta}{\Phi \vdash \Delta}}$$

Дерево для $\Delta \vdash \Phi$ строится симметрично. Далее будем указывать только деревья.

d) :

$$\frac{\Phi' \vdash \Phi}{\neg \Phi \vdash \neg \Phi'}$$

e) : построим три дерева для случаев $\circ = \rightarrow$, $\circ = \&$ и $\circ = \vee$. Далее мы иногда будем пропускать структурные правила, соединяя несколько структурных правил с одним основным или допустимым в один переход дерева.

$$\frac{\Phi' \vdash \Phi; (\Phi \rightarrow \Psi) \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)}{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi' \vdash \Psi} \quad \frac{\Psi \vdash \Psi'}{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi', \Psi \vdash \Psi'} \\ \frac{(\Phi \rightarrow \Psi), \Phi' \vdash \Psi'}{(\Phi \rightarrow \Psi) \vdash (\Phi' \rightarrow \Psi')}$$

$$\frac{\Phi \vdash \Phi'}{\Phi, \Psi \vdash \Phi'} \quad \frac{\Psi \vdash \Psi'}{\Phi, \Psi \vdash \Psi'} \quad \frac{\Phi \vdash \Phi'}{\Phi \vdash (\Phi' \vee \Psi')} \quad \frac{\Psi \vdash \Psi'}{\Psi \vdash (\Phi' \vee \Psi')} \\ \frac{(\Phi \& \Psi) \vdash \Phi'; (\Phi \& \Psi) \vdash \Psi'}{(\Phi \& \Psi) \vdash (\Phi' \& \Psi')} \quad \frac{(\Phi \vee \Psi) \vdash (\Phi' \vee \Psi')}{(\Phi \vee \Psi) \vdash (\Phi' \vee \Psi')}$$

□

Теорема (о замене для ИВ). *Пусть Ψ - подформула формулы Φ . Обозначим через Φ' результат замены Ψ на Ψ' . Если $\Psi \equiv \Psi'$, то и $\Phi \equiv \Phi'$.*

Доказательство. Индукцией по $|\Phi|$ докажем, что Φ' - формула, эквивалентная Φ . Если $\Phi = \Psi$, то $\Phi' = \Psi'$ и $\Phi \equiv \Phi'$. Поэтому будем рассматривать только случай $\Phi \neq \Psi$.

Пусть $|\Phi| = 1$. Тогда $\Phi = \Psi$, и этот случай уже рассмотрен.

Пусть $|\Phi| > 1$, и для формул меньшей длины утверждение уже доказано. Если $\Phi = \neg\Phi_1$, то Ψ - подформула Φ_1 , и по предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi'_1$. Тогда $\Phi = \neg\Phi_1 \equiv \neg\Phi'_1 = \Phi'$

Если $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2)$, где $\circ \in \{\&, \vee, \rightarrow\}$, то Ψ - подформула Φ_1 или Φ_2 . Предположим, что Ψ - подформула Φ_1 . По предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi'_1$, отсюда $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \equiv (\Phi'_1 \circ \Phi_2) = \Phi'$. \square

36. Д.н.ф., к.н.ф., теорема о приведении к д.н.ф. и к.н.ф.

Элементарная конъюнкция — формула вида $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_n)$, $n \geq 1$, где каждая Φ_i — переменная или отрицание переменной.

Дизъюнктивная нормальная форма (д.н.ф.) — формула вида $(\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_k)$, $k \geq 1$, где каждая Ψ_i — элементарная конъюнкция.

Элементарная дизъюнкция — формула вида $(\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_n)$, $n \geq 1$, где каждая Φ_i — переменная или отрицание переменной.

Конъюнктивная нормальная форма (к.н.ф.) — формула вида $(\Psi_1 \& \dots \& \Psi_k)$, $k \geq 1$, где каждая Ψ_i — элементарная дизъюнкция.

Формулы Φ_i из этих определений назовём компонентами соответствующей элементарной конъюнкции или дизъюнкции.

Теорема (о приведении к д.н.ф. и к.н.ф.). Любая формула синтаксически эквивалентна некоторой к.н.ф. и некоторой д.н.ф., содержащим тот же набор переменных, что и она сама.

Чтобы доказать теорему, укажем алгоритм приведения формулы к д.н.ф. и к.н.ф., состоящий из трёх шагов. На первом удалим из формул \rightarrow , на втором внесём \neg под скобки так, чтобы они стояли только перед переменными, и на третьем получим д.н.ф. (или к.н.ф.).

Сначала мы забудем про условие на переменные и покажем, как привести формулу Φ к д.н.ф. Затем заметим, что набор переменных не меняется на всех шагах алгоритма. Небольшая модификация алгоритма даст нам приведение к к.н.ф.

Лемма 1. Любая формула Φ синтаксически эквивалентна формуле Φ' , не содержащей \rightarrow .

▷ Для доказательства нужно просто заменить все подформулы вида $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ на $\neg\Phi_1 \vee \Phi_2$, пользуясь соответствующей эквивалентностью. Формально это рассуждение требует индукции по $|\Phi|$. Если $|\Phi| = 1$, то Φ — переменная, и $\Phi' = \Phi$.

Предположим, что $|\Phi| > 1$, и для формул меньшей длины утверждение доказано. Если $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2)$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, то по предположению индукции $\Phi_i \equiv \Phi'_i$, где Φ'_i не содержат \rightarrow при $i = 1, 2$. Тогда $\Phi \equiv (\Phi'_1 \circ \Phi'_2)$. Если $\Phi = (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$, то $\Phi \equiv \neg\Phi_1 \vee \Phi_2 \equiv \neg\Phi'_1 \vee \Phi'_2$ по теореме о замене. Рассуждения для случая $\Phi = \neg\Phi_1$ аналогичны. \square

Лемма 2. Любая формула Φ синтаксически эквивалентна формуле Φ' , не содержащей \rightarrow , в которой \neg стоят только перед переменными.

▷ В силу леммы 1 можно считать, что в Φ уже нет \rightarrow . Далее рассуждаем индукцией по $|\Phi|$. Если $|\Phi| = 1$, то Φ — переменная, и $\Phi' = \Phi$.

Предположим, что $|\Phi| > 1$, и для формул меньшей длины утверждение доказано. Если $\Phi = (\Phi_1 \circ \Phi_2)$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, то рассуждаем точно так же, как в лемме 1. Предположим,

что $\Phi = \neg\Psi$. Далее нужно рассмотреть варианты строения Ψ . Если Ψ — переменная P , то $\Phi = \neg P = \Phi'$. Если $\Psi = \neg\Psi_1$, то $\Phi = \neg\neg\Psi_1 \equiv \Psi_1$. По предположению индукции $\Psi_1 \equiv \Psi'_1$, где Ψ'_1 удовлетворяет условию леммы. Тогда $\Phi \equiv \Psi'_1$.

Рассмотрим случай $\Psi = \Psi_1 \& \Psi_2$. Тогда $\Phi = \neg(\Psi_1 \& \Psi_2) \equiv \neg\Psi_1 \vee \neg\Psi_2$. По предположению индукции существуют формулы Δ_1 и Δ_2 , удовлетворяющие условию леммы, т. ч. $\neg\Psi_i \equiv \Delta_i$ при $i = 1, 2$. Тогда $\Phi \equiv \Delta_1 \vee \Delta_2$.

Случай $\Psi = \Psi_1 \vee \Psi_2$ аналогичен. \square

Лемма 3. Любая формула Φ синтаксически эквивалентна некоторой д.н.ф. Φ' .

\triangleright В силу леммы 2 считаем, что в Φ нет \rightarrow , а все \neg стоят перед переменными. Вновь используем индукцию по $|\Phi|$. Если $|\Phi| = 1$, то Φ — переменная P , и $\Phi' = \Phi$.

Предположим, что $|\Phi| > 1$, и для формул меньшей длины утверждение доказано. Если $\Phi = \neg\Phi_1$, то Φ_1 — переменная P , и вновь $\Phi' = \Phi$.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$. Тогда $\Phi_t \equiv \Phi'_t$, где Φ'_t — д.н.ф., $t = 1, 2$. Пусть $\Phi'_1 = \Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n$ и $\Phi'_2 = \Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_k$, где Ψ_i, Δ_j — элементарные конъюнкции. Если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, то $\Phi \equiv (\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n) \vee (\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_k) \equiv (\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n \vee \Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_k)$ — это д.н.ф.

Если же $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, то $\Phi \equiv (\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n) \& (\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_k) \equiv \bigvee_{j=1}^k [(\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n) \& \Delta_j] \equiv \bigvee_{j=1}^k [\bigvee_{i=1}^n (\Psi_i \& \Delta_j)]$.

Поскольку $(\Psi_i \& \Delta_j)$ эквивалентны элементарным конъюнкциям, ясно, что вся формула эквивалентна д.н.ф. \square

Осталось заметить, что в формулировку каждой из этих лемм можно вставить указание на то, что набор переменных в Φ и Φ' совпадает, и доказательство останется верным.

Если мы хотим привести формулу Φ к к.н.ф., леммы 1 и 2 остаются теми же самыми, а в лемме 3 нужно просто поменять дизъюнкции на конъюнкции и наоборот. При этом случай $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$ становится простым, а $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ — сложным.

37. Предложение о тождественно истинных к.н.ф.

Предложение (о тождественно истинных к.н.ф.).

К.н.ф. Φ тождественно истинна тогда и только тогда, когда каждая её элементарная дизъюнкция содержит компоненты P и $\neg P$ для некоторой переменной P .

Пусть Φ — к.н.ф. и $\Phi = (\Psi_1 \& \dots \& \Psi_n)$, где Ψ_i — элементарные дизъюнкции. Если фиксировано означивание γ , то

$$\Phi[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \forall i \leq n \quad \Psi_i[\gamma] = \text{и}.$$

Это почти очевидно и формально может быть доказано индукцией по n . Если, в свою очередь, $\Psi_i = (\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_k)$, то

$$\Psi_i[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \exists j \leq k \quad \Delta_j[\gamma] = \text{и}.$$

Переход (\Leftarrow) очевиден: если $\Psi_i = (\dots \vee P \vee \dots \vee \neg P \vee \dots)$, то Ψ_i истинна при любом означивании. Получаем, что Φ тождественно истинна.

(\Rightarrow): если Φ тождественно истинна, то все Ψ_i , $i \leq n$, тоже тождественно истинны. Зафиксируем $i \leq n$ и покажем, что Ψ_i содержит P и $\neg P$. Допустим, что это не так. Пусть в Ψ_i входят переменные P_1, \dots, P_m . Зададим их означивание: если $j \leq m$ и P_j входит в Ψ_i без отрицания, положим $P_j = \text{л}$, а если входит с отрицанием, то $P_j = \text{и}$. Это можно сделать, так как мы предположили, что P_j не может входить одновременно с отрицанием и без него. Ясно, что при этом Ψ_i станет ложна, $\uparrow\downarrow$.

38. Теорема о полноте ИС.

Теорема (о полноте ИС). Секвенция доказуема в ИС тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.

Переход (\Rightarrow) был доказан в теореме о корректности ИС. Покажем, что любая тождественно истинная секвенция доказуема. Доказательство разбивается на несколько случаев.

Случай 1. Рассмотрим тождественно истинную секвенцию вида $\vdash \Psi$. Тогда формула Ψ тождественно истинна. По теореме о приведении к к.н.ф. существует к.н.ф. Ψ' т. ч. $\Psi \equiv \Psi'$.

Поскольку секвенция $\Psi \vdash \Psi'$ доказуема, она тождественно истинна по теореме о корректности. Получаем, что Ψ' тоже тождественно истинна.

Пусть $\Psi' = (\Psi_1 \& \dots \& \Psi_n)$, где Ψ_i — элементарные дизъюнкции. По только что доказанному каждая Ψ_i содержит P и $\neg P$. Используя коммутативность и ассоциативность \vee , найдём формулу Δ_i т. ч. $\Psi_i \equiv (P \vee \neg P) \vee \Delta_i$. Поскольку секвенция $\vdash P \vee \neg P$ была доказана ранее, допустимое дерево

$$\frac{\vdash P \vee \neg P}{\frac{\vdash (P \vee \neg P) \vee \Delta_i; \quad (P \vee \neg P) \vee \Delta_i \vdash \Psi_i}{\vdash \Psi_i}}$$

показывает, что секвенция $\vdash \Psi_i$ доказуема при $i \leq n$. Дерево

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash \Psi_1; \quad \vdash \Psi_2 \\ \vdash (\Psi_1 \& \Psi_2); \quad \vdash \Psi_3 \\ \vdash (\Psi_1 \& \Psi_2) \& \Psi_3 \\ \vdots & \vdash \Psi_n \\ \hline \vdash \Psi' \end{array}}{\vdash \Psi'}$$

даёт доказуемость $\vdash \Psi'$, а дерево

$$\frac{\vdash \Psi'; \quad \Psi' \vdash \Psi}{\vdash \Psi}$$

даёт доказуемость $\vdash \Psi$.

Случай 2. Рассмотрим тождественно истинную секвенцию вида $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$. Тогда формула $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_n) \rightarrow \Psi$ тождественно истинна, и секвенция $\vdash (\Phi_1 \& \dots \& \Phi_n) \rightarrow \Psi$ доказуема по случаю 1. Допустимое дерево

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash (\Phi_1 \& \dots \& \Phi_n) \rightarrow \Psi \\ \Phi_1 \& \dots \& \Phi_n \vdash \Psi \\ \vdots \\ \hline \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi \end{array}}{\vdash \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi}$$

завершает доказательство.

Случай 3. Рассмотрим теперь тождественно истинную секвенцию вида $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash$. Ясно, что секвенции $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash P$ и $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \neg P$ тоже тождественно истинны, следовательно, доказуемы. Строим допустимое дерево:

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash P; \quad \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \neg P}{\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash}.$$

Напомним, что запись $\Phi \equiv \Psi$ обозначает синтаксическую эквивалентность. Говорим, что Φ и Ψ *семантически эквивалентны* ($\Phi \sim \Psi$), если при любом означивании переменных значения Φ и Ψ совпадают.

Следствие. $\Phi \equiv \Psi$ тогда и только тогда, когда $\Phi \sim \Psi$.

(\Rightarrow): если секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$ доказуемы, то они тождественно истинны. Ясно, что если Φ при некотором означивании истинна, то истинна и Ψ , и наоборот.

(\Leftarrow): если $\Phi \sim \Psi$, то секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$ тождественно истинны, следовательно, доказуемы.

В силу этого далее будем говорить просто про *эквивалентные формулы*.

39. Совершенные нормальные формы, теорема о совершенных нормальных формах.

Совершенная д.н.ф. (с.д.н.ф.) — это такая д.н.ф., что:

- 1) любая входящая в неё переменная входит в каждую элементарную конъюнкцию ровно один раз;
- 2) любые две её элементарные конъюнкции *существенно различаются*, т. е. одна из них содержит компоненту P , а другая $\neg P$ для некоторой переменной P .

Совершенная к.н.ф. (с.к.н.ф.) определяется аналогично, с заменой \vee на $\&$ и наоборот — это такая к.н.ф., что:

- 1) любая входящая в неё переменная входит в каждую элементарную дизъюнкцию ровно один раз;
- 2) любые две элементарные дизъюнкции существенно различаются.

Теорема (о совершенных нормальных формах).

- а) Любая не тождественно ложная формула эквивалентна некоторой с.д.н.ф., содержащей тот же набор переменных, что и она сама.
- б) Любая не тождественно истинная формула эквивалентна некоторой с.к.н.ф., содержащей тот же набор переменных, что и она сама.
- с) Нормальная форма в а) и б) единственна с точностью до перестановки элементарных конъюнкций (дизъюнкций) и их компонент.

Будем работать с семантической эквивалентностью. а): пусть Φ — не тождественно ложная формула от переменных P_1, \dots, P_n . Рассмотрим множество всех значений переменных, при которых Φ истинна, т. е. множество $I =$

$$\{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \mid \alpha_i \in \{\text{и}, \text{л}\} \text{ и } \Phi = \text{и} \text{ при } P_1 = \alpha_1, \dots, P_n = \alpha_n\}.$$

По условию оно непусто. Обозначим через $P^{\text{и}}$ формулу P , а через $P^{\text{л}}$ — формулу $\neg P$. Если $\alpha \in \{\text{и}, \text{л}\}$ и γ — означивание, то ясно, что $P^\alpha[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \gamma(P) = \alpha$. Положим

$$\Psi = \bigvee_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I} (P_1^{\alpha_1} \& P_2^{\alpha_2} \& \dots \& P_n^{\alpha_n}).$$

Легко проверить, что Ψ — с.д.н.ф. Покажем, что $\Phi \sim \Psi$. Зададим означивание γ . Тогда $\Psi[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow$
 существует $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I$ т. ч. $(P_1^{\alpha_1} \& \dots \& P_n^{\alpha_n})[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow$
 существует $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I$ т. ч. $P_1^{\alpha_1}[\gamma] = \text{и}, \dots, P_n^{\alpha_n}[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow$
 существует $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I$ т. ч. $\gamma(P_1) = \alpha_1, \dots, \gamma(P_n) = \alpha_n \Leftrightarrow$
 $\Phi[\gamma] = \text{и}$.

Докажем теперь единственность. Пусть Ψ' — другая с.д.н.ф. от переменных P_1, \dots, P_n т. ч. $\Psi' \sim \Phi$. Легко понять, что с точностью до перестановки Ψ' имеет вид

$$\bigvee_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I'} (P_1^{\alpha_1} \& P_2^{\alpha_2} \& \dots \& P_n^{\alpha_n})$$

для некоторого множества I' . Пусть γ — произвольное означивание. Повторяя предыдущее рассуждение, получаем, что

$$\Psi'[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \langle \gamma(P_1), \dots, \gamma(P_n) \rangle \in I'.$$

Кроме того, $\Psi'[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \Phi[\gamma] = \text{и} \Leftrightarrow \langle \gamma(P_1), \dots, \gamma(P_n) \rangle \in I$. Поскольку значения $\gamma(P_i)$ могут быть выбраны любыми, получаем, что $I' = I$.

b): пусть Φ — не тождественно истинная формула от тех же переменных. Тогда $\neg\Phi$ не тождественно ложна и по уже доказанному

$$\neg\Phi \sim \bigvee_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I} (P_1^{\alpha_1} \& P_2^{\alpha_2} \& \dots \& P_n^{\alpha_n}).$$

Пользуясь эквивалентностями, легко получить, что

$$\Phi \sim \neg\neg\Phi \sim \bigwedge_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I} (P_1^{\bar{\alpha}_1} \vee P_2^{\bar{\alpha}_2} \vee \dots \vee P_n^{\bar{\alpha}_n}),$$

где $\bar{\text{и}} = \text{л}$ и $\bar{\text{л}} = \text{и}$. Это искомая с.к.н.ф.

Единственность: пусть Ψ' — другая с.к.н.ф. для Φ . С точностью до перестановки Ψ' имеет вид

$$\bigwedge_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I'} (P_1^{\bar{\alpha}_1} \vee P_2^{\bar{\alpha}_2} \vee \dots \vee P_n^{\bar{\alpha}_n}).$$

Тогда

$$\neg\Phi \sim \neg\Psi' \sim \bigvee_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in I'} (P_1^{\alpha_1} \& P_2^{\alpha_2} \& \dots \& P_n^{\alpha_n}).$$

По доказанному выше $I = I'$.

Замечание. Тождественно ложная формула не имеет эквивалентной ей с.д.н.ф., а тождественно истинная — с.к.н.ф.

С.д.н.ф. не может быть тождественно ложной: она содержит хотя бы одну элементарную конъюнкцию $(P_1^{\alpha_1} \& \dots \& P_n^{\alpha_n})$, где $\alpha_i \in \{\text{и}, \text{л}\}$, и при означивании $P_1 = \alpha_1, \dots, P_n = \alpha_n$ эта конъюнкция и вся с.д.н.ф. будут истинны. Аналогично можно показать, что с.к.н.ф. не может быть тождественно истинной.

40. Гильбертовское исчисление высказываний: аксиоматика, выводимость, примеры выводов.

Гильбертовское исчисление высказываний

Аксиоматика:

- 1) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$
- 2) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)))$
- 3) $((\phi \& \psi) \rightarrow \phi)$
- 4) $((\phi \& \psi) \rightarrow \psi)$
- 5.1) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \& \psi)))$

5.2) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \ \& \ \chi))))$

6) $(\phi \rightarrow (\phi \vee \psi))$

7) $(\psi \rightarrow (\phi \vee \psi))$

8) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \vee \chi) \rightarrow \psi)))$

9.1) $((\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\phi))$

9.2) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi))$

10) $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$

Правило modes ponens: $\frac{\phi, (\phi \rightarrow \psi)}{\psi}$

Определение (Вывод формулы в ГИВ). Выводом формулы ϕ в ГИВ называется последовательностью формул, каждой из которых является либо аксиомой, либо получена из предыдущего по правилу modes ponens.

Последнее из вывода есть вывод ϕ

Теорема. Выводом ϕ из Γ , называется последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо принадлежащая Γ , либо следует из двух предыдущих по правилу modes ponens.

Последняя формула в последовательности это ϕ

41. Теорема о дедукции.

Теорема (о дедукции). Если $\Gamma, A \triangleright B$, то $\Gamma \triangleright A \rightarrow B$

Доказательство. Пусть $B_1, \dots, B_n = B$ - вывод B из Γ, A

По индукции докажем, что $\forall i \Gamma \triangleright A \rightarrow B$

• $B_i \in \Gamma$:

1) $B_i \in \Gamma$ 2) $(B_i \rightarrow (A \rightarrow B_i))$ - Аксиома №1 3) $A \rightarrow B_i$ - mp
1,2

• B_i - следствие из B_j и $B_j \rightarrow B_i$ по mp:

По Индукционной гипотезе : $\Gamma \triangleright (A \rightarrow B_j)$, $\Gamma \triangleright (A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i))$

.

.

.

n) $(A \rightarrow B_j)$

m) $(A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i))$

m+1) $((A \rightarrow B_j) \rightarrow ((A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)) \rightarrow (A \rightarrow B_i)))$ - Аксиома №2

m+2) $(((A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)) \rightarrow (A \rightarrow B_i))$ - mp n,m+1

m+3) $(A \rightarrow B_i)$ - mp m, m+2

□

42. Связь гильбертовского и секвенциального исчисления. ?????