Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137,№19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
   Не существует явного определения множества.
   Пусть А некоторое мн-во, тогда существует 2 способа задания мн-ва

   (a) А = {1,2,3,4,5} - явное задание эл-тов мн-ва

   (b) Пусть $\Phi(x)$- некоторое условие, тогда
   А = $\{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множествами с помощью некоторого условия $\Phi(x)$

   Пусть А, В- некоторые множества

   Обозначение (Подмножетсво). А - подмножетсво В, если $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

   Обозначение (Собственное подмножетсво). А - собственное подмножетсво В, если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

   Обозначение (Пустое множество). $\emptyset$ - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

   Обозначение (Множество всех подмножетсв множества А). $P(A) = \{ \ C \mid C \subseteq A \ \}$

   Обозначение (Универсум). Универсум (условное множество все множеств) U

   Операции над множествами:

   - Объединение множеств:
     $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
   - Пересечение множеств:
     $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
   - Разность множеств:
     $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
   - Дополнение множества:
     $\neg A = \{ \ x \mid x \in \ U \wedge x \notin A\}$
   - Симметрическая разность множеств:
     $A \ \Delta \ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \ \cup \ B) \setminus (B \ \cup \ A)$

Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств
  $\bigcup S = \{\ x \mid \exists A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$
- Пересечение семейства множеств
  $\bigcap S = \{\ x \mid \forall A_i \in\ S\ : x\ \in\ A_i\ \}$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

   Определение (Упорядоченный набор (кортеж)). Упорядоченный набор (кортеж) длинны n определяется по индукции
   $<>= \emptyset$
   $< a >= a$
   $< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$
   ...
   $< a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n >=<< a_1, a_2, ..., a_{n-1}) >, a_n >$

   Определение (пара). Набор $< a, b >$ длинны 2 называют *парой*

   Теорема (Предложение о равенстве n-ок). *Если* $< a_1, ..., a_n >=< b_1, ..., b_n >$*, то* $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$

   Доказательство. ... □

   Определение (Декартово произведение). Пусть даны множества $A_1, ..., A_n$, тогда их декартовым произведением называют
   $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, ..., a_n > \mid \forall i \in \{1, ..., n\}\ a_i \in A_i\}$

   Определение (Декартова степень). В случае, если $A_1 = A_2 = ... = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

   Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество
   $C \subseteq A \times B$

   Определение. Обратным бинарным отношением называется
   $R^{-1} = \{< y; x > \mid\ < x; y >\in R\}$

   Определение. Произведением бинарных отношений называется
   $R_1 \times R_2 = \{< x; z > | \exists z |\ < x; y >\in R_1 \wedge < y; z >\in R_2\}$

   Лемма (Лемма о бинарных отношениях). *Для любых бинарных отношений* R_1, R_2, R_3*:*

   (a) $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$

(b) $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$

Доказательство. (a) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.
Пусть $< x; t >\in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; t >\in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $< y; z >\in R_2$ и $< z; t >\in R_3$. Получаем, что $< x; z >\in R_1 \cdot R_2$ и $< x; t >\in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(b) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.
Пусть $< z; x >\in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $< x; y >\in R_1$ и $< y; z >\in R_2$. Тогда $< y; x >\in R_1^{-1}$ и $< z; y >\in R_2^{-1}$. Получаем, что $< z; x >\in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

$\square$