

Коллоквиум №1 (20.11.2019)

GROUPS №19137, №19144

2019

1. Множество: способы задания, операции над множествами
Не существует явного определения множества.
Пусть A некоторое мн-во, тогда существует 2 способа задания мн-ва

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ - явное задание эл-тов мн-ва

(b) Пусть $\Phi(x)$ - некоторое условие, тогда
 $A = \{x \mid \Phi(x)\}$ - Задание множества с помощью некоторого условия $\Phi(x)$

Пусть A, B - некоторые множества

Обозначение (Подмножество). A - подмножество B , если $A \subseteq B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$

Обозначение (Собственное подмножество). A - собственное подмножество B , если $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$

Обозначение (Пустое множество). \emptyset - множество, не содержащее эл-тов ("Пустое множество")

Обозначение (Множество всех подмножеств множества A). $P(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$

Обозначение (Универсум). Универсум (условное множество все множеств) U

Операции над множествами:

- Объединение множеств:
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Пересечение множеств:
 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Разность множеств:
 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Дополнение множества:
 $\neg A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$
- Симметрическая разность множеств:
 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$

Пусть S - семейство множеств:

- Объединение семейства множеств

$$\bigcup S = \{ x \mid \exists A_i \in S : x \in A_i \}$$

- Пересечение семейства множеств

$$\bigcap S = \{ x \mid \forall A_i \in S : x \in A_i \}$$

2. Упорядоченный набор (кортеж), предложение о равенстве n-ок, декартово произведение, декартова степень.

Определение (Упорядоченный набор (кортеж)). Упорядоченный набор (кортеж) длины n определяется по индукции

$$\langle \rangle = \emptyset$$

$$\langle a \rangle = a$$

$$\langle a, b \rangle = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

...

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

Определение (пара). Набор $\langle a, b \rangle$ длины 2 называют *парой*

Предложение (о равенстве n-ок). Если

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

Доказательство. для $n = 1$ очевидно в обе стороны. Докажем для $n = 2$:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \Leftrightarrow \{ \{a_1\}, \{a_1, a_2\} \} = \{ \{b_1\}, \{b_1, b_2\} \}$$

$$\text{Пусть } a_1 = a_2 \Rightarrow \begin{cases} \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \\ \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\} \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2$$

для $b_1 = b_2$ аналогично.

Рассмотрим $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{a_1\} = \{b_1\} \\ \{a_1\} = \{b_1, b_2\} \end{cases} \Rightarrow \{a_1\} = \{b_1\} \Rightarrow a_1 = b_1$$

По аналогии для $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$

Т.к справедливо для $n = 2$, а определение n-ок индуктивно следовательно верно для n \square

Определение (Декартово произведение). Пусть даны множества A_1, \dots, A_n , тогда их декартовым произведением называют

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} a_i \in A_i \}$$

Определение (Декартова степень). В случае, если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, тогда $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называют декартовой степенью и обозначают, как $A^n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

3. Бинарные отношения, обратное отношение, произведение отношений, лемма о бинарных отношениях.

Определение. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество $C \subseteq A \times B$

Определение. Обратным бинарным отношением называется $R^{-1} = \{ \langle y; x \rangle \mid \langle x; y \rangle \in R \}$

Определение. Произведением бинарных отношений называется $R_1 \times R_2 = \{ \langle x; z \rangle \mid \exists y \mid \langle x; y \rangle \in R_1 \wedge \langle y; z \rangle \in R_2 \}$

Лемма (Лемма о бинарных отношениях). Для любых бинарных отношений R_1, R_2, R_3 :

$$(a) \quad R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$$

$$(b) \quad (R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$$

Доказательство. (a) Покажем, что $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subseteq (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.

Пусть $\langle x; t \rangle \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тогда существует y такое, что $\langle x; y \rangle \in R_1$ и $\langle y; t \rangle \in R_2 \cdot R_3$. Далее существует z такое, что $\langle y; z \rangle \in R_2$ и $\langle z; t \rangle \in R_3$. Получаем, что $\langle x; z \rangle \in R_1 \cdot R_2$ и $\langle z; t \rangle \in R_3$. Обратное включение доказывается аналогично.

(b) Покажем, что $(R_1 \cdot R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.

Пусть $\langle z; x \rangle \in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$, тогда существует y такое, что $\langle x; y \rangle \in R_1$ и $\langle y; z \rangle \in R_2$. Тогда $\langle y; x \rangle \in R_1^{-1}$ и $\langle z; y \rangle \in R_2^{-1}$. Получаем, что $\langle z; x \rangle \in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

□

4. Область определения отношения, множество значений отношения, образ и прообраз множества относительно отношений, функция, замечание о равенстве функций, тождественная функция.

Определение (Функция). Бинарное отношение f называется функцией, если выполняется: $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Определение (Область определения). $dom(f) = \{x \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in f\}$

Определение (Область значений). $ran(f) = \{y \mid \exists x : \langle x, y \rangle \in f\}$

Обозначение. f - функция из A в B , если f - функция, $dom(f) = A$ и $ran(f) \subseteq B$

Тогда функцию обозначают $f : A \rightarrow B$

Замечание. Если $f : A \rightarrow B$ и $x \in A$, то существует единственный y такой, что $\langle x, y \rangle \in f$. Этот y лежит в B , называется значение функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Замечание (о равенстве функций). Если f, g - функции, то $f = g \Leftrightarrow dom(f) = dom(g)$ и $\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x)$

Определение (Тождественная функция). Для любого множества A $\exists f = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = id_A$. Ясно, что $id_A : A \rightarrow A$ и $\forall x \in A \ id_A(x) = x$

5. Композиция функций, лемма о композиции функций:

Определение (Композиция функций). Если f и g - функции, то их композиция $g \circ f$ определяется, как произведение бинарных отношений $f \cdot g$ (В обратном порядке)

Лемма (о композиции функций). Если $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, то их композицией $g \circ f : A \rightarrow C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$ при $x \in A$

6. Сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция, лемма о свойствах биекций

Пусть $f : A \rightarrow B$

Определение (Сюръекция). f - функция из A на B (сюръективная функция, сюръекция), если $\forall y \in B \ \exists x \in A \mid f(x) = y$

Обозначение (Сюръекция). $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$.

Определение (Инъекция). f - инъективная функция (1 - 1 функция, инъекция), если $\forall x_1, x_2 \in A$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$

Обозначение (Инъекция). $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Определение (Биекция). f - биекция из A на B , если f одновременно и инъекция, и сюръекция.

Обозначение (Биекция). $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$

Определение (Обратная функция). Запись f^{-1} означает обратное бинарное отношение к f . Если f^{-1} при этом является функцией, то она называется обратной функцией к f .

Лемма (о свойствах биекций).

(a) Если $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$, то $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$, $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$ и $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$.

(b) Если $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B, g : B \xrightarrow[на]{1-1} C$, то $f \circ g : A \xrightarrow[на]{1-1} C$.

Доказательство. (a) Покажем, что f^{-1} - функция.

Пусть $\langle y, x_1 \rangle, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$. Тогда $\langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle \in f$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Поскольку f инъективна, $x_1 = x_2$.

Ясно, что $dom(f^{-1}) = ran(f)$ и $ran(f^{-1}) = dom(f)$. Поскольку f сюръективна, $ran(f) = B = dom(f^{-1})$. Поскольку $ran(f^{-1}) = A$, f^{-1} сюръективна. Инъективность f^{-1} легко проверяется. Тем самым $f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A$.

Покажем, что $f^{-1}(f(x)) = x$ при $x \in A$. Пусть $x \in A$ и $y = f(x)$. Тогда $\langle x, y \rangle \in f$ и $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$. Получаем, что $f^{-1}(y) = x$.

- (b) выше доказано, что $g \circ f : A \rightarrow C$ и $[g \circ f](x) = g(f(x))$. Инъективность: если $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, то $f(x_1) = f(x_2)$ и отсюда $x_1 = x_2$. Сюръективность доказывается похожим способом.

□

7. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности, лемма о классах эквивалентности.
8. Частичный порядок, ч.у.м., минимальные, максимальные, наименьшие, наибольшие элементы, связи между ними. Замечание о строгом порядке.
9. Фундированные частичные порядки, критерий фундированности порядка.
10. Предложение об индукции в фундированном ч.у.м., изоморфизм ч.у.м., замечание об изоморфизме ч.у.м.
11. Линейные порядки, л.у.м., начальные сегменты и отрезки, лемма о свойствах начальных сегментов.
12. Изоморфизм ч.у.м., изоморфизм л.у.м., признак изоморфизма л.у.м., лемма о монотонной инъекции в.у.м.
13. Полный порядок, в.у.м., лемма о начальных сегментах в.у.м.

Определение (Вполне упорядоченное множество). *Вполне упорядоченное множество* (в.у.м) - это пара (A, \leq) , где \leq - линейный фундированный порядок на A . Иногда такой порядок называют *полным*.

Лемма (о начальных сегментах в.у.м.). *Любой начальный сегмент в.у.м. (A, \leq) либо равен A , либо является начальным отрезком.*

Доказательство. Пусть S - начальный сегмент в A и $S \neq A$. Тогда $A \setminus S \neq \emptyset$. Пусть x - минимальный элемент в $A \setminus S$. Покажем, что $S = A_x$. Если $y \in S$, то либо $y < x$, либо $x \leq y$. Второй случай невозможен, так как тогда $x \in S$. □

14. Предложение об изоморфизме начальных сегментов, теорема о сравнимости в.у.м. (без доказательства).
15. Аксиома выбора, лемма Цорна (без доказательства), теорема Цермело (без доказательства), эквивалентность утверждений.
16. Парадокс Рассела, аксиоматика ZFC.

Парадокс (Парадокс Рассела). Рассмотрим совокупность: $M_R = \{A \mid A - \text{множество и } A \notin A\}$.

Предположим, что само M_R является множеством. Возможны два варианта:

- (а) $M_R \notin M_R$. Тогда $A = M_R$ подходит под определение, и $M_R \notin M_R$. Противоречие.

- (b) $M_R \in M_R$. Вновь полагая, $A = M_R$, получаем, что по определению $M_R \notin M_R$. Противоречие.

Это рассуждение показывает, что совокупность M_R нельзя считать множеством.

Аксиоматика ZFC.

Можно с собой на листочке!!!

17. Равномощные множества, замечание о равномощности.

18. Лемма о порядке на мощностях.

Лемма (Лемма о порядке на мощностях). *Для всяких непустых множеств A и B следующие условия эквивалентны:*

- (a) $|A| \leq |B|$
 (b) Существует функция $g : B \xrightarrow{HA} A$
 (c) A равномощно некоторому подмножеству B

Доказательство.

- (a) $a \Rightarrow c$

Пусть $|A| \leq |B|$.

Тогда существует $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Тогда $\text{ran}(f) \subseteq B$ и $f : A \xrightarrow[на]{1-1} \text{ran}(f)$.

- (b) $c \Rightarrow b$

Пусть $h : B_1 \xrightarrow[на]{1-1} A$, где $B_1 \subseteq B$.

Выберем произвольное $a_0 \in A$ и построим $g : B \xrightarrow[на]{} A$ так: $g(y) =$

$$\begin{cases} h(y), & \text{если } y \in B_1 \\ a_0, & \text{если } y \in B \setminus B_1 \end{cases}$$

- (c) $b \Rightarrow a$

Пусть $g : B \xrightarrow[на]{} A$.

Построим $f : B \rightarrow A$.

Рассмотрим $x \in A$

Множество $\{y \in B \mid g(y) = x\}$ непусто.

Выберем в качестве $f(x)$ некоторый элемент из этого множества.

Проверим, что f инъективна. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$

Тогда $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а по построению $g(f(x_i)) = x_i$ при $i = 1, 2$.

□

19. Теорема Кантора-Бернштейна.

20. Теорема о сравнимости мощностей, теорема Кантора.

21. Конечные, бесконечные, счетные, континуальные множества, описание не более чем счетных множеств.
22. Лемма о сохранении мощностей, теорема о мощности объединения (без доказательства).

Лемма (Лемма о сохранении мощностей).

(a) Если $|A| = |A_1|$ и $|B| = |B_1|$, то $|A \times B| = |A_1 \times B_1|$

(b) Если при этом $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$

Доказательство.

(a) Пусть даны биекции

$$f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \text{ и } g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B_1.$$

Построим $h : A \times B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \times B_1$ так: $h_1(\langle x; y \rangle) = \langle f(x), g(y) \rangle$.

Легко проверить, что h_1 - нужная биекция.

(b) Построим $h_2 : A \cup B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A_1 \cup B_1$ так: $h_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A \\ g(x), & \text{если } x \in B \end{cases}$

Условие $A \cap B = \emptyset$ гарантирует, что определение корректно. Вновь нетрудно доказать, что h_2 - биекция. Проверим в качестве примера, что h_2 инъективна. Пусть $h_2(x) = h_2(y)$. Если $x, y \in A$, то получаем $f(x) = f(y)$ и $x = y$. Если $x, y \in B$, рассуждения аналогичны. Если же $x \in A, y \in B$ (или наоборот), то $h_2(x) \in A_1$ и $h_2(y) \in B_1$, что невозможно в силу $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

□

Лемма (о мощности объединения). Если хотя бы одно из множеств A, B бесконечно, то $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$.

23. Теорема о мощности квадрата бесконечного множества (доказательства для счетного и континуального), теорема о мощности произведения (без доказательства).

Теорема (о мощности квадрата бесконечного множества). Если A - бесконечное множество, то $|A \times A| = |A|$

Доказательство.

- Докажем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

Построим $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f(x, y) = 2^x + 3^y$$

$$g(x) = \langle x, 0 \rangle$$

Заметим, что обе функции инъективны, а значит $\begin{cases} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}| \\ |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |\mathbb{N}| \end{cases}$

тогда по теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

- Докажем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$
По аналогии с \mathbb{N} построим две инъекции:

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$

Для построения данной функции докажем, равномощность \mathbb{R} и $(0, 1)$:

Для этого построим биекцию $h : (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{R}$

$h(x) = \text{ctg}(x * \pi)$ - функция биекция из-за $E(\text{ctg}x) = \mathbb{R}$

Значит $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$

Докажем, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $(0, 1) \times (0, 1)$:

Для этого построим $w : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$w(x, y) = \langle h(x), h(y) \rangle$

Значит $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |(0, 1) \times (0, 1)|$

Построим инъекцию $u : (0, 1) \times (0, 1) \xrightarrow{1-1} (0, 1)$

$u(x, y) = 0, \frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} \dots$

Где $x = 0, a_1 a_2 \dots$, а $y = 0, b_1 b_2 \dots$

Т.к в формуле присутствует умножение на 10, то на каждое число из $\frac{10*a_1}{2} \frac{10*b_1}{2} \frac{10*a_2}{2} \frac{10*b_2}{2} \dots$ отводится по две цифры, т.е $\frac{10*4}{2} = 20$, а $\frac{10*9}{2} = 45$, также $\frac{10*0}{2} = 00$

u - инъекция, тогда $f(x, y) = h \circ u \circ w^{-1}(x, y)$

(b) $g : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Построим $g(x) = \langle x, 0 \rangle$

Т.к f и g - инъекции, значит значит $\begin{cases} |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}| \\ |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \geq |\mathbb{R}| \end{cases}$ тогда по теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

□

Теорема (о мощности произведения). Если A, B - непустые множества и одно из них бесконечно, то:

$$|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$$

24. Континуум-гипотеза, теорема Гёделя-Коэна (без доказательства), обобщенная континуумгипотеза.

Гипотеза (Континуум-гипотеза). Не существует множества A такого, что

$$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$$

Теорема (Теорема Гёделя-Коэна). Если теория множеств ZFC непротиворечива, то континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках ZFC.

Гипотеза (Обобщенная континуумгипотеза). Если множество B - бесконечно, то не существует множества A такого, что

$$|B| < |A| < |P(B)|$$

25. Ординалы, лемма об элементах ординала

Определение (Ординал). Ординалом называется транзитивное множество все элементы которого сравнимы относительно включения.

Определение (Транзитивное множество). Множество α называется транзитивным, если из $x \in \alpha$ и $y \in x$ следует, что $x \in \alpha$.

Лемма (Лемма об элементах ординала). Если α - ординал и $\beta \in \alpha$, то β - ординал.

Доказательство. Пусть $x, y \in \beta$. Тогда $x, y \in \alpha$. Следовательно, x и y равны или сравнимы относительно \in . Докажем, что β транзитивно. Пусть $y \in x \in \beta$. Тогда $x \in \alpha$ и $y \in \alpha$. Возможны три случая:

- (а) $\beta \in y$ Тогда получаем, что $\beta \in y \in x \in \beta$ - противоречие.
- (б) $\beta = y$ Получаем, что $\beta \in x \in \beta$ - противоречие.
- (с) $y \in \beta$. Следовательно, β - ординал.

□

- 26. Лемма о порядке на ординалах, теорема о свойствах ординалов.
- 27. Предложение о супремуме множества ординалов (без доказательства), теорема о связи в.у.м. и ординалов (без доказательства), предложение о принципе трансфинитной индукции (без доказательства).
- 28. Сумма и произведение ординалов, кардинал, мощность множества.
- 29. Алфавит ИВ, формула ИВ, подформула, представление формул ИВ.
- 30. Принцип математической индукции и возвратной индукции.
- 31. Алфавит ИС, секвенция, аксиома, правило вывода, дерево вывода, доказуемость, пример вывода.
- 32. Семантика ИВ: означивание, значение формулы при означивании, выполнимые, опровержимые, тождественно истинные, тождественно ложные формулы, примеры.
- 33. Тождественно истинные секвенции, теорема о корректности ИС.
- 34. Допустимые правила вывода, примеры.
- 35. Лемма об основных эквивалентностях, теорема о замене для ИВ.
- 36. Д.н.ф., к.н.ф., теорема о приведении к д.н.ф. и к.н.ф.
- 37. Предложение о тождественно истинных к.н.ф.
- 38. Теорема о полноте ИС.
- 39. Совершенные нормальные формы, теорема о совершенных нормальных формах.
- 40. Гильбертовское исчисление высказываний: аксиоматика, выводимость, примеры выводов.
- 41. Теорема о дедукции.
- 42. Связь гильбертовского и секвенциального исчисления.