

МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

Содержание

1	Ряды	2
§1	Определение ряда. Основные свойства	2
П.0	Конечные суммы	2
П.1	Числовые ряды	2
П.2	Основные свойства	3
П.3	Неотрицательные числовые ряды	4
П.4	Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	6
П.5	Признак Коши. Признак Даламбера	7
П.6	Число e , как сумма ряда	10
§2	Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля	11
П.1	11
§3	Абсолютно и условно сходящиеся ряды	14
2	Интеграл	19
§1	Неопределенный интеграл	19
П.1	Первообразные	19
П.2	Приемы отыскания первообразных	21
П.3	Первообразная от рациональной функции	23
П.4	Первообразные простых дробей	24
П.5	первообразные сводящиеся к рациональным	26
П.6	План изучения	27
П.7	Частные случаи интегрирования тригонометрических функций	27
П.8	$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$	28
П.9	Подстановка Эйлера	29
П.10	Биноминальные интегралы	30

3	Определенные интегралы	31
П.1	Модель интеграла Дарбу	34
П.2	Модель интеграла Римана	35
П.3	Верхние и нижние суммы Дарбу	36
§1	Некоторые классы интегрируемых функций	39
П.1	Некоторые классы интегрируемых функций	39
§2	Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла	42

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- $\sum_{k=1}^n a_n + \sum_{k=1}^n b_n = \sum_{k=1}^n (a_n + b_n)$
- $\lambda \sum_{k=1}^n a_n = \sum_{k=1}^n (\lambda a_n)$

П.1 Числовые ряды

Определение §1.1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,

а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - частичные суммы ряда

Определение §1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - \text{сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$ - ряд сходится

Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема §1.1 (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \mid \sum_{k=n}^m a_k \mid < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k - \text{сходится}$$

$$\begin{aligned} &\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n - 1 > N \mid S_m - S_{n-1} \mid < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N + 1 \mid \sum_{k=n}^m a_k \mid < \varepsilon \end{aligned}$$

■

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \text{сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема §1.2 (Необходимый признак сходимости ряда). Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

Теорема §1.3 (Арифметические свойства). Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходятся, тогда

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема §1.4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). Ряд, члены которого неотрицательны, сходится \Leftrightarrow посл-ть частичных сумм ограничена

Доказательство. \Rightarrow Ряд сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится

$\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}} \{S_n\}$ - ограничена

$\Leftarrow \{S_n\}$ - ограничена

$S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$ - сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится

■

Теорема §1.5 (Признак сравнения). Пусть

$$\exists N > 0 : \forall n > N \quad \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. Из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Доказательство. Конечное число членов ряда не влияет на сходимость \Rightarrow будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то $S_n^B \nearrow$ и сходится к S^B при $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху $S^B \xRightarrow{\text{по th 4}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$

2. (от противного) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.6 (Признак сравнения в предельной форме). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0 \ b_k > 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 - \text{конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2} b_n$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится

■

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Теорема §1.7 (Телескопический признак). Пусть $a_n \searrow, a_n \geq 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
 \Leftrightarrow сходится $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

\dots

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$ Если ряд S_n^B - сходится $\Rightarrow S_{2^{n+1}}^A - a_1$ - сходится
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$ и $\{S_n^A\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$ и $\{S_n^B\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения

■

Теорема §1.8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится

- Пусть $p \leq 1$

$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ т.к $\frac{1}{n}$ - расходится $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p}$ - расходится

■

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема §1.9 (признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$

Возьмем $\varepsilon : \tilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1 - q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \tilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \tilde{q} < a_{n+1} \tilde{q}^2$$

...

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \tilde{q} < \dots < a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$$

Т.к $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\tilde{q} < 1$) \Rightarrow сходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$

Возьмем $\varepsilon : \tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда $\forall n > N \ a_n \tilde{q} < a_{n+1} \xRightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1} \tilde{q}^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow{\text{по необходимому признаку}} \text{ряд расходится}$

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$



Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.10 (радикальный признак Коши).

Пусть $a_n \geq 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \mid \sqrt[n]{a_n} - q \mid < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} \mid q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n - \text{геометрическая прогрессия} (\tilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ряд сходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$
ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$



Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.11 (Признак Раабе). Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$, тогда

1. Если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

П.6 Число e , как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n$$

2. Пусть $m < n$

$$e_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m}$$

$$\Rightarrow e_n > A_{n,m} \text{ Зафиксируем } m. \text{ Тогда при } n \rightarrow \infty e \geq S_m$$

3. $| \Rightarrow e_n < S_n \leq e$ и $\{S_n\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th Вейерштрасса}} \text{Ряд сходится}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа e частичными суммами:

$$0 < e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Упражнение. Доказать, что e - иррационально

Упражнение. Доказать, что $2 < e < 3$

§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

П.1

Определение §2.1. Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ называется знакопеременным, где $\forall n \ a_n > 0$

Теорема §2.1 (Признак сходимости Лейбница знакопеременных рядов). Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ $a_n > 0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\{a_n\} \searrow$, то ряд сходится

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\
&= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху} \\
S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow \mid \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \\
S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow{S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0 \text{ При } n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S
\end{aligned}$$

■

Замечание. Признак достаточный, но не необходимый!

Следствие (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$\begin{aligned}
S &= S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots \\
|R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| = \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1} \\
&\mid \Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

Лемма (Абеля). Дано a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . При этом:

1. $\{a_i\}$ монотонно
2. $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, также перепишем (2) условие, как $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\
&= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\
|\sum_{k=1}^n a_k b_k| &= |B_1| |a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}| |a_{n-1} - a_n| + |B_n| |a_n| \leq \\
&\leq B(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n|) = \\
&= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \stackrel{\text{Используя неравенство треугольника}}{\leq} B(|a_1| + 2|a_n|)
\end{aligned}$$

■

Теорема §2.2 (Признак Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно стремится к 0
2. $\exists C \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия a_n - монотонно $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$$

$$\text{Из (2) условия } \forall n \forall p \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 2C$$

$$\text{Рассмотрим } a_n, \dots, a_{n+p} \text{ и } b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля (} B=2C \text{)}} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится} \quad \blacksquare$$

Теорема §2.3 (Признак Абеля). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно и ограничена
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$

$$\text{Из (2) условия } \xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3A}$$

Рассмотрим $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xrightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} - \text{монот. из усл, } B = \frac{\varepsilon}{3A}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится ■

Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2. Из условия, что $\{a_n\} \searrow 0$ и того факта, что $\left| \sum_{n=1}^m (-1)^n \right| \leq 1$,

по теореме Дирихле следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ - сходится ■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем m . Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow \text{к } 0, b_n = \sin(nx)$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(mx) = \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \dots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \dots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) \end{aligned}$$

Если $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$ ряд сходится

Если $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$

| $\xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$ ряд сходится

Упражнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема §3.1. Абсолютный ряд сходится

Доказательство. Дано $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится. Докажем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится ■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ - расходится \Rightarrow ряд сходится не абсолютно

Определение. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

Теорема §3.2 (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов). 1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ абсолютно сходится

2. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ или $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, тогда ряд $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходится,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

Доказательство.

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника
2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

Теорема §3.3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен путем произвольной перестановки членов a_n . Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$ В самом деле это биекция так, как $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$ и $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

$$1. \forall m \exists l: \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$$

$$2. \forall l \exists m': \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$$

$$\bullet A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n| \text{ и } \{S_n^B\} \xrightarrow[\text{по th Вейерштрасса}]{} \text{ряд}$$

$$\bullet \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \text{ Тогда:}$$

$$\forall \varepsilon \exists N_1: \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2: \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$

Пусть $m \geq N \mid \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b \mid < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначим ее за } C}$$

Те которые не вошли в первую сумму. Обозначим ее за C

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$|\sum_{n=1}^l a_k - a| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \mid \Rightarrow |a - b| &= \mid \sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c \mid < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} \\ a &= b \end{aligned}$$

■

Теорема §3.4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходятся, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений $a_m b_n$, расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$, то сумма полученного ряда равна $S = S^A S^B$

Доказательство. Расположим $a_m b_n$ в удобном порядке:

$$\begin{aligned} &a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\ &a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\ &\dots \\ &a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\ &\dots \\ &a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения: $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных

сумм ограниченных сверху

$S_n \nearrow$, т.к. числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$S_{n^2} = |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. сходим.}}$$

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

\Rightarrow ряд (1) сходится абсолютно $\xrightarrow{\text{th 3}}$ исходный ряд сходится

Докажем, что $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S}_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S}_{n^2}}_{\rightarrow \widetilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow \widetilde{S}^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow \widetilde{S}^B} \Rightarrow S = S^A S^B$$

■

Замечание. Пусть есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится \Leftrightarrow сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Теорема §3.5 (Римана). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall A$ можно так переставить члены ряда, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$

Доказательство.

Пусть $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$ - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$ - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится \Rightarrow

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходиться (противоречие). Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится
Пусть $A \geq 0$:

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$, то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$, то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимый признак сходимости}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

■

Упражнение. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходиться

Упражнение. Докажите, что если при любой перестановке его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

Глава 2 Интеграл

§1 Неопределенный интеграл

П.1 Первообразные

Определение. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ (точная) первообразная ф-ции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall x \in I \ F'(x) = f(x)$

Воспоминания. Теорема Лагранджа о среднем. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Лемма §1.1 (о точных первообразных). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, F_1, F_2 - первообразные на $[a, b]$, тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] \ G(x) - G(y) = G'(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

Лемма §1.2 (из будущего). У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке

Пример. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной первообразной ф-ции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ всюду за исключением конечного числа точек и F - непрерывная

Пример. $|x|$ - обобщенная первообразная $\text{sign}(x)$, т.к. $|x|' = \text{sign}(x)$

Лемма §1.3. Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке

Лемма §1.4 (об обобщенной первообразной). Если $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ обобщенные первообразные функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ - точки, в которых нет $F_1'(x)$ или нет $F_2'(x)$

На любом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ по предыдущей лемме F_1 и F_2 - точные первообразные ф-ции f (по лемме 3)

$$F_1(x) = F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}]$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i]$$

$$| \Rightarrow F_1(x_i) = F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1}$$

■

Обозначение. Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции f называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

Обозначение. $f(x)dx$ -подынтегральное выражение

Обозначение. Иногда удобно ввести обозначение: $F'(x)dx = dF(x)$

Замечание. У dx приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

П.2 Приемы отыскания первообразных

1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x +c$
$\sin x$	$-\cos x +c$
$\cos x$	$\sin x +c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x +c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} +c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x +c$

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -\ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример.

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Пример.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

Замечание.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) + C$$

Замечание. Когда использовать: $\int x^n f(x) dx$, $\int \dots \ln \dots dx$, $\int \dots \arctg \dots dx$

Пример.

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= x(-\cos x) + \int \cos(x) dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \ln x dx = \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если $\phi(x)$ - дифференцируемая функция, то $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y)) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} 2x dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} (x^2)' dx$$

Обозначим $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$F_1(x)$ - Первообразна на $[a, b]$

$F_2(x)$ - Первообразна на $[b, c]$

Тогда:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

П.3 Первообразная от рациональной функции

Определение. Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ где } P(x), Q(x) - \text{многочлены}$$

Обозначение. $\deg P$ - степень многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

Замечание. В комплексных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где $z_1 \dots z_n$ - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:
либо корень вещественный, $z_k \in \mathbb{R}$

либо есть комплексно сопряженные $z_k, \overline{z_k} : (z - z_k)(z - \overline{z_k}) =$
 $= z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + z_k \overline{z_k}$

Лемма §1.5. Если $P(x)$ - многочлен над \mathbb{R} , то его можно разбить на $P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{l_n}$. Это представление единственно (с точностью до перестановки множителей)

Лемма §1.6 (о делении с остатком). Если $P(x), Q(x), \deg(P) \geq \deg(Q), Q \neq 0$, тогда $\exists!$ многочлены $q(x), r(x), \deg(q) = \deg(P) - \deg(Q), \deg(r) < \deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$

Лемма §1.7. Если $\deg(P), \deg(Q) > 0$, и $d(x) = \text{NOD}(P(x), Q(x))$, тогда $\exists u(x), v(x) : \deg(u) < \deg(Q), \deg(v) < \deg(P), d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

Теорема §1.1 (о разложении в простые дроби). Пусть $P(x), Q(x)$ - многочлены, $0 < \deg(P) < \deg(Q), \text{NOD}(P(x), Q(x)) = 1$ и $P(x)$ как в лемме 5, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Пример.

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

2. теорема о разложении в простые дроби: $R(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}$. Найдем коэффициенты A, B, C

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-5}{x - 1} dx + \int \frac{8}{x - 2} dx + \int \frac{-9}{(x - 2)^2} dx$$

П.4 Первообразные простых дробей

Замечание.

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x - x_i| + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-x_i)^k} dx &= \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C \\
\int \frac{1}{x^2+px+q} dx &= \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x-\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{>0}} dx = \\
&= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2 + 1)} dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2+1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a} + \frac{p}{2a}\right) + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\
\int \frac{x}{(1+x)^k} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} + C \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy = \frac{y}{1+y^2}{}^k - \int y \left(\frac{1}{(1+y^2)^k}\right)' dy = \frac{y}{1+y^2}{}^k - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1}2y)}{(1+y^2)^{2k}} dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2}{}^k + 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy = \frac{y}{1+y^2}{}^k + 2k \int \left(\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}}\right) dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2}{}^k + 2k I_k(y) - 2k I_{k+1}(y) \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy \\
I_1(y) &= \operatorname{arctg} y + C \\
I_{k+1}(y) &= \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(y)
\end{aligned}$$

П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

R - рациональная функция

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ замена $y = \sqrt[n]{ax+b}$ сводит к рациональной функции

Замечание.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R\left(\frac{y^n-b}{a}, y\right) \frac{y^{n-1}}{a} dy$$

Пример.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1}+x-5} dx \ominus \\ & y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1, dx = 2y dy \\ & \ominus \int \frac{\sqrt{2}y \cdot 2y}{y + y^2 - 6} dy = 2\sqrt{2} \int \frac{y^2}{y^2 + y - 6} dy = 2\sqrt{2} \int \left(1 - \frac{y-6}{y^2 + y - 6}\right) dy = \dots \end{aligned}$$

2. $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $ad \neq bc$ замена $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y) dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

3. $R(\sin X, \cos X)$ универсальная тригонометрическая замена $y = tg(\frac{x}{2})$

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2tg(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$$

$$\cos x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$dx = \frac{2}{1+y} dy$$

Если $R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X)$, $t = \cos X$

Если $R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos X)$, $t = \sin X$

Если $R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin X, \cos X)$, $t = tg X$

4. $R(shX, chX)$ по аналогии с пунктом (3) + работает замена $y = e^x$

П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций

- Разложение на простые дроби
- Метод Остроградского(*)

- Интегрирование тригонометрических функций

- $\int R(\sin X; \cos X) dx$, $t = tg(\frac{x}{2})$ - универсальная подстановка
- Четность/нечетность функции \rightarrow специальная замена
- Частные случаи(**)

- Интегрирование иррациональных функций

$$- \int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots) dx$$

$$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}, N = NOK(m, n, \dots)$$

- $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ - выделение полного квадрата или замена Эйлера(***)
- Биномиальный интеграл (****)

Замечание. Все методы сводятся к интегрированию рациональных функций

П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.

$$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) dx \quad \text{используя формулы понижения степени получим}$$

$$\int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m+1}(x) \cos^{2n}(x) dx &= \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n+1}(x) dx = \\ &= - \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) \underbrace{d \cos(x)}_t = - \int (1 - t^2)^m t^{2n} dt \end{aligned}$$

3. $\int \sin(ax) \cos(bx) dx = (1)$
 $\int \sin(ax) \sin(bx) dx = (2)$
 $\int \cos(ax) \cos(bx) dx = (3)$

$$(1) = \int \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) dx$$

$$(2) = \int \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx$$

$$(3) = \int \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) dx$$

П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)}_u^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака a сводится к:

- $\int R(u; \sqrt{a^2 - u^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{u^2 - a^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{a^2 + u^2}) du$

случай	подстановка (замена)	du	корень
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \sin(t)$	$du = a \cos(t) dt$	$a \cos(t)$
	$u = a \cos(t)$	$du = -a \sin(t) dt$	$a \sin(t)$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{\sin(t)}$	$du = -\frac{a \cos(t)}{\sin^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\sin(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{ctg}(t)$
	$u = \frac{a}{\cos(t)}$	$du = -\frac{a \sin(t)}{\cos^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\cos(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(t)$
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$u = \frac{a}{\operatorname{tg}(t)}$	$du = \frac{a}{\cos^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{tg}(t)})^2 + a^2} = \frac{a}{\cos(t)}$
	$u = \frac{a}{\operatorname{ctg}(t)}$	$du = -\frac{a}{\sin^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{ctg}(t)})^2 + a^2} = \frac{a}{\sin(t)}$

Пример.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ dx = \frac{dt}{\cos^2(t)} \\ x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^2(t) - \operatorname{tg}(t) + 1}{\frac{1}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\
&= \int (\operatorname{tg}^2(t) + 1) \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}(\frac{t}{2}) \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos(t) = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} + \cos(t) = \ln|u| + \cos(t) + C = \\
&= \ln|\operatorname{tg}(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2})| + \cos(\operatorname{arctg}(x)) + C
\end{aligned}$$

П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$1. \ a > 0 \quad \underbrace{\sqrt{ax^2 + bx + c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{ax}$$

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{ax} + ax^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

Получаем рациональную функцию под интегралом

$$2. \ 2 \text{ различных корня } ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_0}, \quad t^2(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c$$

$$t^2(x - x_0) = a(x - x_1)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) = \\ &= t\left(\frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} - x_0\right) \end{aligned}$$

П.10 Биномиальные интегралы

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

а) p - целое, тогда по биному Ньютона

б) p - дробное

$$\text{Выполнить замену } z = x^n, \text{ тогда } x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$

$$\Rightarrow \int z^{\frac{m}{n}} (az + b)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz =$$

Вариант 1

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (az + b)^p dz, \text{ если } \frac{m+1}{n} \text{ - целое, то}$$

$$p = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow t^\nu = az + b = ax^n + b \Rightarrow \text{получим рациональную функцию}$$

Вариант 2

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz$$

Если $\frac{m+1}{n} + p - 1$ - целое, то $t^\nu = \frac{az+b}{z} = \frac{ax^n+b}{x^n}$

Теорема §1.2 (Чебышева).

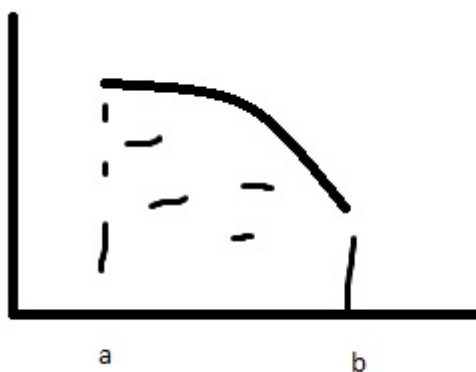
$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

вычисляется в элементарных функциях только, если

1. p -целое

2. p -дробное, $\frac{\mu}{\nu} \begin{cases} \frac{m+1}{n} - \text{целое} & , t^\nu = ax^n + b \\ \frac{m+1}{n} + p - \text{целое} & , t^\nu = \frac{ax^n + b}{x^n} \end{cases}$

Глава 3 Определенные интегралы



$$f : [a, b] \rightarrow R, f(x) \geq 0$$

Формула (Ньютона-Лейбница).

$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \text{ где } F - \text{ первообразная } f$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Определение. Кольцо множеств - набор множеств замкнутый относительно $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Пример. Подмножество \mathbb{R}^2 :

- Все подмножества пл-ти $P(\mathbb{R}^2)$
- $\{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$
- Все ограниченные множества
- Все многоугольники $(+\emptyset)$

Определение. Площадь на кольце R подмножеств \mathbb{R}^2 это функция $S : R \rightarrow \mathbb{R}$, такая что:

1. $\forall A \subset R, S(A) \geq 0$
2. $\forall A, B \subset R, A \cap B = \emptyset \rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. не меняется при сдвигах, поворотах, отражениях. Т.е $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(L(A)) = S(A)$
4. $S([0, 1]^2) = 1$

Замечание. Аналогично $V : R(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ - объем

Замечание. Аналогично $l : R(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ - длина

Замечание. 1. Из определения $S(\subset) = 0$
 $S(A \cup \emptyset) = S(\emptyset) + S(A)$

2. $S([0, a] \times [0, b]) = ab$

Замечание. Площадь однозначно определяется на кольце многоугольников

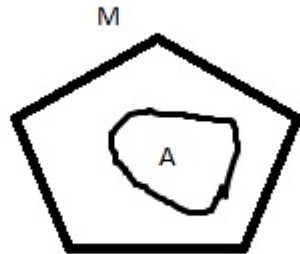
Следствие §0.1. $A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$

Доказательство.

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

■

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченное множество.



$S^*(A) = \inf(S(M), M - \text{многоугольник}, A \subset M)$ - Внешняя площадь

$S_*(A) = \sup(S(M), M - \text{многоугольник}, M \subset A)$ - Внутренняя площадь

Причем $S^*(A) \geq S_*(A)$

Пример. Когда не совпадают:



$E = (Q \cap [0, 1]^2)$ - точки единичного квадрата с рациональными координатами \Rightarrow

$$S^*(E) = 1$$

$$S_*(E) = 0$$

Определение. Если $S_*(A) = S^*(A)$, тогда A - квадратуемое

Теорема §0.1. Множество квадратуемых множеств это кольцо. И площадь продолжается на них с сохранением всех свойств

П.1 Модель интеграла Дарбу

Определение. Разбиение отрезка $[a, b]$, это конечный набор точек $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

Свойство. P_2 - подразбиение P_1 , если $P_1 \subset P_2$

Свойство. У любых двух разбиений есть общее подразбиение

Определение. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Определим *верхний интеграл Дарбу*.

Пусть $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. На каждом отрезке $A_i = [x_i; x_{i+1}]$ выберем $C_i \geq f(x) \forall x \in A_i$.

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i) \right\}$$

Аналогично определяется *нижний интеграл Дарбу*

$$\int_{a*}^b f(x)dx = \sup_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i), P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}, C_i \leq f(x) \forall x \in [x_i; x_{i+1}] \right\}$$

Замечание.

$$\int_{a*}^b f(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx$$

Пример.

$$f_D : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Замечание. Если они совпадают, то f интегрируема по Дарбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$$

Интеграл Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$

П.2 Модель интегралла Римана

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\tau = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

Набор точек $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - подчиненён разбиению P , если

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Формула (Сумма Римона).

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Определение. Шаг разбиения: $\Delta(\tau) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$

Определение. Интеграл Римона I - называется интегралом Римона, если f на $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi)$$

Если этот предел существует и независит от τ, ξ

Пример. $f \equiv c$ на $[a, b]$

$$S(f, \tau, \xi) = c(b - a)$$

Пример.

$$D(X) = \begin{cases} 1, & \text{рац на } [0, 1] \\ 0, & \text{ир на } [0, 1] \end{cases}$$

$\forall \tau$ - разбиение $[0, 1] \exists \xi'_k \in \mathbb{Q}, \xi''_k \notin \mathbb{Q}$

$$S(D, \tau, \xi'_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(x_k - x_{k-1}) = 1$$

$$S(D, \tau, \xi''_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$| \Rightarrow \nexists \lim$

Пример.

$$R(X) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ несократима на } [a, b] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(R, \tau, \xi) &= \sum_{i=0}^k R(\xi_i) \delta x_i = \sum_{R(\xi_i) < \frac{1}{N}} R(\xi_i) \delta x_i + \sum_{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}} R(\xi_i) \delta x_i < \\ &< \sum_{R(\xi_i) < \frac{1}{N}} \frac{1}{N} \delta x_i + \sum_{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}} 1 \delta x_i < \frac{1}{N} \sum_{R(\xi_i) < \frac{1}{N}} \delta x_i + \Delta(\tau) \text{кол-во } \{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}\} < \end{aligned}$$

Грубой оценкой является N^2

$$N = 1, x = 1 \longrightarrow 1$$

$$N = 2, x = 1, x = \frac{1}{2} \longrightarrow 2$$

$$N = 3, x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3} \longrightarrow 4$$

Далее, если кол-во $\{x : R(x) \geq \frac{1}{N}\}$ не более N^2 , то для $\left\{x : R(x) \geq \frac{1}{N+1}\right\}$

могут добавляться дроби $\frac{k}{N+1}$, $k = 1, \dots, n$

Т.е добавится не более N штук $N^2 + N < (N+1)^2$

$$S(R, \tau, \xi) < \frac{1}{N} + \Delta(\tau)N^2$$

Засчет выбора достаточно малого $\Delta(\tau) : \forall \varepsilon > 0 \exists N \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\Delta = \frac{1}{N^3}$
 $\Rightarrow \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta$ получаем:

$$|0 - S(R, \tau, \xi)| = \frac{1}{N} + \delta N^2 = \frac{1}{N} + \frac{N^2}{N^3} = \frac{2}{N} < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 R(x) dx$$

П.3 Верхние и нижние суммы Дарбу

Определение. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Определим *верхняя сумма Дарбу*.

f - огр на $[a, b]$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} (f(x)), m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x))$$

$$S_\tau = \sum_{k=0}^n M_k \Delta x_k, s_\tau = \sum_{k=0}^n m_k \Delta x_k$$

Свойство §0.1.

$$s_\tau \leq S(f, \tau, \xi) \leq S_\tau \quad \forall \xi$$

Свойство §0.2.

$$\tau' \subseteq \tau'' \Rightarrow S_{\tau''} \leq S_{\tau'}$$

Свойство §0.3.

$$\forall \tau', \tau'' : s_{\tau'} \leq S_{\tau''}$$

Нижний предел:

$$\sup_{\tau} (s_\tau) = \underline{I} = \int_{a*}^b f(x) dx$$

Верхний предел:

$$\inf_{\tau} (S_\tau) = \bar{I} = \int_a^{b*} f(x) dx$$

Свойство §0.4.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \bar{\xi} : 0 \leq S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \varepsilon$$

Доказательство. По определению $M_k : \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \underline{\xi} = \xi_k$

$$S_\tau - S(f, \tau, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^n (M_k - f(\xi_k)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

■

Свойство §0.5.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \underline{\xi} : 0 \leq S(f, \tau, \underline{\xi}) - S_\tau < \varepsilon$$

Свойство §0.6. Пусть τ' получена из τ путем добавления p точек. Тогда $S_\tau - S_{\tau'} \leq (M - m)p\Delta(\tau)$, $S_{\tau'} - S_\tau \leq (M - m)p\Delta(\tau)$

Доказательство. добавление 1 точки: $x_{k-1} < x' < x_k$

$$\begin{aligned} S_\tau - S_{\tau'} &= M_k(x_k - x_{k-1}) - (M'_k(x_k - x') + M''_k(x' - x_{k-1})) = \\ &= (M_k - M_{k'})(x_k - x') + (M_k - M''_k)(x' - x_{k-1}) \leq (M - m)\Delta(\tau) \end{aligned}$$

Далее по индукции

■

Лемма §0.1 (Дарбу).

$$\bar{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S_\tau$$

$$\underline{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} s_\tau$$

Доказательство. $M = m \Rightarrow f(x) = \text{const} = m = M$ $\underline{I} = s_\tau, \bar{I} = S_\tau$

$$M > m, \forall \varepsilon \exists \tau^* : S_{\tau^*} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ по опр inf}$$

Пусть p - кол-во точек τ^* , лежащие внутри $[a, b]$. Выберем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M - m)p}$$

Пусть $\tau : \Delta(\tau) < \delta, \tau' = \tau \cup \tau^*$

$$S_\tau - \underline{I} = S_\tau - S_{\tau'} + S_{\tau'} - \underline{I} \leq (M - m)p\Delta(\tau) + S_{\tau'} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для второго УПР!

■

Теорема §0.2 (Критерий Дарбу интегрируемости по Римону). *Ограниченная на $[a, b]$ ф-ция f интегрируема по Римону $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$*

Доказательство. \Rightarrow

Тогда $\exists \delta > 0$ из определения инт-мости выберем $\tau : \Delta(\tau) < \delta$

$$|I - S(f, \tau, \xi)| < \frac{\varepsilon}{4} \forall \xi$$

По св-ву 4 и 5 выберем $\underline{\xi}, \bar{\xi}$:

$$S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \frac{\varepsilon}{4}, S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S_\tau - s_\tau = S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) + S(f, \tau, \bar{\xi}) - I + I - S(f, \tau, \underline{\xi}) + S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \varepsilon$$

\Leftarrow

Из условия следует: $\underline{I} = \bar{I} = I$ - обозначение.

По лемме Дарбу: по ε выберем $\delta : \Delta(\tau) < \delta$

$$\begin{aligned} S_\tau - I < \frac{\varepsilon}{2}, I - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \xi \text{ по св-ву } 1 |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

Воспоминания. В прошлом семестре вводилось определение колебания функции f на $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x'') - f(x')|$$

Очевидно, что

$$\omega_k = \underbrace{M_k}_{\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)} + \underbrace{m_k}_{\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)}$$

Следовательно,

$$\underbrace{S_\tau - s_\tau}_{\text{Эта разность фигурирует в Теореме 1}} = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$$

Следствие. Ограниченная на $[a, b]$ функция f интегрируема
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Разбиение $\tau : \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$

§1 Некоторые классы интегрируемых функций

П.1 Некоторые классы интегрируемых функций

Теорема §1.1 (Основное св-во интегрируемых функций, необходимом условие). *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$*

От противного. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ и пусть выбрано разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$

Т.к f не ограничена на $[a, b]$, то f не ограничена на каком-то маленьком отрезке разбиения. Пусть это будет $[x_0, x_1]$. Тогда \exists последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$ (здесь (n) просто номер ξ_1), $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty$$

Фиксируем точки на других отрезках: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда для данного τ и ξ_i сумма $\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i$ какое-то определенное число.

$$\begin{aligned} | \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi_1^{(n)}, \xi_2, \xi_3, \dots) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(f(\xi_1^{(n)}) \Delta x_1)}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i}_{\text{Число}} = \infty \end{aligned}$$

$$| \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 : |S(f, \tau, \xi_1^{n_0}, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k)| > M \quad (1)$$

| \Rightarrow интегральные суммы не могут стремиться к конечному пределу при $\Delta(\tau) \rightarrow 0$

Действительно, если $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = A$ - конечное, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - A| < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |S(f, \tau, \xi)| \leq |S(f, \tau, \xi) - A| + |A| < \varepsilon + |A|$$

А мы получили в 1, что \forall разбиения τ при фиксированном ε можно выбрать ξ так, что $|S(f, \tau, \xi)| > |A| + \varepsilon = M \Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.2. *Непрерывная на отрезке функция - интегрируема*

Доказательство. По теореме Кантор, любая непрерывная на отрезке функция - равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение τ такое, что $\Delta(\tau) < \delta$, тогда если $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$$\sup_{x', x''} |f(x') - f(x'')| = \sup(f(x')) - \inf(f(x'')) = M_k - m_k \leq \varepsilon \text{ Равенство появилось из-за } \sup$$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum M_k - m_k \Delta x_k \leq \varepsilon(b - a)$$

\Rightarrow по критерию Дарбу (§0.2) функция интегрируема

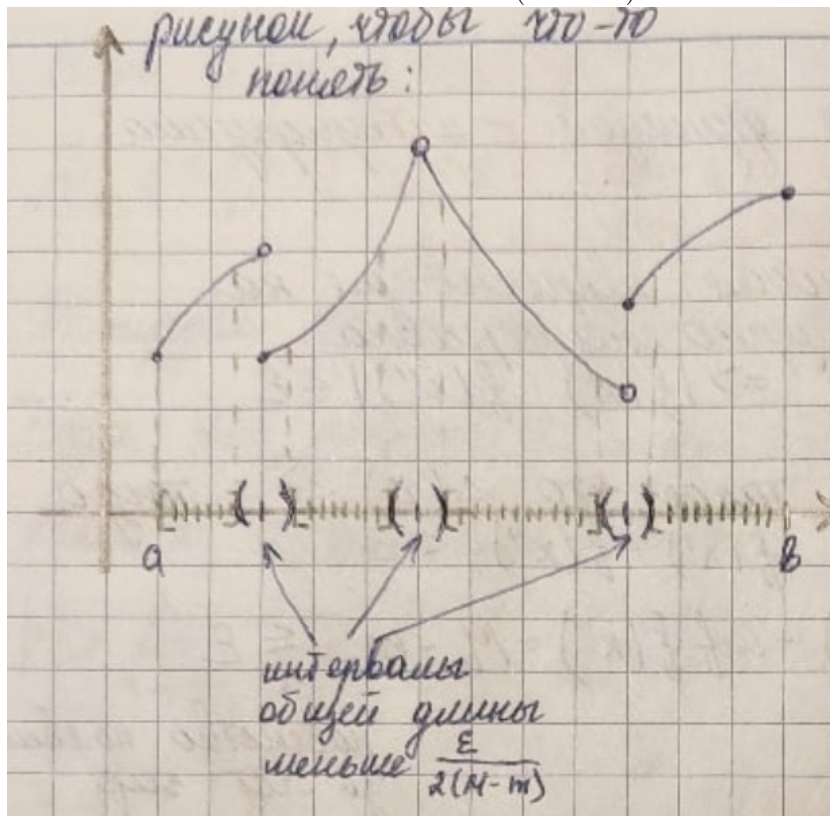
■

Теорема §1.3. *Если f имеет конечное число разрывов и ограничена на $[a, b]$, то f интегрируема*

Эта теорема будет следовать из более сильной теоремы

Теорема (3!). Пусть f ограничена на $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва f и имеющих общую сумму длин меньшую, чем ε , то f интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $\varepsilon > 0$. Покроем все разрывы конечным числом интервалов общей длинны меньше чем $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$



Если из $[a, b]$ удалить конечное число интервалов, то останется объединение конечного числа отрезков на которых f непрерывна.

Разобьем каждый отрезок так, что колебание ω_i там меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$

Объединим эти разбиения и интервалы с разрывами получаем некоторое разбиение τ

Итак,

$$S_\tau - s_\tau = \sum \omega_k \Delta x_k = \underbrace{\sum \omega_i \Delta x_i}_{\text{Сумма по всем маленьким отрезкам}} + \underbrace{\sum \omega_j \Delta x_j}_{\text{Сумма по всем интервалам}} <$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\sum \Delta x_i}_{\substack{\text{по маленьким отрезкам,} \\ \text{длины в сумме} \\ < (b-a)}} + \underbrace{(M-m) \sum \Delta x_j}_{\substack{\text{по интервалам,} \\ \text{их длина} < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

| \Rightarrow по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема

■

Замечание. В теореме 3' П.1 и на рисунке точек разрыва может быть бесконечно числом

Теорема §1.4 (Критерий Лебега). Пусть f ограничена на $[a, b]$. f интегрируема \Leftrightarrow множество точек разрыва обладает свойством: $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n$ - конечная или бесконечная посл-ть интервалов такая, что $\{\text{множество точек разрыва}\} \subset \bigcup I_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ (другими словами, мн-во точек разрыва меры 0)

Теорема §1.5. Монотонная на $[a, b]$ функция - интегрируема

Доказательство. f - монотонная $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b]$
(пусть возрастает)

Пусть $\varepsilon > 0$. τ - разбиение $[a, b]$ на равные отрезки длиной меньше

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}, \text{ т.е. } \Delta(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$\begin{aligned}
\text{Очевидно, что } \forall [x_{i-1}, x_i] \ m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i), \text{ т.к. } f \text{ возрастает} \Rightarrow \\
S_\tau - s_\tau = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leq \Delta(\tau) \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\
= \Delta(\tau)(f(b) - f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

| \Rightarrow по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема

■

§2 Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла

$\mathcal{R}_{[a,b]}$ - множество интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$

Мы уже выяснили, что в этом мн-ве лежат непрерывные, монотонные, разрывные функции с мн-вом разрывных точек разрыва меры 0 (§1.4)

Теорема §2.1. Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, тогда:

1. $f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
2. $\alpha f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

3. $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

4. $fg \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

5. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$. Тогда если $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $f \Big|_{[c,d]} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Доказательство. 1. Пусть τ - разбиение $[a, b]$, $\{\xi_i\} = \xi$ - отмечены.
Тогда $S(f + g, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^k (f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i = S(f, \tau, \xi) + S(g, \tau, \xi)$
Т.к $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) \exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(g, \tau, \xi)$, то $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f + g, \tau, \xi)$

$$\Rightarrow f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \text{ и } \int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

2. Аналогично 1)

3. Аналогично 1)

4. Удобнее на языке колебаний

$f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow$ они ограничены $\Rightarrow \exists A > 0, B > 0 :$

$$|f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq AB \forall x \in [a, b]$$

Пусть τ - разбиение $[a, b]$. Рассмотрим разность из определения колебаний ф-ции fg:

$$\begin{aligned} |f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| &= |f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')| = \\ &= \underbrace{|f(x'') - f(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции f}}} \cdot \underbrace{|g(x'')|}_{\leq B} + \underbrace{|g(x'') - g(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции g}}} \cdot \underbrace{|f(x')|}_{\leq A} \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g) \Rightarrow \omega_i(fg) \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g)$$

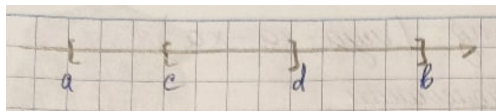
Получаем:

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(fg)\Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^k \omega_i(f)\Delta x_i + A \sum_{i=1}^k \omega_i(g)\Delta x_i \quad (2)$$

f и g интегрируема \Rightarrow по теореме 2 пр.2 $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_{1,2} : (у каждой ф-ции своё)$

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon, \sum_{i=1}^k \omega_i(g)\Delta x_i < \varepsilon$$

$| \Rightarrow$ правая часть неравенства $2 \rightarrow 0 \Rightarrow$ левая часть неравенства $\rightarrow 0 \Rightarrow$ по той же теореме 2 пр.2 fg - интегрируема



5. $[c, d] \subset [a, b]$

Простые факты:

- (a) Если f ограничена на $[a, b]$, то f ограничена на $[c, d]$
- (b) Пусть τ - разбиение $[c, d]$ мелкости $\Delta(\tau)$. Тогда можно добавить к точкам из τ конечное число точек принадлежащих $[a, b] \setminus [c, d]$, причем в так, чтобы объединение этих точек с τ_1 давало разбиение τ с мелкостью $\Delta(\tau_1) = \Delta(\tau)$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 0 \leq S_\tau - s_\tau &= \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau}} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau_1, \\ \text{слагаемых больше}}} (M_i - m_i) \Delta x_i = S_{\tau_1} - s_{\tau_1} \xrightarrow[\substack{\text{по кр Дарбу §0.2} \\ f\text{-интегр. на } [a, b]}}{0} 0
 \end{aligned}$$

$| \Rightarrow S_\tau - s_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow f$ интегрируема на $[c, d]$

■