

МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019-2020

Содержание

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$
- $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)$

П.1 Числовые ряды

Определение §1.1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,
а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - частичные суммы ряда

Определение §1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$ - ряд сходится

Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема §1.1 (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k - \text{сходится}$$

$$\xleftarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n - 1 > N |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N + 1 \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

■

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \text{сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема §1.2 (Необходимый признак сходимости ряда). *Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$*

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

Теорема §1.3 (Арифметические свойства). *Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ - сходится}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема §1.4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены короткого неотрицательны, сходится \Leftrightarrow последовательность частичных сумм ограничена*

Доказательство. \Rightarrow Ряд сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится
 $\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}} \{S_n\}$ - ограничена
 $\Leftarrow \{S_n\}$ - ограничена
 $S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$ - сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится ■

Теорема §1.5 (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. Из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Доказательство. Конченое число членов ряда не влияет на сходимость \Rightarrow будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то $S_n^B \nearrow$ и сходится к S^B при $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху $S^B \xrightarrow{\text{по тн 4}}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

2. (от противного) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.6 (Признак сравнения в предельной форме). *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k > 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ - конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$
 $\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится
2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится

■

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Теорема §1.7 (Телескопический признак). *Пусть $a_k \searrow, a_k \geq 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится
 \Leftrightarrow сходится $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$*

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

Рассмотрим $a_2 \leq a_2 \leq a_1$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

...

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n+1} \leq S_{2^n+1}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^n+1}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S_{2^n+1}^A - a_1 \leq S_n^B$ Если ряд S_n^B - сходится $\Rightarrow S_{2^n+1}^A - a_1$ - сходится
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$ и $\{S_n^A\} \nearrow$ $\xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^n+1}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^n+1}^A - a_1$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^n+1}^A - a_1$ и $\{S_n^B\} \nearrow$ $\xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$
 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения

■

Теорема §1.8. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \left\{ \frac{1}{n^p} \right\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th 7}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится

- Пусть $p \leq 1$

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{т.к. } \frac{1}{n} \text{ - расходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p} \text{ - расходится}$$

■

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема §1.9 (признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$ и $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$

Возьмем ε : $\tilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \tilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \tilde{q} < a_{n+1} \tilde{q}$$

...

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \tilde{q} < \dots < a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$$

Т.к $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\tilde{q} < 1$) \Rightarrow сходится $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xrightarrow{\text{Следствие критерия Коши}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$

Возьмем ε : $\tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда $\forall n > N a_n \tilde{q} < a_{n+1} \xrightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1} \tilde{q}^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{\text{по необходимому признаку}}$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.10 (радикальный признак Коши).

Пусть $a_n \geq 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \mid \sqrt[n]{a_n} - q \mid < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} \mid q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n - \text{геометрическая прогрессия} (\tilde{q} < 1)$$

\Rightarrow ряд сходится $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}}$ сходится исходный ряд

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists\{a_{n_k}\} : \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$
ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.11 (Признак Раабе). *Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$, тогда*

1. Если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Даламбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)) 2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Raabе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

П.6 Число e, как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n \end{aligned}$$

2. Пусть $m < n$

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m} \\ &\Rightarrow e_n > A_{n,m} \end{aligned}$$

Зафиксируем m . Тогда при $n \rightarrow \infty$ $e \geq S_m$

3. $| \Rightarrow e_n < S_n \leq e$ и $\{S_n\} \nearrow$ По th Вейерштрасса Ряд сходится

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа e частичными суммами:

$$\begin{aligned} 0 < e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

Упражнение. Доказать, что e - иррационально

Упражнение. Доказать, что $2 < e < 3$

§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

П.1

Определение §2.1. Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ называется знакочередующимся, где $\forall n a_n > 0$

Теорема §2.1 (Признак сходимости Лейбница знакочередующихся рядов). Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\{a_n\} \searrow$, то ряд сходится

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху} \\ S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow \xrightarrow[\text{по th Вейерштрасса}]{\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S} \\ S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow[\text{при } n \rightarrow \infty]{S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S \end{aligned}$$

■

Замечание. Признак достаточный, но не необходимый!

Следствие (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$\begin{aligned} S &= S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots \\ |R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1} \\ &\Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1} \end{aligned}$$

Лемма (Абеля). Дано a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . При этом:

1. $\{a_i\}$ монотонно
2. $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, также перепишем (2) условие, как $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\ |\sum_{k=1}^n a_k b_k| &= |B_1||a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}||a_{n-1} - a_n| + |B_n||a_n| \leq \\ &\leq B(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n|) = \\ &= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \quad \text{Использую неравенство треугольника} \leq B(|a_1| + 2|a_n|) \end{aligned}$$

■

Теорема §2.2 (Признак Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно стремится к 0

2. $\exists C \forall n |\sum_{k=1}^n b_k| \leq C$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия a_n - монотонно $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$

Из (2) условия $\forall n \forall p |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| = |\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k| \leq 2C$

Рассмотрим a_n, \dots, a_{n+p} и $b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля } (B = 2C)} |\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$ ■

Теорема §2.3 (Признак Абеля). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно и ограничена

2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$

Из (2) условия $\xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| < \frac{\varepsilon}{3A}$

Рассмотрим $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\begin{aligned} \text{По лемме Абеля. } \{a_i\} \text{ - монот. из усл, } B = \frac{\varepsilon}{3A} & \xrightarrow{\text{По пр. Коши}} |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) = \\ & = \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Тогда по кр. Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится ■

Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2. Из условия, что $\{a_n\} \searrow 0$ и того факта, что $|\sum_{n=1}^m (-1)^n| \leq 1$,
по теореме Дирихле следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ - сходится ■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем m . Тогда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \searrow \text{к } 0, b_n = \sin(nx) \\ S_m &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(mx) = \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \dots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \dots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) \end{aligned}$$

Если $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$ ряд сходится

Если $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$
 $\xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$ ряд сходится

Упражнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема §3.1. Абсолютный ряд сходится

Доказательство. Дано $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится. Докажем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - сходится} \xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится ■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ - расходится \Rightarrow ряд сходится не абсолютно

Определение. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

Теорема §3.2 (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов).

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ абсолютно сходится

2. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ или $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, тогда ряд $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходитя,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

Доказательство.

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника

2. По аналогии с признаками для положительных рядов ■

Теорема §3.3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен путем произвольной перестановки членов a_n . Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{} \mathbb{N}$ В самом деле это биекция так, как $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$ и $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

1. $\forall m \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$

2. $\forall l \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$

• $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n|$ и $\{S_n^B\} \searrow \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится

• Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ Тогда:

$$\forall \varepsilon \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$

Пусть $m \geq N$ $|\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b| < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначис ее за } C}$$

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$|\sum_{n=1}^l a_n - a| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |a - b| &= |\sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c| < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} \\ a = b & \end{aligned}$$

■

Теорема §3.4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходятся, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений $a_m b_n$, расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$, то сумма полученного ряда равна $S = S^A S^B$

Доказательство. Расположем $a_m b_n$ в удобном порядке:

$$\begin{aligned}
 & a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\
 & a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\
 & \quad \dots \\
 & a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\
 & \quad \dots \\
 & a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения: $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$, $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху

$S_n \nearrow$, т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$\begin{aligned}
 S_{n^2} &= |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B \\
 | \Rightarrow S_{n^2} \leq & \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. схожд.}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

\Rightarrow ряд (1) сходится абсолютно $\stackrel{\text{th 3}}{\Rightarrow}$ исходный ряд сходится

Докажем, что $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\begin{aligned}
 \widetilde{S}_n^A &= \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \\
 \widetilde{S}_{n^2} &= \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow \tilde{S}^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow \tilde{S}^B} \Rightarrow S = S^A S^B
 \end{aligned}$$

■

Замечание. Пусть есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится \Leftrightarrow сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Теорема §3.5 (Римана). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall A$ можно так переставить члены ряда, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*

Доказательство.

Пусть $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$ - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$ - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится \Rightarrow

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходится (противоречие).

Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть $A \geq 0$:

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq \\ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$, то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$, то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимы признак сход-ти}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

■

Упражнение. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходится

Упражнение. Докажите, что если при любой перестановки его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

Глава 2 Интеграл

§1 Неопределенный интеграл

П.1 Первообразные

Определение. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ (точная) первообразная ф-ции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall x \in I F'(x) = f(x)$

Вспоминания. Теорема Лагранджа о среднем. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Лемма §1.1 (о точных первообразных). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, F_1, F_2 - первообразные на $[a, b]$, тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G'(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

Лемма §1.2 (из будущего). У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке

Пример. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной первообразной ф-ции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ всюду за исключением конечного числа точек и F - непрерывная

Пример. $|x|$ - обобщенная первообразная $\text{sign}(x)$, т.к $|x|' = \text{sign}(x)$

Лемма §1.3. Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке

Лемма §1.4 (об обобщенной первообразной). Если $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ обобщенные первообразные функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ - точки, в которых нет $F'_1(x)$ или нет $F'_2(x)$

На любом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ по предыдущей лемме F_1 и F_2 - точные первообразные ф-ции f (по лемме 3)

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}] \\ F_1(x) &= F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i] \\ \Rightarrow F_1(x_i) &= F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1} \end{aligned}$$

■

Обозначение. Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции f называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

Обозначение. $f(x)dx$ -подынтегральное выражение

Обозначение. Иногда удобно ввести обозначение: $F'(x)dx = dF(x)$

Замечание. У dx приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

П.2 Приемы отыскания первообразных

1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

| Функция $f(x)$ | Первообразная $F(x)$ |
|--------------------------|--------------------------------------|
| k | $kx + c$ |
| x^n | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x + c$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + c$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x + c$ |
| e^x | $e^x + c$ |
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + c$ |

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -\ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \quad \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример.

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Пример.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$
$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx + C$$

Замечание. Когда использовать: $\int x^n f(x) dx$, $\int \dots \ln \dots dx$, $\int \dots arctg \dots dx$

Пример.

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= x(-\cos x) + \int \cos(x) dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \ln x dx = \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если $\phi(x)$ - дифференцируемая функция, то $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y)) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} 2x dx = \int \frac{1}{x^2+1} (x^2)' dx$$

Обозначим $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$F_1(x)$ - Первообразна на $[a, b]$

$F_2(x)$ - Первообразна на $[b, c]$

Тогда:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

П.3 Первообразная от рациональной функции

Определение. Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Где $P(x), Q(x)$ - многочлены

Обозначение. $\deg P$ - степень многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

Замечание. В комплексных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где $z_1 \dots z_n$ - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:
либо корень вещественный, $z_k \in \mathbb{R}$
либо есть комплексно сопряженные z_k, \bar{z}_k : $(z - z_k)(z - \bar{z}_k) =$
 $= z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k$

Лемма §1.5. Если $P(x)$ - многочлен над \mathbb{R} , то его можно разбить на $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{l_n}$. Это представление единственно (с точностью до перестановки множественных корней).

Лемма §1.6 (о делении с остатком). Если $P(x), Q(x), \deg(P) \geq \deg(Q), Q \neq 0$, тогда $\exists!$ многочлены $q(x), r(x), \deg(q) = \deg(P) - \deg(Q), \deg(r) < \deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$

Лемма §1.7. Если $\deg(P), \deg(Q) > 0$, и $d(x) = NOD(P(x), Q(x))$, тогда $\exists u(x), v(x) : \deg(u) < \deg(Q), \deg(v) < \deg(P), d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

Теорема §1.1 (о разложении в простые дроби). Пусть $P(x), Q(x)$ - многочлены, $0 < \deg(P) < \deg(Q), NOD(P(x), Q(x)) = 1$ и $P(x)$ как в лемме 5, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Пример.

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

2. теорема о разложении в простые дроби: $R(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}$. Найдем коэффициенты A, B, C

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-5}{x - 1} dx + \int \frac{8}{x - 2} dx + \int \frac{-9}{(x - 2)^2} dx$$

П.4 Первообразные простых дробей

Замечание.

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x - x_i| + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-x_i)^k} dx &= \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C \\
\int \frac{1}{x^2+px+q} dx &= \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x-\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{a>0}} dx = \\
&= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2 + 1)} dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2+1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + \frac{p}{2a} \right) + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y+1} = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C \\
\int \frac{x}{(1+x)^k} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy = \frac{y}{1+y^2} - \int y \left(\frac{1}{(1+y^2)^k} \right)' dy = \frac{y}{1+y^2} - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1}2y)}{(1+y^2)^{2k}} dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy = \frac{y}{1+y^2} - 2k \int \left(\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}} \right) dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2kI_k(y) + 2kI_{k+1}(y) \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy \\
I_1(y) &= \operatorname{arctg} y + C \\
I_{k+1}(y) &= \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(y)
\end{aligned}$$

П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

R - рациональная функция

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ замена $y = \sqrt[n]{ax+b}$ сводит к рациональной функции

Замечание.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) \frac{y^{n-1}}{a} dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1} + x - 5} dx \ominus$$

$$y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1, dx = 2ydy$$

$$\ominus \int \frac{\sqrt{2}y^2y}{y+y^2-6} dy = 2\sqrt{2} \int \frac{y^2}{y^2+y-6} dy = 2\sqrt{2} \int \left(1 - \frac{y-6}{y^2+y-6}\right) dy = \dots$$

$$2. R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}), ad \neq bc \text{ замена } y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y) dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

3. $R(\sin X, \cos X)$ универсальная тригонометрическая замена $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$$

$$\cos x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$dx = \frac{2}{1+y} dy$$

Если $R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X)$, $t = \cos X$

Если $R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos X)$, $t = \sin X$

Если $R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin X, \cos X)$, $t = \operatorname{tg} X$

4. $R(shX, chX)$ по аналогии с пунктом (3) + работает замена $y = e^x$

П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций
 - Разложение на простые дроби
 - Метод Остроградского(*)
- Интегрирование тригонометрических функций
 - $\int R(\sin X; \cos X)dx$, $t = \tg\left(\frac{x}{2}\right)$ - универсальная подстановка
 - Четность/нечетность функций \rightarrow специальная замена
 - Частные случаи(**)
- Интегрирование иррациональных функций
 - $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$
 - $$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots)dx$$
 - $$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}, N = \text{NOK}(m, n, \dots)$$
 - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ - выделение полного квадрата или замена Эйлера(***)
 - Биноминальный интеграл (****)

Замечание. Все методы сводятся к интегрированию рациональных функций

П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.

$$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) dx \quad \text{используя формулы понижения степени получим}$$

$$\int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^n dx$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m+1}(x) \cos^{2n}(x) dx &= \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n+1}(x) dx = \\ &= - \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) d\underbrace{\cos(x)}_t = - \int (1-t^2)^m t^{2n} dt \end{aligned}$$

3. $\int \sin(ax) \cos(bx) dx = (1)$

$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = (2)$

$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = (3)$

$$(1) = \int \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) dx$$

$$(2) = \int \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx$$

$$(3) = \int \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) dx$$

П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_u\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака a сводится к:

- $\int R(u; \sqrt{a^2 - u^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{u^2 - a^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{a^2 + u^2}) du$

| случай | подстановка (замена) | du | корень |
|--------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--|
| $\sqrt{a^2 - u^2}$ | $u = a\sin(t)$ | $du = a\cos(t)dt$ | $a\cos(t)$ |
| | $u = a\cos(t)$ | $du = -a\sin(t)dt$ | $a\sin(t)$ |
| $\sqrt{u^2 - a^2}$ | $u = \frac{a}{\sin(t)}$ | $du = -\frac{a\cos(t)}{\sin^2(t)}dt$ | $\sqrt{(\frac{a}{\sin(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{ctg}(t)$ |
| | $u = \frac{a}{\cos(t)}$ | $du = -\frac{a\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$ | $\sqrt{(\frac{a}{\cos(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(t)$ |
| $\sqrt{u^2 + a^2}$ | $u = \frac{a}{\operatorname{tg}(t)}$ | $du = \frac{a}{\cos^2(t)}dt$ | $\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{tg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\cos(t)}$ |
| | $u = \frac{a}{\operatorname{ctg}(t)}$ | $du = -\frac{a}{\sin^2(t)}dt$ | $\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{ctg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\sin(t)}$ |

Пример.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ dx = \frac{dt}{\cos^2(t)} \\ x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^2(t) - \operatorname{tg}(t) + 1}{\frac{1}{\cos^2(t)}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\
 &= \int (\operatorname{tg}^2(t) + 1) \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos(t) = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} + \cos(t) = \ln|u| + \cos(t) + C = \\
 &= \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2}\right)| + \cos(\operatorname{arctg}(x)) + C
 \end{aligned}$$

П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$1. \ a > 0 \quad \underbrace{\sqrt{ax^2 + bx + c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{ax}$$

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{ax} + ax^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

Получаем рациональную функцию под интегралом

$$2. \ 2 \text{ различных корня } ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_0}, \quad t^2(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c$$

$$t^2(x - x_0) = a(x - x_1)$$

$$x = \frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) =$$

$$= t\left(\frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} - x_0\right)$$

П.10 Биноминальные интегралы

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

a) p - целое, тогда по биному Ньютона

b) p - дробное

$$\text{Выполнить замену } z = x^n, \text{ тогда } x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$$

$$\Rightarrow \int z^{\frac{m}{n}}(az + b)^p \frac{1}{n}z^{\frac{n(n-1)}{n}} dz =$$

Вариант 1

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (az + b)^p dz, \text{ если } \frac{m+1}{n} \text{ целое, то}$$

$$p = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow t^\nu = az + b = ax^n + b \Rightarrow \text{получим рациональную функцию}$$

Вариант 2

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz$$

Если $\frac{m+1}{n} + p - 1$ - целое, то $t^\nu = \frac{az+b}{z} = \frac{ax^n + b}{x^n}$

Теорема §1.2 (Чебышева).

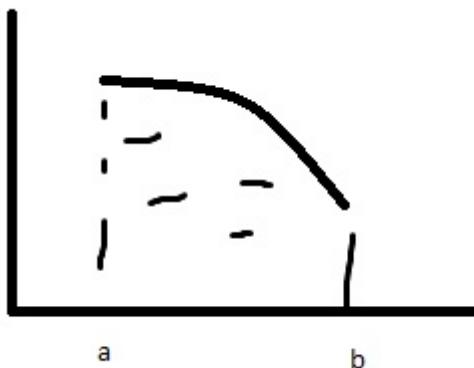
$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

вычисляется в элементарных функциях только, если

1. p -целое

$$2. p\text{-дробное}, \frac{\mu}{\nu} \begin{cases} \frac{m+1}{n} - \text{целое} & , t^\nu = ax^n + b \\ \frac{m+1}{n} + p - \text{целое}, t^\nu = \frac{ax^n + b}{x^n} \end{cases}$$

Глава 3 Определенные интегралы



$$f : [a, b] \rightarrow R, f(x) \geq 0$$

Формула (Ньютона-Лейбница).

$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \text{ где } F \text{ - первообразная } f$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Определение. Кольцо множеств - набор множеств замкнутый относительно $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Пример. Подмножество \mathbb{R}^2 :

- Все подмножества пл-ти $P(\mathbb{R}^2)$
- $\{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$
- Все ограниченные множества
- Все многоугольники ($+\emptyset$)

Определение. Площадь на кольце R подмножеств \mathbb{R}^2 это функция $S : R \rightarrow \mathbb{R}$, такая что:

1. $\forall A \subset R, S(A) \geq 0$
2. $\forall A, B \subset R, A \cap B = \emptyset \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. не меняется при сдвигах, поворотах, отражениях. Т.е $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(L(A)) = S(A)$
4. $S([0, 1]^2) = 1$

Замечание. Аналогично $V : R(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ - объем

Замечание. Аналогично $l : R(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ - длина

Замечание. 1. Из определения $S(\emptyset) = 0$
 $S(A \cup \emptyset) = S(\emptyset) + S(A)$

2. $S([0, a] \times [0, b]) = ab$

Замечание. Площадь однозначно определяется на кольце многоугольников

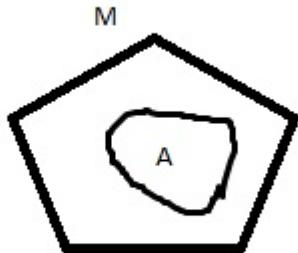
Следствие §0.1. $A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$

Доказательство.

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

■

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченное множество.



$S^*(A) = \inf(S(M), M \text{ - многоугольник}, A \subset M)$ - Внешняя площадь

$S_*(A) = \sup(S(M), M \text{ - многоугольник}, M \subset A))$ - Внутренняя площадь

Причем $S^*(A) \geq S_*(A)$

Пример. Когда не совпадают:



$E = (Q \cap [0, 1]^2)$ - точки единичного квадрата с рациональными координатами \Rightarrow

$$S^*(E) = 1$$

$$S_*(E) = 0$$

Определение. Если $S_*(A) = S^*(A)$, тогда A - квадрируемое

Теорема §0.1. Множество квадрируемых множеств это кольцо. И площадь продолжается на них с сохранением всех свойств

П.1 Модель интеграла Дарбу

Определение. Разбиение отрезка $[a, b]$, это конечный набор точек $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

Свойство. P_2 - подразбиение P_1 , если $P_1 \subset P_2$

Свойство. У любых двух разбиений есть общее подразбиение

Определение. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Определим *верхний интеграл Дарбу*.

Пусть $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. На каждом отрезке $A_i = [x_i; x_{i+1}]$ выберем $C_i \geq f(x) \forall x \in A_i$.

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i) \right\}$$

Аналогично определяется *нижний интеграл Дарбу*

$$\begin{aligned} \int_{a*}^b f(x)dx &= \\ &= \sup_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i), P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}, C_i \leq f(x) \forall x \in [x_i; x_{i+1}] \right\} \end{aligned}$$

Замечание.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx$$

Пример.

$$f_D : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Замечание. Если они совпадают, то f интегрируема по Дарбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$$

Интеграл Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$

П.2 Модель интеграла Римана

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

Набор точек $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - подчинён разбиению P , если

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Формула (Сумма Римана).

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Определение. Шаг разбиения: $\Delta(\tau) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$

Определение. Интеграл Римана I - называется интегралом Римана, f на $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi)$$

Если этот предел существует и независит от τ, ξ

Пример. $f \equiv c$ на $[a, b]$

$$S(f, \tau, \xi) = c(b - a)$$

Пример.

$$D(X) = \begin{cases} 1, & \text{рац на } [0, 1] \\ 0, & \text{иррациональны на } [0, 1] \end{cases}$$

$\forall \tau$ - разбиение $[0, 1]$ $\exists \xi'_k \in \mathbb{Q}, \xi''_k \notin \mathbb{Q}$

$$S(D, \tau, \xi'_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(x_k - x_{k-1}) = 1$$

$$S(D, \tau, \xi''_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$| \Rightarrow \#lim$$

Пример.

$$R(X) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ несократима на } [a,b] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(R, \tau, \xi) &= \sum_{i=0}^k R(\xi_i) \delta x_i = \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}} R(\xi_i) \delta x_i + \sum_{\substack{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}}} R(\xi_i) \delta x_i < \\ &< \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}}} \frac{1}{N} \delta x_i + \sum_{\substack{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}}} 1 \delta x_i < \frac{1}{N} \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}}} \delta x_i + \Delta(\tau) \text{кол-во } \{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}\} < \end{aligned}$$

Грубой оценкой является N^2

$$N = 1, x = 1 \rightarrow 1$$

$$N = 2, x = 1, x = \frac{1}{2} \rightarrow 2$$

$$N = 3, x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3} \rightarrow 4$$

Далее, если кол-во $\{x : R(x) \geq \frac{1}{N}\}$ не более N^2 , то для $\left\{x : R(x) \geq \frac{1}{N+1}\right\}$

могут добавляться дроби $\frac{k}{N+1}$, $k = 1, \dots, n$

Т.е добавится не более N штук $N^2 + N < (N+1)^2$

$$S(R, \tau, \xi) < \frac{1}{N} + \Delta(\tau)N^2$$

Засчет выбора достаточно малого $\Delta(\tau) : \forall \varepsilon > 0 \exists N \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\Delta = \frac{1}{N^3}$
 $\Rightarrow \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta$ получаем:

$$|0 - S(R, \tau, \xi)| = \frac{1}{N} + \delta N^2 = \frac{1}{N} + \frac{N^2}{N^3} = \frac{2}{N} < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 R(x) dx$$

П.3 Верхние и нижние суммы Дарбу

Определение. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Определим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу.

f - оgrp на $[a, b]$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x)), m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x))$$

$$S_\tau = \sum_{k=0}^n M_k \Delta x_k, s_\tau = \sum_{k=0}^n m_k \Delta x_k$$

Свойство §0.1.

$$s_\tau \leq S(f, \tau, \xi) \leq S_\tau \quad \forall \xi$$

Свойство §0.2.

$$\tau' \subseteq \tau'' \Rightarrow S_{\tau''} \leq S_{\tau'}$$

Свойство §0.3.

$$\forall \tau', \tau'': s_{\tau'} \leq S_{\tau''}$$

Определение. Нижний интеграл Дарбу:

$$\sup_{\tau} (s_{\tau}) = \underline{I} = \int_{a*}^b f(x) dx$$

Определение. Верхний интеграл Дарбу:

$$\inf_{\tau} (S_{\tau}) = \bar{I} = \int_a^{b*} f(x) dx$$

Свойство §0.4.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \bar{\xi}: 0 \leq S_{\tau} - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \varepsilon$$

Доказательство. По определению $M_k : \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $\underline{\xi} = \xi_k$

$$S_{\tau} - S(f, \tau, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^n (M_k - f(\xi_k)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

■

Свойство §0.5.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \underline{\xi}: 0 \leq S(f, \tau, \underline{\xi}) - S_{\tau} < \varepsilon$$

Свойство §0.6. Пусть τ' получена из τ путем добавления p точек. Тогда $S_\tau - S_{\tau'} \leq (M - m)p\Delta(\tau)$, $S_{\tau'} - S_\tau \leq (M - m)p\Delta(\tau)$

Доказательство. добавление 1 точки: $x_{k-1} < x' < x_k$

$$\begin{aligned} S_\tau - S_{\tau'} &= M_k(x_k - x_{k-1}) - (M'_k(x_k - x') + M''_k(x' - x_{k-1})) = \\ &= (M_k - M_{k'})(x_k - x') + (M_k - M''_k)(x' - x_{k-1}) \leq (M - m)\Delta(\tau) \end{aligned}$$

Далее по индукции ■

Лемма §0.1 (Дарбю).

$$\bar{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S_\tau$$

$$\underline{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} s_\tau$$

Доказательство. $M = m \Rightarrow f(x) = const = m = M \quad \underline{I} = s_\tau, \bar{I} = S_\tau$

$$M > m, \forall \varepsilon \exists \tau^* : S_{\tau^*} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ по опр inf}$$

Пусть p - кол-во точек τ^* , лежащие внутри $[a, b]$. Выберем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M - m)p}$$

Пусть $\tau : \Delta(\tau) < \delta, \tau' = \tau \cup \tau^*$

$$S_\tau - \underline{I} = S_\tau - S_{\tau'} + S_{\tau'} - \underline{I} \leq (M - m)p\Delta(\tau) + S_{\tau'} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для второго УПР! ■

Теорема §0.2 (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману). *Ограниченнная на $[a, b]$ ф-ция f интегрируема по Риману $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$*

Доказательство. \Rightarrow

Тогда $\exists \delta > 0$ из определения инт-мости выберем $\tau : \Delta(\tau) < \delta$

$$|I - S(f, \tau, \xi)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \xi$$

По св-ву 4 и 5 выберем $\xi, \bar{\xi}$:

$$S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S_\tau - s_\tau = S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) + S(f, \tau, \bar{\xi}) - I + I - S(f, \tau, \underline{\xi}) + S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \varepsilon$$

\Leftarrow

Из условия следует: $\underline{I} = \bar{I} = I$ - обозначение.

По лемме Дарбу: по ε выберем $\delta : \Delta(\tau) < \delta$

$$\begin{aligned} S_\tau - I &< \frac{\varepsilon}{2}, I - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \xi \text{ по св-ву } 1 |S(f, \tau, \xi) - I| &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

Воспоминания. В прошлом семестре вводилось определение колебания функции f на $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x'') - f(x')|$$

Очевидно, что

$$\omega_k = \underbrace{\frac{M_k}{\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)}}_{} + \underbrace{\frac{m_k}{\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)}}_{} \quad \text{где } M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Следовательно,

$$\underbrace{S_\tau - s_\tau}_{\text{Эта разность фигурирует в Теореме 1}} = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$$

Следствие. Ограниченнная на $[a, b]$ функция f интегрируема
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Разбиение $\tau : \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$

§1 Некоторые классы интегрируемых функций

П.1 Некоторые классы интегрируемых функций

Теорема §1.1 (Основное св-во интегрируемых функций, необходимое условие). *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$*

От противного. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ и пусть выбрано разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$

Т.к f не ограничена на $[a, b]$, то f не ограничена на каком-то маленьком отрезке разбиения. Пусть это будет $[x_0, x_1]$. Тогда \exists последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$ (здесь (n) просто номер ξ_1), $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty$$

Фиксируем точки на других отрезках: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда для данного τ и ξ_i сумма $\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i$ какое-то определенное число.

$$\begin{aligned} | \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi_1^{(n)}, \xi_2, \xi_3, \dots) = \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\xi_1^{(n)}))}_{\rightarrow \infty} \Delta x_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i}_{\text{Число}} = \infty \\ | \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 : |S(f, \tau, \xi_1^{n_0}, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k)| &> M \end{aligned} \quad (1)$$

$| \Rightarrow$ интегральные суммы не могут стремиться к конечному пределу при $\Delta(\tau) \rightarrow 0$

Действительно, если $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = A$ - конечное, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - A| < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |S(f, \tau, \xi)| \leq |S(f, \tau, \xi) - A| + |A| < \varepsilon + |A|$$

А мы получили в ??, что \forall разбиения τ при фиксированном ε можно выбрать ξ так, что $|S(f, \tau, \xi)| > |A| + \varepsilon = M \Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.2. *Непрерывная на отрезке функция - интегрируема*

Доказательство. По теореме Кантор, любая непрерывная на отрезке функция - равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение τ такое, что $\Delta(\tau) < \delta$, тогда если $x', x'' \in [x_{k-1}; x_k]$, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$$\sup_{x', x''} |f(x') - f(x'')| = \sup (f(x')) - \inf (f(x'')) = M_k - m_k \leq \varepsilon \text{ Равенство появилось из-за } \sup_{x', x''}$$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum M_k - m_k \Delta x_k \leq \varepsilon(b - a)$$

\Rightarrow по критерию Дарбу (??) функция интегрируема

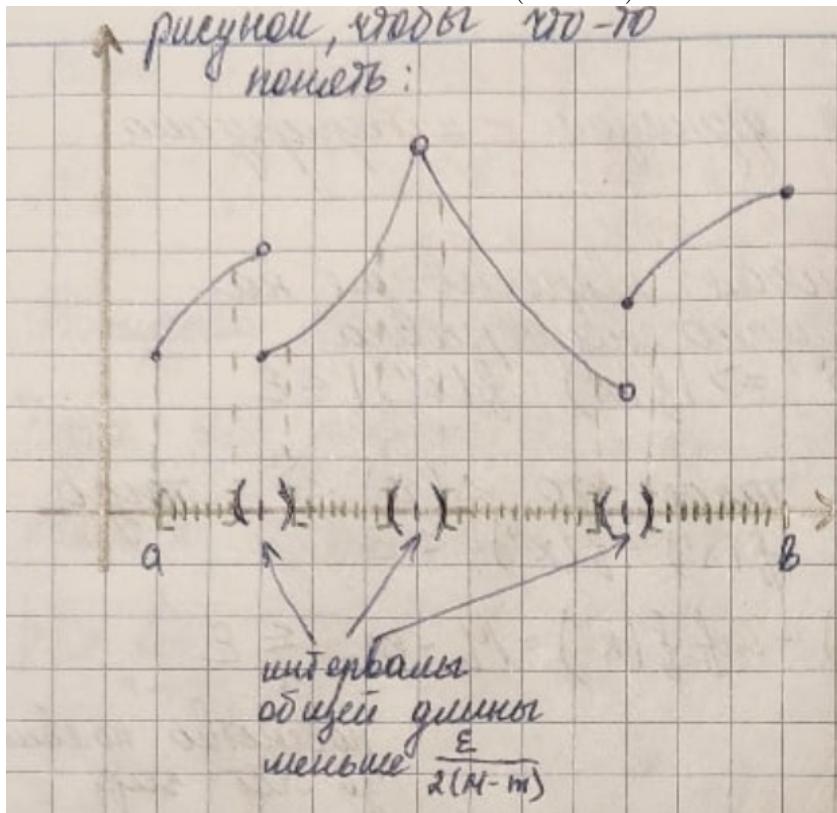
■

Теорема §1.3. *Если f имеет конечное число разрывов и ограничена на $[a, b]$, то f интегрируема*

Эта теорема будет следовать из более сильной теоремы

Теорема (3!). Пусть f ограничена на $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва f и имеющих общую сумму длин меньшую, чем ε , то f интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $\varepsilon > 0$. Покроем все разрывы конечным числом интервалов общей длины меньше чем $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$



Если из $[a, b]$ удалить конечное число интервалов, то останется объединение конечного числа отрезков на которых f непрерывна.

Разобьем каждый отрезок так, что колебание ω_i там меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$

Объединим эти разбиения и интервалы с разрывами получаем некоторое разбиение τ

Итак,

$$S_\tau - s_\tau = \sum \omega_k \Delta x_k = \underbrace{\sum \omega_i \Delta x_i}_{\text{Сумма по всем маленьким отрезкам}} + \underbrace{\sum \omega_j \Delta x_j}_{\text{Сумма по всем интервалам}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{\text{по маленьким отрезкам,} \\ \text{длины в сумме} \\ <(b-a)}} \Delta x_i}_{+ \underbrace{(M-m) \sum_{\substack{\text{по интервалам,} \\ \text{их длины} < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}}} \Delta x_j}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

| \Rightarrow по критерию Дарбу ?? функция интегрируема ■

Замечание. В теореме 3' ?? и на рисунке точек разрыва может быть бесконечно числом

Теорема §1.4 (Критерий Лебега). *Пусть f ограничена на $[a, b]$. f интегрируема \Leftrightarrow множество точек разрыва обладает свойством: $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n$ - конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что $\{\text{множество точек разрыва}\} \subset \bigcup I_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ (другими словами, мн-во точек разрыва меры 0)*

Теорема §1.5. *Монотонная на $[a, b]$ функция - интегрируема*

Доказательство. f - монотонная $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b]$
(пусть возрастает)

Пусть $\varepsilon > 0$. τ - разбиение $[a, b]$ на равные отрезки длиной меньше

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}, \text{ т.e. } \Delta(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$\begin{aligned} \text{Очевидно, что } \forall [x_{i-1}, x_i] \ m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i), \text{ т.к. } f \text{ возрастает} \Rightarrow \\ S_{\tau} - s_{\tau} = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \Delta(\tau) \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ = \Delta(\tau)(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

| \Rightarrow по критерию Дарбу ?? функция интегрируема ■

§2 Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла

$\mathcal{R}_{[a,b]}$ - множество интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$
Мы уже выяснили, что в этом мн-ве лежат непрерывные, монотонные, разрывные функции с мн-вом разрывных точек разрыва меры 0 (??)

Теорема §2.1. *Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, тогда:*

1. $f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
2. $\alpha f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

3. $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

4. $fg \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

5. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$. Тогда если $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $f \Big|_{[c,d]} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Доказательство. 1. Пусть τ - разбиение $[a, b]$, $\{\xi_i\} = \xi$ - отмечены.

Тогда $S(f + g, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^k (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i = S(f, \tau, \xi) + S(g, \tau, \xi)$

Т.к $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) \exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(g, \tau, \xi)$, то $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f + g, \tau, \xi)$

$$| \Rightarrow f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \text{ и } \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

2. Аналогично 1)

3. Аналогично 1)

4. Удобнее на языке колебаний

$f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow$ они ограничены $\Rightarrow \exists A > 0, B > 0 :$

$$|f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq AB \quad \forall x \in [a, b]$$

Пусть τ - разбиение $[a, b]$. Рассмотрим разность из определения колебаний функции fg :

$$\begin{aligned} |f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| &= |f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')| = \\ &= \underbrace{|f(x'') - f(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции } f}} \cdot \underbrace{|g(x'')|}_{\leq B} + \underbrace{|g(x'') - g(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции } g}} \cdot \underbrace{|f(x')|}_{\leq A} \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g) \Rightarrow \omega_i(fg) \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g)$$

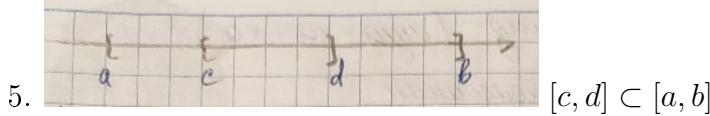
Получаем:

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(fg) \Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^k \omega_i(f) \Delta x_i + A \sum_{i=1}^k \omega_i(g) \Delta x_i \quad (2)$$

f и g интегрируемы \Rightarrow по теореме 2 пр.2 $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_{1,2} : (\text{у каждой функции свой})$

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon, \sum_{i=1}^k \omega_i(g) \Delta x_i < \varepsilon$$

$| \Rightarrow$ правая часть неравенства ?? $\rightarrow 0 \Rightarrow$ левая часть неравенства $\rightarrow 0 \Rightarrow$ по той же теореме 2 пр.2 $f g$ - интегрируема



$$[c, d] \subset [a, b]$$

Простые факты:

- (a) Если f ограничена на $[a, b]$, то f ограничена на $[c, d]$
- (b) Пусть τ - разбиение $[c, d]$ мелкости $\Delta(\tau)$. Тогда можно добавить к точкам из τ конченое число точек принадлежащих $[a, b] \setminus [c, d]$, причем в так, чтобы объединение этих точек с τ_1 давало разбиение τ с мелкостью $\Delta(\tau_1) = \Delta(\tau)$

Получаем:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_\tau - s_\tau &= \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau}} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau_1, \\ \text{слагаемых больше}}} (M_i - m_i) \Delta x_i = S_{\tau_1} - s_{\tau_1} \xrightarrow[\substack{\text{по кр Дарбю??} \\ f \text{-интегр. на } [a,b]}]{} 0 \end{aligned}$$

$| \Rightarrow S_\tau - s_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow f$ интегрируема на $[c, d]$



§6 Формула Ньютона-Лейбница и приложения

П.1 Свойства интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int_a^x f(t)dt$$

Теорема §6.1 (Непрерывность). Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Тогда $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывная функция на $[a, b]$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$F(x)$ определена $\forall x$;

$$\text{Из } f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow |f(x)| \leq C \text{ на } [a, b]$$

$$\text{Далее } F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Итак:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq C|h| \text{ - липшицевость}$$

$$| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x) \text{ - непрерывность}$$

■

Лемма §6.1 (дифференцируемость). Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и непрерывна в т. $x \in [a, b]$, тогда F дифференцируема в т. x и $F'(x) = f(x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} [f(x) + f(t) - f(x)]dt = \\ &= \int_x^{x+h} f(x)dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt = f(x) \cdot h + \alpha(x, h) \end{aligned}$$

Итак:

$$F(x+h) - F(x) = f(x) \cdot h + \alpha(x, h)$$

$$\text{Где } \alpha(x, h) = \int_x^h (f(t) - f(x)) dt$$

Критерий дифференцируемости: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} = 0$

Проверим:

Из непрерывности $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

Пусть теперь $|h| < \delta$, тогда $\forall t \in (x, x+h) |x-t| < h$ и

$$|\frac{\alpha(x, h)}{h}| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| < \left| \frac{1}{h} \varepsilon h \right| = \varepsilon$$

■

Теорема §6.2 (Формула Ньютона-Лейбница). *Каждая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Кроме этого*

для любой первообразной $G : \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$

Доказательство. По лемме $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, т.е F - первообразная. Далее, если G еще одна первообразная для f , то $G(x) = F(x) + A \quad \forall x \in [a, b]$ и

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

■

Π.2 Замена переменной в интеграле Римана

Сначала случай простой: f - непрерывна

Теорема §6.3. $f \in C_{[a,b]}$, $\phi \in C_{[\alpha,\beta]}^1$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Доказательство. $f(x)$ - непрерывна $\xrightarrow{\text{по теореме 2§3}} f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
 $f(x), \phi(x), \phi'(t)$ - непрерывны \Rightarrow т.к композиция непрерывных функций непрерывна и произведение непрерывных функций непрерывная функция, получаем:

$$f(\phi(t)) \phi'(t) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Итак, оба интеграла существуют. Пусть F - первообразная f на $[a, b]$, тогда очевидно $G(\beta) - G(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
 (В первом и последнем равенстве используется теорема 2) ■

Замечание. Композиция непрерывных функций - непрерывная функция. Но композиция интегрируемых по Риману функций может оказаться не интегрируемой

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - несократима} \\ 0, & x \text{ - иррационально} \end{cases}$ - функция Римана
 интегрируема на $[0, 1]$

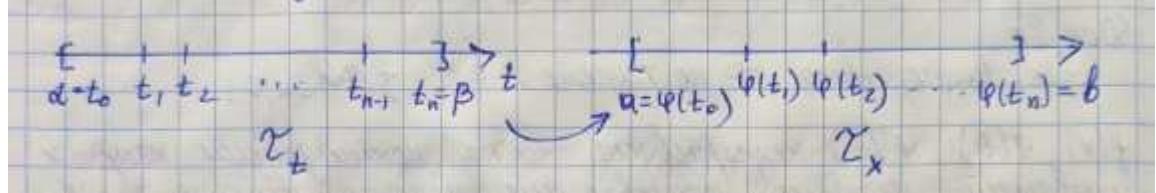
$g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ - интегрируема на $[0, 1]$

Но $g(f(x)) = D(x)$ - функция Дирихле не интегрируема

Теорема §6.4. Пусть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $\phi \in C_{[\alpha,\beta]}^1$ и ϕ строго возрастает, причем $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$

Тогда $f(\phi(t))\phi'(t) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Доказательство. $\phi \nearrow$ поэтому $\forall \tau_t \xrightarrow{!} \tau_x = \{\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_n)\}$



$\phi(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta] \Rightarrow \phi(t)$ - равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$

$$|\Rightarrow \Delta(\tau_t) \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta(\tau_x) \rightarrow 0$$

Далее, любой набор $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ задает народ $\xi_k = \phi(\theta_k) \in [x_{k-1}, x_k]$

Рассмотрим $\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$

$$= \sum f(\phi(\theta_k))(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})) = \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}) = (\overline{\theta_k} \in [t_{k-1}, t_k])$$

$$= \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}) + \sum f(\phi(\theta_k))(\phi'(\overline{\theta_k}) - \phi'(\theta_k))(t_k - t_{k-1})$$

$I = II + III$ (обозначение предыдущего равенства). Пусть $\Delta(\tau_t) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Delta(\tau_x) \rightarrow 0$$

$$|\Rightarrow I \xrightarrow[\Delta(\tau_x) \rightarrow 0]{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} \int_a^b f(x)dx, \text{ т.к } f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

$$|III| \leq C \sum \omega_k(\phi') \Delta t_k \xrightarrow[\Delta(\tau_t) \rightarrow 0]{\Delta(\tau_x) \rightarrow 0} 0 \text{ т.к } \phi' \in \mathcal{R}_{[\alpha,\beta]}$$

Это означает:

$$\exists \lim_{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} II = \lim_{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} S(f(\phi)\phi', \tau_t, \theta_k) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

■

П.3 Интегрирование по частям, формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема §6.5 (Интегрирование по частям). Пусть $u, v \in C_{[a,b]}^1$. Тогда

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

Доказательство. $u(x)v(x)$ - первообразная для $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

■

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x, a)$$

Наша цель получить $r_n(x, a)$ в виде интеграла от f , произведений и т.д
Для $n = 0$, т.е $f(x) = f(a) + r_0(x, a)$ такая формула есть

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Продолжим процесс вытаскивание произвольной из под \int - ла

$$\begin{aligned} f(a) + \int_a^x f'(t)dt &= f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t) = f(a) - f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = \\ &= f(a) + f'(a)(a-t) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = P_1(x) - \int_a^x \frac{1}{2} f''(t)d(x-t)^2 = \\ &= P_1(x) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = P_2(x) + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = \cdots \Rightarrow \end{aligned}$$

По индукции легко получить формулу:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Теорема §6.6. Пусть f имеет непрерывную $n+1$ производную на отрезке с концами a и x . Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Пример: Вычислить $\int_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до $\frac{1}{100}$

используя Принцип.

$$|\sin x - P_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x |\sin^{(n+1)} t| |(x-t)^n| dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{-1}{n!} \int_0^x u^n du = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow |\sin x^2 - P_n(x^2)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \sin x^2 dx - \int_0^1 P_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

также $n=4$, т.к. $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$. $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$$P_4(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} \quad \int_0^1 P_4(x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{3!} \int_0^1 x^6 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3!} \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{14-1}{42} = \frac{13}{42} \approx 0,31$$

§7 Критерий Лебега интегрируемости функций по Риману.

Критерий даёт внутреннее описание интегрируемой функции по Риману.

Устанавливает точную взаимосвязь между классами $R[a;b]$ и $C[a;b]$.

п. 1. Множество меры нуль по Лебегу

Опр. $E \subset R$ имеет меру нуль по Лебегу, если $\forall \epsilon > 0 \exists I_n$ конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что $E \subset \bigcup I_n$ и $\sum |I_n| < \epsilon$

Утверждение 1:

- а) Точка и конечное множество точек, меры нуль
- б) Объединение конечного или счётного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль
- в) подмножество множества меры нуль - множество меры нуль
- г) отрезок $[a;b]$, $a < b$ не является множеством меры нуль

Док-во:

б) Пусть E_n множества меры нуль

Пусть $\epsilon > 0$. Для каждого E_n покрытие $\{I_k\}$:

//////////

Тогда //////////

- а) точку можно покрыть интервалом длины $< \epsilon$, остальное вытекает из б)
- в) упражнение простое
- г) упражнение потруднее. Указание: из произвольного покрытия $[a;b]$ интерв. выделить конечное, затем индукция чтд

Множество Q всех рациональных точек - множество меры нуль.

п. 2. Непрерывность, модуль непрерывности, колебание функции

Определим $w////$ - колебание функции на ///

////

Утверждение 2.

1) $w(x_0)=0 \Leftrightarrow f$ непрерывна в точке x_0

2) $w(x_0)=\infty$ ////

Док-во:

Упражнение Указание использовать определения предела по Коши или по Гейне, а также критерий Коши существования предела в точке

п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Опр. Если некоторое свойство выполняется в любой точке за исключением точек множества меры нуль, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п.в.)

Теорема

$f \in R[a;b] \Leftrightarrow f$ ограничена и непрерывная почти всюду на $[a;b]$

Док-во:

(\Rightarrow) ограниченность доказана ранее (T1 §3)

Надо доказать, что //// меры нуль

Так как ///

достаточно показать, что если $\alpha > 0$, то $E=\\\\\\\\$ меры нуль

Строим на $[a;b]$ последовательность разбиений 1\\\\\\\\

Например, $[a;b]$ последовательно разделим пополам

С каждым разбиением свяжем две ступенчатые функции F_n и f_n

Для фикс. n

////

Полагаем\\\\\\\\

Пусть $E'=\\\\\\\\$ -оно счётное - меры нуль.

Теперь нам достаточно доказать, что $E \setminus E'$ меры нуль.

Докажем сначала, что $E \setminus E' = \\\\\\\\\\\\\$

$x \in E'$ означает что x не точка разбиения
=> x всегда внутри некоторого //

//////////

Теперь непосредственно заметим, что $E \setminus E'$ меры нуль
 $E > 0$ произвольное, //// по построению, значит ////

Разбиению /// соответствуют интервалы ////

на каждом из которых $f_{//}$ и $f_{//}$ постоянные

Разбьём их на две группы ///

Теперь замечаем, что $E \setminus E'$ //////////

это конечное объединение

Итак, //////////

=> $E \setminus E'$ меры нуль

=> доказана непрерывность п.в.

(<=) Ранее доказали, что это верно, если множество разрывов конечное (и
даже более общий сл. ТЗ'§3)

Общее док-во -упр (обратный ход)

Теорема доказана!

Леман

§ 7 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Критерий дает внутреннее описание интегрируемой функции по Риману. Устанавливает тесную связь между классами $R[a; b]$ и $C_{[a; b]}$.

п. 1. Доказательство меру нуль по Лебегу.

Опр. $E \subset R$ имеет меру нуль по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n$ конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что $E \subset \bigcup I_n$ и $\sum_n |I_n| < \varepsilon$.

Утверждение: 1

- Точка и конечное множество точек — меру нуль
- Объединение конечного или счетного симметричного множеств меру нуль есть либо меру нуль
- Доказательство доказательства меру нуль — доказательство меру нуль.
- Отрезок $[a; b]$, $a < b$ не является меру нуль.

Док-во: б) Тогда E_n либо меру нуль.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого E_n найдите $\{I_k^{(n)}\}$:

$$E_n \subset \bigcup_k I_k^{(n)}, \quad \sum_k |I_k^{(n)}| < \varepsilon / 2^n.$$

Тогда $\bigcup_n E_n \subset \bigcup_{n,k} I_k^{(n)}$ и $\sum_{n,k} |I_k^{(n)}| = \sum_n \sum_k |I_k^{(n)}| < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

- Тому можно покрыть интервалами длиной $< \varepsilon$, оставшееся входит из б)
- упр. простое

- упр. потребнее. Указание: из промтв. покрытие $[a; b]$ интервалом длиной ε , затем интегрируем!

ног!

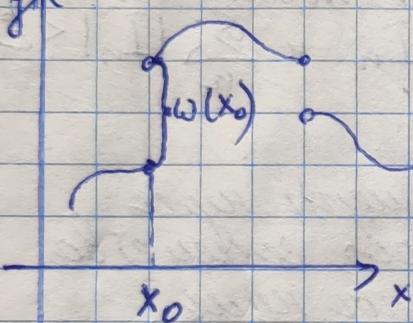


Мне кажется
что!

Множество \mathbb{Q} всех рациональных точек — множество смертей нудь.

п. 2 Непрерывность, изодуль непрерывности, коэффициент функции.

Определение: $w_s(x_0) = \sup_{x', x'' \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]} |f(x') - f(x'')|$ — изодуль функции на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$



$w(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow +0} w_s(x_0)$ — коэффициент функции в т. x_0 .

Утверждение 2.

- 1) $w(x_0) = 0 \Leftrightarrow f$ непрерывна в т. x_0
- 2) $w(x_0) = \inf_{\delta > 0} w_s(x_0)$

Док-во: упр Указание: использовать определение предела по Коши или по лине, а также критерий Коши существования предела в точке.

п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Опр. если некоторое свойство выполняется в любой точке из исключенных точек множества смертей нудь, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п. в.)

Теорема.

$f \in \mathcal{R}_{[a; b]}$ $\Leftrightarrow f$ ограничена и непрерывна
после всюду на $[a; b]$.

Док-во: \Rightarrow ограниченность доказана ранее (Т1 §3)

Надо доказать, что $\{x : \omega(x) > 0\}$ меры нуль.

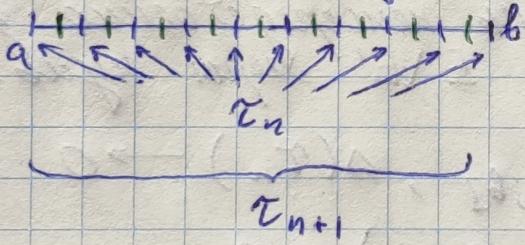
Так как $\{x : \omega(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : \omega(x) > \frac{1}{k}\}$

достаточно показать, что если $\delta > 0$, то
 $E = \{x : \omega(x) > \delta\}$ меры нуль.

Сущим на $[a; b]$ последовательность
разбиений \mathcal{T}_n : 1) $\Delta(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$

2) $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$

Например, $[a; b]$ послед-но делит
неподелим



С самими разбиениями скажем две
супрематиче функции f_n и \bar{f}_n .

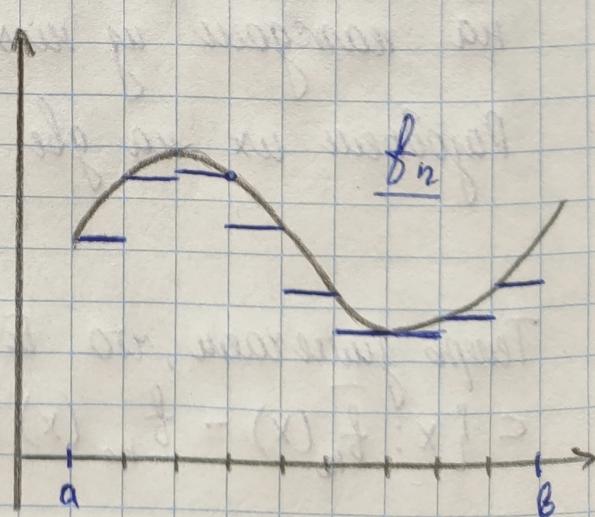
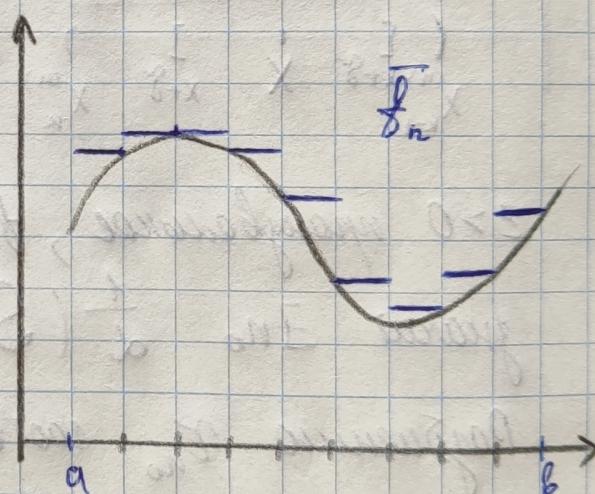
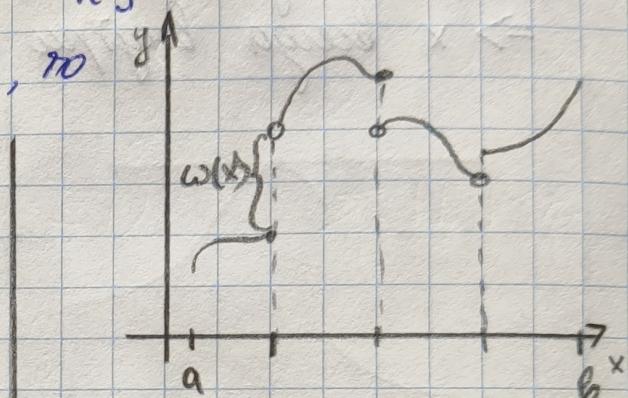
Две функ. n .

$$[a; b] = [a; x_1^n] \cup [x_1^n; x_2^n] \cup \dots \cup [x_{m-1}^n; x_m^n] \cup [x_m^n; b]$$

Помним $\bar{f}_n(x) = M_k^n$, если $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]$

$f_n(x) = m_k^n$, если $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]$

$$\left(M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]} f(x) \right)$$



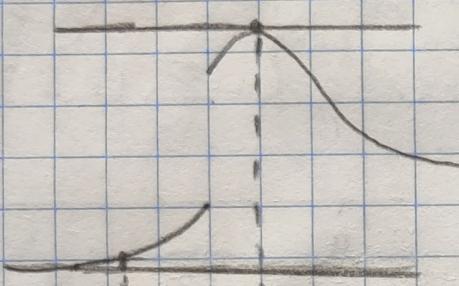
Пусть $E' = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ — это счетное — мероя нуль.

Теперь нам достаточно доказать, что $E \setminus E'$ мероя нуль.

Докажем сначала, что $E \setminus E' = \bigcap_n \{x : \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta\}$

$x \in E \setminus E'$ означает, что x не точка разбивки

$\Rightarrow x$ всегда внутри некоторого $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$



$$(x_{k-1}^{(n)}, x] \quad x \quad [x, x_k^{(n)})$$

$w(x) > \delta$ означает, что $w_{\delta}(x) > \delta$ $\forall \delta$
 \Rightarrow если δ мало так, что
 $[x - \delta, x + \delta] \subset (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$, то найдутся
 $x' \text{ и } x'' : |f(x') - f(x'')| > \delta$

$$\Rightarrow M_k^n - m_k^n > \delta \text{ и } \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta$$

Теперь непосредственно заметим,
что $E \setminus E'$ мероя нуль.

$\varepsilon > 0$ произвольное, $f \in R_{[a, b]}$, $\Delta(\tau_n) \rightarrow 0$ по построению,

значит $\exists n_0 \frac{1}{\delta} (S_{\tau_{n_0}} - s_{\tau_{n_0}}) < \varepsilon$

Разбиению τ_{n_0} соответствуют интервалы $\Delta_k^{n_0} = [x_{k-1}^{n_0}; x_k^{n_0}]$

на каждом из них \bar{f}_{n_0} и \underline{f}_{n_0} — построенные.

Разобьем их на две группы $\tilde{\Delta}_k^{n_0}$, где $\bar{f}_{n_0} - \underline{f}_{n_0} > \delta$

$\tilde{\Delta}_k^{n_0}$, где $\bar{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) \leq \delta$

Теперь заметим, что $E \setminus E' = \bigcap_n \{x : \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta\} \subset$

$\subset \{x : \bar{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) > \delta\} = \bigcup_k \tilde{\Delta}_k^{n_0}$ — это конечное
 объединение

$$\text{так}, \sum_k |\tilde{\Delta}_k^{no}| = \frac{1}{\alpha} \sum_k \alpha |\tilde{\Delta}_k^{no}| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_k (\tilde{M}_k^{no} - \tilde{m}_k^{no}) |\tilde{\Delta}_k^{no}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_k (\tilde{M}_k^{no} - \tilde{m}_k^{no}) |\tilde{\Delta}_k^{no}| \right) = \frac{1}{\alpha} (S_{\tilde{r}_{no}} - S_{\tilde{r}_{no}}) < \varepsilon$$

$\Rightarrow E \setminus E'$ меры нуль. \Rightarrow доказана непрерывность п. в.

(\Leftarrow) Ранее доказали, что это верно, если ии-бо разложение конечное (и даже более общее с. ТЗ §3)
Более ии-бо - упр. (обратный ход)

Теорема доказана!

§ 8 Длина кривой

п. 1. Геометрия кривой

Опр. Множество точек плоскости $\Gamma = \{(x; y) : x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$, φ, ψ — непрерывные функции, $t \in [a; b]$ наз-ся непрерывной кривой.

Пример: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad - \text{кривые}$
 $t \in [0; \pi] \quad t \in [0; 2\pi]$

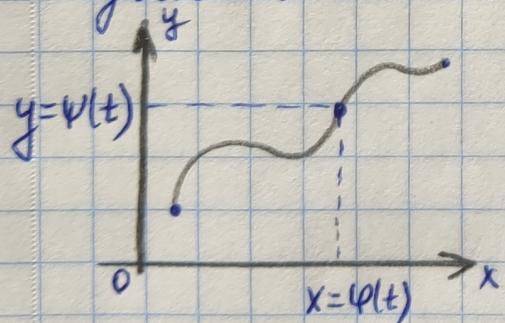
t — параметр

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ — параметризации.

Оставши в стороне вопросов параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр. $\Gamma = \{(x; y; z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)\}$, φ, ψ, χ — непр-е функции, $t \in [a; b]$ — непрерывное пространственное кривое

Физический смысл:



Параметр t — время.

Руныции определяют закон движения точки M с подчиняющимися $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ на плоскости.

Множество Γ точек M естественно рассматривать как след точки M , движущейся по закону

След кривой и. д. энглийский (пример погоды)

Опр. Непрерывные кривые наз-ся простой, если различными значениями параметра t в t_0 разными точки кривой кроме и. д. $t=a$ и $t=b$ (т.орданова кривад)

§8 Длина кривой

п.1. Понятие кривой

Опр. Множество точек плоскости \mathbb{R}^2 - непрерывные функции, \mathbb{R} называется непрерывной кривой

Пример 1

\mathbb{R}^2 - кривые

t -параметр

\mathbb{R}^2 -параметризация

Оставим в стороне вопросы параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр. \mathbb{R}^2 -непрерывные функции \mathbb{R} - непрерывная пространственная кривая

Физический смысл:

Параметр t - время

Функции определяют закон движения точки M с координатами $x=t$, $y=t$ на плоскости

Множество Γ точек M естественно рассматривать как след точки M , движущейся по закону.

След кривой может быть экзотическим(пример потом)

Определение непрерывная кривая называется простой, если различным значениям параметра соответствуют различные точки кривой, кроме может быть $t=a$ и $t=b$ (жорданова кривая)

п. 2 Понятие длины кривой

Пусть \mathbb{R}^2 кривая заданная параметрически

\mathbb{R}^2

Этому разбиению соответствует набор точек M_0, M_1, \dots, M_n на кривой $M_k=\mathbb{R}^2$

Последовательно соединяя точки отрезками - получаем ломанную L_r - вписанная ломанная.(в кривую L , отвечающая разбиению r)

Длина k -го звена:

\mathbb{R}

Длина вписанной ломаной: \mathbb{R}

Опр. Кривая называется спрямляемой, если \mathbb{R} , в этом случае \mathbb{R} называется длиной

(то есть, дргими словами, если множество \mathbb{R} длин вписанных в кривую L ломанных, отвечающих всевозможным разбиениям r , ограничено)

Замечание: $l>0$

Далее рассматриваем "кусочно" простые кривые

Пример 1(продолжение)

\mathbb{R}^2

Свойства спрямляемых кривых:

1. Если кривая L спрямляема, то длина l её дуги не зависит от параметризации этой кривой.
2. Если L разбита точкой на две кривые L_1 и L_2 , то $|L|=|L_1|+|L_2|$
3. Пусть $l(t)$ длина дуги кривой соответствующая параметрам от a до t .

Функция $l(t)$ - непрерывна

$l(t)$ называется переменной дугой на кривой L

Если в качестве параметра взята длина дуги кривой, то такая параметризация называется естественной.

Пример 2.(график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину, то есть, не спрямляемая кривая)

\mathbb{R}^2

на $[0; 1/\pi]$ непрерывная

Эскиз графика:

а) нули: $x=0, x=1/\pi$ к э N

§ 8 Длина кривой

п. 1. Точка кривой

Опр. Множество точек плоскости $\Gamma = \{(x; y) : x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$, φ, ψ - непрерывные функции, $t \in [a; b]$ наз-ся непрерывной кривой.

Пример 1 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$ - кривые

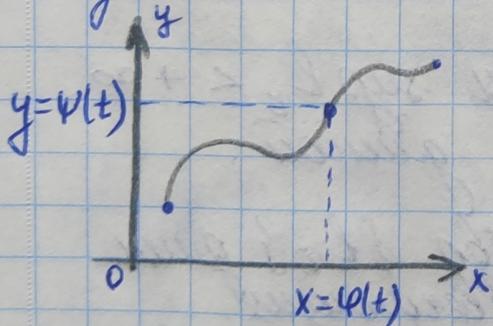
t - параметр

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ - параметризации.

Оставши в строке вопросов параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр. $\Gamma = \{(x, y, z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)\}$, φ, ψ, χ - непр. е функции, $t \in [a; b]$ - непрерывные пространственныe кривые

Физический смысл:



Параметр t - время.

Функции определяют закон движения точки M с координатами $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ на плоскости.

Множество Γ точек M естественно рассматривать как сеть точек M , движущихся по закону

Сеть кривой и. д. эвклидесский (пример потока)

Опр. Непрерывные кривые наз-ся простой, если различными значениями параметра соответствующие точки кривой кроме и. д. $t = a$ и $t = b$ (жорданова кривая)

П. 2 Понятие длины кривой

Тогда $\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [a; b] \end{cases}$

кривая, заданная параметрически

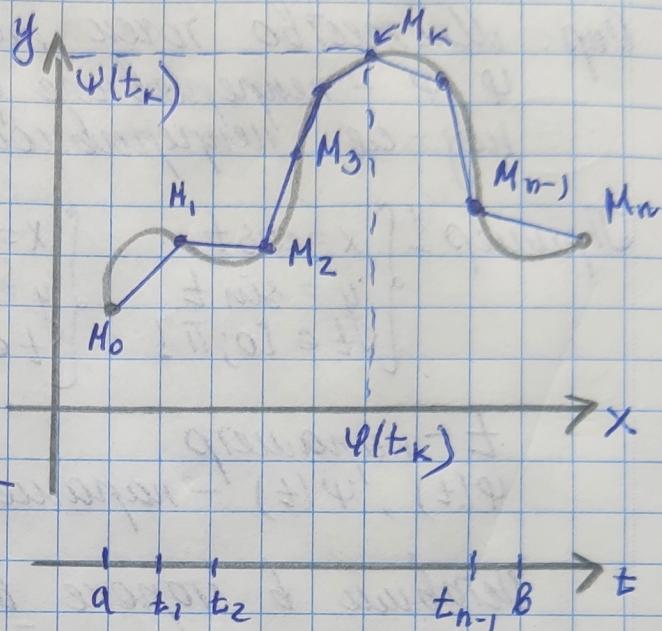
τ -разбиение $[a; b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Такому разбиению соответствует набор точек M_0, M_1, \dots, M_n на кривой $M_k = (\psi(t_k), \psi(t_k))$

Последовательно соединение точек отрезками — получается ломаную L_τ — вписанной ломаной.

(В кривую L , отвечающую разб-ю τ)



Длина κ -го звена:

$$|M_{k-1} M_k| = \sqrt{(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\psi'(t_k) - \psi'(t_{k-1}))^2} = l_k.$$

Длина вписанной ломаной: $l_\tau = \sum_{k=1}^n l_k$

Оп. Кривая называется спрямляемой, если $\sup_{\tau} l_\tau < +\infty$, в этом случае $\sup_{\tau} l_\tau = l$ наз-ся длиной.

(т.е., другие случаи, если множество $\{l_\tau\}$ длий вписанных в кривую L ломаных, отвечающих бесконечному разбиению τ , архимедово)

Замечание: $l > 0$

Далее рассматриваем "нормальное" проекции кривые.

Пример 1 (недоказаное)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \quad 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$$

$$l_x = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\sin t_k - \sin t_{k-1})^2 + (\cos t_k - \cos t_{k-1})^2} =$$



$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\cos t_k \cdot (t_k - t_{k-1}))^2 + (-\sin t_k \cdot (t_k - t_{k-1}))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2} \cdot \pi$$

$$\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad 0 < \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_n = 2\pi$$

$$l_{\tilde{x}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\sin \frac{\tilde{t}_k}{2} - \sin \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\tilde{t}_k}{2} - \cos \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{\tilde{t}_k}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\tilde{t}_k}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2}\pi$$

Свойства спрямляемых кривых:

1. Если кривая L спрямлена, то длина ℓ её души не зависит от параметризации этой кривой.
2. Если L разбита точкой на две кривые L_1 и L_2 , то $|L| = |L_1| + |L_2|$.
3. Пусть $\ell(t)$ длина души кривой L соответствующей параметризации от a до t . Функция $\ell(t)$ - непрерывна $\ell(t)$ называется переменной длиной на кривой L .

Если в качестве параметра брать длину души кривой, то такой параметризации наз-ся длиной ее кривой.

Пример 2 (график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину — т. е. не сплошная кривая)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

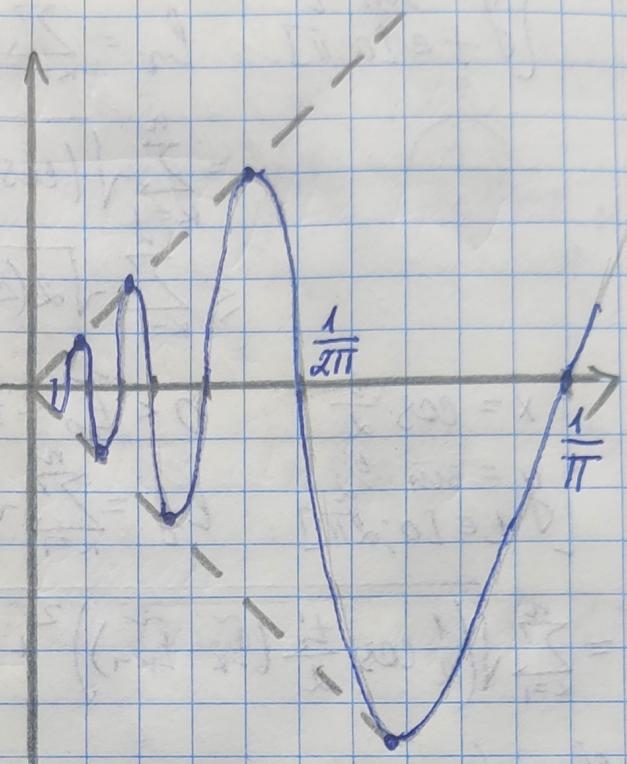
на $[0, \frac{1}{\pi}]$ непрерывной

Эскиз графика:

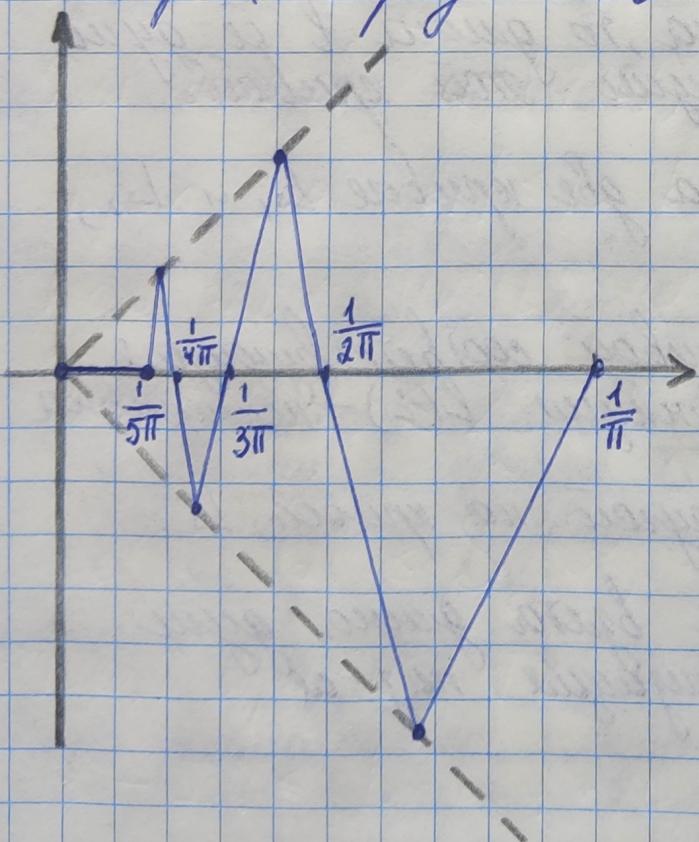
a) нули: $x = 0, x = \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{N}$

b) точки $f(x) = x$: $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$

b) точки $f(x) = -x$: $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi}$



Впиши в график ломаную с четырьмя вершинами



Длина этой ломаной больше суммы длин всех треугольников, которые правна (считаем справа)

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 3\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi}$$

Если вписать аналитическое образование, начиная с n горбушками в график $y = f(x)$, то её длина l_n

$$l_n > \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi} + \dots + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} > \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{2\pi + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n\pi + n\pi} = \\ = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \text{ Получаем } \sup l_n = +\infty$$

Замечание: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет конечную длину на $[a; b]$.

$f(x)$ имеет ограниченную производную: $|f'(x)| \leq C$

$$l_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \leq \sqrt{C^2 + 1}(b-a)$$

П. 3. Длина кривой.

Теорема 1.

Если $\varphi, \psi \in C^1_{[a; b]}$, то кривая спрямляемая и

$$l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Доказ. Пусть τ произвольное разбиение $[a; b]$.
Длина вписанной кривой отображающей τ :

$$l_n = \sum_k \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ и } \psi \text{ диф-ые} \\ \Rightarrow \text{но тк дырка} \end{array} \right| \\ = \sum_k \sqrt{(\varphi'(t_k^1)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(t_k^2)(t_k - t_{k-1}))^2} \leq \sum_k \sqrt{2M^2(t_k - t_{k-1})^2} \leq \\ \leq \sqrt{2} M(b-a) \quad \left(\begin{array}{l} t_k^1, t_k^2 \in (t_{k-1}, t_k) \text{ - уз тк дырка} \\ \varphi'(t), \psi'(t) \text{ непр. на } [a; b] \Rightarrow \text{огранич.} \end{array} \right) \\ \Rightarrow \text{доказано спрямляемость}$$

Дано, имеется оценка производимости:

$$\begin{aligned} l_2 & \stackrel{!}{=} \sum_k \sqrt{(\psi'(t_k^1))^2 + (\psi'(t_k^2))^2} (t_k - t_{k-1}) = \\ & = \sum_k \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} (t_k - t_{k-1}) + \\ & + \sum_k \left(\sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} \right) (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Причина: $l_2 = S(\sqrt{\psi'(t)^2 + \psi''(t)^2}, \{t_k\}, \tau) + \alpha(\psi', \psi'', \{t_k^1\}, \{t_k^2\}, \tau)$

Теперь наша задача выбрать такое τ , чтобы
 l_2 было близко к l , т.к. $I = \int_a^b \sqrt{\psi'(t)^2 + \psi''(t)^2} dt$,
а α было малое.

Оценим $\alpha = \sum_k \left(\sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} \right) (t_k - t_{k-1})$

Две векторы $a = (\psi'(t_k^1), \psi'(t_k^2))$ и $b = (\psi'(t_k^1), \psi'(t_k^2))$
верно $||a|| - ||b|| \leq |a - b|$, $|a - b| = |\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)|$,
точнее этого $|\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)| \leq M_k(\psi') - m_k(\psi')$.

Значит, $|\alpha| \leq \sum_k (M_k(\psi') - m_k(\psi')) (t_k - t_{k-1})$,

т.е. $|\alpha| \leq S_\tau(\psi') - S_\tau(\psi')$

Таким образом, $\forall \tau$

$$|l - I| \leq |l - l_2| + |l_2 - S(\sqrt{\psi'^2 + \psi''^2}, \{t_k\}, \tau)| + |S - I| \leq$$

$$\leq l - l_{\varepsilon} + S_{\varepsilon}(\psi') - S_{\varepsilon}(\psi) + \left| S\left(\sqrt{\psi'^2 + \psi'^{21}}, \{t_k^{12}\}, \tau\right) - I \right|$$

a) Пусть $\varepsilon > 0$ выберем δ и разбиение τ_3 $\Delta(\tau_3) < \delta$
так, чтобы $|S - I| < \frac{\varepsilon}{3}$

b) $\exists \varepsilon_1 : l - l_{\varepsilon_1} < \frac{\varepsilon}{3}$

c) $\exists \varepsilon_2 : S_{\varepsilon_2}(\psi') - S_{\varepsilon_2}(\psi) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \Rightarrow |l - I| < \varepsilon$

наг!

Лекция. Несобственный интеграл
Опр несобственного интеграла
свойства несобственных интегралов

Лекции

Несобственное интегрирование

Несобственный интеграл 1го рода (по неограниченному промежутку).

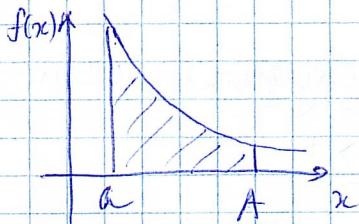
Оп.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, A]$ где любое $A > a$.

Несобственным интегралом 1го рода от функции $f(x)$ на $[a; +\infty)$ называется предел

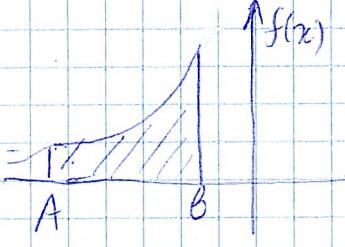
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится; если предел бесконечен или не существует, то интеграл расходится.



Аналогично, если $f(x)$ определена на $(-\infty; b]$ и интегрируема на $[A, b]$ где любое $A < b$, то

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx.$$

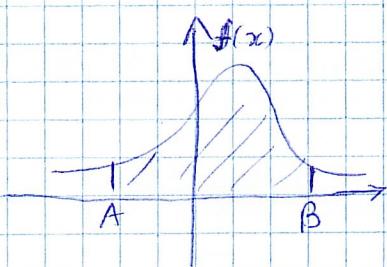


Если $f(x)$ определена на $(-\infty; +\infty)$ и интегрируема на $[A; B]$ где любых

$A < B$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$$

(Здесь пределы на A и B



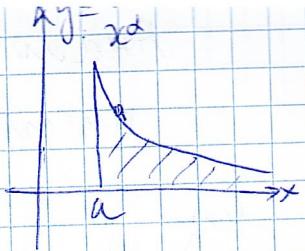
расматриваются независимо друг от друга)

Пример

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^d} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A x^{-d} dx = (\star)$$

A

$a > 0$



Если $d > 1$, то $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-d+1}}{-d+1} \right) \Big|_a^A = \frac{1}{1-d} \lim_{A \rightarrow +\infty} (A^{1-d} - a^{1-d}) =$

$\frac{a^{1-d}}{1-d} = \frac{1}{(d-1)a^{1-d}}$, итеграл сходится

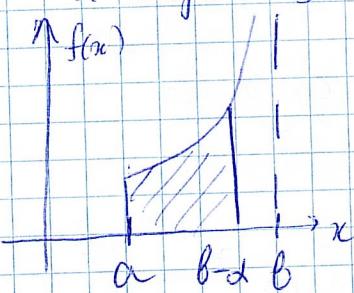
Пк. $1-d < 0$

Если $d < 1$, то $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-d} (A^{1-d} - a^{1-d}) = +\infty$, итеграл расходится

Если $d = 1$, то $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A - \ln a = +\infty$,
итеграл расходится

Несобственный интеграл 2го рода
(от неограниченной функции)

опр.
если функция $f(x)$ определена на $[a; b)$ и
интегрируема на $[a; b-d]$ при любом $b-d \in (a; b)$,
и пусть $f(x)$ не ограничена при $x \rightarrow b-0$.



Несобственный интеграл 2го рода от
функции $f(x)$ на $[a, b)$ называется

предел

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow +0} \int_a^{b-d} f(x) dx$$

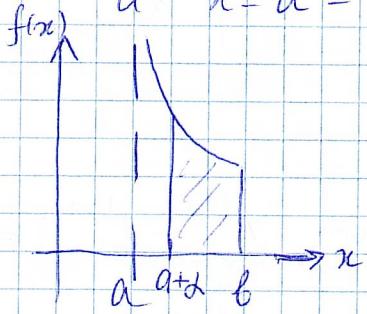
Интеграл сходится, если предел существует и конечен.

Точка $x=b$ называется особой точкой функции $f(x)$
(или говорят, что в точке $x=b$ функция имеет
особенность).

Аналогично, якщо $f(x)$ определена на $(a; b]$,

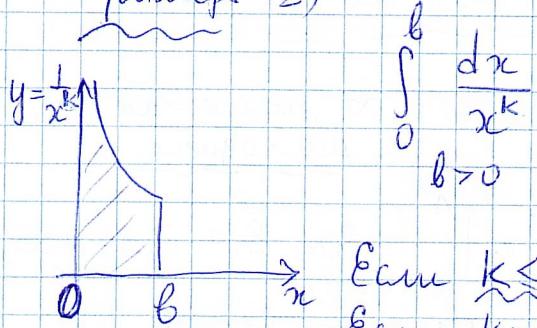
інтегрирується на $[a+d; b]$ $\forall a+d \in (a; b)$,

якщо $x=a$ - особа точка, то



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow +0} \int_{a+d}^b f(x) dx.$$

Приклад. 2)



Якщо $k \leq 0$, то це собственний інтервал, отже суміжні
Якщо $k > 0$, то $x=0$ - особа точка

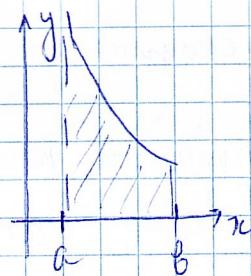
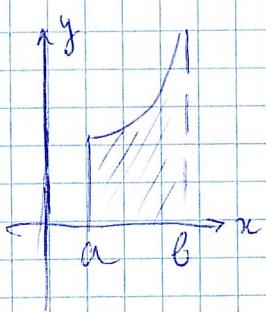
$$\text{Якщо } k=1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b \frac{dx}{x} = \lim_{d \rightarrow +0} \ln|x| \Big|_d^b = \\ = \lim_{d \rightarrow +0} \ln b - \underbrace{\ln d}_{\stackrel{+0}{\longrightarrow}} = +\infty \text{ - інтервал } \text{пакуючий}$$

$$\text{Якщо } 0 < k < 1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b x^{-k} dx = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \Big|_d^b = \\ = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{b^{-k+1}}{1-k} - \underbrace{\frac{d^{1-k}}{1-k}}_{\stackrel{0}{\longrightarrow}} = \frac{b^{1-k}}{1-k} \text{ - інтервал } \text{сьючущий}$$

$$\text{Якщо } k > 1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b x^{-k} dx = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \Big|_d^b =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +0} \frac{1}{1-k} \left(\underbrace{b^{1-k}}_{\stackrel{+\infty}{\longrightarrow}} - \underbrace{d^{1-k}}_{\stackrel{0}{\longrightarrow}} \right) = +\infty \text{ - інтервал } \text{пакуючий}$$

Інтервал $\int_0^b \frac{dx}{x^k}$ сьючущий при $k < 1$
і пакуючий при $k > 1$



Аналогичное рассматриваемое интегрирование

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k}$$

$x-a=t$
 $dx=dt$
 $x \rightarrow a+0, t \rightarrow +0$
 $x=B, t=b-a$

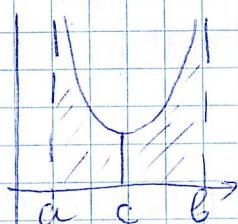
сходится при $k < 1$
 расходится при $k \geq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(B-x)^k} = - \int_{b-a}^{0} \frac{dt}{t^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k}$$

$B-x=t$
 $dx=-dt$
 $x=a, t=b-a$
 $x \rightarrow B-0, t \rightarrow +0$

сходится при $k < 1$
 расходится при $k \geq 1$

Если $x=a$ и $x=B$ — две особые точки функции $f(x)$, то



$$\int_a^B f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^B f(x) dx,$$

где $c \in (a; B)$ — произвольная точка.

Интеграл в левой части сходится, если сходится

оба интеграла в правой части.

В этом случае значение интеграла не зависит от выбора точки c .

Доказательство, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $(a; B)$, то

$$\begin{aligned}
 \int_a^c f(x) dx + \int_c^B f(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{a+\alpha}^c f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_c^{B-\beta} f(x) dx = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} (F(c) - F(a+\alpha)) + \lim_{\beta \rightarrow +0} (F(B-\beta) - F(c)) = \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow +0} F(B-\beta) - \lim_{\alpha \rightarrow +0} F(a+\alpha) \quad \text{не зависит от } c.
 \end{aligned}$$

Пример. 3)

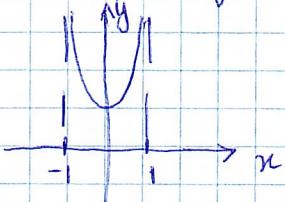
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow +0} \arcsin(1-\beta) - \lim_{\alpha \rightarrow -0} \arcsin(-1+\alpha) =$$

$x = \pm 1$ — две особые точки

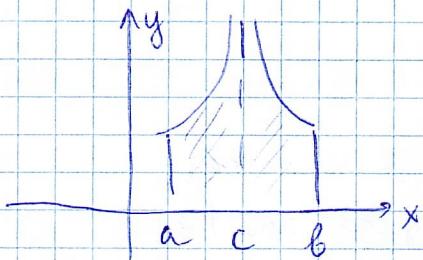
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

— несобственный интеграл сходится

Так как $F(x) = \arcsin x$ непрерывна при $x = \pm 1$, то
можно записать $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$



Если $c \in (a; b)$ — особая точка внутри промежутка $(a; b)$, то



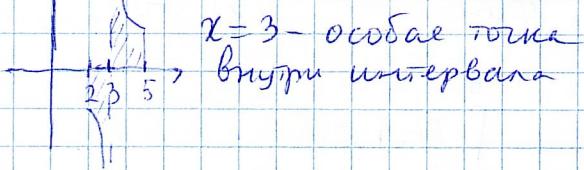
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Интеграл b : левая часть сходится,
если сходится оба интеграла

В правой части

Пример 4)

$$\int_2^5 \frac{dx}{x-3} = \int_2^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^5 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_2^{3-\alpha} \frac{dx}{x-3} +$$



$$+ \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{3+\beta}^5 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln|x-3| \Big|_2^{3-\alpha} +$$

$$+ \lim_{\beta \rightarrow 0} \ln|x-3| \Big|_{3+\beta}^5 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\underbrace{\ln(3-\alpha) - \ln(-1)}_{-\infty}) + \lim_{\beta \rightarrow 0} (\underbrace{\ln 2 - \ln \beta}_{+\infty}) -$$

интеграл расходится, т.к. оба предела бесконечны

Свойства несобственных интегралов

Будем рассматривать интеграл вида

$$\int_a^w f(x) dx, \quad \text{где } w \text{ — конечная особая точка или } +\infty.$$

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; w)$ и интегрируема на $[a; A]$ для любых $A \in (a; w)$.

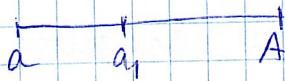
Если $x=w$ — конечная особая точка, то назовем $\int_a^w f(x) dx$

будем понимать $\int_a^w f(x) dx$.

Две интегралы вида $\int_w^b f(x) dx$, где $w=-\infty$ или конечная особая точка, имеют свойства аналогичные

1) Нүснә $a < a_1 < \omega$.

Төрға интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ сұрағынан $\Leftrightarrow \int_{a_1}^{\omega} f(x) dx$ сұрағынан



Dok. Нүснә $A \geq a_1$, төрға

$$\int_a^A f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^A f(x) dx$$

(const
сәбілдемелік
интеграл)

Нүснә $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$ сұрағынан и көзегең \Leftrightarrow

\Leftrightarrow б үрабарынан сұрағынан и көзегең $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$.

$$\text{При этом } \int_a^{\omega} f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{\omega} f(x) dx,$$

i.e. ғана несобілдемелік интегралдар сипатедилік свойства агуитивности. □

2) (линейлікత)

Егер интегралдар $\int_a^{\omega} f(x) dx$ және $\int_a^{\omega} g(x) dx$ сходатас, то сходатас и интегралдар:

$$1) \int_a^{\omega} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_a^{\omega} g(x) dx;$$

$$2) \int_a^{\omega} c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^{\omega} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dok. 1) Әле мәнде $A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A (f(x) + g(x)) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_a^A g(x) dx$$

При $A \rightarrow \omega$ сұрағынан предел $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx$,

$\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A g(x) dx = \int_a^{\omega} g(x) dx$. Следовательно, сұрағынан и нүснә

$$\begin{aligned} \int_a^{\omega} (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A (f(x) + g(x)) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx + \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A g(x) dx = \\ &= \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_a^{\omega} g(x) dx \end{aligned}$$

2) $\forall A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^A f(x) dx$$

При $A \rightarrow \omega$ сұрағынан $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx$. Следовательно,

$$\int_a^{\omega} c \cdot f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A c \cdot f(x) dx = c \cdot \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx = c \cdot \int_a^{\omega} f(x) dx. \quad \boxed{\square}$$

3) (интегрирование по частям)

Пусть функции $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на $[a; \omega]$.

Если интеграл $\int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$ сходится и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x) \cdot v(x)$, то сходится и интеграл

$$\int_a^{\omega} u(x) v'(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x) - u(a) v(a) - \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$$

Dоказ. Для любого $A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A u(x) v'(x) dx = u(A) v(A) - u(a) v(a) - \int_a^A v(x) u'(x) dx$$

При $A \rightarrow \omega$: $u(A) v(A) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x)$, $\int_a^A v(x) u'(x) dx \rightarrow \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$.

Следовательно, существует конечный

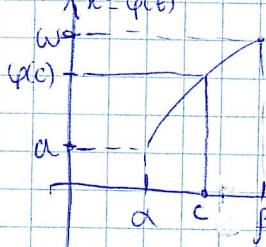
$$\int_a^{\omega} u(x) v'(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A u(x) v'(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x) - u(a) v(a) - \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$$

4) (замена переменных x)

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $x = \varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$,
и $x = \varphi(t)$ монотонна на этом промежутке,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = \omega$$

(β может быть в том числе $\pm \infty$).



Тогда для любой непрерывной на $[a, \omega]$

и интегрируемой на $[a, \omega]$ $\forall A \in (a; \omega)$

Функция $f(x)$ справедлива формула замены переменных:

$$\int_a^{\omega} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Интеграл в левой и правой частях сходится или расходится одновременно

Dоказ. Для любого $c \in (\alpha, \beta)$:

$$\int_a^c f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^c f(x) dx.$$

Если $c \rightarrow \beta$, то $\varphi(c) \rightarrow \omega$. Если существует конечный

$$\lim_{c \rightarrow \beta} \int_a^c f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^{\omega} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \text{ то существует и конечен}$$

$$\lim_{c \rightarrow \beta} \int_a^c f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx = \int_a^{\omega} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Несобственные интегралы (лекция 1)

1. Определение, основные свойства.

При определении интеграла Римана возникают два существенных ограничения. Во-первых, функция должна быть ограниченной. Во-вторых, определение работает на отрезках – ограниченных множествах.

Далее рассмотрим обобщение понятия интеграла на эти неподходящие по Риману случаи.

Если функция $f(x)$ определена на конечном полуинтервале $[a, b)$, для любого $b' \in (a, b)$ на $[a, b']$ ограничена, но на всём $[a, b)$ не ограничена, то точка b называется *особой точкой* для функции $f(x)$.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, b – особая точка при $b < +\infty$, и для любого $b' \in (a, b)$ функция интегрируема по Риману на $[a, b']$, существует

конечный $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x)dx$, тогда функция $f(x)$ называется интегрируемой в не-

собственном смысле на множестве $[a, b)$, а указанный предел называется не-
собственным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. В про-
тивном случае говорят, что это расходящийся несобственный интеграл.

Если $b = +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют несобственным интегралом

первого рода (1-го рода), если $b < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ называют несобственным ин-
тегралом второго рода (2-го рода).

В выше приведённом определении несобственного интеграла рассматривалась особенность в правом конце множества. Легко понять, что аналогично можно определить несобственный интеграл для особенности в левом конце множества интегрирования и на луче $(-\infty, b]$.

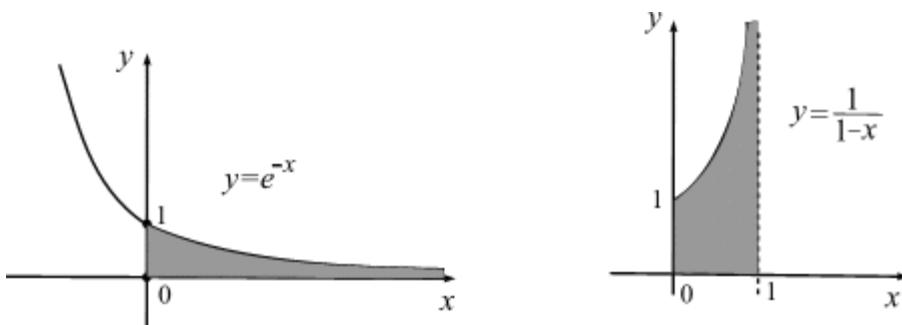
Рассмотрим примеры несобственных интегралов.

Пример 1. а) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \int_0^{b'} e^{-x} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} (-e^{-b'} + 1) = 1$, интеграл сходится

и получено его значение;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b' \rightarrow 1-0} \int_0^{b'} \frac{dx}{1-x} = \lim_{b' \rightarrow 1-0} (-\ln|1-b'| + \ln 1) = +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

Геометрический смысл этих интегралов:



Площадь не ограниченно простирающейся на плоскости фигуры:

- а) конечна,
- б) бесконечна.

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ ограничена на конечном полуинтервале $[a, b)$ и для любого $b' \in (a, b)$ интегрируема по Риману на $[a, b']$, то она интегрируема по Риману и на $[a, b]$.

Доказательство. Доопределим функцию в точке b произвольным образом $f(b) = c$. Из условия следует $|f(x)| \leq C_1, \forall x \in [a, b)$, ясно, $|f(x)| \leq C, \forall x \in [a, b]$, где $C = \max\{C_1, c\}$.

Рассмотрим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть b' такое, что $b - b' < \varepsilon/4C$. Для интегрируемой на $[a, b']$ функции $f(x)$ найдется разбиение τ' отрезка $[a, b']$ такое, что по нему $S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon/2$. Добавим к τ' точку b и получим разбиение τ отрезка $[a, b]$. Тогда $S_{\tau} - s_{\tau} = S_{\tau'} - s_{\tau'} + (M' - m')(b - b') < \varepsilon/2 + 2C \cdot \varepsilon/4C = \varepsilon$, где M' , m' – supremum и infimum функции $f(x)$ на $[b', b]$. Таким образом, утверждение доказано.

Следовательно, определение несобственного интеграла в случае конечного промежутка $[a, b)$ содержательно лишь в случае, когда функция $f(x)$ на нём не ограничена. В противном случае, при условии интегрируемости по Риману на любом $[a, b']$, функция интегрируема по Риману и на всём множестве, или, иначе говоря, в собственном смысле.

Теорема 1. Основные свойства несобственных интегралов.

1. Линейность несобственного интеграла. Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$, то для любых действительных чисел λ и μ функция $\lambda f + \mu g$ тоже интегрируема на $[a, b)$ и

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2. Аддитивность несобственного интеграла. Для любого $c \in (a, b)$ одновременно сходятся интегралы

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x) dx, \quad \text{при этом}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. Формула интегрирования по частям в несобственном интеграле. Если функции $f, g \in C^1_{[a,b)}$ и существует конечный $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$, то интегралы

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad \text{сходятся одновременно и}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

4. Формула замены переменной в несобственном интеграле. Если функция $\varphi \in C^1_{[a,\beta)}$, возрастающая, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \beta-0$, то $\int_a^b f(x) dx$ и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{сходятся одновременно и равны.}$$

Доказательство. Все свойства доказываются одинаково: для собственных интегралов (интегралов Римана) эти свойства справедливы, а затем к справедливым равенствам применяется предельный переход, который обладает соответствующими линейными и аддитивными свойствами.

Пример 2. Эталонные несобственные интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{cases} \frac{1 - \delta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1, \\ -\ln \delta & \alpha = 1. \end{cases}$$

Сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, так как

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{A^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha + 1} & \alpha \neq 1, \\ \ln A & \alpha = 1. \end{cases}$$

2. Критерии и признаки сходимости.

Теорема 2 (Критерий Коши). Для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно выполнение условия Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ существует \bar{b} такое, что $a \leq \bar{b} < b$ и для любых $\bar{b} < b', b'' < b$ (для определенности считаем $b'' > b'$) выполняется неравенство

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $F(y) = \int_a^y f(x) dx$, $a \leq y < b \leq +\infty$. Тогда вопрос

сходимости $\int_a^b f(x) dx$ означает существование конечного $\lim_{y \rightarrow b-0} F(y)$. Применение

критерия Коши существования конечного предела слева функции $F(y)$ в точке b даёт: для всякого $\varepsilon > 0$ существует \bar{b} такое, что $a \leq \bar{b} < b$ и для любых $\bar{b} < b', b'' < b$ выполняется неравенство $|F(b'') - F(\bar{b})| < \varepsilon$. Остаётся подставить в это неравенство функцию F .

Теорема 3 (Признаки Абеля и Дирихле). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, b]$, для любого $b' \in (a, b)$ интегрируемы по Риману на $[a, b']$. Для сходимости $\int_a^b f(x) g(x) dx$ достаточно выполнения одного из свойств:

α) $\int_a^b f(x) dx$ сходится, $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b]$;

β) $\left| \int_a^y f(x) dx \right| < C$ при $a \leq y < b \leq +\infty$, $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \rightarrow b-0$.

Доказательство. Для любых $a < b', b'' < b$ по второй теореме о среднем имеем $\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)dx = g(b') \int_{b'}^c f(x)dx + g(b'') \int_c^{b''} f(x)dx$, где c лежит между b' и b'' .

Отсюда критерий Коши завершает доказательство сходимости рассматриваемого интеграла на основании выполнения любого из двух свойств α) или β).

Пример 3. Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Действительно, он имеет единственную особенность (в «точке» $+\infty$), поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв. Если подынтегральную функцию положить равной 1 в точке 0, то она станет непрерывной на луче $[0, +\infty)$. Интеграл сходится на основании признака Абеля-Дирихле: функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $-\cos x$, а функция $1/x$ монотонно убывает к 0 при $x \rightarrow +\infty$, то есть выполнено свойство β).

Теорема 4 (Критерий сходимости в терминах рядов).

$\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любой возрастающей к b последовательности точек b_n из $[a, b)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ сходится.

Доказательство. \Rightarrow в эту сторону доказательство проводится по критерию Коши.

\Leftarrow в обратную сторону – доказательство от противного. Посредством критерия Коши создаётся ряд, у которого общий член не стремится к нулю:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| > \varepsilon, \quad \left| \int_{b_2}^{b_3} f(x)dx \right| > \varepsilon, \dots .$$

Пример 4. $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Рассмотрим числовую последовательность $b_n = \pi n$, где $n = 1, 2, \dots$, ясно $b_n \rightarrow +\infty$, оценим слагаемые ряда:

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi |\sin x| dx = \frac{2}{\pi(n+1)} .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

– расходится.

Несобственные интегралы (лекция 2)

Теорема 5 (Признаки сравнения). Пусть $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

1. Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$, то

a) из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x)dx$.

2. Если f и g интегрируемы по Риману на $[a, b']$ для любого $b' \in (a, b)$ и су-

ществует конечный $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, то

a) при $c = 0$ выполняются утверждения пункта 1;

б) при $c > 0$ интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся одновременно.

Доказательство. 1. Справедливость этого утверждения следует из критерия Коши.

2. В части а) из $c = 0$ следует существование \bar{b} такого, что на $[\bar{b}, b)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, то есть $f(x) \leq g(x)$. В части б) существует \bar{b}

такое, что на $[\bar{b}, b)$ справедливо двойное неравенство $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2c$, то есть

$\frac{c}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2cg(x)$ (важно $g(x) > 0$). Это двойное неравенство и объясняет одинаковое поведение рассматриваемых интегралов.

Признаки сравнения – это очень эффективный инструмент в исследовании несобственных интегралов на сходимость.

Пример 5. Исследовать на сходимость интегралы:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} dx, \quad 2) \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

Решения. 1). Подынтегральная функция $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$ при $x \rightarrow +\infty$ эквивалентна

функции $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^{3/2}}$. Поскольку $3/2 > 1$, интеграл сходится.

2). На луче $[1, +\infty)$ имеет место неравенство между положительными функциями $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ сходится.

3). Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x}{\sin x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{(-2x^{1/2} \cos x)} = 0$$

здесь в первом

равенстве использовали правило Лопитала, во втором – первый замечательный

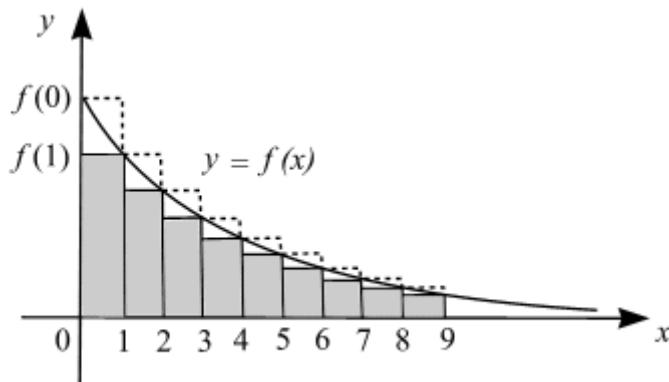
предел. Интеграл $\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

Теорема 6 (Интегральный признак сходимости рядов). Пусть $f(x) \geq 0$ на луче $[1, +\infty)$ и убывает на нём. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Функция $F(b) = \int_1^b f(x) dx$ и сумма $\sum_{n=1}^{[b]} f(n)$ возрастают в

силу не отрицательности функции $f(x)$. Значит, сходимость равносильна их ограниченности. Так как $f(x)$ убывает, справедливы следующие оценки, завер-

шающие доказательство: $\sum_{n=2}^{[b]} f(n) \leq F(b) \leq \sum_{n=1}^{[b]} f(n)$.



Следствие. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходятся одновременно при $p > 1$.

3. Абсолютная и условная сходимость интегралов.

Для собственного интеграла Римана имеет место свойство: из интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$ следует интегрируемость модуля функции $|f(x)|$ на $[a, b]$. Причём, обратное утверждение не верно: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное}, \\ -1, & x - \text{иррациональное} \end{cases}$ не интегрируема по Риману на любом отрезке, а функция $|f(x)| = 1$ – интегрируема.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 7. Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши, так как $\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx$.

Обратное утверждение не верно.

Пример 6. Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, но не абсолютно (см. примеры 3-4).

Такие интегралы называются условно сходящимися.

Возможны случаи несобственных интегралов с несколькими особенностями. Укажем, в каком смысле они понимаются. Пусть рассматривается $\int_a^b f(x)dx$,

где a, b особые точки, а между ними обычных точек нет. Если оба несобственных интеграла $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ существуют (здесь c между a и b), то полагают по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В противном случае говорят, что интеграл, стоящий слева, расходится.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ для } p > 0.$$

Сначала посмотрим, что происходит возле нуля? А происходит следующая эквивалентность: $\frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$. Здесь $\frac{\sin x}{x^p} > 0$. Таким образом, сравнением с эталонным интегралом получаем, что $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ при $p - 1 < 1$ ($p < 2$) сходится,

причём абсолютно в силу не отрицательности самой функции, а при $p - 1 \geq 1$ ($p \geq 2$) интеграл расходится.

Теперь посмотрим поведение на бесконечности с учётом $p < 2$. При $p > 0$

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится по признаку Дирихле.

А что происходит здесь с абсолютной сходимостью? При $x \in (1, +\infty)$ $\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$, поэтому по признаку сравнения для $1 < p < 2$ сходимость абсолютная.

Итак, представив $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, мы получили одновременную сходимость слагаемых при $0 < p < 2$. При $p \geq 2$ первое слагаемое расходится, значит, расходится исходный интеграл. При этом установлено, что для $1 < p < 2$ сходимость обоих слагаемых, а значит и исходного интеграла, абсолютная.

Пример 8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Здесь особенность только 1 рода, так как в нуле подынтегральная функция равна нулю и непрерывна справа. Сделаем замену переменной $t = x^2$, тогда

$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$ сходятся одновременно, и при сходимости одного из них

равны. Отметим, что второй интеграл сходится по признаку Дирихле. Абсолютной сходимости нет – это устанавливается критерием сходимости в терминах рядов (см. пример 4). Таким образом, ряд условно сходящийся.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \cos(x^3 + x) dx$.

Обозначим $y = x^3 + x$, тогда $y' = 3x^2 + 1 > 0$, следовательно, y возрастает.

Из монотонности функции $y(x)$ следует существование обратной функции $x = \varphi(y)$, тоже монотонно возрастающей. По правилу дифференцирования обратной функции получаем $\varphi'(y) = 1/y'(\varphi(y)) = 1/(3\varphi^2(y) + 1)$ и по формуле заме-

$$\text{ны переменной } \int_0^{+\infty} \cos(x^3 + x) dx = \int_0^{+\infty} \cos y \cdot \varphi'(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{3\varphi^2(y) + 1} dy.$$

Так как $\varphi(y) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty$, получившийся интеграл сходится по признаку Дирихле.

4. Главное значение несобственного интеграла.

Несобственный интеграл 1 рода $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$. То есть он

сходится, если при не зависимом друг от друга стремлении $A \rightarrow -\infty$, $B \rightarrow +\infty$ существует конечный предел.

Для несобственного интеграла 2 рода, если особая точка c (точка, в окрестности которой функция не ограничена) находится внутри промежутка $[a, b]$ и функция $f(x)$ собственно интегрируема по каждому множеству $[a, c - \alpha] \cup [c + \beta, b]$, то несобственным интегралом 2 рода от f по $[a, b]$ называют

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{c - \alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{c + \beta}^b f(x) dx.$$

Если указанные пределы существуют конечные, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

В некоторых случаях, в частности при исследовании сплошных сред, оказывается целесообразным отдельным расходящимся интегралам приписывать в некотором условном смысле числовое значение. Это можно сделать различными способами. Коши предложил делать это следующим образом.

Пусть интеграл $\int_a^b f(x) dx$ имеет единственную особенность внутри интер-

вала интегрирования в точке $x = c$. Тогда эту особенность симметрично вырезают, после чего переходят к пределу, то есть полагают

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right] = v.p. \int_a^b f(x) dx.$$

Такой предел может существовать и в том случае, если исходный интеграл в обычном смысле расходится. Рассмотренный предел называется главным значением несобственного интеграла и обозначается *v.p.* (от английского *value principal*, главное значение) перед знаком интеграла. Подобным образом главным значением интеграла, взятого по всей числовой оси, называется предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx, \text{ то есть предел при симметричном движении в}$$

бесконечности.

Интегралы расходящиеся, но имеющие главное значение часто называются сингулярными, в отличие от собственных или сходящихся несобственных интегралов, которые называют регулярными.

Пример 10. Интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ расходится, так как первообразная функция, то

есть $\ln|x|$, имеет бесконечный разрыв на интервале интегрирования при $x=0$. В то же время главное значение

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^2 \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon] = \ln 2 \end{aligned}$$

существует, так как опасные слагаемые $\pm \ln \varepsilon$ взаимно уничтожаются за счет симметрии до перехода к пределу.

Пример 11. $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_{-N}^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \sin N$. Главное значение

рассмотренного несобственного расходящегося интеграла не существует.

Пример 12. $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_{-N}^N = 0$. Главное значение существует, хотя сам интеграл расходится и потому является сингулярным.

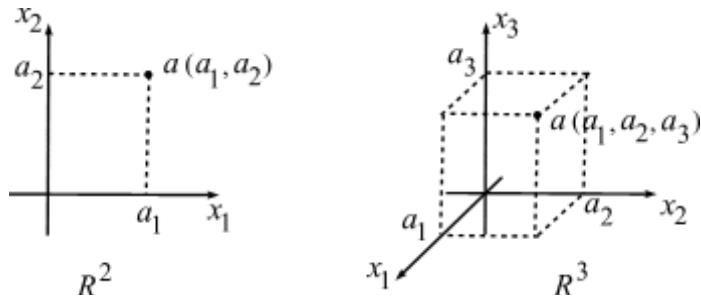
Функции многих переменных

§1. Пространство R^n

1. Множество R^n , евклидова метрика.

Определение 1. $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R\}$ – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел.

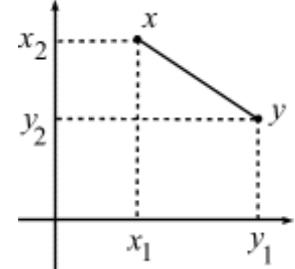
Пример. R^1, R^2, R^3 – имеют хорошую геометрическую иллюстрацию. Координатная прямая, плоскость и координатное пространство:



Определение 2. Пусть $x, y \in R^n$. Величина

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

называется евклидовым расстоянием (евклидовой метрикой) между элементами x и y .



Определение 3. Множество R^n наделённое евклидовой метрикой $\rho(x, y)$ называется n -мерным евклидовым пространством.

Теорема 1. $\rho(x, y)$, как функция двух переменных, обладает следующими свойствами:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (отделимость);
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Доказательство. Свойства 1) и 2) вытекают из определения. Для доказательства свойства 3) нам понадобится следующее неравенство.

Неравенство Коши-Буняковского (НКБ):

$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$, при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда найдется скаляр λ такой, что $x = \lambda y$, то есть $x_1 = \lambda y_1, x_2 = \lambda y_2, \dots, x_n = \lambda y_n$.

Для доказательства неравенства рассмотрим квадратный трёхчлен

$P(t) = (x_1 - ty_1)^2 + \dots + (x_n - ty_n)^2 = A t^2 - 2B t + C$, где $A = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$, $B = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, $C = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Если $A = 0$, то $y = \mathbf{0}$, то есть $y = (0, 0, \dots, 0)$ и неравенство выполняется.

При $A \neq 0$, поскольку $P(t) \geq 0$, его дискриминант $D_1 = B^2 - AC \leq 0$, то есть $B^2 \leq AC$ и НКБ выполняется. При этом, если $D_1 = 0$, то $P(t)$ имеет корень, который назовём $t = \lambda$. Тогда $(x_1 - \lambda y_1)^2 + \dots + (x_n - \lambda y_n)^2 = 0$ и $x = \lambda y$.

Вернёмся к доказательству свойства 3). Рассмотрим

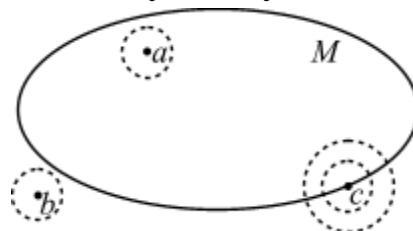
$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) &= ((x_1 - z_1) + (z_1 - y_1))^2 + \dots + ((x_n - z_n) + (z_n - y_n))^2 = \\ &= \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2((x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \dots + (x_n - z_n)(z_n - y_n)) \leq \text{по НКБ} \\ &\leq \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2\rho(x, z)\rho(z, y) = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2. \text{ чтд.} \end{aligned}$$

2. Топология R^n .

Множество $B(a, r) = \{x \in R^n : \rho(x, a) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке a радиуса $r > 0$.

Пусть множество $M \subset R^n$.

- a – *внутренняя* точка M , если существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \subset M$.
- a – *границчная* точка M , если для любого $r > 0$ в $B(a, r)$ есть точки из M , и не принадлежащие множеству M .
- a – *внешняя* точка M , если существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \cap M = \emptyset$.



Здесь a – внутренняя, b – внешняя, c – границчная точки множества M .

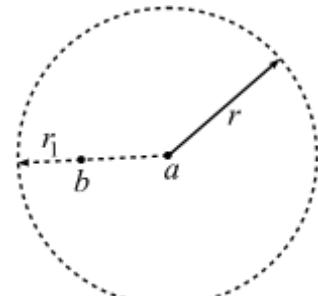
Определение 4. Множество M называется *открытым*, если для любого $a \in M$ существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \subset M$, то есть любая его точка – внутренняя.

Определение 5. Множество F называется *замкнутым*, если его дополнение $R^n \setminus F$ – открытое множество.

Утверждение 1. Открытый шар $B(a, r)$ – открытое множество.

Доказательство. Пусть $b \in B(a, r)$ – произвольная точка шара, ясно, $\rho(b, a) < r$. Определим $r_1 = r - \rho(b, a)$. Теперь заметим, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$. Пусть $c \in B(b, r_1)$ – произвольная точка. Заметим, что $\rho(c, a) \leq \rho(c, b) + \rho(b, a) < r_1 + \rho(b, a) = r$, это означает, что $c \in B(a, r)$.

Замечание. Язык геометрии чрезвычайно удобен в



теории метрических пространств. Рисунок справа показывал, как надо решать поставленную задачу. Вместе с тем, доказательство носит самостоятельный характер и не опирается на него.

Утверждение 2. Множество $\bar{B}(a, r) = \{x \in R^n: \rho(x, a) \leq r\}$ – замкнутое множество.

Доказательство. Необходимо заметить, что дополнение шара $\bar{B}(a, r)$, а им будет множество $M = \{x \in R^n: \rho(x, a) > r\}$, является открытым. Выполните его самостоятельно.

Сходящиеся последовательности в R^n .

Определение 6. Пусть точки $x_m \in R^n$ ($m = 1, 2, \dots$), $a \in R^n$, то есть $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Последовательность точек x_m называется *сходящейся к точке a* ($x_m \rightarrow a$) при $m \rightarrow \infty$, если $\rho(x_m, a) \rightarrow 0$.

В терминах ε - N , как обычно: $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: при $m \geq N$ выполняется $\rho(x_m, a) < \varepsilon$.

Открытый шар $B(a, \varepsilon) = \{x \in R^n: \rho(x, a) < \varepsilon\}$ с центром в точке a радиуса $\varepsilon > 0$ называется *ε -окрестностью* точки a .

Утверждение 3. Последовательность $x_m \rightarrow a$ при $m \rightarrow \infty \Leftrightarrow$ имеет место

покоординатная сходимость
$$\begin{cases} x_1^{(m)} \rightarrow a_1 \\ x_2^{(m)} \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n^{(m)} \rightarrow a_n \end{cases} \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Доказательство. \Rightarrow Во-первых, заметим, что $x_1^{(m)} \rightarrow a_1$ при $m \rightarrow \infty$. Поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x_m, a) = \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + (x_2^{(m)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2} \geq \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + 0} = |x_1^{(m)} - a_1|,$$

то из $\rho(x_m, a) \rightarrow 0$, следует $x_1^{(m)} \rightarrow a_1$. Аналогично, для остальных координат.

$\Leftarrow \rho^2(x_m, a) = (x_1^{(m)} - a_1)^2 + (x_2^{(m)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, поскольку каждое слагаемое стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ в силу покоординатной сходимости.

Утверждение 4. (Характеризация замкнутых и открытых множеств в терминах последовательностей).

- 1). F замкнуто \Leftrightarrow из того, что $x_m \in F$ и $x_m \rightarrow x$ следует, что $x \in F$.
- 2). U открыто \Leftrightarrow из того, что $x \in U$ и $x_m \rightarrow x$ следует, что существует номер N такой, что при $m \geq N$ $x_m \in U$.

Доказательство. 1) \Rightarrow От противного, предположим $x \notin F$, тогда дополнение F – открытое множество, значит, существует шар $B(x, \varepsilon)$, который не пересекается с F . С другой стороны, $x_m \rightarrow x$, отсюда следует, что с некоторого номера $x_m \in B(x, \varepsilon)$. Таким образом, получили, что с одной стороны любое $x_m \in F$, с другой стороны при некотором индексе m имеем $x_m \notin F$.

\Leftarrow Обратно. Допустим F обладает указанным в условии свойством, но не замкнуто. Тогда его дополнение не является открытым, что, в свою очередь, означает, что не все его точки внутренние. Выберем эту точку, она $x \notin F$, и при этом любой шар $B(x, r)$ имеет непустое пересечение с F . Для таких шаров выберем $r = 1/m$ и $x_m \in B(x, 1/m) \cap F$. Тогда получаем последовательность $x_m \in F$ и $x_m \rightarrow x$ и $x \notin F$. Противоречие.

2) Теперь это свойство можно доказать двумя способами. Дать самостоятельное доказательство, следуя идеям доказательства 1). Или переходя к дополнениям воспользоваться доказанным свойством 1).

§2. Компакты в R^n

Определение 1. Множество $K \subset R^n$ называется компактом, если из любого покрытия множества K открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если $K \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, где U_{α} – открытые множества, то можно выделить конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}.$$

Пример. В пространстве R^1 отрезок $[a, b]$ – компакт.

Схема доказательства: 1) от противного; 2) при делении отрезка пополам выделяется та часть, которая не имеет конечного подпокрытия интервалами; 3) эта половинка снова делится пополам и опять выделяется половинка не имеющая конечного подпокрытия; и так далее.

Тем самым создаётся последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. По теореме о вложенных отрезках их пересечение состоит из единственной точки c , при этом она является пределом числовых последовательностей левых a_m и правых b_m концов вложенных отрезков.

Для построенной точки c можно выделить из данного покрытия одно открытое множество U , которому она принадлежит. Далее, при некотором $\varepsilon > 0$ интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ содержитя во множестве U и, поскольку $a_m \rightarrow c$ и $b_m \rightarrow c$, начиная с некоторого номера все $[a_m, b_m]$ попадают в U . Иными словами построенные отрезки покрылись одним множеством. Противоречие.

Теорема 1. Параллелепипед $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ – является компактом в R^n .

Доказательство. Поведём по схеме примера. От противного. Разобьём каждый координатный отрезок $[a_k, b_k]$, где $k = 1, 2, \dots, n$, на два: $\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$. Полученные отрезки дают 2^n параллелепипедов в R^n , объединение которых составляет весь Π .

Пусть $\{U_\alpha\}$ – произвольное покрытие Π открытыми множествами, обозначим $\Pi_1 = [a^1_1, b^1_1] \times [a^1_2, b^1_2] \times \dots \times [a^1_n, b^1_n]$ тот из 2^n параллелепипедов, который не имеет конечного подпокрытия (в силу нашего предположения). По его поводу повторим рассуждения, которые только что произвели относительно Π . И так далее.

Получим последовательность, вложенных друг в друга, параллелепипедов: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$. Заметим, что выполняются свойства:

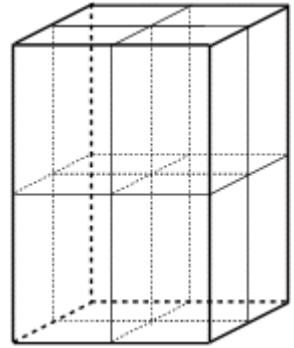
1) для каждой координаты k отрезки вложенные $\left[a^{(m)}_k, b^{(m)}_k\right] \subset \left[a^{(m-1)}_k, b^{(m-1)}_k\right]$;

2) длины рёбер этих параллелепипедов по каждой координате стремятся к нулю: $b^{(m)}_k - a^{(m)}_k = \frac{b^{(m-1)}_k - a^{(m-1)}_k}{2} = \frac{b_k - a_k}{2^m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Таким образом, для каждого k по теореме о вложенных отрезках существует единственное число $c_k \in \bigcap_m \left[a^{(m)}_k, b^{(m)}_k\right]$. Следовательно, точка $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \Pi_m$ для всех m . Поскольку $c \in \Pi$, найдется U_{α_0} из покрытия Π , которому принадлежит c . Кроме того, для любого k имеет место сходимость $a^{(m)}_k \rightarrow c_k$ и $b^{(m)}_k \rightarrow c_k$ (покоординатная сходимость) и $a_m = (a^{(m)}_1, a^{(m)}_2, \dots, a^{(m)}_n) \rightarrow c$, $b_m = (b^{(m)}_1, b^{(m)}_2, \dots, b^{(m)}_n) \rightarrow c$. Множество – открытое, значит, найдется шар с центром с такой, что $B(c, r) \subset U_{\alpha_0}$ и с некоторого номера a_m и b_m лежат в шаре, как и Π_m . Тем самым, Π_m получит покрытие из одного множества U_{α_0} . Противоречие.

Утверждение 1. Пусть K – компактное множество, $F \subset K$, F – замкнутое множество. Тогда F – компакт.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ – произвольное покрытие F открытыми множествами, добавим к этому покрытию открытое множество $R^n \setminus F$. Новый набор открытых множеств покрывает всё R^n и компакт K . Выберем конечное покрытие K , оно является конечным покрытием F , а если теперь отбросить от-



крытое множество $R^n \setminus F$, то оставшиеся открытые множества составляют подпокрытие из $\{U_\alpha\}$, конечное и покрывающее F .

Определение 2. Множество $K \subset R^n$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Теорема 2. (Критерий компактности) Множество K – компакт в R^n тогда и только тогда, когда K – замкнутое и ограниченное.

Доказательство. Пусть K – компакт в R^n .

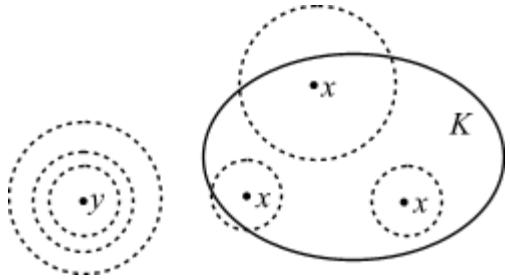
Заметим, что $R^n \setminus K$ – открытое. Рассмотрим некоторую $y \in R^n \setminus K$. Поскольку если $x \in K$, получаем $x \neq y$ и найдутся $\varepsilon_x > 0$ и $r_x > 0$ такие, что $B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, r_x) = \emptyset$. Рассмотрим покрытие множества K только что полученными $B(x, \varepsilon_x)$ открытыми шариками для всех его точек: $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x) \supset K$. Поскольку K компакт $\bigcup_{k=1}^m B(x_k, \varepsilon_{x_k}) \supset K$. Теперь выберем минимальное из r_{x_k} : $r = \min_{1 \leq k \leq m} r_{x_k}$, тогда $B(y, r) \cap B(x_k, \varepsilon_{x_k}) = \emptyset$ значит, $B(y, r) \cap K = \emptyset$ и y – внутренняя точка дополнения, K – замкнутое.

Ограничность. Рассмотрим последовательность шаров с центром в $\mathbf{0}$, радиуса p – натуральное число. Ясно $K \subset R^n = \bigcup_{p=1}^{\infty} B(\mathbf{0}, p)$, поскольку K компакт, существует натуральное число s , такое, что $K \subset \bigcup_{p=1}^s B(\mathbf{0}, p) = B(\mathbf{0}, s)$.

Обратно. Так как K – ограниченное, то существует параллелепипед $\Pi \supset K$. Параллелепипед компактен (см. теорему 1), а множество K – замкнутое, по утверждению 1 оно компактно. Теорема доказана.

Теорема 3. (Критерий компактности) Множество K – компакт в R^n в терминах последовательностей). K – компакт в $R^n \Leftrightarrow$ из любой последовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k} , которая сходится к элементу множества K , то есть $x_{m_k} \rightarrow x \in K$.

Доказательство следует из соображений покоординатной сходимости и из известной леммы Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.



Функции многих переменных (лекция 2)

§3. Предел функции многих переменных

1. Отображения, координатные функции, предел.

Будем говорить, что задана функция $f: R^n \rightarrow R$, если каждой точке x некоторого множества $M \subset R^n$ ставится в соответствие некоторое число y . Поскольку $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая функция записывается как $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или коротко $y = f(x)$. Так как аргумент функции имеет несколько координат, её называют **функцией многих (нескольких) переменных**.

Пример 1. Функция $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$ определена на n -мерном шаре радиуса 1 с центром в точке $\mathbf{0}(0, 0, \dots, 0)$. Множеством её значений является отрезок $[0, 1]$.

Будем также рассматривать отображения $f: R^n \rightarrow R^m$.

Здесь запись $y = f(x)$ будет означать $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; в свою очередь $y = f(x)$ означает $y \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

$$\text{Таким образом } y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \text{ и } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Функции $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **координатными функциями** отображения $f: R^n \rightarrow R^m$. Довольно часто отображения из R^n в R^m называют **векторно-значными** функциями или просто функциями, действующими из R^n в R^m .

Замечание (о координатных функциях сложной функции).

Пусть имеются функции $g: R^k \rightarrow R^n$ и $f: R^n \rightarrow R^m$, рассмотрим поподробнее сложную функцию f от g , которая действует из R^k в R^m , $x = g(t)$, $y = f(x)$, $y = f(g(t))$.

$$x = g(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = g_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases}, \quad y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases},$$

$$y = f(g(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \\ y_2 = f_2(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \\ \dots \\ y_m = f_m(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \end{cases}.$$

Определение 1. (Предела функции многих переменных в точке)

Пусть $a \in R^n$, $A \in R^m$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ означает:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: при $0 < \rho(x, a) < \delta$ выполняется $\rho(f(x), A) < \varepsilon$ (по Коши).

Замечание. Здесь $\rho(x, a)$ и $\rho(f(x), A)$ – расстояния в пространствах разной размерности (R^n и R^m).

Так же как и для функций одной переменной формулируется понятие предела по Гейне и имеет место

Теорема 1. (Эквивалентность определений по Коши и по Гейне).

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ по Коши $\Leftrightarrow \forall x_k: x_k \neq a$ из $x_k \rightarrow a$ следует $f(x_k) \rightarrow A$ (по Гейне).

Поскольку сходимость в R^n (и в R^m) равносильна покоординатной сходимости, справедлива

$$\text{Теорема 2. Пусть } A = (A_1, A_2, \dots, A_m). \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1 \\ \dots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_m(x) = A_m \end{cases}$$

Таким образом, исследование на существование и значение предела отображения сводится к исследованию координатных функций, то есть функций, действующих из R^n в R .

Это означает, что если некоторое свойство относительно пределов справедливо для функций $f: R^n \rightarrow R$, то оно естественным образом переносится и на отображения $f: R^n \rightarrow R^m$.

Определимся ещё с тем, что подразумевается под понятием предела функции $f: R^n \rightarrow R$ при стремлении её аргумента $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в бесконечность.

Определение 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ означает, что если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: при $\rho(0, x) > \delta$ выполняется $|f(x) - A| = \rho(f(x), A) < \varepsilon$.

Для предела функции многих переменных выполняются свойства, такие же, как и для функций одной переменной: арифметические, локальной ограниченности, закон локального сохранения знака. Их доказательства проводятся

точно так же, как и для функций одной переменной. Так, например, для предела в точке a следует лишь в рассуждениях заменить разность $|x - a|$ на $\rho(x, a)$.

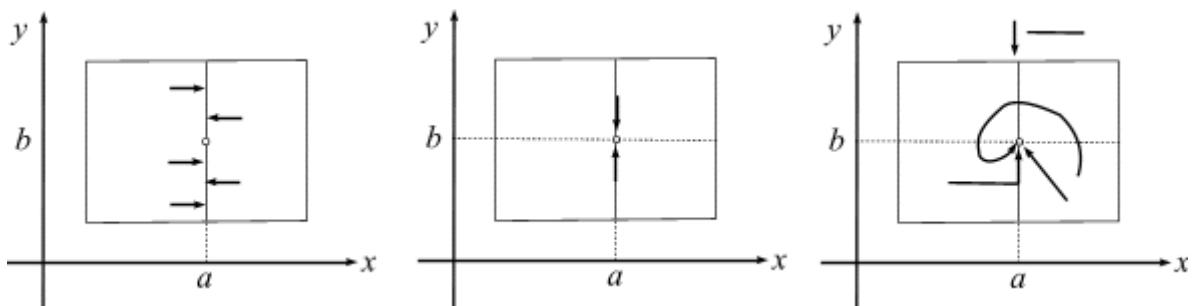
2. Повторные пределы.

Для функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нескольких переменных можно определить понятие предела по одной из переменных x_k при фиксированных значениях остальных переменных. В связи с этим возникает понятие повторного предела. Рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных.

Определение 1. Пусть функция $f: R^2 \rightarrow R$, то есть она имеет вид $z = f(x, y)$ и задана в некоторой прямоугольной окрестности точки $(a, b) \in R^2$, за исключением быть может самой точки (a, b) . Тогда её предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ (I) называют

двойным пределом.

Определение 2. Если для каждого фиксированного y существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ и затем существует $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$, то говорим, что существует **первый повторный предел**. Обозначаем его для краткости (II₁) – первый предельный переход по первой переменной. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, обозначаем (II₂).



На рисунке слева показано, что при вычислении предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = g(y)$ при фиксированном y , движение по x происходит исключительно в горизонтальном направлении.

На центральном рисунке показано движение по y при вычислении предела $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$.

На правом рисунке изображены произвольные траектории движения к точке (a, b) , по которым при вычислении двойного предела $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ должны получаться одинаковые результаты.

Возникает вопрос взаимосвязи между пределами I, II₁, II₂.

Теорема (о двойном и повторных пределах).

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некотором прямоугольнике с центром в точке (a, b) , за исключением, быть может, самой точки (a, b) .

Тогда, если существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ и для каждого y существует

$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ кроме, быть может, $y = b$, то существует повторный предел

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Доказательство. Обозначим $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = g(y)$. Пусть

$\varepsilon > 0$ произвольное, выберем ε_1 такое, что $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$. По определению предела функции (двойного) существует $\delta > 0$ такое, что как только $|x - a| < \delta$ и $|y - b| < \delta$, так выполняется $|f(x, y) - A| < \varepsilon_1$. Выполним в последнем неравенстве предельный переход по $x \rightarrow a$ и получим $|g(y) - A| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тем самым установлено, что $|g(y) - A| < \varepsilon$ как только $|y - b| < \delta$. Это означает, что существует $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A$

$$\text{и } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right).$$

Теорема (общий случай).

Пусть функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ многих переменных определена в некотором параллелепипеде с центром в точке $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, за исключением может быть только самой точки a . Тогда, если существуют

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{и } \forall x_1 \lim_{\substack{x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ то } \exists \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \lim_{\substack{x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Приведём примеры взаимосвязей между пределами I, II₁, II₂.

Пример 2. У функции $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке $(0, 0)$, и они равны:

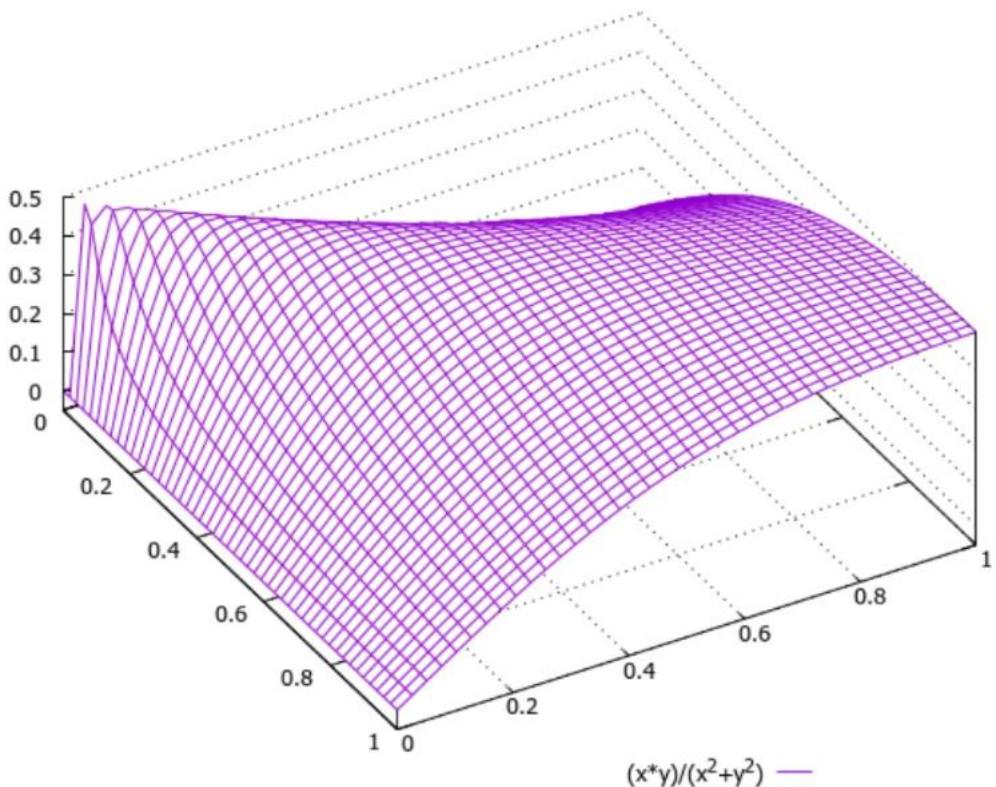
Во-первых, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0y}{0^2 + y^2} = 0$, и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$, ясно

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$. Во вторых, если $x = y = t \rightarrow 0$ (двигаемся в точку $(0, 0)$ по

прямой $y = x$), то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$; если же $-x = y = t \rightarrow 0$ (двигаемся в

точку $(0, 0)$ по прямой $y = -x$), то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2 + t^2} = -\frac{1}{2}$. Значит, предела

не существует.

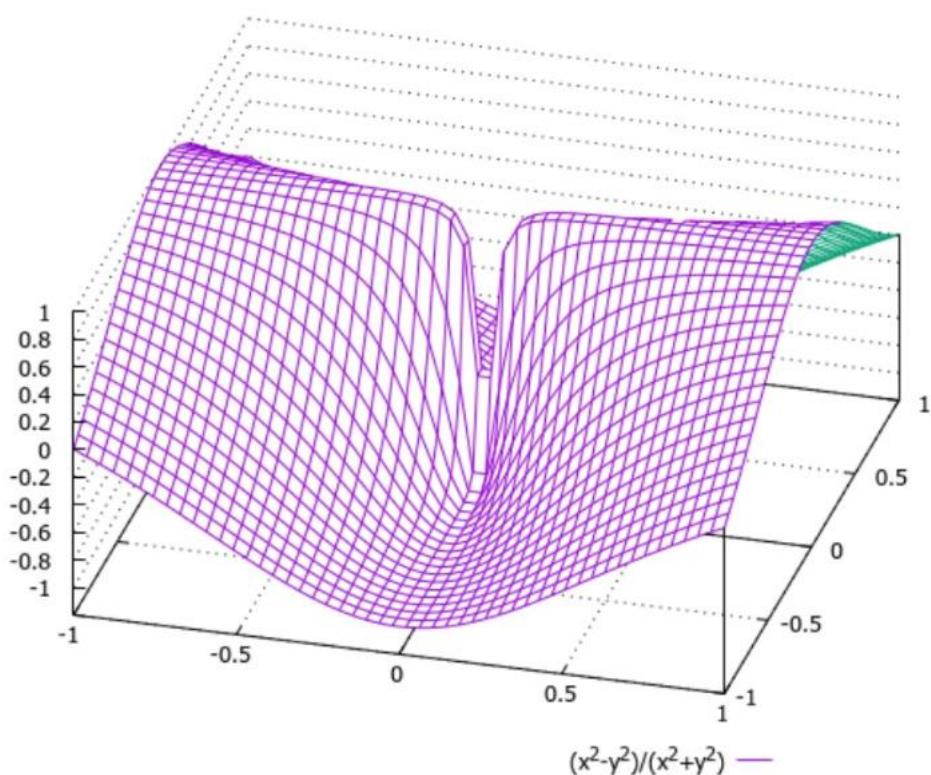


Пример 3. У функции $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке $(0, 0)$, но они не равны:

Во-первых, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1$, и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$, ясно

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$. Следовательно, о пределе по совокупности переменных говорить не приходится, так как по двум разным направлениям подхода к точке $(0, 0)$ получились разные ответы. Значит, единственного A , называемого пределом функции в точке, нет.



§4. Непрерывные функции многих переменных

Определение 1. Отображение $f: R^n \rightarrow R^m$ называется непрерывным в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Замечание 1. Из определения предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{при } 0 < \rho(x, x_0) < \delta \text{ выполняется } \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Замечание 2. Отметим, что в определении 1 точки $x, a \in R^n$, $f(x), f(a) \in R^m$, то есть $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, кроме того f имеет m координатных

$$\text{функций } f_1(x), \dots, f_m(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a) \\ \dots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_m(x) = f_m(a) \end{cases}$$

Замечание 3. На языке шаров это означает: $f[B(a, \delta)] \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Теорема 1. Расстояние $\rho(x, y)$ является непрерывной функцией, действующей из $R^n \times R^n$ в R .

Доказательство. Итак, надо доказать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \rho(x, y) = \rho(a, b)$.

Рассмотрим $|\rho(x, y) - \rho(a, b)|$. Из свойств расстояния следует:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) \Leftrightarrow \rho(x, y) - \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(b, y),$$

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) \Leftrightarrow \rho(a, b) - \rho(x, y) \leq \rho(a, x) + \rho(y, b),$$

то есть $|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \leq \rho(a, x) + \rho(y, b)$.

Поскольку и $\rho(a, x) \rightarrow 0$, и $\rho(y, b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a, y \rightarrow b$, то и

$$|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \rightarrow 0.$$

Теорема 2. (Локальные свойства непрерывных функций).

- 1.** Непрерывная в точке a функция $f : R^n \rightarrow R$ локально ограничена, то есть существует $\delta > 0$ и число C такое, что $|f(x)| < C$ для любых $x \in B(a, \delta)$.
- 2.** Суперпозиция непрерывных функций – непрерывная функция.
- 3. Закон сохранения знака.** Если $f : R^n \rightarrow R$, $f(a) > 0$ и f непрерывна в точке a , то найдется открытый шар $B(a, r)$ с центром в точке a такой, что $f(x) > 0$ для любых $x \in B(a, r)$.
- 4. Арифметические свойства.** Если $f, g : R^n \rightarrow R$ непрерывны в точке a , то функции $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a .

По поводу доказательства повторимся о том, что их доказательства проводятся точно так же, как и для функций одной переменной. Следует лишь в рассуждениях, проведённых в прошлом семестре, заменить разность $|x - a|$ на $\rho(x, a)$.

Непрерывность функции многих переменных по одной из переменных

Пусть имеется функция многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Введём понятие частного приращения функции в точке $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – по первой переменной,

$f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – по второй переменной, ... и т.д.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной по переменной x_k в точке x , если $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Очевидно, что из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке следует её непрерывность в этой точке по каждой из переменных в отдельности. В обратную сторону, вообще говоря, не верно.

Пример 2. (возвращается). У функции $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

Обе функции $f(0, y)$ и $f(x, 0)$ непрерывны по x и y соответственно, поскольку они нулевые. Однако было замечено, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

§5. Глобальные свойства непрерывных функций

Утверждение 1. Пусть $f: R^n \rightarrow R^m$. Функция непрерывна в каждой точке $R^n \Leftrightarrow$ прообраз открытого множества R^m есть открытое множество R^n .

Доказательство. Пусть U открытое множество в пространстве R^m , V – его прообраз: $f^{-1}[U] = V$. Возьмем произвольное $a \in V$, тогда $b = f(a) \in U$. Поскольку U открытое и $b \in U$ найдется $r > 0$ такое, что $B(b, r) \subset U$. Из определения непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что из $x \in B(a, \delta)$ следует $f(x) \in B(f(a), r)$. Из последнего включения получаем $x \in f^{-1}[B(b, r)] \subset f^{-1}[U] = V$, то есть $B(a, \delta) \subset V$. V – открытое множество.

Обратно. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Шар $B(f(a), \varepsilon)$ является открытым множеством, при этом $a \in f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$. По условию множество $f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$ – открытое множество. Значит, существует $\delta > 0$ такое, что $B(a, \delta) \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$. Из последнего включения получаем $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ в частности, если $\rho(x, a) < \delta$, то $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Теорема 1. Образ компакта при непрерывном отображении есть компакт. То есть, если $f: R^n \rightarrow R^m$ – непрерывное отображение и $K \subset R^n$ является компактом, то множество $f[K]$ – компактное множество в R^m .

Доказательство 1. Напомним определение компактного множества: $K \subset R^n$ называется компактом, если из любого покрытия множества K открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если $K \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, где U_{α} – открытые множества, то можно выделить конеч-

ный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$: $K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}$.

Пусть $\{V_{\alpha}\}$ система открытых множеств, причем $f[K] \subset \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (взяли открытое покрытие $f[K]$). Перейдем к прообразам множеств и получим включения $K \subset f^{-1}[f[K]] \subset f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right] \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}[V_{\alpha}]$. В силу утверждения 1 все множества $U_{\alpha} = f^{-1}[V_{\alpha}]$ – открытые множества. Поскольку K – компакт, то можно выделить конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$: $K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}$. В свою очередь

отсюда следует включение $f[K] \subset \bigcup_{i=1}^p f(U_{\alpha_i}) \subset \bigcup_{i=1}^p V_{\alpha_i}$ и конечное покрытие $f[K]$.

Доказательство 2. Напомним критерий компактности множества в R^n в терминах последовательностей: K – компакт в $R^n \Leftrightarrow$ из любой последовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k} , которая сходится к элементу множества K , то есть $x_{m_k} \rightarrow x \in K$.

Пусть $y_m \in f[K]$ произвольная последовательность, этой последовательности соответствует последовательность x_m , где $f(x_m) = y_m$. Поскольку $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k} , которая сходится к элементу множества K , то есть $x_{m_k} \rightarrow x \in K$. Отображение f непрерывно в точке x , поэтому $y_{m_k} = f(x_{m_k}) \rightarrow f(x) = y$. Тем самым построена подпоследовательность $y_{m_k} \rightarrow y$, что означает компактность $f[K]$

Теорема 2. Пусть $f: R^n \rightarrow R$ непрерывная на компакте K .

Тогда 1) Функция f ограничена на K (первая теорема Вейерштрасса);

2) Существуют точки $x^*, x_* \in K$ такие, что $f(x^*) = \sup_{x \in K} f(x)$ и $f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x)$ (вторая теорема Вейерштрасса).

Доказательство. 1) При непрерывном отображении компакт переходит в компакт, кроме того компакт – ограниченное множество.

2) Поскольку множество значений функции ограничено, существует $\sup_{x \in K} f(x) = M$. По определению точной верхней грани, для любого натурального m существует $x_m \in K$ такой, что $f(x_m) > M - \frac{1}{m}$. Поскольку K компакт, из по-

следовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k} , которая сходится к элементу множества K , то есть $x_{m_k} \rightarrow x^* \in K$. Поскольку f непрерывна на компакте, выполнив предельный переход в двойном неравенстве $M \geq f(x_{m_k}) > M - \frac{1}{m_k}$, получим $M \geq f(x_*) \geq M$ и $f(x^*) = \sup_{x \in K} f(x)$. Существование $x_* \in K$ можно заметить, рассматривая функцию $-f(x)$.

Теорема 3. Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на нём (теорема Кантора).

Доказательство 1. Напомним определение равномерной непрерывности. Отображение $f: R^n \rightarrow R^m$ равномерно непрерывное на множестве E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $x', x'' \in E$ и $\rho(x', x'') < \delta$ следует $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности в каждой точке $x \in K$ найдутся δ_x такие, что из $\rho(y, x) < \delta_x \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. Рассмотрим систему открытых шаров $\{B(x, \delta_x/2)\}_{(x \in K)}$. Объединение этих шаров покрывает компакт K (даже только своими центрами). Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \delta_{x_i}/2)$. Определим $\delta = \min_{1 \leq i \leq p} \{\delta_{x_i}/2\}$. Заметим, что δ – искомое. Пусть $x', x'' \in K$, $\rho(x', x'') < \delta$. Точка x' попадает в какой-нибудь шар из конечного подпокрытия $x' \in B(x_{\bar{i}}, \delta_{x_{\bar{i}}}/2)$. Отсюда $\rho(f(x'), f(x_{\bar{i}})) < \varepsilon/2$. Далее, $\rho(x'', x_{\bar{i}}) \leq \rho(x'', x') + \rho(x', x_{\bar{i}}) < \delta + \delta_{x_{\bar{i}}}/2 \leq 2 \cdot \delta_{x_{\bar{i}}}/2 = \delta_{x_{\bar{i}}}$. Значит, $\rho(f(x''), f(x_{\bar{i}})) < \varepsilon/2$ и $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Доказательство 2. Можно провести от противного, выделив последовательности x'_m и x''_m , для которых $\rho(x'_m, x''_m) \rightarrow 0$ и $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \geq \varepsilon > 0$. Затем из соображений компактности выделить $x'_{m_k} \rightarrow x \in K$, одновременно получим $x''_{m_k} \rightarrow x \in K$ и противоречие в неравенстве $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \geq \varepsilon > 0$ для подпоследовательности с индексами m_k .

Определение. Множество E называется линейно связным, если любых точек $a, b \in E$ существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки $\Gamma_{a,b} \subset E$.

Напомним непрерывная кривая $\Gamma_{a,b}$ в R^n задается системой $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$

$t \in [0, T]$, где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – непрерывные на отрезке $[0, T]$ функции, при этом $a = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0))$ и $b = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T))$.

Теорема 4. Пусть $E \subset R^n$ – линейное связное, $f: E \rightarrow R$ – непрерывная, $f(a) < 0, f(b) > 0$. Тогда существует $c \in E$ такое, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Функция $\Phi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ и принимает значения разных знаков на концах отрезка. Значит, найдется точка $\bar{t} \in [0, T]$, в которой $\Phi(\bar{t}) = 0$.

Ясно, что $c = (\varphi_1(\bar{t}), \varphi_2(\bar{t}), \dots, \varphi_n(\bar{t}))$ – искомая точка.

§6 Линейная структура R^n

1. R^n как векторное (линейное) пространство.

Пусть $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\lambda \in R$.

Определим операции $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$.

Получим структуру линейного пространства $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – его нуль, $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ противоположный к x вектор, размерность пространства n , есть $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ – стандартный базис $\{e_k\}$, здесь вектор e_k имеет 1 на k -том месте, остальные нули.

2. Евклидова норма, скалярное произведение.

Опр. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$ евклидова **норма** в R^n .

Свойства нормы. 1). $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$. (неотрицательность и отделимость). 2). $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность нормы) 3). Для любых x и y выполняется неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, из которого следует, что если $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ (непрерывность нормы относительно себя).

Опр. Функция $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ называется **скалярным произведением** векторов. Ясно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и выполняется неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

3. Линейные отображения конечномерных пространств.

Опр. Отображение $L: R^n \rightarrow R^m$ называется **линейным**, если обладает свойствами: 1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ для любых x, y из R^n (свойство аддитивности); 2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ для любых $x \in R^n$ и любых $\lambda \in R$ (свойство однородности).

Матричное представление линейных отображений.

Пример 1. $y = 2x + 3$ не является линейным отображением из R в R .

$L: R \rightarrow R$ является линейным отображением из R в $R \Leftrightarrow L(x) = k \cdot x$, где k – фиксированное число.

Далее, пусть теперь $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$ – стандартные базисы в R^n и R^m . Во-первых, для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Во-вторых, поскольку $L(e_j) \in R^m$ имеем представление

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i. \text{ В итоге получаем}$$

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \bar{e}_i.$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $L(x) =$

Свойства линейных отображений.

1. Пусть $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\|L(x)\| \leq C \|x\|$ для любого x .

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(e_j)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|L(e_j)\|^2} = C \|x\|.$$

2. Пусть $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство. $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq C \|x_k - x\|$.

3. Любое линейное отображение $L: R^n \rightarrow R$ имеет вид:

$L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$, где A_1, A_2, \dots, A_n – некоторые числа.

4. Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

5. Отображение $L: R^n \rightarrow R^m$ линейное \Leftrightarrow каждая координатная функция $L_i: R^n \rightarrow R$ является линейным отображением.

§6 Линейная структура R^n

1. R^n как векторное (линейное) пространство.

Пусть $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\lambda \in R$.

Определим операции $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$.

Получим структуру линейного пространства $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – его нуль, $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ противоположный к x вектор, размерность пространства n , есть $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ – стандартный базис $\{e_k\}$, здесь вектор e_k имеет 1 на k -том месте, остальные нули.

2. Евклидова норма, скалярное произведение.

Опр. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$ евклидова **норма** в R^n .

Свойства нормы. 1). $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$. (неотрицательность и отделимость). 2). $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность нормы) 3). Для любых x и y выполняется неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, из которого следует, что если $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ (непрерывность нормы относительно себя).

Опр. Функция $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ называется **скалярным произведением** векторов. Ясно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и выполняется неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

3. Линейные отображения конечномерных пространств.

Опр. Отображение $L: R^n \rightarrow R^m$ называется **линейным**, если обладает свойствами: 1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ для любых x, y из R^n (свойство аддитивности); 2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ для любых $x \in R^n$ и любых $\lambda \in R$ (свойство однородности).

Матричное представление линейных отображений.

Пример 1. $y = 2x + 3$ не является линейным отображением из R в R .

$L: R^n \rightarrow R^m$ является линейным отображением из R^n в $R^m \Leftrightarrow L(x) = k \cdot x$, где k – фиксированное число.

Далее, пусть теперь $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$ – стандартные базисы в R^n и R^m . Во-первых, для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Во-вторых, поскольку $L(e_j) \in R^m$ имеем представление

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i. \text{ В итоге получаем}$$

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \bar{e}_i.$$

$$\text{Отметим, что } L(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Свойства линейных отображений.

1. Пусть $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\|L(x)\| \leq C \|x\|$ для любого x .

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(e_j)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|L(e_j)\|^2} = C \|x\|.$$

2. Пусть $L: R^n \rightarrow R^m$ – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство. $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq C \|x_k - x\|$.

3. Любое линейное отображение $L: R^n \rightarrow R^m$ имеет вид:

$$L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n, \text{ где } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ – некоторые числа.}$$

4. Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

5. Отображение $L: R^n \rightarrow R^m$ линейное \Leftrightarrow каждая координатная функция $L_i: R^n \rightarrow R$ является линейным отображением.

§7 Дифференцируемость функций многих переменных

Опр. Отображение $f: R^n \rightarrow R^m$ называется *дифференцируемым* в точке x , если существует линейное отображение $L_x: R^n \rightarrow R^m$ такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + o(\Delta x)$$

здесь $o(\Delta x): R^n \rightarrow R^m$ – о-малое от Δx обладает свойством $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|o(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0$,

поэтому далее иногда будем применять запись $o(\Delta x) = \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$. Линейное отображение L_x называется *дифференциалом* отображения f в точке x и обозначаются $df(x)$ будем также писать $f'(x)(\Delta x)$ вместо $L_x(\Delta x)$

Замечания. 0. Для функций $f: R \rightarrow R$ линейное отображение $L_x(\Delta x)$ имеет вид $A \cdot \Delta x$, где A некоторое число. (Чему оно равно?)

1. Другая форма записи $f(x) - f(a) = L_x(x - a) + o(x - a)$.

2. Отображения f, L_x, o действуют из R^n в R^m , то есть каждое из них имеет m координатных функций, поведение которых и определяет поведение самих отображений.

Утверждение 0. Дифференцируемое отображение в точке x является непрерывным в этой точке.

Доказательство. Во-первых, $f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$. Во-вторых, линейное отображение является непрерывным, значит, из $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$ следует $L_x(\Delta x) \rightarrow L_x(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Наконец, $\|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. Значит, $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$.

Утверждение 1. Пусть $g: R^n \rightarrow R^m$, g_1, g_2, \dots, g_m – его координатные функции ($R^n \rightarrow R$). Тогда отображение g является линейным \Leftrightarrow каждая функция многих переменных $g_k: R^n \rightarrow R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) является линейной.

Доказательство. Пусть $u, v \in R^n$. Тогда $g(u) = \begin{pmatrix} g_1(u) \\ \dots \\ g_m(u) \end{pmatrix}$, $g(v) = \begin{pmatrix} g_1(v) \\ \dots \\ g_m(v) \end{pmatrix}$,

$g(u + v) = \begin{pmatrix} g_1(u + v) \\ \dots \\ g_m(u + v) \end{pmatrix}$. По правилу сложения векторов имеем равенство

$g(u) + g(v) = \begin{pmatrix} g_1(u) + g_1(v) \\ \dots \\ g_m(u) + g_m(v) \end{pmatrix}$. Таким образом, $g(u) + g(v) = g(u + v) \Leftrightarrow$ имеет

место покоординатное равенство $g_k(u) + g_k(v) = g_k(u + v)$, $\forall k$. Аналогично $g(\lambda u) = \lambda g(u) \Leftrightarrow$ имеет место покоординатное равенство $g_k(\lambda u) = \lambda g_k(u)$, $\forall k$.

Утверждение 2. Пусть $h: R^n \rightarrow R^m$, h_1, h_2, \dots, h_m – его координатные функции ($R^n \rightarrow R$). Тогда отображение h есть $o(\Delta x) \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных $h_k: R^n \rightarrow R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) является $o(\Delta x)$.

Доказательство. \Rightarrow Следует из неравенства $|h_k(\Delta x)| \leq \|h(\Delta x)\|$.
 \Leftarrow Следствие покоординатной сходимости.

Теорема 1. Пусть $f: R^n \rightarrow R^m$, f_1, f_2, \dots, f_m – его координатные функции ($R^n \rightarrow R$). Тогда отображение f дифференцируемо в точке $x \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных $f_k: R^n \rightarrow R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) является дифференцируемой в точке x .

Доказательство. Во-первых,
$$f(x + \Delta x) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x + \Delta x) - f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x + \Delta x) - f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Далее, дифференцируемость каждой координатной функции равносильна

$$\begin{pmatrix} L_{1x}(\Delta x) + o_1(\Delta x) \\ \dots \\ L_{mx}(\Delta x) + o_m(\Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1x}(\Delta x) \\ \dots \\ L_{mx}(\Delta x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(\Delta x) \\ \dots \\ o_m(\Delta x) \end{pmatrix}$$
 в силу утверждений 1 и 2 получаем
 $L_x(\Delta x) + o(\Delta x)$.

Замечание 1. Необходимо исследовать дифференцируемость функций нескольких переменных.

Замечание 2. Любое линейное отображение $L: R^n \rightarrow R$ имеет вид: $L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$, где A_1, A_2, \dots, A_n – некоторые числа.

Опр. Функция многих переменных $f: R^n \rightarrow R$ является *дифференцируемой* в точке x , если существуют некоторые числа A_1, A_2, \dots, A_n такие, что

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \\ &+ o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right). \end{aligned}$$

§8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных

Опр. Функция многих переменных $f: R^n \rightarrow R$ является *дифференцируемой* в точке x , если существуют некоторые числа A_1, A_2, \dots, A_n такие, что

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \\ + o(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}).$$

Замечание 1. (Шаг в прошлое) Для функции $f: R \rightarrow R$ определение дифференцируемости требует существование числа A со свойством:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

затем замечали, что $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$

Опр. Пусть $f: R^n \rightarrow R$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной функции* многих переменных f по переменной x_k в точке x и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.

По сути дела все переменные кроме одной фиксируются, а по оставшейся независимой переменной происходит дифференцирование.

Возникает вопрос взаимосвязи между дифференцируемостью в точке и существовании частных производных.

Теорема 1. Если функция многих переменных $f: R^n \rightarrow R$ является дифференцируемой в точке x , то в этой точке существуют все частные производные. При этом числа A_k в определении дифференцируемости есть $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.

Доказательство. Положим в определении дифференцируемости все приращения $\Delta x_j = 0$ для $j \neq k$:

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + A_k \Delta x_k + o(\Delta x_k).$$

Отсюда $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k} = A_k$.

Вообще говоря, из существования всех частных производных в точке не следует дифференцируемость в этой точке, что показывает следующий пример.

Пример. (Снова возвращается). У функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$$

существуют обе частные производные на

всей плоскости, но функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Действительно. Имеем $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$ и

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ясно, что в точках, где x или y равно 0, также частные производные равны 0. Дифференцируемость в остальных точках плоскости следует из соответствующих теорем для функций одной переменной. Однако в точке $(0, 0)$ отсутствует непрерывность, значит, нет и дифференцируемости.

При усилении требований на частные производные дифференцируемость функции многих переменных может возникнуть.

Теорема 2. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ непрерывны в

окрестности точки x_0 , то функция f дифференцируема в точке x_0 .

Доказательство. Проведем его для функции двух переменных. Итак, $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$ воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях ($0 < \theta, \tau < 1$)

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) \cdot \Delta y$$

Введем в рассмотрение $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Во-первых, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ и

$$\beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0.$$

Во-вторых, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y).$$

В итоге имеем представление:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \right) + (\alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y).$$

Ясно, что

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$ – линейная функция двух переменных. Осталось

заметить, что $|\alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – о-малое.

§8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных (продолжение)

Сделаем небольшой обзор пройденного раньше.

1. Матрица Якоби.

Во-первых, отображение $f: R^n \rightarrow R^m$ называется *дифференцируемым* в точке x , если существует линейное отображение $L_x: R^n \rightarrow R^m$ такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + o(\Delta x).$$

Во-вторых, отображение f дифференцируемо в точке $x \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных $f_i: R^n \rightarrow R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) является дифференцируемой в точке x .

В-третьих, дифференцируемость функций f_i в точке x означает, что $f_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_{i1}\Delta x_1 + A_{i2}\Delta x_2 + \dots + A_{in}\Delta x_n + o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right)$, при этом было замечено, что $A_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

Отсюда следует, что линейное отображение $L_x: R^n \rightarrow R^m$ определяется

$$\text{матрицей } J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби* отображения f . В случае $n = m$ определитель этой матрицы называется *определителем Якоби* или *якобианом*.

Иными словами, матрица Якоби является производной векторной функции по векторному аргументу.

2. Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных.

Во-первых, в R^3 уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ задает плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярную вектору (A, B, C) – нормаль к плоскости.

Во-вторых, функция $f: R^2 \rightarrow R$ в записи $z = f(x, y)$ задает в R^3 некоторое множество $\{(x, y, z): z = f(x, y)\}$ – поверхность в R^3 (график функции двух переменных).

Опр. Плоскость π назовем касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0 этой поверхности, если $M_0 \in \pi$ и если M лежит на поверхности и $M \rightarrow M_0$, то угол между секущей M_0M и плоскость π стремится к нулю.

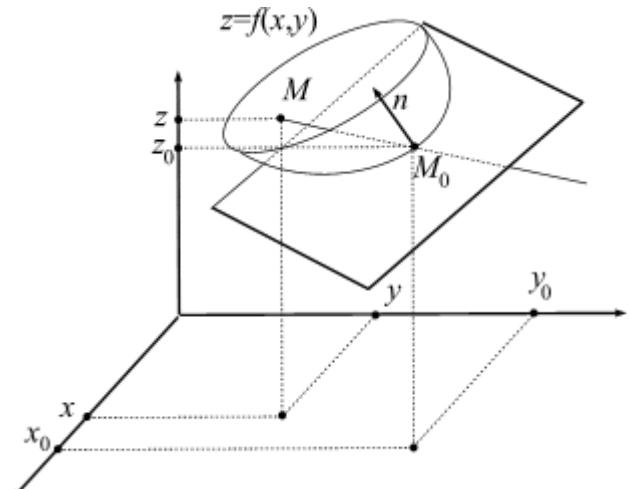
Ясно, что для этого достаточно, чтобы косинус угла φ между вектором $\overrightarrow{M_0M}$ и нормалью $n=(A, B, C)$ стремится к нулю.

Пусть f дифференцируема (x_0, y_0) . Покажем, что в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ у поверхности $z = f(x, y)$ существует касательная плоскость в указанном смысле. Отметим, условие $M \rightarrow M_0$ обеспечивает (с избытком) выполнение $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$.

$$\text{Итак, } z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. теперь докажем, что плоскость π , заданная уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ искомая. Действительно, имеем $\overrightarrow{M_0M}(\Delta x, \Delta y, z - z_0)$, $n=(A, B, -1)$ и

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\overrightarrow{M_0M}, n)}{\|\overrightarrow{M_0M}\| \cdot \|n\|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z - z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \\ &= \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z - z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \leq \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$



§9 Основные законы дифференцирования

Теорема 1. Если отображения $f, g: R^n \rightarrow R^m$ дифференцируемы в точке x , то $h = f + g$ дифференцируемое отображение в точке x и $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Доказательство. Поскольку отображения f и g дифференцируемы в точке x , имеем:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x),$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + L_2(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_2(\Delta x).$$

Складываем, получаем

$$h(x + \Delta x) = h(x) + (L_1(\Delta x) + L_2(\Delta x)) + \|\Delta x\| \cdot (\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x)).$$

Остается заметить, что $L_1 + L_2$ – линейное отображение, $\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x) \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$ и вспомнить соглашение писать $f'(x)(\Delta x)$ и $g'(x)(\Delta x)$ вместо $L_1(\Delta x)$ и $L_2(\Delta x)$. Теорема доказана.

Замечание Матрица Якоби отображения h имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. (Дифференцирование композиции).

Если $f: R^n \rightarrow R^m$ дифференцируемо в точке x , $g: R^m \rightarrow R^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x)$, то отображение $h = g \circ f$ дифференцируемо в точке x и при этом $h'(x) = g'(y) \circ f'(x)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) =$$

поскольку f дифференцируемо в точке x имеем $f(x + \Delta x) - f(x) = L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x)$. Обозначим $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а поскольку $y = f(x)$, можно записать $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ и продолжить.

$$\begin{aligned} &= g(y + \Delta y) - g(y) = L_2(\Delta y) + \|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y) = \\ &= L_2(L_1(\Delta x)) + \|\Delta x\| \cdot L_2(\alpha_1(\Delta x)) + \|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y). \end{aligned}$$

Во-первых, $L(\Delta x) = L_2(L_1(\Delta x))$ является линейным отображением из R^n в R^k .

Во-вторых, поскольку линейное отображение непрерывно $L_2(\alpha_1(\Delta x)) \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$. Иными словами $L_2(\alpha_1(\Delta x)) = \alpha(\Delta x)$.

В-третьих, сделаем оценки.

$$\|\Delta y\| = \|f(x + \Delta x) - f(x)\| = \|L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x)\| \leq (\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|) \cdot \|\Delta x\|$$

Это означает, что $\|\Delta y\| \cdot \|\alpha_2(\Delta y)\| \leq \|\Delta x\| (\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|) \|\alpha_2(\Delta y)\|$. В правой части неравенства если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\| \rightarrow \|L_1\|$. Далее, если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$ (f дифференцируемо в точке x , значит, непрерывно и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$). Таким образом, заметили, что $\|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y) = \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$. Теорема доказана.

Замечание Матрица Якоби $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right)$ отображения h является

произведением матриц:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_k}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{\partial g_i}{\partial y_s}(y) \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x).$$

Теорема 3. (Дифференцируемость обратного отображения).

Пусть $f: R^n \rightarrow R^n$, V_x – окрестность точки x , $y = f(x)$, U_y – окрестность точки y , f – взаимно однозначно отображает V_x на U_y , f непрерывно в x , f^{-1} – непрерывно в точке y . Если f дифференцируемо в точке x и существует $(f'(x))^{-1}$, то f^{-1} дифференцируемо в точке y и $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Доказательство. Пусть Δy произвольное, достаточно малое $(y + \Delta y) \in U_y$. Обозначим $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. Тогда, поскольку $f(x) = y$ можно сделать следующие записи: $x = f^{-1}(y)$, $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$, $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ и, наконец, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Из условий непрерывности имеем $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$.

Из дифференцируемости f в точке x имеем:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x).$$

По условию существует $(f'(x))^{-1}$ линейное отображение из R^n в R^n , значит,

$$(f'(x))^{-1}(\Delta y) = \Delta x + \|\Delta x\| \cdot (f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \quad (*).$$

Оценим: с одной стороны (слева): $\|(f'(x))^{-1}(\Delta y)\| \leq C\|\Delta y\|$, здесь воспользовались непрерывностью оператора. С другой стороны, (справа) имеем $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \Rightarrow (f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \rightarrow 0$, то есть $(f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) = \alpha(\Delta y)$. Можно считать $\|\alpha(\Delta y)\| < 1/2$ и тогда $\|\Delta x + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)\| \geq 1/2\|\Delta x\|$ (здесь использовано неравенство треугольника вида $\|a + b\| \geq \|a\| - \|b\|$).

В итоге получили $\|\Delta x\| \leq 2C\|\Delta y\|$. Перепишем соотношение (*) так:

$$f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = (f'(x))^{-1}(\Delta y) - \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)$$

Поскольку $\|- \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)\| \leq 2C\|\Delta y\| \|\alpha(\Delta y)\|$, слагаемое $- \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)$ есть $\|\Delta y\| \cdot \alpha(\Delta y)$.

Замечание. Матрица Якоби $(f^{-1})'(y)$ является обратной к $f'(x)$.

§10. Приложения теоремы о производной сложной функции

Пусть теперь рассматривается числовая функция $f: R^n \rightarrow R$ нескольких переменных, дифференцируемая в точке $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, и пусть также заданы функции $\varphi_k: R \rightarrow R$ дифференцируемые в точке t_0 , при этом $x_1^0 = \varphi_1(t_0)$, $x_2^0 = \varphi_2(t_0)$, ..., $x_n^0 = \varphi_n(t_0)$. Тогда функция $g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ по теореме о производной сложной функции дифференцируема в точке t_0 , при этом

$$g'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \cdot \varphi'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \cdot \varphi'_2(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M) \cdot \varphi'_n(t_0).$$

Остановимся сначала на функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим некоторый единичный вектор $e(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда прямая, проходящая через точку M_0 в направлении этого вектора e задаётся уравнениями $x = x_0 + t \cos\alpha$, $y = y_0 + t \cos\beta$, $z = z_0 + t \cos\gamma$. Таким образом, на так заданной прямой функция $u = f(x, y, z)$ представляет собой функцию одной независимой переменной t вида $u = f(x_0 + t \cos\alpha, y_0 + t \cos\beta, z_0 + t \cos\gamma)$.

Определение 1. Производную указанной сложной функции по переменной t , взятой в точке $t = 0$, называют производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению единичного вектора e и обозначают символом $\frac{\partial u}{\partial e}$.

Итак, по определению $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos\gamma$.

Определение 2. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор с координатами $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)$, обозначаемый $\text{grad } f(M_0)$ или, что то же самое, $\text{grad } u(M_0)$.

В силу введённого понятия, производная по направлению представляет собой скалярное произведение вектор-градиента и единичного вектора, задающего направление: $\frac{\partial u}{\partial e} = (e, \text{grad } u)$.

Утверждение. Производная функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной в этой точке по любому другому направлению.

Доказательство. Для скалярного произведения имеем

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (e, \operatorname{grad} u) = \|e\| \|\operatorname{grad} u\| \cos \varphi = \|\operatorname{grad} u\| \cos \varphi, \text{ где } \varphi - \text{угол между векторами } \operatorname{grad} u \text{ и } e.$$

Учитывая, что максимальное значение полученное выражение принимает при $\cos \varphi = 1$, то есть $\varphi = 0$, получаем справедливость утверждения.

Определение 3. Поверхностью уровня $C = \operatorname{const}$ функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек $\{(x, y, z)\}$, в которых $f(x, y, z) = C$.

Если в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности уровня $f(x, y, z) = C$ построить касательную плоскость, то легко убедиться в том, что вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ является вектором нормали к этой касательной плоскости, то есть перпендикуляром к ней.

Совершенно аналогично определяется производная по направлению и градиент для дифференцируемой в точке $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функции n переменных.

Замечание. В случае функции двух переменных $u = f(x, y)$ единичный вектор e , определяющий направление, имеет координаты $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Поэтому формула вычисления производной по направлению в точке $M_0(x_0, y_0)$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \sin \alpha.$$

Теорема (о среднем).

Пусть $G \subset R^n$ область (открытое связное множество), $f: G \rightarrow R$, $[x, x + h] \subset G$. Если f непрерывна на $[x, x + h]$ и дифференцируема на $(x, x + h)$, то существует $\theta \in (0, 1)$, такое, что

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_n.$$

Кратко $f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)(h)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$.

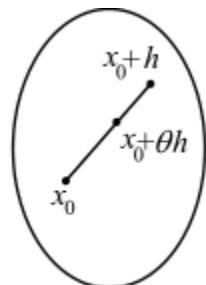
По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует $\theta \in (0, 1)$, такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0)$. Остается правильно продифференцировать сложную функцию.

Замечание 1. Для отображений $f: G \rightarrow R^m$ имеет место оценка (теорема о среднем) $\|f(x + h) - f(x)\| \leq \left(\sup_{u \in G} \|f'(u)\| \right) \|h\|$, здесь нормы h и $f'(u)$ согласованы специальным образом.

Теорема 2. Если $f: G \rightarrow R$ дифференцируемая в области G и $f'(u) = 0 \forall u \in G$, то f – постоянная.

Доказательство. 1). Если область G выпуклая (рис. сверху), выберем точку x_0 , выпуклость позволит вместе с $x_0 + h$ из G содержать весь отрезок $[x_0, x_0 + h]$. По теореме о среднем получим:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x + \theta h)(h) = 0$ – значения во всех точках совпадают с $f(x_0)$.



2). Для невыпуклых областей реализуем схему: есть путь $x(t)$, $t \in [0, 1]$, $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. из 1) следует, что функция принимает одинаковые значения в любом шаге, лежащем в G . Теперь рассмотрим множество $A = \{t \leq 1: f(x(t)) = f(x_0) \forall t' \in [0, t]\}$.



Замечаем, что это множество непустое, ограниченное и если $\sup A = t^* < 1$, то взяв достаточно малый шар, так, чтобы он лежал в G , легко получить противоречие, увеличив t^* . Значит, $t^* = 1$ и $f(x_1) = f(x_0)$.

§11. Производные и дифференциалы высших порядков

1. О порядке взятия частных производных.

Пример 1. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = \sin(xy)$. Вычисляем $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(xy)) = -\sin(xy)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos(xy)) = -\sin(xy)$. Здесь частные производные взятые сначала в одном порядке, а затем в другом оказались одинаковыми.

Пример 2 (функции, у которой смешанные производные не равны друг другу). $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$.

$$\text{Вычисляем } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{Отметим, что } \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y \frac{-y^2}{+y^2} + 0 = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = -1. \text{ Легко } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

Теорема 1 (о смешанных производных) G область в R^n (открытое связное множество). Если $f:G \rightarrow R$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, то в точках непрерывности они совпадают.

Доказательство. Проведем для $n = 2$, то есть для функции двух переменных $f(x, y)$. Итак, пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0) , Δx и Δy достаточно малы, так, чтобы $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \in G \forall t \in [0, 1]$. Обозначим:

$$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

и $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$. Легко, $\varphi(1) - \varphi(0) = F(\Delta x, \Delta y)$.

По теореме Лагранжа, получаем:

$$F(\Delta x, \Delta y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0)\Delta x =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y)\Delta x \Delta y, \text{ здесь } 0 < \theta, \lambda < 1.$$

Обозначив, $\psi(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$, получим

$$F(\Delta x, \Delta y) = \psi(1) - \psi(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y)\Delta x \Delta y \text{ здесь } 0 < \omega, \mu < 1. \text{ В итоге, получаем } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y) \text{ и после предельного перехода } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta y \rightarrow 0 \text{ и, в силу непрерывности смешанных производных, получим равенство } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Определение. Если функция $f:G \rightarrow R$ имеет все непрерывные частные производные до m -ого порядка, ее называют m раз непрерывно дифференцируемой в области G . Обозначают $f \in C_U^m$.

Например, функция $f(x, y, z)$ два раза непрерывно дифференцируема в области, если в этой области непрерывны функции $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$.

Каким может оказаться количество различных функций?

2. Дифференциалы высших порядков.

Первый.

(Одной переменной) $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Запись $df = f'(x)dx$.

(Многих переменных) $f'(x)(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \Delta x_n$.

Опр. $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot dx_n$ называется первым дифференциалом.

Второй.

Сначала две переменные.

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ и $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$ это две записи одного и того же

первого дифференциала. Теперь посмотрим $\delta(df)$ (первый от первого), считая dx и dy фиксированными.

$$\delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \quad (\text{линейность первого дифференциала}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \cdot \delta x \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \cdot \delta y \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \cdot \delta x \cdot dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \cdot \delta y \cdot dy. \quad \text{Когда в}$$

первом дифференциале от первого положить $dx = \delta x$ и $dy = \delta y$ получаем

второй дифференциал: $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$;

второй дифференциал: $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$.

Дифференциал m -го порядка определяется как первый дифференциал от $m-1$ -го. Индукцией можно заметить, что

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(x, y) dx^k dy^{m-k}$$

Многие переменные:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} dx_1^{m_1} \dots dx_n^{m_n}.$$

§12. Формула Тейлора

1. Шаг в прошлое (Одна переменная). Многочлен Тейлора функции φ в t_0 :

$$\varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

Формула Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + r_m(t, t_0, \varphi),$$

Пeano $r = o(t - t_0)^m$; условия $\exists \varphi^{(m)}(t_0)$;

Лагранж $r = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\xi) \cdot (t - t_0)^{m+1}$; условия $\varphi \in C_{[t_0, t]}^m \cap C_{(t_0, t)}^{m+1}$;

$$\text{Интегральная } r = \frac{1}{m!} \int_{t_0}^t \varphi^{(m+1)}(\tau) \cdot (t - \tau)^m d\tau.$$

2. Шаг в настоящее.



Теорема Формула Тейлора. Пусть U – окрестность точки $x \in R^n$, $h \in R^n$, $[x, x + h] \subset U$, $f:U \rightarrow R$ имеет непрерывные частные производные до m -го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f|_x + r,$$

Brook Taylor где $r = o(\|h\|^m)$ (*Пeano*);

если дополнительно $f \in C_U^{m+1}$, то

$$\exists \theta \in (0, 1), r = \frac{1}{(m+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\theta h} \text{ (Лагранж);}$$

и интегральной форме $r = \frac{1}{m!} \int_0^1 \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\tau h} \cdot (1-\tau)^m d\tau$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$. Она попадает в условия пункта 1 для отрезка $[0, 1]$. Можно записать формулу Тей-

лора $\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + r_m$ и убеждаемся индукцией, что

получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того, чтобы получить форму Пеано надо поупражняться.

Замечание: Тогда: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x; y)$

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = x(u; v)$$

$$y = y(u; v)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2f = \delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial x} \delta(dx) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y\right) dy +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Не имеет места инвариантность дифференциала относительно выбора переменных x .

§12. Формула Тейлора

1. Шаг в прошлое (Одна переменная). Многочлен Тейлора функции φ в t_0 :

$$\varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

Формула Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + r_m(t, t_0, \varphi),$$

Пeano $r = o(t - t_0)^m$; условия $\exists \varphi^{(m)}(t_0)$;

Лагранж $r = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\xi) \cdot (t - t_0)^{m+1}$; условия $\varphi \in C_{[t_0, t]}^m \cap C_{(t_0, t]}^{m+1}$;

$$\text{Интегральная } r = \frac{1}{m!} \int_{t_0}^t \phi^{(m+1)}(\tau) \cdot (t - \tau)^m d\tau.$$

2. Шаг в настоящее.



Теорема Формула Тейлора. Пусть U – окрестность точки $x \in R^n$, $h \in R^n$, $[x, x + h] \subset U$, $f:U \rightarrow R$ имеет непрерывные частные производные до m -го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f|_x + r,$$

Brook Taylor где $r = o(\|h\|^m)$ (**Пeano**);

если дополнительно $f \in C_U^{m+1}$, то

$$\exists \theta \in (0, 1), r = \frac{1}{(m+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\theta h} \text{ (Лагранж);}$$

и интегральной форме $r = \frac{1}{m!} \int_0^1 \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\tau h} \cdot (1-\tau)^m d\tau.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$. Она попадает в условия пункта 1 для отрезка $[0, 1]$. Можно записать формулу Тейлора $\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + r_m$ и убеждаемся индукцией, что

получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того чтобы получить форму Пеано надо поупражняться:

Условия позволяют записать формулу Лагранжа до $m - 1$ -го порядка

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k f}{k!} \Big|_x + r_{m-1} = \left(\sum_{k=0}^m \frac{d^k f}{k!} \Big|_x \right) + \left(r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right)$$

Надо замечать, что $\left(r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right) = o(\|h\|^m)$.

Во-первых, $r_{m-1} = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(\theta) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} \cdot h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}$,

во-вторых, $\frac{d^m f}{m!} \Big|_x = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \cdot h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}$.

Значит,

$$\left(r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} (h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}) C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} - \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \right)$$

из соображений непрерывности $C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} - \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \right) = \alpha(h)$

Оценим $\sqrt[m]{h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}} = \sqrt[m]{h_1 \cdot \dots \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_n \cdot \dots \cdot h_n} \leq \frac{m_1 h_1 + \dots + m_n h_n}{m}$ (Неравенство Коши

между средним геометрическим и средним арифметическим, далее неравенство

Коши-Буняковского) $\leq \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}}{m} = C \|h\|$, значит,

$h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \leq D \|h\|^m$, откуда следует требуемое.

§12. Экстремум функции многих переменных

1. Необходимые условия экстремума.

Опр. $f: R^n \rightarrow R$ имеет локальный минимум в точке x_0 , если существует окрестность V точки x_0 , такая, что $\forall x \in V$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$.

Естественным образом определяется локальный максимум, общее название локальный экстремум, кроме того особо оговариваем строгие экстремумы.

Теорема 1. (необходимое условие экстремума)

Пусть в точке x_0 имеет место локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$, то есть $\text{grad } f(x_0) = 0$.

Как и для одной переменной надо посмотреть поведение

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k}$$

когда $\Delta x_k \rightarrow +0$ или $\Delta x_k \rightarrow -0$.

Замечание 1. Локальные экстремумы лежат в точках, где $\text{grad } f = 0$ или f не дифференцируема.

Замечание 2. Глобальные экстремумы надо искать в точках, где $\text{grad } f = 0$ и на границе области задания.

2. Достаточные условия экстремума.

Для $f: R \rightarrow R$ условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ являются достаточными условиями локального (строгого) минимума функции f в точке x_0 . Для функций многих переменных все обстоит также. Однако $f''(x_0)$ является здесь квадратичной формой, определяемой матрицей вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Точнее, наличие локального экстремума, определяется поведением квадратичной формы $\Phi_{x_0}(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$.

Некоторые факты теории квадратичных форм.

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица $n \times n$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n$. $\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ –

квадратичная форма, при этом можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Опр. Квадратичная форма Φ положительно определена, если $\Phi(h) > 0$, при $h \neq 0$ и отрицательно определена, если $\Phi(h) < 0$, при $h \neq 0$.

Критерий 1. (Сильвестра) $\Phi > 0 \Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0$;

$\Phi < 0 \Leftrightarrow a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, и далее знаки определителей чередуются.

Критерий 2. $\Phi > 0 \Leftrightarrow$ все собственные значения $\lambda_i > 0$; $\Phi < 0 \Leftrightarrow$ все $\lambda_i < 0$.

Свойство квадратичных форм: $\exists m, M$ такие, что $m \|h\| \leq \Phi(h) \leq M \|h\| \quad \forall h$.

Оно основано на $\exists m = \inf_{\|h\|=1} \Phi(h)$, $M = \sup_{\|h\|=1} \Phi(h)$ так как $\Phi(h) = (h, Ah)$ – непрерывная функция.

Критерий 3. $\Phi > 0 \Leftrightarrow m > 0$; $\Phi < 0 \Leftrightarrow M < 0$.

Теорема 2. (Достаточные условия экстремума)

Пусть $f: R^n \rightarrow R$, $f \in C^2_{V_{x_0}}$, $\text{grad } f(x_0) = 0$.

Тогда, если $\Phi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$

a) $\Phi > 0$, то x_0 точка строгого локального минимума;

b) $\Phi < 0$, то x_0 точка строгого локального максимума;

c) Φ – меняет знак, то экстремума нет.

Доказательство. a). По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0)(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h) + \|h\|^2 \alpha(h) \geq \\ &\geq \frac{m}{2} \|h\|^2 + \|h\|^2 \alpha(h) = \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} + \alpha(h) \right). \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$ так, что $|\alpha(h)| < m/4$. Тогда $m/2 + \alpha(h) > m/2 - m/4 = m/4 > 0$.

Таким образом, получим $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq m/4 > 0$ – x_0 точка локального минимума.

b) упражнение.

c) Предположим, что Φ меняет знак: $\exists e_+, e_- \in S(\mathbf{0}, 1)$ такие, что $\Phi(e_+) > 0$, $\Phi(e_-) < 0$. Тогда

$$f(x_0 + te_+) - f(x_0) = f'(x_0)(te_+) + \frac{f''(x_0)}{2!}(te_+)^2 + t^2\alpha(t) = t^2 \left(\frac{\Phi(e_+)}{2} + \alpha(t) \right).$$

Ясно, что при достаточно малых t эта величина положительная. Очевидно также, что при достаточно малых t значение $f(x_0 + te_-) - f(x_0)$ отрицательное.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если квадратичная форма Φ такова, что $\Phi(h) \geq 0 \forall h$, то она называется *положительно полуопределенной*. Например, $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 + 2h_2h_3 + 2h_3h_1$.

Пример 1. Найдите точки локального экстремума функции

$$f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^3$$

Ищем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}. \text{ Решаем эту систему находим точки возможного экстремума } M_1(1/3, 2/3, -1/3) \text{ и } M_2(-1/4, -1/2, 1/4).$$

Вычисляем вторые производные $f'_{xx} = 4$, $f'_{xy} = f'_{yx} = -1$, $f'_{xz} = f'_{zx} = 2$, $f'_{yy} = 6y$, $f'_{yz} = f'_{zy} = 0$, $f'_{zz} = 2$.

Значения этих частных производных в точке M_1 являются коэффициентами

$d^2f|_{M_1}$. Матрица квадратичной формы есть $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислим главные ми-

норы $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$. В силу критерия Сильвестра в

M_1 локальный минимум (строгий).

Составим матрицу для точки M_2 : $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, найдем знаки главных ми-

норов $4 > 0$, $-13 < 0$, $-14 < 0$. Ясно, строгих экстремумов нет. Заметим, что квадратичная форма $d^2f|_{M_2} = 4dx^2 - 3dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy + 4dxdz$ знакопеременная. Положив $dx \neq 0$ и $dy = dz = 0$, получаем $d^2f|_{M_2} = 4dx^2 > 0$, положив, $dy \neq 0$ и $dx = dz = 0$, $d^2f|_{M_2} = -3dy^2 < 0$. Точка M_2 не является точкой локального экстремума.

§13. Теорема о неявной функции

Основной вопрос: при каких условиях существует решение системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}.$$

То есть найдутся ли f_1, f_2, \dots, f_n такие, что при подстановке $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в приведенную систему, получим тождества. Иначе говоря, стоит задача выяснить, при каких условия можно решить систему относительно переменных y_1, y_2, \dots, y_n .

Надежда есть только на локальное решение такой задачи, поскольку, например, для уравнения $x^2 + y^2 = 1$ нет равносильного решения вида $y = f(x)$.

1. Теорема о неявной функции (случай двух переменных): $F(x, y) = 0$.

Теорема 1. Пусть функция F , определенная в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^2$, такова, что

1. $F \in C_U^{(p)}$, $p \geq 1 - p$ раз непрерывно дифференцируема в U ;
2. $F(x_0, y_0) = 0$;
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists \Pi = Ix_0 \times Iy_0 \subset U$ (Π – прямоугольник с центром в точке (x_0, y_0) , Ix_0 и Iy_0 – отрезки с указанными центрами) и функция $f: Ix_0 \rightarrow Iy_0$ такие, что

4. $\forall (x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется \Leftrightarrow имеет место $y = f(x)$ на Ix_0 ;

$$5. f \in C_{Ix_0}^{(p)}, \text{ при этом } f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Поскольку $F \in C_U^{(p)}$, то $F'_y(x, y) > 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , пусть ей будет круг радиуса $2\beta > 0$, содержащийся в U .

Функция $F(x_0, y)$ строго возрастает на отрезке $Iy_0 = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$$

Далее, поскольку F непрерывна в U , $F(x_0, y_0 - \beta) < 0$ и $0 < F(x_0, y_0 + \beta)$, существует $\alpha > 0$ такое что $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0$ выполняются неравенства $F(x, y_0 - \beta) < 0$ и $0 < F(x, y_0 + \beta)$ (сохранение знака непрерывной функции).

Покажем, что $\Pi = Ix_0 \times Iy_0$ – искомый. Пусть $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0$, на отрезке с концами $(x, y_0 - \beta)$ и $(x, y_0 + \beta)$ рассмотрим функцию $y \rightarrow F(x, y)$. Эта функция строго возрастает, непрерывна и на концах принимает значения разных знаков. Значит, $\exists! y(x) \in Iy_0$ такой, что $F(x, y(x)) = 0$. Положим $f(x) = y(x)$.

Отметим, что и для $x_0 \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0 \exists! y(x_0) \in Iy_0$ такой, что $F(x_0, y(x_0)) = 0$, однако такая точка уже есть – точка y_0 ($F(x_0, y_0) = 0$). Значит, $f(x_0) = y_0$. Итак, $f: Ix_0 \rightarrow Iy_0$ определена однозначно и удовлетворяет 4.

Непрерывность f на Ix_0 . Пусть $x^* \in Ix_0$, $f(x^*) = y^*$. Из пункта 4. следует $F(x^*, y^*) = 0$, кроме того $F'_y(x^*, y^*) > 0$. Пусть $0 < \varepsilon < \beta$. Выше по β было найдено α для x_0 и y_0 . Точно также по ε , найдем δ для x^* и y^* , затем $\tilde{\Pi} = I_{x^*, \delta} \times I_{y^*, \varepsilon}$, а также функцию $\tilde{f}: I_{x^*, \delta} \rightarrow I_{y^*, \varepsilon}$ такую, что

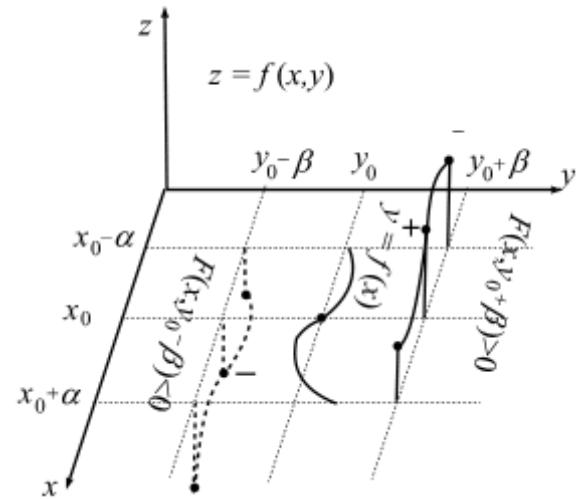
$$F(x, y) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi} \Leftrightarrow x \in I_{x^*, \delta} \text{ и } y = \tilde{f}(x) \quad (6)$$

Так как $I_{x^*} \subset Ix_0$, $I_{y^*} \subset Iy_0$, из 4 и 6 получаем $\tilde{f}(x) = f(x)$ в I_{x^*} . Остается заметить, что $|x - x^*| < \delta \Rightarrow x \in I_{x^*} \Rightarrow \tilde{f}(x) \in I_{y^*, \varepsilon} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - y^*| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$. Непрерывность доказана.

Гладкость f . Пусть $x \in I_{x^*}$, Δx достаточно мало, $x + \Delta x \in I_{x^*}$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \\ &= F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x + F'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y. \end{aligned}$$



Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{F'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}$. Отправив $\Delta x \rightarrow 0$, получаем $\Delta y \rightarrow 0$

(непрерывность f). Предел в правой части равенства существует, так как $F \in C_U^{(p)}$ и получим $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$. Осталось заметить, что дифференцируя правую часть как сложную функцию, будем получать производные более высоких порядков.

$$\text{Например, } f''(x) = -\frac{(F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy} \cdot f')F'_y - F'_x(F''_{yy}(x, f(x)) + F''_{yx} \cdot f')}{(F'_y(x, f(x)))^2}.$$

2. Теорема о неявной функции (Случай $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$).

Соглашение о краткой записи: $(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = (x, y)$ – две переменные x – векторная, y – скалярная; $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$; $I_{x_0}^\alpha$ – параллелепипед: $x \in I_{x_0}^\alpha \Leftrightarrow |x_i - x_i^0| < \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$ (m – мерный параллелепипед) здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. $I_{y_0}^\beta = \{y : |y - y_0| < \beta\}$.

Теорема 2. Пусть функция F , определенная в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^{m+1}$, такова, что

1. $F \in C_U^{(p)}, p \geq 1 - p$ раз непрерывно дифференцируема в U ;
2. $F(x_0, y_0) = 0$;
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists \Pi = I_{x_0}^\alpha \times I_{y_0}^\beta \subset U$ и функция многих переменных $f : I_{x_0}^\alpha \rightarrow I_{y_0}^\beta$ такие, что

4. $\forall (x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется \Leftrightarrow имеет место $y = f(x)$ $x \in I_{x_0}^\alpha$;

5. $f \in C_{I_{x_0}^\alpha}^{(p)}$, при этом $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Доказательство теоремы 2 весьма схоже с доказательством теоремы 1.

3. Теорема о неявной функции (Общий случай).

Необходимо установить существование решений системы и их свойства:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}.$$

Соглашения о краткой записи: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$; запись системы $F(x, y) = 0$, решения $y = f(x)$; $I_{x_0}^\alpha, I_{y_0}^\beta$ – соответствующие параллелепипеды,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}, \quad F'_x(x, y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y) \right),$$

$$F'_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x, y) \right), \quad (F'_y(x, y))^{-1} \text{ – обратная матрица к } F'_y(x, y).$$

Теорема 3. Пусть отображение F , определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^{m+n}$ таково, что

1. $F \in C_U^{(p)}$, $p \geq 1$ – p раз непрерывно дифференцируемо в U ;
2. $F(x_0, y_0) = 0$;
3. $F'_y(x_0, y_0)$ – обратимое.

Тогда $\exists \Pi = I_{x_0}^\alpha \times I_{y_0}^\beta \subset U$ и отображение $f : I_{x_0}^\alpha \rightarrow I_{y_0}^\beta$ такие, что

4. $\forall (x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется \Leftrightarrow имеет место $y = f(x)$ $x \in I_{x_0}^\alpha$;

$$5. f'(x) = - \left(F'_y(x, f(x)) \right)^{-1} \left(F'_x(x, f(x)) \right).$$

Доказательство. Индукция по n . База $n = 1$ – это теорема 2.

Пусть теорема справедлива для размерности $n - 1$.

По условию $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x, y)\right) \neq 0$ отсюда в последней строке есть ненулевой элемент, можем считать, что $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \neq 0$.

Для $F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ находимся в условиях теоремы 2, следовательно, существует $\tilde{\Pi} = (\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}) \times I^1 \subset U$ параллелепипед и $\tilde{f}: \tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1} \rightarrow I^1$, $\tilde{f} \in C_{\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}}^p$ такие, что

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi} \Leftrightarrow y_n = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \\ (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}.$$

Подставим $y_n = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ в первые $n - 1$ уравнения системы, получим новую систему:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \end{cases},$$

которую будем решать в $\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}$. Обозначим ее

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ \Phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \end{cases} \text{ или } \Phi(x, \tilde{y}) = 0, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Заметим, что система $\Phi(x, \tilde{y}) = 0$ удовлетворяет требованиям индукционного предположения.

Во-первых, $\Phi \in C_{\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}}^p$, как композиция гладких функций.

Во-вторых, $\Phi_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{n-1}^0) = F_i(x_0, y_0) = 0$.

Теперь заметим $\det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0)\right) \neq 0$.

(Обратный ход). Имеем $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \neq 0$.

Рассмотрим связь между $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$.

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} F_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1},$$

здесь $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Если все элементы последнего столбца умножить на одно и то же число $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}$ и сложить с первым, то получим $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$. Вместе с этим, поскольку $F_n(x, \tilde{y}, \tilde{f}(x, \tilde{y})) \equiv 0$ в $\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}$, то дифференцируя по y_1 , получим $\frac{\partial F_n}{\partial y_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} = 0$. Тем самым имеем:

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

Проделав такую же операцию со вторым, третьим, ..., $n - 1$ столбцом, приходим к

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0) \right) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0) \right) \neq 0$.

Из предположения индукции следует, что $\exists I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \subset \tilde{I}_{x_0}^m \times \tilde{I}_{\tilde{y}_0}^{n-1}$ и $f : I_{x_0}^m \rightarrow I_{\tilde{y}_0}^{n-1}$ такие, что

$$\Phi(x, \tilde{y}) = 0 \text{ в } I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \Leftrightarrow \tilde{y} = f(x)$$

Далее легко заметить, что

$$F(x, y) = 0 \text{ в } I_{x_0}^m \times (I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \times I^1) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Наконец, для $x \in I_{x_0}^m$ имеем тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$, дифференцируем его и получаем $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0$ или $f'(x) = -\left(F'_y(x, f(x))\right)^{-1}\left(F'_x(x, f(x))\right)$.

§14. Условный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset R^n$ заданы функции $f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$, при этом $m < n$, и пусть E – подмножество точек множества G , удовлетворяющие системе уравнений

$$f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) будем называть **уравнениями связи**.

Опр.1. Точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in G$ называется **точкой условного минимума** функции $f(x)$ при наличии связей (1), если найдется такая окрестность V_{x_0} , что $\forall x \in V_{x_0} \cap G$ выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Иными словами в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ при условии $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$.

Аналогично определяются точки строгого условного минимума, максимума, общее название – точки условного экстремума.

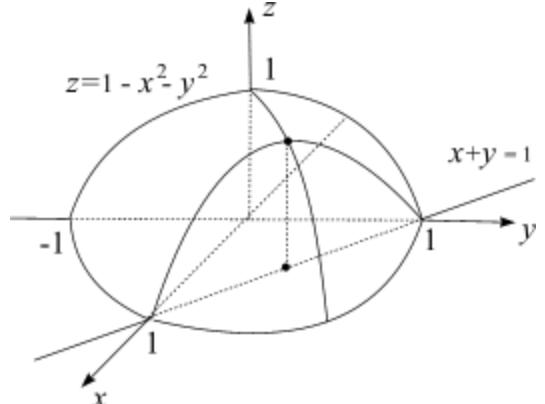
Пример 1. Найдите точки условного экстремума функции $z = 1 - x^2 - y^2$, если $x + y = 1$.

Уравнение связи $x + y = 1$ легко разрешается относится, $y = 1 - x$. Подставим в функцию $z = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$. Функция $2x - x^2$ имеет максимум при $x = 1/2$. Точка $(1/2, 1/2)$ является точкой условного строгого максимума функции $z(x, y)$ при наличии связи $x + y = 1$.

Замечание. Успех пришел после того как удалось решить уравнение связи. Однако это редкая удача.

Пример 2. Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = e^{axy}$, где $a \neq 0$, при условии $x^3 + y^3 + x + y = 4$.

Здесь уравнение связи затруднительно разрешить относительно одной из переменных. Метод Лагранжа, который мы сейчас изучим, для примера 2 более эффективен, чем прямой метод исключения зависимых переменных.



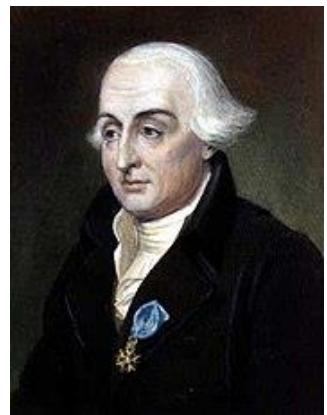
Метод множителей Лагранжа.

Опр. 3. Рассмотрим функцию $n + m$ переменных

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$$

где $x \in G \subset R^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^m$. Числа λ_i называются **множителями Лагранжа**, а функция L – **функцией Лагранжа**. Будем говорить, что (x_0, λ_0) есть **стационарная точка функции Лагранжа**, если

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0, \lambda_0) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x_0, \lambda_0) = 0.$$



Теорема 1. (необходимые условия условного экстремума).

Пусть x_0 – точка условного экстремума функции $f(x)$ при наличии связей (1), и пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, \dots , $f_m(x)$, непрерывно дифференцируемые в окрестности точки x_0 , причем ранг матрицы Якоби равен m .

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тогда найдутся такие множители Лагранжа $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$, что (x_0, λ_0) будет стационарной точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Так как $m < n$, а ранг матрицы Якоби в точке x_0 равен m , то хотя бы один из миноров этой матрицы порядка m отличен от нуля. Будем считать, что это

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{array} \right| \neq 0.$$

Поскольку $f_1(x_0) = 0, \dots, f_m(x_0) = 0$. Находимся в условиях теоремы о неявной функции для (x_1, x_2, \dots, x_m) и (x_{m+1}, \dots, x_n) (здесь первая группа переменных играет роль y , вторая — x).

Значит, существует $\Pi_{x_0} = I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)} \times I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ и $g: I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} \rightarrow I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}$ такие,

что имеет место: $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$ при $x \in \Pi_{x_0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$ при

$(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$. Таким образом, если $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$, то имеем:

$$\begin{cases} f_1(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0 \\ \dots \\ f_m(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0 \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим на $I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ функцию.

$$G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (5).$$

Во-первых, если $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$, то очевидно, получим

$G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, кроме того, выполняются уравнения связи. Во-вторых, $G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Таким образом, $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ — точка безусловного экстремума функции $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$. Следовательно, в силу необходимых условий существования (безусловного) экстремума, получим

$$dG\Big|_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} = 0.$$

С одной стороны, воспользуемся (5) и в силу инвариантности формы первого дифференциала получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0$$

С другой стороны, дифференцируя тождества (4) в точке $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$, снова в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \end{cases}$$

Умножим полученные равенства на $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и сложим с предыдущим равенством, получим: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) \right) \cdot dx_k = 0$. Вычислив диффе-

ренциал функции Лагранжа в точке (x_0, λ) , обнаружим, что

$$dL|_{(x_0, \lambda)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda) dx_k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0, \lambda) d\lambda_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) \right) \cdot dx_k = 0$$

Здесь $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0, \lambda) = f_i(x_0) = 0$.

Решим систему линейных уравнений относительно переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Из условия следует, что она имеет единственное решение, пусть это будет $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$. Отсюда, в частности, $\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_m}(x_0, \lambda_0) = 0$.

Перепишем дифференциал функции Лагранжа в точке (x_0, λ_0) , получим

$$dL|_{(x_0, \lambda_0)} = \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) dx_k = 0.$$

Так как дифференциалы независимых переменных dx_{m+1}, \dots, dx_n , могут принимать любые значения, то $\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0, \lambda_0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. (Достаточные условия условного экстремума).

Пусть функции многих переменных f, f_1, f_2, \dots, f_m имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки $x_0 \in R^n$, причем в точке x_0 ранг функциональной матрицы (3) равен m и пусть (x_0, λ_0) стационарная точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Тогда если квадратичная форма $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j$ положительно

определенна, то x_0 точка условного строго локального минимума при наличии связей (1); если отрицательно определена, то x_0 – точка условного строго локального максимума. Если форма знакопеременная, то x_0 не является точкой условного экстремума.

Доказательство. Во-первых, воспользуемся тем, что в точке x_0 ранг функциональной матрицы (3) равен m , также как в теореме 1 выделим параллелепипед $\Pi_{x_0} = I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)} \times I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ и отображение $g : I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} \rightarrow I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}$ если взять

$(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ и доопределить $\begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$, то для полученных

$x = (x_1, \dots, x_n)$ имеем $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$, то есть $x \in E$.

Далее, $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0) = f(x_1, \dots, x_n) = G(x_{m+1}, \dots, x_n)$, где, как и раньше $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Так, имеем $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0)$, где в правой части равенства $x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$.

В силу инвариантности первого дифференциала, $dG(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = d_x L(x_0, \lambda_0) = 0$ (необходимое условие экстремума в точке $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ для $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$ на $I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$).

Теперь рассмотрим второй дифференциал от обеих частей равенства $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0)$,

$$d^2 G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) d^2 x_k.$$

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) = 0$ и $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j$ положительно определена, то $d^2 G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ положительно определена и, значит, $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$

имеет в точке $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ минимум. Итак, для $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ имеет место неравенство $G(x_{m+1}, \dots, x_n) \geq G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$. Это соответствует $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$. То есть, условному экстремуму.

Пример 2 возвращается. Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = e^{axy}$, где $a \neq 0$, при условии $x^3 + y^3 + x + y = 4$.

Построим функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4)$. Стационарные точки функции Лагранжа определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = aye^{axy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = axe^{axy} + \lambda(3y^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Умножая первое уравнение на x , а второе на y и вычитая, получаем

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0.$$

Если $\lambda = 0$, то из первых двух уравнений $x = y = 0$. Но $x = y = 0$ не удовлетворяют уравнению связи. Итак, $\lambda \neq 0$, поэтому $x = y$, а третий множитель $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$. Подставляя $x = y$ в уравнение связи, получаем $x = y = 1$. При этом из первого уравнения получаем $\lambda_0 = -ae^a/4$.

Итак, точка $(1, 1, -ae^a/4)$ единственная стационарная точка функции Лагранжа. Так как $d(e^{axy}) = a(xdy + ydx)e^{axy}$,

$$d^2(e^{axy}) = a^2(xdy + ydx)^2 e^{axy} + 2adx dy e^{axy},$$

$d^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6xdx^2 + 6ydy^2$, то для второго дифференциала функции Лагранжа получаем

$$d^2L(1, 1, -ae^a/4) = ae^a(a(dx + dy)^2 + 2dxdy - 3(dx^2 + dy^2)/2).$$

Дифференцируя уравнение связи, при $x = y = 1$ получаем $dy + dx = 0$ Подставляя $dy = -dx$ в $d^2L(1, 1, \lambda_0)$, получаем равенство $d^2L(1, 1, \lambda_0) = -5ae^a dx^2$.

Поэтому при $a < 0$ в точке $(1, 1)$ будет условный минимум, а при $a > 0$ – условный максимум функции f , причём экстремальное значение равно e^a .

Теорема о диффеоморфизме

Опр.1. Пусть U, V – открытые подмножества в R^n , отображение $f: U \rightarrow V$ называется диффеоморфизмом гладкости p , если f – биекция множеств U и V ; f – p раз непрерывно дифференцируемо; f^{-1} – p раз непрерывно дифференцируемо (Кратко: $f \in C^p(U, V)$, $f^{-1} \in C^p(V, U)$).

Теорема. Пусть отображение $f: G \rightarrow R^n$, где G область таково, что

1. f – p раз непрерывно дифференцируемо.

2. $y_0 = f(x_0)$.

3. Матрица $f'(x_0)$ – обратимая.

Тогда существуют окрестности Ux_0 и Vy_0 такие, что f является их диффеоморфизмом гладкости p . При этом, если $x \in Ux_0$ и $y \in Vy_0$, то $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $F(x, y) = f(x) - y$. Тогда, $F \in C^p(G \times R^n, V)$, $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ – обратимая. Тем самым находимся в условиях теоремы о неявной функции.

Значит, $\exists \Pi = I_{x_0} \times I_{y_0} \subset G$ и отображение $g: I_{y_0} \rightarrow I_{x_0}$ класса C^p такие, что

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y), \text{ при этом, } g'(y) = -(F'_x(x, y))^{-1}(F'_y(x, y)).$$

Замечаем $F'_x(x, y) = f'(x)$, $F'_y(x, y) = I$ и $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Пусть $V = I_{y_0}$, $U = g[V]$. Отсюда сразу получаем $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow U$ взаимно обратны. Далее из 1, 2, 3 получено, что образ внутренней точки x_0 множества G является внутренней для $f[G]$, поскольку $I_{f(x_0)} \subset f[G]$.

(!) свойства 1, 2, 3 выполняются для любых $y \in V$ и отсюда $x = g(y)$ внутренняя точка, значит, U – открытое. Теорема доказана