

# МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Ряды</b>	<b>1</b>
§1	Определение ряда. Основные свойства . . . . .	1
П.0	Конечные суммы . . . . .	1
П.1	Числовые ряды . . . . .	2
П.2	Основные свойства . . . . .	2
П.3	Неотрицательные числовые ряды . . . . .	4
П.4	Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .	5
П.5	Признак Коши. Признак Даламбера . . . . .	6
П.6	Число $e$ , как сумма ряда . . . . .	9
§2	Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля . . .	10
П.1	. . . . .	10
§3	Абсолютно и условно сходящиеся ряды . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Интеграл</b>	<b>18</b>
§1	Неопределенный интеграл . . . . .	18

## Глава 1 Ряды

### §1 Определение ряда. Основные свойства

#### П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

- $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)$

## П.1 Числовые ряды

**Определение §1.1.** Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где  $a_k \in \mathbb{R}$  - общий член последовательности,

а  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  - частичные суммы ряда

**Определение §1.2.** Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

**Пример.**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если  $|q| < 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$  - ряд сходится

Если  $|q| > 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = -1$ , то  $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$  - ряд расходится

## П.2 Основные свойства

**Теорема §1.1** (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходящийся } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходящийся } \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ - сходящийся}$$

$$\Longleftrightarrow \text{По кр. Коши} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n - 1 > N \quad |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N + 1 \quad \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

□

**Пример.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

**Следствие.** Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

**Замечание.** Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

**Теорема §1.2** (Необходимый признак сходимости ряда). Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится

*Доказательство.*

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

□

**Теорема §1.3** (Арифметические свойства). Пусть ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходятся, тогда

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится}$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$   $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$   
Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

□

**Замечание.** В частности  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

### П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

**Теорема §1.4** (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены которого неотрицательны, сходится  $\Leftrightarrow$  посл-ть частичных сумм ограничена*

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Ряд сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  последовательность частичных сумм сходится  $\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}}$   $\{S_n\}$  - ограничена  
 $\Leftarrow \{S_n\}$  - ограничена и  $S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$   $\{S_n\}$  - сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  ряд сходится  $\square$

**Теорема §1.5** (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$  сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. Из расходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$  расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

*Доказательство.* Конечное число членов ряда не влияет на сходимость  $\Rightarrow$  будем считать, что  $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то  $S_n^B \nearrow$  и сходится к  $S^B$  при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху  $S^B \xrightarrow{\text{no th 4}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$

2. (от противного) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - расходится, а  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится, тогда по пункту 1 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится  $\Rightarrow \perp$

$\square$

**Теорема §1.6** (Признак сравнения в предельной форме). *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0 \ b_k > 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 - \text{конечное}$$

*тогда ряды сходятся и расходятся одновременно*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится} &\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k - \text{сходится} \xrightarrow{\text{по th 3}} \\ \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n - \text{сходится} &\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n - \text{сходится} \xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_n - \text{сходится} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{расходится} &\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k - \text{расходится} \\ \xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_n - \text{расходится} &\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n - \text{расходится} \xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_n - \text{расходится} \end{aligned}$$

□

#### П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

**Теорема §1.7** (Телескопический признак). Пусть  $a_n \searrow, a_n \geq 0$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Leftrightarrow$  сходится  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Правый ряд  $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

...

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1.  $S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$  Если ряд  $S_n^B$  - сходится  $\Rightarrow S_{2^{n+1}}^A - a_1$  - сходится  
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$  и  $\{S_n^A\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2.  $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$$

Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$  и  $\{S_n^B\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится

*Примечание:* Расхождение доказывается по признаку сравнения

□

**Теорема §1.8.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$   $\begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

- Пусть  $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$  Рассмотрим ряд из th 7  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$  - геометрическая прогрессия  $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$  - сходится  $\xrightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  - сходится

- Пусть  $p \leq 1$

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{т.к. } \frac{1}{n} - \text{расходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p} - \text{расходится}$$

□

## П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

**Теорема §1.9** (признак Даламбера). Пусть  $a_n > 0$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , тогда

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится

2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится

3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n!, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q + \varepsilon < 1$  (Например  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ ) Тогда  $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \tilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \tilde{q} < a_{n+1} \tilde{q}^2$$

...

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \tilde{q} < \dots < a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$$

Т.к  $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k$  - геометрическая прогрессия ( $\tilde{q} < 1$ )  $\Rightarrow$  сходится  $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$  - сходится  $\xrightarrow{\text{Следствие критерия Коши}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится

2. Пусть  $q > 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда  $\forall n > N \ a_n \tilde{q} < a_{n+1} \xrightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1} \tilde{q}^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{\text{по необходимому признаку}} \text{ряд расходится}$

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

□

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.10** (радикальный признак Коши).

Пусть  $a_n \geq 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , тогда

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \mid \sqrt[n]{a_n} - q \mid < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} \mid q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n - \text{геометрическая прогрессия} (\tilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ряд сходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть  $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$   
ряд расходится

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

□



**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.11** (Признак Раабе). Пусть  $a_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$ , тогда

1. Если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

## П.6 Число $e$ , как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n$$

2. Пусть  $m < n$

$$e_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m}$$

$$\Rightarrow e_n > A_{n,m} \text{ Зафиксируем } m. \text{ Тогда при } n \rightarrow \infty e \geq S_m$$

3.  $| \Rightarrow e_n < S_n \leq e$  и  $\{S_n\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th Вейерштрасса}} \text{Ряд сходится}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа  $e$  частичными суммами:

$$0 < e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

**Упражнение.** Доказать, что  $e$  - иррационально

**Упражнение.** Доказать, что  $2 < e < 3$

## §2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

### П.1

**Определение §2.1.** Ряд вида  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  называется знакопеременным, где  $\forall n \ a_n > 0$

**Теорема §2.1** (Признак сходимости Лейбница знакопеременных рядов). Пусть дан знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ a_n > 0$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $\{a_n\} \searrow$ , то ряд сходится

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\
&= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \{S_{2m}\} - \text{ограничена сверху} \\
S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow \mid \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \\
S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow{S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0 \text{ При } n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S
\end{aligned}$$

□

**Замечание.** Признак достаточный, но не необходимый!

**Следствие** (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$\begin{aligned}
S &= S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots \\
|R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots| = \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leq a_{n+1} \\
&\mid \Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

**Лемма** (Абеля). Дано  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ . При этом:

1.  $\{a_i\}$  монотонно
2.  $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим  $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , также перепишем (2) условие, как  $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \cdots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\
&= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\
\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &= |B_1| |a_1 - a_2| + \cdots + |B_{n-1}| |a_{n-1} - a_n| + |B_n| |a_n| \leq \\
&\leq B( \underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n| ) = \\
&= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \stackrel{\text{Используя неравенство треугольника}}{\leq} B(|a_1| + 2|a_n|)
\end{aligned}$$

□

**Теорема §2.2** (Признак Дирихле). Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:

1.  $a_n$  монотонно стремится к 0
2.  $\exists C \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $a_n$  - монотонно  $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$   
 Из (2) условия  $\forall n \forall p \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 2C$   
 Рассмотрим  $a_n, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля } (B=2C)} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится} \quad \square$

**Теорема §2.3** (Признак Абеля). Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:

1.  $a_n$  монотонно и ограничена
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$   
 Из (2) условия  $\xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3A}$   
 Рассмотрим  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xrightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} - \text{монот. из усл. } B = \frac{\varepsilon}{3A}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сходится  $\square$

*Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2.* Из условия, что  $\{a_n\} \searrow 0$  и того факта, что  $\left| \sum_{n=1}^m (-1)^n \right| \leq 1$ , по теореме Дирихле следует, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  - сходится  $\square$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем  $m$ . Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow \text{к } 0, b_n = \sin(nx)$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(mx) = \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \dots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \dots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) \end{aligned}$$

Если  $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$  ряд сходится

Если  $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$

|  $\xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$  ряд сходится

**Упражнение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

### §3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

**Определение.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Теорема §3.1.** Абсолютный ряд сходится

*Доказательство.* Дано  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится. Докажем, что сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится  $\xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  - сходится по признаку Лейбница, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}|$  - расходится  $\Rightarrow$  ряд сходится не абсолютно

**Определение.** Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

**Теорема §3.2** (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов). 1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$  абсолютно сходится

2. Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$  или  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , тогда ряд  $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходится,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника
2. По аналогии с признаками для положительных рядов

□

**Теорема §3.3.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится. А ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  получен путем произвольной перестановки членов  $a_n$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

*Доказательство.*  $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$  В самом деле это биекция так, как  $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$  и  $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

$$1. \forall m \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$$

$$2. \forall l \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$$

$$\bullet A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n| \text{ и } \{S_n^B\} \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \text{ряд}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - сходитсЯ}$$

$$\bullet \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \text{ Тогда:}$$

$$\forall \varepsilon \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

$$\text{Возьмем } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\text{Пусть } m \geq N | \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b | < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{C}$$

Те которые не вошли в первую сумму. Обозначим ее за  $C$

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{n=1}^l a_k - a \right| < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |a-b| = \left| \sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c \right| < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} a = b$$

□

**Теорема §3.4.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходятся, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений  $a_m b_n$ , расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$ , то сумма полученного ряда равна  $S = S^A S^B$

*Доказательство.* Расположим  $a_m b_n$  в удобном порядке:

$$\begin{aligned} & a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\ & a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\ & \dots \\ & a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\ & \dots \\ & a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения:  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху

$S_n \nearrow$ , т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$S_{n^2} = |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. сходим.}}$$

Конечное число в силу абс. сходим.

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$  ряд (1) сходится абсолютно  $\xrightarrow{\text{th 3}}$  исходный ряд сходится

Докажем, что  $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S}_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S}_{n^2}}_{\rightarrow \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow \tilde{S}^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow \tilde{S}^B} \Rightarrow S = S^A S^B$$

□

**Замечание.** Пусть есть ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Leftrightarrow$  сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

**Теорема §3.5 (Римана).** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно, то  $\forall A$  можно так переставить члены ряда, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$

*Доказательство.*

Пусть  $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$  - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть  $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$  - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - расходится  $\Rightarrow$

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходится (противоречие).

Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть  $A \geq 0$  :



$$\begin{aligned}
n_1 : & \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases} \\
& S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+ \\
n_2 : & a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- \\
& S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-| \\
n_3 : & a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq \\
& \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ \\
& |S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+ \\
& n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow \\
& |S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}
\end{aligned}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если  $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если  $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть  $\forall \varepsilon > 0$  Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимый признак сходимости}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

□

**Упражнение.** Покажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходиться

**Упражнение.** Докажите, что если при любой перестановке его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

## Глава 2 Интеграл

### §1 Неопределенный интеграл

**Определение.** Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на некотором интервале, если  $F'(x) = f(x)$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
$k$	$kx+c$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x +c$
$\sin x$	$-\cos x +c$
$\cos x$	$\sin x +c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x +c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+c$
$e^x$	$e^x+c$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} +c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x +c$