МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

Содержание

1 Ряды **1**
§1 Определение ряда. Основные свойства 1
П.0 Конечные суммы 1
П.1 Числовые ряды 2
П.2 Основные свойства 2
П.3 Неотрицательные числовые ряды 4
П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. 5
П.5 Признак Коши. Признак Даламбера 6
П.6 Число e, как сумма ряда 9

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- $\sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{k=1}^{n} (a_n + b_n)$
- $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_n)$

П.1 Числовые ряды

Определение 1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,
а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичные суммы ряда

Определение 2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ - сумма ряда}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ - ряд сходится
Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{n=2k} \\ 1, & \text{n=2k+1} \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема 1 (Критерий Коши)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall m \geq n > N \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходится } \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ - сходится}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n - 1 > N \ |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n \geq N+1 \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

$\square$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - расходится } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание 1. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема 2 (Необходимый признак сходимости ряда)**.** *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *- сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

$\square$

Теорема 3 (Арифметические свойства)**.** *Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ - \textit{сходится}}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \to S^A \ S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k \to S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n^a + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

$\square$

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема 4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены коротерого неотрицательны, сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм ограничена*

Доказательство.
$\Rightarrow$ Ряд сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится $\xRightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}}$ $\{S_n\}$ - ограничена
$\Leftarrow$ $\{S_n\}$ - ограничена и $S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ $\{S_n\}$ - сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится □

Теорема 5 (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. *Из сходимости* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$ *сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2. *Из расходимости* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ *расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Доказательство. Конченое число членов ряда не влияет на сходимость $\Rightarrow$ будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \ \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n \text{ , если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\text{то } S_n^B \nearrow \text{ и сходится к } S^B \text{ при } n \to \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$$

$$\text{ограничена сверху } S^B \xRightarrow{\text{по th 4}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$$

2. (от противного)Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

□

Теорема 6 (Признак сравнения в предельной форме). *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0 \ b_k > 0 \ \text{ и } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ - конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N > 0: \ \forall n > N \ |\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0: \ \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 3}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 5}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится $\xRightarrow{\text{по th 3}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_n$ - расходится $\xRightarrow{\text{по th 5}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - расходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится

□

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Теорема 7 (Телескопический признак)**.** *Пусть* $a_n \searrow, a_n \geq 0$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \le S^A_{2^{n+1}} - a_1 \le S^B_n$$

$$\frac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \le S^A_{2^{n+1}} - a_1 \le S^B_n$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S^A_{2^{n+1}} - a_1 \le S^B_n$ Если ряд S^B_n - сходится $\Rightarrow S^A_{2^{n+1}} - a_1$ - сходится $\Rightarrow S^A_n \le S^B$ и $\{S^A_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. $\frac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \le S^A_{2^{n+1}} - a_1$

$$S^B_{n+1} \le 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S^B_n \le 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$ и $\{S^B_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения

$\square$

Теорема 8. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} p > 1 \\ \textit{расходится}, & \textit{если} p \le 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится
- Пусть $p \le 1$

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ т.к } \frac{1}{n} \text{ - расходится } \xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p} \text{ - расходится}$$

$\square$

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема 9 (признак Даламбера)**.** *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\exists \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \le q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*

2. *Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится*

3. *Если $q = 1$, то признак не работает*

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \; \forall n > N \; |\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N+1, N+2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$
   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \widetilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1}\widetilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2}\widetilde{q} < a_{n+1}\widetilde{q}$$

$$\dots$$

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1}\widetilde{q} < \dots < a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1}$$

   Т.к $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\widetilde{q} < 1$)$\Rightarrow$ сходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$
   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q - \varepsilon > 1$
   Тогда $\forall n > N \; a_n\widetilde{q} < a_{n+1} \xRightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1}$

   $a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 \xRightarrow{\text{по необходимому признаку}}$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

$\square$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}, \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема 10 (радикальный признак Коши).
Пусть $a_n \geq 0$ *и* $\exists\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*
3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall n > N\ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q+\varepsilon) \quad \forall n = N+1, N+2, \ldots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists\widetilde{q} = \frac{q+1}{2} | q < \widetilde{q} < 1 \exists N > 0 :\ \forall n > N$

   $$\sqrt[n]{a_n} < \widetilde{q} \Leftrightarrow a_n < \widetilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{q}^n \text{ - геометрическая прогрессия}(\widetilde{q} < 1)$$

   $$\Rightarrow \text{ ряд сходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists\{a_{n_k}\} :\ \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

$\square$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^{n^2}, \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема 11 (Признак Раабе). *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\exists \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q$, *тогда*

1. *Если* $q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*
2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n\cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1))2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot (n+1)!(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2\cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ ряд расходится}$$

П.6 Число e, как сумма ряда