

# МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019-2020

## Содержание

<b>1 Ряды</b>	<b>3</b>
§1 Определение ряда. Основные свойства . . . . .	3
П.0 Конечные суммы . . . . .	3
П.1 Числовые ряды . . . . .	3
П.2 Основные свойства . . . . .	4
П.3 Неотрицательные числовые ряды . . . . .	5
П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ . . . . .	7
П.5 Признак Коши. Признак Даламбера . . . . .	8
П.6 Число $e$ , как сумма ряда . . . . .	11
§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля . . . . .	12
П.1 . . . . .	12
§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды . . . . .	15
<b>2 Интеграл</b>	<b>20</b>
§1 Неопределенный интеграл . . . . .	20
П.1 Первообразные . . . . .	20
П.2 Приемы отыскания первообразных . . . . .	22
П.3 Первообразная от рациональной функции . . . . .	24
П.4 Первообразные простых дробей . . . . .	25
П.5 первообразные сводящиеся к рациональным . . . . .	27
П.6 План изучения . . . . .	28
П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций . . . . .	28
П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	29
П.9 Подстановка Эйлера . . . . .	30
П.10 Биноминальные интегралы . . . . .	31

<b>3</b>	<b>Определенные интегралы</b>	<b>32</b>
П.1	Модель интеграла Дарбу . . . . .	35
П.2	Модель интеграла Римана . . . . .	36
П.3	Верхние и нижние суммы Дарбу . . . . .	37
§1	Некоторые классы интегрируемых функций . . . . .	40
П.1	Некоторые классы интегрируемых функций . . . . .	40
§2	Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла . . . . .	43

# Глава 1 Ряды

## §1 Определение ряда. Основные свойства

### П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$
- $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)$

### П.1 Числовые ряды

**Определение §1.1.** Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$$

где  $a_k \in \mathbb{R}$  - общий член последовательности,  
а  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  - частичные суммы ряда

**Определение §1.2.** Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

**Пример.**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если  $|q| < 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$  - ряд сходится

Если  $|q| > 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = -1$ , то  $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$  - ряд расходится

## П.2 Основные свойства

**Теорема §1.1** (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} &\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k - \text{сходится} \\ \xleftarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n-1 > N &|S_m - S_{n-1}| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N+1 &| \sum_{k=n}^m a_k | < \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \text{сходится}$$

**Следствие.** Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

**Замечание.** Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

**Теорема §1.2** (Необходимый признак сходимости ряда). *Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$*

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится

*Доказательство.*

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

**Теорема §1.3** (Арифметические свойства). *Пусть ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится}$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$   $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$   
Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

**Замечание.** В частности  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

### П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

**Теорема §1.4** (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). Ряд, члены короткого неотрицательны, сходится  $\Leftrightarrow$  посл-ть частичных сумм ограничена

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Ряд сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  последовательность частичных сумм сходится  
 $\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}}$   $\{S_n\}$  - ограничена  
 $\Leftarrow \{S_n\}$  - ограничена  
 $S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$  - сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  ряд сходится ■

**Теорема §1.5** (Признак сравнения). Пусть

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$  сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2. Из расходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$  расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

*Доказательство.* Конченое число членов ряда не влияет на сходимость  
 $\Rightarrow$  будем считать, что  $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \quad \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то  $S_n^B \nearrow$  и сходится к  $S^B$  при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху  $S^B \xrightarrow{\text{по th 4}}$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится

2. (от противного) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - расходится, а  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится, тогда по пункту 1 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится  $\Rightarrow \perp$

■

**Теорема §1.6** (Признак сравнения в предельной форме). *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad a_k \geq 0, \quad b_k > 0 \quad \text{и} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \quad \text{- конечное}$$

*тогда ряды сходятся и расходятся одновременно*

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \quad \forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

$$\text{Возьмем } \varepsilon = \frac{c}{2} \\ \exists N_0 > 0 : \quad \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится

2. Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - расходится

■

**П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

**Теорема §1.7** (Телескопический признак). Пусть  $a_k \searrow, a_k \geq 0$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится  
 $\Leftrightarrow$  сходится  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

*Доказательство.* Правый ряд  $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

Рассмотрим  $a_2 \leq a_2 \leq a_1$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

...

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1.  $S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$  Если ряд  $S_n^B$  - сходится  $\Rightarrow S_{2^{n+1}}^A - a_1$  - сходится  
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$  и  $\{S_n^A\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2.  $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$$

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$  и  $\{S_n^B\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$   
 ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится

*Примечание:* Расхождение доказывается по признаку сравнения

■

**Теорема §1.8.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$   $\begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

- Пусть  $p > 1 \Rightarrow 0 < \left\{ \frac{1}{n^p} \right\} \searrow_0$  Рассмотрим ряд из th 7  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$  - геометрическая прогрессия  $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$  - сходится  $\xrightarrow{\text{по th 7}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  - сходится

- Пусть  $p \leq 1$

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{т.к } \frac{1}{n} \text{ - расходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p} \text{ - расходится}$$

■

## П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

**Теорема §1.9** (признак Даламбера). *Пусть  $a_n > 0$  и  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , тогда*

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - расходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n!, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q + \varepsilon < 1$  (Например  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ ) Тогда  $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N+1 : a_{n+2} < a_{n+1}\tilde{q}$$

$$N+2 : a_{n+3} < a_{n+2}\tilde{q} < a_{n+1}\tilde{q}$$

...

$$N+k-1 : a_{n+k} < a_{n+k-1}\tilde{q} < \dots < a_{n+1}\tilde{q}^{k-1}$$

Т.к  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n$  - геометрическая прогрессия ( $\tilde{q} < 1$ )  $\Rightarrow$  сходится  $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}}$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$  - сходится  $\xrightarrow{\text{Следствие критерия Коши}}$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится

2. Пусть  $q > 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда  $\forall n > N a_n\tilde{q} < a_{n+1} \xrightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1}\tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1}\tilde{q}^{k-1} \cancel{\xrightarrow{n \rightarrow \infty}} 0 \Rightarrow a_{n+k} \cancel{\xrightarrow{n \rightarrow \infty}} 0 \xrightarrow{\text{по необходимому признаку}}$  ряд расходится

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.10** (радикальный признак Коши).

Пусть  $a_n \geq 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , тогда

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится

2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - расходится

3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} |q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n$  - геометрическая прогрессия ( $\tilde{q} < 1$ )

$\Rightarrow$  ряд сходится  $\xrightarrow{\text{по признаку сравнения}}$  сходится исходный ряд

2. Пусть  $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$  ряд расходится

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.11** (Признак Раабе). Пусть  $a_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$ , тогда

1. Если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - расходится

2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится

3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

*Даламбер:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

*Раабе:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2(n+1)}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

## П.6 Число $e$ , как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n$$

2. Пусть  $m < n$

$$e_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m} \\ \Rightarrow e_n > A_{n,m} \text{ Зафиксируем } m. \text{ Тогда при } n \rightarrow \infty e \geq S_m$$

3.  $| \Rightarrow e_n < S_n \leq e$  и  $\{S_n\} \nearrow$  По th Вейерштрасса Ряд сходится

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа  $e$  частичными суммами:

$$\begin{aligned}
 0 < e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}
 \end{aligned}$$

**Упражнение.** Доказать, что  $e$  - иррационально

**Упражнение.** Доказать, что  $2 < e < 3$

## §2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

### П.1

**Определение §2.1.** Ряд вида  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  называется знакочередующимся, где  $\forall n a_n > 0$

**Теорема §2.1** (Признак сходимости Лейбница знакочередующихся рядов). Пусть дан знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ .  $a_n > 0$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $\{a_n\} \searrow$ , то ряд сходится

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\
 &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху} \\
 S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow | \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \\
 S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow{S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0 \text{ При } n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S
 \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Признак достаточный, но не необходимый!

**Следствие** (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$S = S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$$

$$\begin{aligned} |R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1} \\ &\Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1} \end{aligned}$$

**Лемма** (Абелля). *Дано  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ . При этом:*

1.  $\{a_i\}$  монотонно

2.  $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим  $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ , также перепишем (2) условие, как  $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\ |\sum_{k=1}^n a_k b_k| &= |B_1||a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}||a_{n-1} - a_n| + |B_n||a_n| \leq \\ &\leq B(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n|) = \end{aligned}$$

Использую неравенство треугольника

$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$$

■

**Теорема §2.2** (Признак Дирихле). *Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:*

1.  $a_n$  монотонно стремится к 0

2.  $\exists C \forall n |\sum_{k=1}^n b_k| \leq C$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $a_n$  - монотонно  $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$$

Из (2) условия  $\forall n \forall p |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| = |\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k| \leq 2C$

Рассмотрим  $a_n, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля } (B = 2C)} |\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится} \blacksquare$

**Теорема §2.3** (Признак Абеля). *Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:*

1.  $a_n$  монотонно и ограничена

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$

Из (2) условия  $\xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| < \frac{\varepsilon}{3A}$

Рассмотрим  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xrightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} \text{ - монот. из усл, } B = \frac{\varepsilon}{3A}} |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сходится  $\blacksquare$

*Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2.* Из условия, что  $\{a_n\} \searrow 0$  и того факта, что  $|\sum_{n=1}^m (-1)^n| \leq 1$ , по теореме Дирихле следует, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  - сходится  $\blacksquare$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем  $m$ . Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow \text{к } 0, b_n = \sin(nx)$$

$$S_m = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(mx) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \cdots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\
&= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \cdots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\
&= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x))
\end{aligned}$$

Если  $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$  ряд сходится

Если  $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$   
|  $\xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$  ряд сходится

**Упражнение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

### §3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

**Определение.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Теорема §3.1.** Абсолютный ряд сходится

*Доказательство.* Дано  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится. Докажем, что сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится  $\xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится ■

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  - сходится по признаку Лейбница, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$  - расходится  $\Rightarrow$  ряд сходится не абсолютно

**Определение.** Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

**Теорема §3.2** (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов).

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$  абсолютно сходится
2. Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$  или  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , тогда ряд  $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходится,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника
2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

**Теорема §3.3.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится. А ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  получен путем произвольной перестановки членов  $a_n$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

*Доказательство.*  $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]^{1-1} \mathbb{N}$  В самом деле это биекция так, как  $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$  и  $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

1.  $\forall m \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$
2.  $\forall l \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$

•  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n|$  и  $\{S_n^B\} \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}}$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - сходится

• Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$  Тогда:

$$\forall \varepsilon \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

Возьмем  $N = \max\{N_1, N_2\}$

Пусть  $m \geq N$   $| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b | < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначим ее за } C}$$

$$\begin{aligned} |C| &\leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon \\ |\sum_{n=1}^l a_k - a| &< \varepsilon \\ |a - b| &= |\sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c| < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} \\ a &= b \end{aligned}$$

■

**Теорема §3.4.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всех возможных попарных произведений  $a_m b_n$ , расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$ , то сумма полученного ряда равна  $S = S^A S^B$

*Доказательство.* Расположем  $a_m b_n$  в удобном порядке:

$$\begin{aligned} a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\ a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\ \dots \\ a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\ \dots \\ a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения:  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотя бы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху  
 $S_n \nearrow$ , т.к. числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$S_{n^2} = |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$$

$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. схожд.}}$

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$  ряд (1) сходится абсолютно  $\xrightarrow{\text{th 3}}$  исходный ряд сходится

Докажем, что  $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S}_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S}_{n^2}}_{\rightarrow \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow S^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow S^B} \Rightarrow S = S^A S^B$$

■

**Замечание.** Пусть есть ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Leftrightarrow$  сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

**Теорема §3.5** (Римана). *Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно, то  $\forall A$  можно так переставить члены ряда, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*

*Доказательство.*

Пусть  $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$  - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть  $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$  - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - расходится  $\Rightarrow$

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходится (противоречие). Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть  $A \geq 0$ :

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \cdots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \cdots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ a_1^- + \cdots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_3-1}^+ \leq \\ \leq A < a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если  $n_1 + n_2 + \cdots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если  $n_1 + n_2 + \cdots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть  $\forall \varepsilon > 0$  Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимы признак сход-ти}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

■

**Упражнение.** Покажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходиться

**Упражнение.** Докажите, что если при любой перестановки его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

## Глава 2 Интеграл

### §1 Неопределенный интеграл

#### П.1 Первообразные

**Определение.** Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на некотором интервале, если  $F'(x) = f(x)$

**Определение.** Функция  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  (точная) первообразная функции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\forall x \in I F'(x) = f(x)$

**Вспоминания.** Теорема Лагранджа о среднем. Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Лемма §1.1** (о точных первообразных). *Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2$  - первообразные на  $[a, b]$ , тогда  $F_1(x) = F_2(x) + C$ , где  $C \in \mathbb{R}$*

*Доказательство.* Рассмотрим  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G'(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

**Лемма §1.2** (из будущего). *У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке*

**Пример.**  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

**Определение.** Функция  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  называется обобщенной первообразной функции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $F'(x) = f(x)$  всюду за исключением конечного числа точек и  $F$  - непрерывная

**Пример.**  $|x|$  - обобщенная первообразная  $sign(x)$ , т.к  $|x|' = sign(x)$

**Лемма §1.3.** *Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке*

**Лемма §1.4** (об обобщенной первообразной). *Если  $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  обобщенные первообразные функции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $F_1(x) = F_2(x) + C$*

*Доказательство.* Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  - точки, в которых нет  $F'_1(x)$  или нет  $F'_2(x)$

На любом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  по предыдущей лемме  $F_1$  и  $F_2$  - точные первообразные ф-ции  $f$  (по лемме 3)

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x) + C_i \text{ на } [x_i; x_{i+1}] \\ F_1(x) &= F_2(x) + C_{i-1} \text{ на } [x_{i-1}; x_i] \\ | \Rightarrow F_1(x_i) &= F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1} \end{aligned}$$

■

**Обозначение.** Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции  $f$  называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

**Обозначение.**  $f(x)dx$  -подынтегральное выражение

**Обозначение.** Иногда удобно ввести обозначение:  $F'(x)dx = dF(x)$

**Замечание.** У  $dx$  приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

## П.2 Приемы отыскания первообразных

### 1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
$k$	$kx + c$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$e^x$	$e^x + c$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -\ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \quad \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

### 2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

**Пример.**

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

**Пример.**

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$
$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx + C$$

**Замечание.** Когда использовать:  $\int x^n f(x) dx$ ,  $\int \dots \ln \dots dx$ ,  $\int \dots arctg \dots dx$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= x(-\cos x) + \int \cos(x) dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\int \ln x dx = \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если  $\phi(x)$  - дифференцируемая функция, то  $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y)) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

**Пример.**

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} 2x dx = \int \frac{1}{x^2+1} (x^2)' dx$$

Обозначим  $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$F_1(x)$ - Первообразна на  $[a, b]$

$F_2(x)$ - Первообразна на  $[b, c]$

Тогда:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

### П.3 Первообразная от рациональной функции

**Определение.** Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Где  $P(x), Q(x)$  - многочлены

**Обозначение.**  $\deg P$  - степень многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

**Замечание.** В комплексных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где  $z_1 \dots z_n$  - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:  
либо корень вещественный,  $z_k \in \mathbb{R}$   
либо есть комплексно сопряженные  $z_k, \bar{z}_k$ :  $(z - z_k)(z - \bar{z}_k) =$   
 $= z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k$

**Лемма §1.5.** Если  $P(x)$  - многочлен над  $\mathbb{R}$ , то его можно разбить на  $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{l_n}$ . Это представление единственно (с точностью до перестановки множественных корней).

**Лемма §1.6** (о делении с остатком). Если  $P(x), Q(x), \deg(P) \geq \deg(Q), Q \neq 0$ , тогда  $\exists!$  многочлены  $q(x), r(x), \deg(q) = \deg(P) - \deg(Q), \deg(r) < \deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$

**Лемма §1.7.** Если  $\deg(P), \deg(Q) > 0$ , и  $d(x) = NOD(P(x), Q(x))$ , тогда  $\exists u(x), v(x) : \deg(u) < \deg(Q), \deg(v) < \deg(P), d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

**Теорема §1.1** (о разложении в простые дроби). Пусть  $P(x), Q(x)$  - многочлены,  $0 < \deg(P) < \deg(Q), NOD(P(x), Q(x)) = 1$  и  $P(x)$  как в лемме 5, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

**Пример.**

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя  $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

2. теорема о разложении в простые дроби:  $R(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}$ . Найдем коэффициенты  $A, B, C$

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-5}{x - 1} dx + \int \frac{8}{x - 2} dx + \int \frac{-9}{(x - 2)^2} dx$$

#### П.4 Первообразные простых дробей

**Замечание.**

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x - x_i| + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-x_i)^k} dx &= \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C \\
\int \frac{1}{x^2+px+q} dx &= \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x-\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{a>0}} dx = \\
&= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2 + 1)} dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2+1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \frac{x+\frac{p}{2}}{a} + \frac{p}{2a} \right) + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y+1} = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C \\
\int \frac{x}{(1+x)^k} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy = \frac{y}{1+y^2} - \int y \left( \frac{1}{(1+y^2)^k} \right)' dy = \frac{y}{1+y^2} - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1}2y)}{(1+y^2)^{2k}} dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy = \frac{y}{1+y^2} - 2k \int \left( \frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}} \right) dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2kI_k(y) + 2kI_{k+1}(y) \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy \\
I_1(y) &= \operatorname{arctg} y + C \\
I_{k+1}(y) &= \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(y)
\end{aligned}$$

## П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

$R$  - рациональная функция

1.  $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$  замена  $y = \sqrt[n]{ax+b}$  сводит к рациональной функции

**Замечание.**

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) \frac{y^{n-1}}{a} dy$$

**Пример.**

$$\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1} + x - 5} dx \ominus$$

$$y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1, dx = 2ydy$$

$$\ominus \int \frac{\sqrt{2}y^2y}{y+y^2-6} dy = 2\sqrt{2} \int \frac{y^2}{y^2+y-6} dy = 2\sqrt{2} \int \left(1 - \frac{y-6}{y^2+y-6}\right) dy = \dots$$

$$2. R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}), ad \neq bc \text{ замена } y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y) dy$$

**Пример.**

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

3.  $R(\sin X, \cos X)$  универсальная тригонометрическая замена  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$$

$$\cos x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$dx = \frac{2}{1+y} dy$$

Если  $R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = \cos X$

Если  $R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = \sin X$

Если  $R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = \operatorname{tg} X$

4.  $R(shX, chX)$  по аналогии с пунктом (3) + работает замена  $y = e^x$

## П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций
  - Разложение на простые дроби
  - Метод Остроградского(\*)
- Интегрирование тригонометрических функций
  - $\int R(\sin X; \cos X)dx$ ,  $t = \tg\left(\frac{x}{2}\right)$  - универсальная подстановка
  - Четность/нечетность функций  $\rightarrow$  специальная замена
  - Частные случаи(\*\*)
- Интегрирование иррациональных функций
  - $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$
  - $$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots)dx$$
  - $$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}, N = \text{NOK}(m, n, \dots)$$
  - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$  - выделение полного квадрата или замена Эйлера(\*\*\*)
  - Биноминальный интеграл (\*\*\*\*)

**Замечание.** Все методы сводятся к интегрированию рациональных функций

## П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.

$$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) dx \quad \text{используя формулы понижения степени получим}$$

$$\int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^n dx$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m+1}(x) \cos^{2n}(x) dx &= \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n+1}(x) dx = \\ &= - \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) d\underbrace{\cos(x)}_t = - \int (1-t^2)^m t^{2n} dt \end{aligned}$$

3.  $\int \sin(ax) \cos(bx) dx = (1)$

$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = (2)$

$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = (3)$

$$(1) = \int \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) dx$$

$$(2) = \int \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx$$

$$(3) = \int \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) dx$$

**П.8**  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_u\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака  $a$  сводится к:

- $\int R(u; \sqrt{a^2 - u^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{u^2 - a^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{a^2 + u^2}) du$

случай	подстановка (замена)	$du$	корень
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\sin(t)$	$du = a\cos(t)dt$	$a\cos(t)$
	$u = a\cos(t)$	$du = -a\sin(t)dt$	$a\sin(t)$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{\sin(t)}$	$du = -\frac{a\cos(t)}{\sin^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\sin(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{ctg}(t)$
	$u = \frac{a}{\cos(t)}$	$du = -\frac{a\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\cos(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(t)$
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$u = \frac{a}{\operatorname{tg}(t)}$	$du = \frac{a}{\cos^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{tg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\cos(t)}$
	$u = \frac{a}{\operatorname{ctg}(t)}$	$du = -\frac{a}{\sin^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{ctg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\sin(t)}$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ dx = \frac{dt}{\cos^2(t)} \\ x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^2(t) - \operatorname{tg}(t) + 1}{\frac{1}{\cos^2(t)}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\
 &= \int (\operatorname{tg}^2(t) + 1) \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos(t) = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} + \cos(t) = \ln|u| + \cos(t) + C = \\
 &= \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2}\right)| + \cos(\operatorname{arctg}(x)) + C
 \end{aligned}$$

## П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$1. \ a > 0 \quad \underbrace{\sqrt{ax^2 + bx + c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{ax}$$

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{ax} + ax^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

Получаем рациональную функцию под интегралом

$$2. \ 2 \text{ различных корня } ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_0}, \quad t^2(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c$$

$$t^2(x - x_0) = a(x - x_1)$$

$$x = \frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) =$$

$$= t\left(\frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} - x_0\right)$$

## П.10 Биноминальные интегралы

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

a)  $p$  - целое, тогда по биному Ньютона

b)  $p$  - дробное

$$\text{Выполнить замену } z = x^n, \text{ тогда } x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$$

$$\Rightarrow \int z^{\frac{m}{n}}(az + b)^p \frac{1}{n}z^{\frac{n(n-1)}{n}} dz =$$

Вариант 1

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (az + b)^p dz, \text{ если } \frac{m+1}{n} \text{ целое, то}$$

$$p = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow t^\nu = az + b = ax^n + b \Rightarrow \text{получим рациональную функцию}$$

Вариант 2

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz$$

Если  $\frac{m+1}{n} + p - 1$  - целое, то  $t^\nu = \frac{az+b}{z} = \frac{ax^n + b}{x^n}$

**Теорема §1.2** (Чебышева).

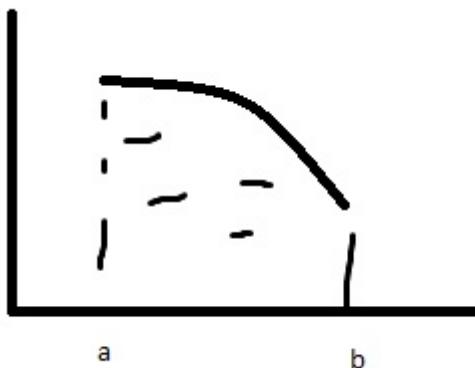
$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

вычисляется в элементарных функциях только, если

1.  $p$ -целое

$$2. p\text{-дробное}, \frac{\mu}{\nu} \begin{cases} \frac{m+1}{n} - \text{целое} & , t^\nu = ax^n + b \\ \frac{m+1}{n} + p - \text{целое}, t^\nu = \frac{ax^n + b}{x^n} \end{cases}$$

## Глава 3 Определенные интегралы



$$f : [a, b] \rightarrow R, f(x) \geq 0$$

**Формула** (Ньютона-Лейбница).

$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \text{ где } F \text{ - первообразная } f$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

**Определение.** Кольцо множеств - набор множеств замкнутый относительно  $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

**Пример.** Подмножество  $\mathbb{R}^2$ :

- Все подмножества пл-ти  $P(\mathbb{R}^2)$
- $\{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$
- Все ограниченные множества
- Все многоугольники ( $+\emptyset$ )

**Определение.** Площадь на кольце  $R$  подмножеств  $\mathbb{R}^2$  это функция  $S : R \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что:

1.  $\forall A \subset R, S(A) \geq 0$
2.  $\forall A, B \subset R, A \cap B = \emptyset \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. не меняется при сдвигах, поворотах, отражениях. Т.е  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(L(A)) = S(A)$
4.  $S([0, 1]^2) = 1$

**Замечание.** Аналогично  $V : R(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  - объем

**Замечание.** Аналогично  $l : R(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  - длина

**Замечание.** 1. Из определения  $S(\emptyset) = 0$   
 $S(A \cup \emptyset) = S(\emptyset) + S(A)$

2.  $S([0, a] \times [0, b]) = ab$

**Замечание.** Площадь однозначно определяется на кольце многоугольников

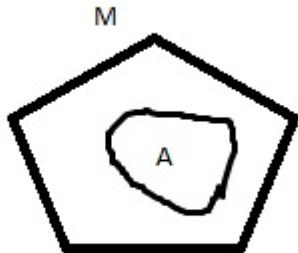
**Следствие §0.1.**  $A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$

*Доказательство.*

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

■

**Определение.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^2$  - ограниченное множество.



$S^*(A) = \inf(S(M), M \text{ - многоугольник}, A \subset M)$  - Внешняя площадь

$S_*(A) = \sup(S(M), M \text{ - многоугольник}, M \subset A))$  - Внутренняя площадь

Причем  $S^*(A) \geq S_*(A)$

**Пример.** Когда не совпадают:



$E = (Q \cap [0, 1]^2)$  - точки единичного квадрата с рациональными координатами  $\Rightarrow$

$$S^*(E) = 1$$

$$S_*(E) = 0$$

**Определение.** Если  $S_*(A) = S^*(A)$ , тогда  $A$  - квадрируемое

**Теорема §0.1.** Множество квадрируемых множеств это кольцо. И площадь продолжается на них с сохранением всех свойств

## П.1 Модель интеграла Дарбу

**Определение.** Разбиение отрезка  $[a, b]$ , это конечный набор точек  $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

**Свойство.**  $P_2$  - подразбиение  $P_1$ , если  $P_1 \subset P_2$

**Свойство.** У любых двух разбиений есть общее подразбиение

**Определение.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ограниченная функция. Определим *верхний интеграл Дарбу*.

Пусть  $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ . На каждом отрезке  $A_i = [x_i; x_{i+1}]$  выберем  $C_i \geq f(x) \forall x \in A_i$ .

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i) \right\}$$

Аналогично определяется *нижний интеграл Дарбу*

$$\begin{aligned} \int_{a*}^b f(x)dx &= \\ &= \sup_{P, C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i), P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}, C_i \leq f(x) \forall x \in [x_i; x_{i+1}] \right\} \end{aligned}$$

**Замечание.**

$$\int_{a*}^b f(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx$$

**Пример.**

$$f_D : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Замечание.** Если они совпадают, то  $f$  интегрируема по Дарбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$$

Интеграл Дарбу функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$

## П.2 Модель интеграла Римана

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

Набор точек  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  - подчинён разбиению  $P$ , если

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

**Формула** (Сумма Римана).

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

**Определение.** Шаг разбиения:  $\Delta(\tau) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$

**Определение.** Интеграл Римана  $I$  - называется интегралом Римана,  $f$  на  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi)$$

Если этот предел существует и независит от  $\tau, \xi$

**Пример.**  $f \equiv c$  на  $[a, b]$

$$S(f, \tau, \xi) = c(b - a)$$

**Пример.**

$$D(X) = \begin{cases} 1, & \text{рац на } [0, 1] \\ 0, & \text{ир на } [0, 1] \end{cases}$$

$\forall \tau$  - разбиение  $[0, 1]$   $\exists \xi'_k \in \mathbb{Q}, \xi''_k \notin \mathbb{Q}$

$$S(D, \tau, \xi'_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(x_k - x_{k-1}) = 1$$

$$S(D, \tau, \xi''_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$| \Rightarrow \#lim$$

**Пример.**

$$R(X) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ несократима на } [a,b] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(R, \tau, \xi) &= \sum_{i=0}^k R(\xi_i) \delta x_i = \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}} R(\xi_i) \delta x_i + \sum_{\substack{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}}} R(\xi_i) \delta x_i < \\ &< \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}}} \frac{1}{N} \delta x_i + \sum_{\substack{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}}} 1 \delta x_i < \frac{1}{N} \sum_{\substack{R(\xi_i) < \frac{1}{N}}} \delta x_i + \Delta(\tau) \text{кол-во } \{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}\} < \end{aligned}$$

Грубой оценкой является  $N^2$

$$N = 1, x = 1 \rightarrow 1$$

$$N = 2, x = 1, x = \frac{1}{2} \rightarrow 2$$

$$N = 3, x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3} \rightarrow 4$$

Далее, если кол-во  $\{x : R(x) \geq \frac{1}{N}\}$  не более  $N^2$ , то для  $\left\{x : R(x) \geq \frac{1}{N+1}\right\}$

могут добавляться дроби  $\frac{k}{N+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$

Т.е добавится не более  $N$  штук  $N^2 + N < (N+1)^2$

$$S(R, \tau, \xi) < \frac{1}{N} + \Delta(\tau)N^2$$

Засчет выбора достаточно малого  $\Delta(\tau) : \forall \varepsilon > 0 \exists N \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\Delta = \frac{1}{N^3}$   
 $\Rightarrow \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta$  получаем:

$$|0 - S(R, \tau, \xi)| = \frac{1}{N} + \delta N^2 = \frac{1}{N} + \frac{N^2}{N^3} = \frac{2}{N} < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 R(x) dx$$

### П.3 Верхние и нижние суммы Дарбу

**Определение.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ограниченная функция. Определим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу.

$f$  - оgrp на  $[a, b]$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x)), m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x))$$

$$S_\tau = \sum_{k=0}^n M_k \Delta x_k, s_\tau = \sum_{k=0}^n m_k \Delta x_k$$

**Свойство §0.1.**

$$s_\tau \leq S(f, \tau, \xi) \leq S_\tau \quad \forall \xi$$

**Свойство §0.2.**

$$\tau' \subseteq \tau'' \Rightarrow S_{\tau''} \leq S_{\tau'}$$

**Свойство §0.3.**

$$\forall \tau', \tau'': s_{\tau'} \leq S_{\tau''}$$

**Определение.** Нижний интеграл Дарбу:

$$\sup_{\tau} (s_{\tau}) = \underline{I} = \int_{a*}^b f(x) dx$$

**Определение.** Верхний интеграл Дарбу:

$$\inf_{\tau} (S_{\tau}) = \bar{I} = \int_a^{b*} f(x) dx$$

**Свойство §0.4.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \bar{\xi}: 0 \leq S_{\tau} - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \varepsilon$$

*Доказательство.* По определению  $M_k : \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ,  $\underline{\xi} = \xi_k$

$$S_{\tau} - S(f, \tau, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^n (M_k - f(\xi_k)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

■

**Свойство §0.5.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \exists \underline{\xi}: 0 \leq S(f, \tau, \underline{\xi}) - S_{\tau} < \varepsilon$$

**Свойство §0.6.** Пусть  $\tau'$  получена из  $\tau$  путем добавления  $p$  точек. Тогда  $S_\tau - S_{\tau'} \leq (M - m)p\Delta(\tau)$ ,  $S_{\tau'} - S_\tau \leq (M - m)p\Delta(\tau)$

*Доказательство.* добавление 1 точки:  $x_{k-1} < x' < x_k$

$$\begin{aligned} S_\tau - S_{\tau'} &= M_k(x_k - x_{k-1}) - (M'_k(x_k - x') + M''_k(x' - x_{k-1})) = \\ &= (M_k - M_{k'})(x_k - x') + (M_k - M''_k)(x' - x_{k-1}) \leq (M - m)\Delta(\tau) \end{aligned}$$

Далее по индукции ■

**Лемма §0.1 (Дарбю).**

$$\bar{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S_\tau$$

$$\underline{I} = \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} s_\tau$$

*Доказательство.*  $M = m \Rightarrow f(x) = const = m = M \quad \underline{I} = s_\tau, \bar{I} = S_\tau$

$$M > m, \forall \varepsilon \exists \tau^* : S_{\tau^*} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ по опр inf}$$

Пусть  $p$  - кол-во точек  $\tau^*$ , лежащие внутри  $[a, b]$ . Выберем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M - m)p}$$

Пусть  $\tau : \Delta(\tau) < \delta, \tau' = \tau \cup \tau^*$

$$S_\tau - \underline{I} = S_\tau - S_{\tau'} + S_{\tau'} - \underline{I} \leq (M - m)p\Delta(\tau) + S_{\tau'} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для второго УПР! ■

**Теорема §0.2** (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману). *Ограниченнная на  $[a, b]$  ф-ция  $f$  интегрируема по Риману  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$*

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Тогда  $\exists \delta > 0$  из определения инт-мости выберем  $\tau : \Delta(\tau) < \delta$

$$|I - S(f, \tau, \xi)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \xi$$

По св-ву 4 и 5 выберем  $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ :

$$S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S_\tau - s_\tau = S_\tau - S(f, \tau, \bar{\xi}) + S(f, \tau, \bar{\xi}) - I + I - S(f, \tau, \underline{\xi}) + S(f, \tau, \underline{\xi}) - s_\tau < \varepsilon$$

$\Leftarrow$

Из условия следует:  $\underline{I} = \bar{I} = I$  - обозначение.

По лемме Дарбу: по  $\varepsilon$  выберем  $\delta : \Delta(\tau) < \delta$

$$\begin{aligned} S_\tau - I &< \frac{\varepsilon}{2}, I - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \xi \text{ по св-ву } 1 |S(f, \tau, \xi) - I| &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Воспоминания.** В прошлом семестре вводилось определение колебания функции  $f$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ :

$$\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x'') - f(x')|$$

Очевидно, что

$$\omega_k = \underbrace{\frac{M_k}{\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)}}_{} + \underbrace{\frac{m_k}{\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)}}_{} \quad \text{где } M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Следовательно,

$$\underbrace{S_\tau - s_\tau}_{\text{Эта разность фигурирует в Теореме 1}} = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$$

**Следствие.** Ограниченнная на  $[a, b]$  функция  $f$  интегрируема  
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Разбиение } \tau : \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$

## §1 Некоторые классы интегрируемых функций

### П.1 Некоторые классы интегрируемых функций

**Теорема §1.1** (Основное св-во интегрируемых функций, необходимое условие). *Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то она ограничена на  $[a, b]$*

*От противного.* Пусть  $f$  не ограничена на  $[a, b]$  и пусть выбрано разбиение  $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$

Т.к  $f$  не ограничена на  $[a, b]$ , то  $f$  не ограничена на каком-то маленьком отрезке разбиения. Пусть это будет  $[x_0, x_1]$ . Тогда  $\exists$  последовательность  $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$  (здесь  $(n)$  просто номер  $\xi_1$ ),  $n = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty$$

Фиксируем точки на других отрезках:  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Тогда для данного  $\tau$  и  $\xi_i$  сумма  $\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i$  какое-то определенное число.

$$\begin{aligned} | \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau, \xi_1^{(n)}, \xi_2, \xi_3, \dots) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(f(\xi_1^{(n)}))}_{\rightarrow \infty} \Delta x_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^k f(\xi_i) \Delta x_i}_{\text{Число}} = \infty \\ | \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 : |S(f, \tau, \xi_1^{n_0}, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k)| &> M \end{aligned} \quad (1)$$

$| \Rightarrow$  интегральные суммы не могут стремиться к конечному пределу при  $\Delta(\tau) \rightarrow 0$

Действительно, если  $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = A$  - конечное, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - A| < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |S(f, \tau, \xi)| \leq |S(f, \tau, \xi) - A| + |A| < \varepsilon + |A|$$

А мы получили в 1, что  $\forall$  разбиения  $\tau$  при фиксированном  $\varepsilon$  можно выбрать  $\xi$  так, что  $|S(f, \tau, \xi)| > |A| + \varepsilon = M \Rightarrow \perp$

■

**Теорема §1.2.** *Непрерывная на отрезке функция - интегрируема*

*Доказательство.* По теореме Кантор, любая непрерывная на отрезке функция - равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение  $\tau$  такое, что  $\Delta(\tau) < \delta$ , тогда если  $x', x'' \in [x_{k-1}; x_k]$ ,  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$$\sup_{x', x''} |f(x') - f(x'')| = \sup (f(x')) - \inf (f(x'')) = M_k - m_k \leq \varepsilon \text{ Равенство появилось из-за } \sup_{x', x''}$$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum M_k - m_k \Delta x_k \leq \varepsilon(b - a)$$

$\Rightarrow$  по критерию Дарбу (§0.2) функция интегрируема

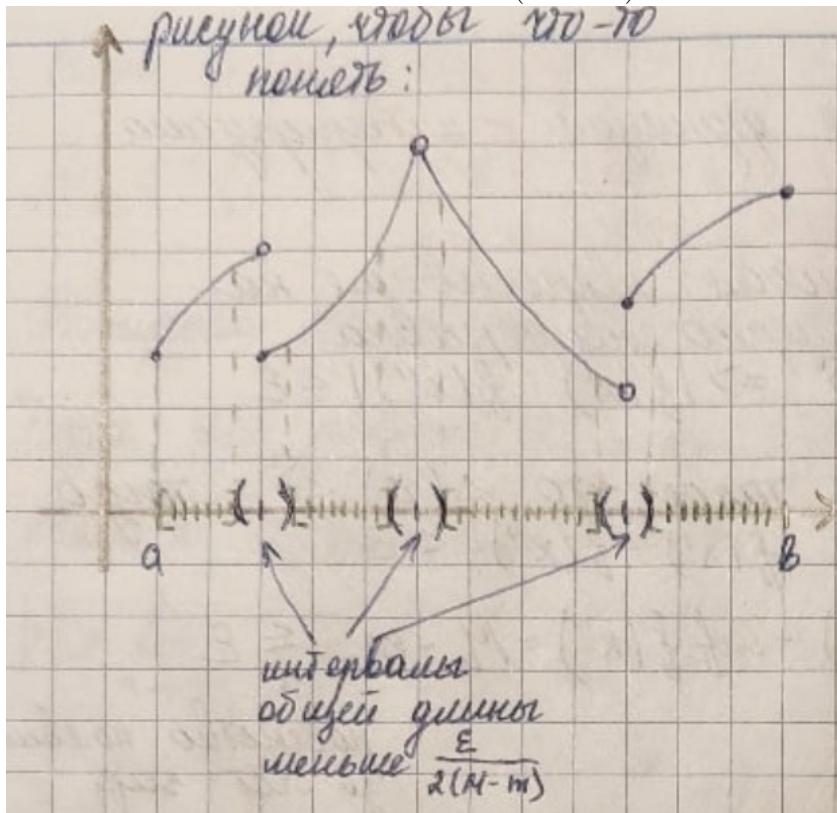
■

**Теорема §1.3.** *Если  $f$  имеет конечное число разрывов и ограничена на  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема*

Эта теорема будет следовать из более сильной теоремы

**Теорема (3!).** Пусть  $f$  ограничена на  $[a, b]$  и для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва  $f$  и имеющих общую сумму длин меньшую, чем  $\varepsilon$ , то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$

*Доказательство.*  $\varepsilon > 0$ . Покроем все разрывы конечным числом интервалов общей длины меньше чем  $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$



Если из  $[a, b]$  удалить конечное число интервалов, то останется объединение конечного числа отрезков на которых  $f$  непрерывна.

Разобьем каждый отрезок так, что колебание  $\omega_i$  там меньше, чем  $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$

Объединим эти разбиения и интервалы с разрывами получаем некоторое разбиение  $\tau$

Итак,

$$S_\tau - s_\tau = \sum \omega_k \Delta x_k = \underbrace{\sum \omega_i \Delta x_i}_{\text{Сумма по всем маленьким отрезкам}} + \underbrace{\sum \omega_j \Delta x_j}_{\text{Сумма по всем интервалам}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{\text{по маленьким отрезкам,} \\ \text{длины в сумме} \\ <(b-a)}} \Delta x_i}_{+} \underbrace{(M-m) \sum_{\substack{\text{по интервалам,} \\ \text{их длины} < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}}} \Delta x_j}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

|  $\Rightarrow$  по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема ■

**Замечание.** В теореме 3' П.1 и на рисунке точек разрыва может быть бесконечно числом

**Теорема §1.4** (Критерий Лебега). *Пусть  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .  $f$  интегрируема  $\Leftrightarrow$  множество точек разрыва обладает свойством:  $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n$  - конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что  $\{\text{множество точек разрыва}\} \subset \bigcup I_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$  (другими словами, мн-во точек разрыва меры 0)*

**Теорема §1.5.** *Монотонная на  $[a, b]$  функция - интегрируема*

*Доказательство.*  $f$  - монотонная  $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b]$   
(пусть возрастает)

Пусть  $\varepsilon > 0$ .  $\tau$  - разбиение  $[a, b]$  на равные отрезки длиной меньше

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}, \text{ т.e. } \Delta(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$\begin{aligned} \text{Очевидно, что } \forall [x_{i-1}, x_i] \ m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i), \text{ т.к. } f \text{ возрастает} \Rightarrow \\ S_{\tau} - s_{\tau} = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \Delta(\tau) \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ = \Delta(\tau)(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

|  $\Rightarrow$  по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема ■

## §2 Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла

$\mathcal{R}_{[a,b]}$  - множество интегрируемых функций на отрезке  $[a, b]$

Мы уже выяснили, что в этом мн-ве лежат непрерывные, монотонные, разрывные функции с мн-вом разрывных точек разрыва меры 0 (§1.4)

**Теорема §2.1.** *Пусть  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ , тогда:*

$$1. f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

$$2. \alpha f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

3.  $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

4.  $fg \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

5. Пусть  $[c, d] \subset [a, b]$ . Тогда если  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ ,  $f \Big|_{[c,d]} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

*Доказательство.* 1. Пусть  $\tau$  - разбиение  $[a, b]$ ,  $\{\xi_i\} = \xi$  - отмечены.

Тогда  $S(f + g, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^k (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i = S(f, \tau, \xi) + S(g, \tau, \xi)$

Т.к  $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) \exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(g, \tau, \xi)$ , то  $\exists \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S(f + g, \tau, \xi)$

$$| \Rightarrow f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \text{ и } \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

2. Аналогично 1)

3. Аналогично 1)

4. Удобнее на языке колебаний

$f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow$  они ограничены  $\Rightarrow \exists A > 0, B > 0 :$

$$|f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq AB \quad \forall x \in [a, b]$$

Пусть  $\tau$  - разбиение  $[a, b]$ . Рассмотрим разность из определения колебаний функции  $fg$ :

$$\begin{aligned} |f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| &= |f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')| = \\ &= \underbrace{|f(x'') - f(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции } f}} \cdot \underbrace{|g(x'')|}_{\leq B} + \underbrace{|g(x'') - g(x')|}_{\substack{\text{Разность из} \\ \text{опр. колебания} \\ \text{функции } g}} \cdot \underbrace{|f(x')|}_{\leq A} \end{aligned}$$

Следовательно,  $\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g) \Rightarrow \omega_i(fg) \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g)$$

Получаем:

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(fg) \Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^k \omega_i(f) \Delta x_i + A \sum_{i=1}^k \omega_i(g) \Delta x_i \quad (2)$$

$f$  и  $g$  интегрируемы  $\Rightarrow$  по теореме 2 пр.2  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_{1,2} : (\text{у каждой функции свой})$

$$\sum_{i=1}^k \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon, \sum_{i=1}^k \omega_i(g) \Delta x_i < \varepsilon$$

$| \Rightarrow$  правая часть неравенства 2  $\rightarrow 0 \Rightarrow$  левая часть неравенства  $\rightarrow 0 \Rightarrow$  по той же теореме 2 пр.2  $f g$  - интегрируема



Простые факты:

- (a) Если  $f$  ограничена на  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[c, d]$
- (b) Пусть  $\tau$  - разбиение  $[c, d]$  мелкости  $\Delta(\tau)$ . Тогда можно добавить к точкам из  $\tau$  конченое число точек принадлежащих  $[a, b] \setminus [c, d]$ , причем в таком, чтобы объединение этих точек с  $\tau_1$  давало разбиение  $\tau$  с мелкостью  $\Delta(\tau_1) = \Delta(\tau)$

Получаем:

$$0 \leq S_\tau - s_\tau = \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau}} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau_1, \\ \text{слагаемых больше}}} (M_i - m_i) \Delta x_i = S_{\tau_1} - s_{\tau_1} \xrightarrow[\substack{\text{по кр Дарбю §0.2} \\ f \text{-интегр. на } [a,b]}]{} 0$$

$| \Rightarrow S_\tau - s_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow f$  интегрируема на  $[c, d]$



Лемма 2

Теорема 2.

Пусть  $f, g \in R_{[a; b]}$

$$1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

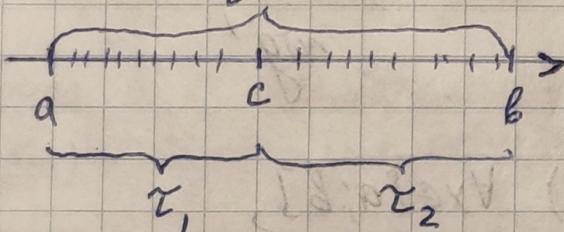
$$2) \text{если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство:

1) доказано в теореме 2.

2) Правые интегралы существуют по теореме 1(5), т.к.  
 $[a; c] \subset [a; b]$  и  $[c; b] \subset [a; b]$ .

Пусть  $\tau'$  произвольное разбиение  $[a; b]$



$\tau' = \tau \cup \{c\}$ , т.е.  $\tau \subseteq \tau'$

Тогда  $\tau' = \tau \cup \tau_2$ , где

$\tau_1$ -разбиение  $[a; c]$ ,  $\tau_2$ -разбиение  $[c; b]$

Доказательство

$$S_\tau \leq S_{\tau'} = S_{\tau_1} + S_{\tau_2} \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq S_{\tau_1} + S_{\tau_2} = S_{\tau'} \leq S_\tau$$

т.к.  $\tau \subseteq \tau'$

Следовательно (доказано)

$c$   $b$   
 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

об-во суммы Дарбю,  
ондэг. инт. Римана.

т.к.  $\tau \subseteq \tau'$

об-во суммы Дарбю

Меняется  $S_\tau$  и  $S_{\tau'}$  только одно число, не завис. от  $\tau$

$$\text{т.к. } \int_a^b f(x) dx.$$

чт.

Свойство:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

### § 5 Интегрируемые свойства интеграла.

Теорема 1

Пусть  $f \in R_{[a; b]}$  и  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Доказ.:  $\int_a^b f(x) dx \geq S_\tau = \sum m_k \Delta x_k \geq 0 \quad \forall \tau$ .

нрз!

Следствие 1.

Если  $f, g \in R_{[a; b]}$  и  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b]$ ,

то  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

Доказ.: Известно  $g(x) - f(x) \geq 0$  и  $g(x) - f(x) \in R_{[a; b]}$

(известно из Т1 § 4)

$\Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$

нрз.

Следствие 2.

Если  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

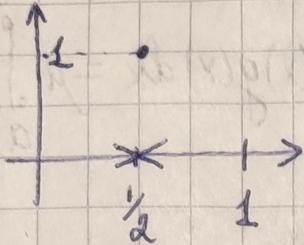
Доказ.:  $f(x) - m \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - m) dx = \int_a^b f(x) dx - m(b-a) \geq 0$

$M$  аналогично.

нрз!

Замечание: Обратное к теореме не верно, т.е.:  
 Если  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , то не обязательно  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$   
 $\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \forall x \in [a; b]$

Пример.



$\forall \tau \quad S_\tau = 0, \quad S_\tau = (x_i - x_{i-1}),$   
 где  $i$  any произвольный членови

$$\frac{1}{2} \in [x_{i-1}; x_i]$$

$$\lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S_\tau = 0 \leq \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} S_\tau \leq \lim_{\Delta(\tau) \rightarrow 0} \Delta(\tau) = 0$$

Теорема 2.

$f(x) \in C[a; b], \int_a^b f(x) dx = 0, \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b], \text{тогда } f(x) = 0 \quad \forall x.$

Доказательство:

Предположим  $\exists x_0 \in [a; b] \quad f(x_0) > 0$ .

Тогда в её некоторой окрестности

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} = m > 0, \text{ окрестность можно}$$

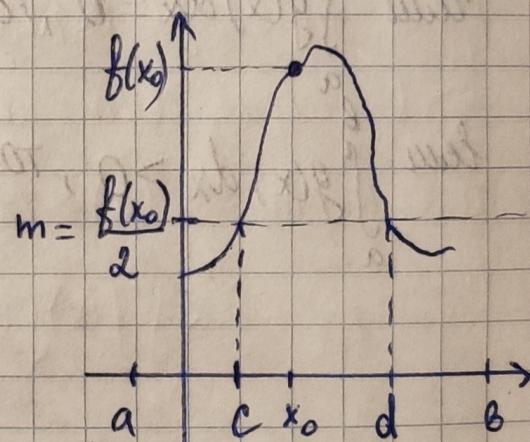
считать отрезком  $[c; d]$ .

По теореме 2 § 4 и теореме 1

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \geq$$

$$\geq 0 + m(d-c) + 0 > 0$$

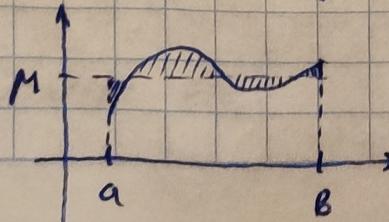
(т.к.  $f(x) \geq 0$  следствие 2  $f(x) \geq 0$ )



Теорема 3.

$f(x) \in C[a; b]$ , тогда  $\exists \xi \in [a; b]: \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a)$

Доказательство:



$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad m \leq \mu \leq M$$

$\Rightarrow$  по т. Коши  $\exists \xi: f(\xi) = \mu$ . rig!

Теорема 4. (Неравенство Коши-Буняковского о среднем)

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$

$\exists \mu \in [m; M]$

$$2) m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b] \quad \Rightarrow \int_a^b$$

$$3) g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство:

$$(1) \text{ и } (2), (3) \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

$$\text{Интегрируем: } m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{таким образом } \int_a^b g(x) dx = 0, \text{ то } \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad \text{и теорема верна}$$

$\forall \mu \in [m; M]$

$$\text{если } \int_a^b g(x) dx > 0, \text{ то падает.}$$

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

и замечание к теореме верно.

кто!

Следствие.

если, дополнительно  $f \in C[a; b]$ , то  $\exists \xi : f(\xi) = \mu$

Теорема 5. (Второе теорема о среднем)

Пусть  $f, g \in R[a; b]$ ,  $g$  монотонная. Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(\xi) \int_\xi^b f(x) dx$$

формула  
Бонне

Доказательство:

1. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  - числа.

$$A_k = a_1 + \dots + a_k, \quad a_k = A_k - A_{k-1}, \quad A_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \dots + (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n = \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

2. Пусть  $m \leq A_k \leq M \quad \forall k, \quad b_k \geq 0, \quad b_k \downarrow$

$$\begin{aligned} A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) &\leq M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) = \\ &= M(b_n + b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_{n-1} - b_n) = Mb, \end{aligned}$$

значит  $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq Mb, \quad (\geq mb, \text{ аналогично})$

$$\Rightarrow mb \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq Mb,$$

3. Пусть  $g(x) \geq 0, g \downarrow$  на  $[a; b] \Rightarrow \exists \xi \in [a; b]:$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(\xi) \int_\xi^b f(x) dx$$

(т.е. можно оставить  
только первое малое)

Доказаем это.

Тогда  $x$  произвольное разбиение  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1}))dx = E_x + F_x$$

одоц нации.

Разберёмся с  $E_x$ . Помним  $F(t) = \int_a^t f(x)dx$

$$\text{Заметим, что } F(t') - F(t'') = \int_a^{t'} f(x)dx - \int_a^{t''} f(x)dx = \int_{t''}^{t'} f(x)dx$$

Кроме того,  $f \in R[a; b] \Rightarrow |f(x)| \leq C \Rightarrow |F(t') - F(t'')| \leq C|t' - t''|$

$\Rightarrow F$  непрерывна на  $[a; b]$ .  $\Rightarrow$  существует  $\inf_{[a; b]} F$  и  $\sup_{[a; b]} F$ ,

то есть  $m \leq F(t) \leq M \quad \forall t \in [a; b]$ .

Тогда:

$$E_x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \\ = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))g(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad \begin{cases} F(x_0) = 0 \\ A_k = F(x_k) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  по определению

$$m g(a) \leq E_x \leq M g(a)$$

Разберёмся с  $F_x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1}))dx$

$$|F_x| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} C(g(x_{k-1}) - g(x_k)) dx = C \left( \sum_{k=1}^n (g(x_{k-1}) \Delta x_k - g(x_k) \Delta x_k) \right) = \\ = C(S_x(g) - S_x(g))$$

$\uparrow$

$x_{k-1} \quad x_k$

$(|f(x)| \leq C \text{ и } g(x) \geq g(x_k) \text{ при } x \in [x_{k-1}; x_k])$

Вернемся к  $F_x$ . Уже получили:

$$mg(a) \leq F_x = \int_a^b f(x)g(x)dx - F_x \leq Mg(a)$$

$$g(x) \in \mathcal{R}_{[a; b]} \Rightarrow \lim_{\Delta(x) \rightarrow 0} (S_x(g) - s_x(g)) = 0 \Rightarrow F_x \rightarrow 0$$

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a)$$

таким  $g(a) = 0$ , то  $g \geq 0$  на  $[a; b]$  ( $g \geq 0, g \downarrow$ )

таким  $g(a) > 0$ , то ранее получили  $m \leq F(t) \leq M \Rightarrow$

$$mg(a) \leq g(a) \int_a^t f(x)dx \leq Mg(a) \quad \forall t \in [a; b]$$

$\Rightarrow$  по теореме Коши для нестр. функций  $\exists \xi :$

$$g(a) \int_a^\xi f(x)dx = \int_a^\xi f(x)g(x)dx$$

4. Общий случай —  $g$  монотонная. (без условия  $g(x) \geq 0$ )

$$a) g(x) \downarrow \quad \delta) g(x) \uparrow$$

a) Введем новую функцию  $G(x) = g(x) - g(b)$ .

$G(x) \downarrow, G(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$  по пункту 3.  $\exists \xi :$

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = G(a) \int_a^\xi f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(b)f(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx - g(b) \int_a^\xi f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + \underbrace{\int_a^\xi g(b)f(x)dx - g(b) \int_a^\xi f(x)dx}_{}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^b f(x)dx + g(b) \int_a^b f(x)dx$$

5)  $g(x) \geq 0$ ,  $G(x) = g(b) - g(x)$  гаузе аналогично.  
Теорема доказана!

## §6 Формула Ньютона-Лейбница и приложения

### П.1 Свойства интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int_a^x f(t)dt$$

**Теорема §6.1** (Непрерывность). Пусть  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Тогда  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  - непрерывная функция на  $[a, b]$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$F(x)$  определена  $\forall x$ ;

$$\text{Из } f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow |f(x)| \leq C \text{ на } [a, b]$$

$$\text{Далее } F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Итак:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq C|h| \text{ - липшицевость}$$

$$| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x) \text{ - непрерывность}$$

■

**Лемма §6.1** (дифференцируемость). Пусть  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  и непрерывна в т.  $x \in [a, b]$ , тогда  $F$  дифференцируема в т.  $x$  и  $F'(x) = f(x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} [f(x) + f(t) - f(x)]dt = \\ &= \int_x^{x+h} f(x)dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt = f(x) \cdot h + \alpha(x, h) \end{aligned}$$

Итак:

$$F(x+h) - F(x) = f(x) \cdot h + \alpha(x, h)$$

$$\text{Где } \alpha(x, h) = \int_x^h (f(t) - f(x)) dt$$

Критерий дифференцируемости:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} = 0$

Проверим:

Из непрерывности  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

Пусть теперь  $|h| < \delta$ , тогда  $\forall t \in (x, x+h) |x-t| < h$  и

$$|\frac{\alpha(x, h)}{h}| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| < \left| \frac{1}{h} \varepsilon h \right| = \varepsilon$$

■

**Теорема §6.2** (Формула Ньютона-Лейбница). *Каждая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Кроме этого*

*для любой первообразной  $G : \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$*

*Доказательство.* По лемме  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , т.е  $F$  - первообразная. Далее, если  $G$  еще одна первообразная для  $f$ , то  $G(x) = F(x) + A \quad \forall x \in [a, b]$  и

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

■

## Π.2 Замена переменной в интеграле Римана

Сначала случай простой:  $f$  - непрерывна

**Теорема §6.3.**  $f \in C_{[a,b]}$ ,  $\phi \in C_{[\alpha,\beta]}^1$ ,  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

*Доказательство.*  $f(x)$  - непрерывна  $\xrightarrow{\text{по теореме 2§3}} f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$   
 $f(x), \phi(x), \phi'(t)$  - непрерывны  $\Rightarrow$  т.к композиция непрерывных функций непрерывна и произведение непрерывных функций непрерывная функция, получаем:

$$f(\phi(t)) \phi'(t) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Итак, оба интеграла существуют. Пусть  $F$  - первообразная  $f$  на  $[a, b]$ , тогда очевидно  $G(\beta) - G(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$   
 (В первом и последнем равенстве используется теорема 2) ■

**Замечание.** Композиция непрерывных функций - непрерывная функция. Но композиция интегрируемых по Риману функций может оказаться не интегрируемой

**Пример.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - несократима} \\ 0, & x \text{ - иррационально} \end{cases}$  - функция Римана  
 интегрируема на  $[0, 1]$

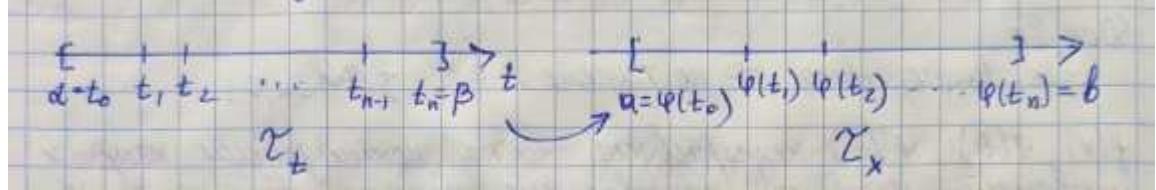
$g(x) = \operatorname{sgn}(x)$  - интегрируема на  $[0, 1]$

Но  $g(f(x)) = D(x)$  - функция Дирихле не интегрируема

**Теорема §6.4.** Пусть  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ ,  $\phi \in C_{[\alpha,\beta]}^1$  и  $\phi$  строго возрастает, причем  $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$

Тогда  $f(\phi(t))\phi'(t) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  и  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$

*Доказательство.*  $\phi \nearrow$  поэтому  $\forall \tau_t \xrightarrow{!} \tau_x = \{\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_n)\}$



$\phi(t)$  - непрерывна на  $[\alpha, \beta] \Rightarrow \phi(t)$  - равномерно непрерывна на  $[\alpha, \beta]$

$$|\Rightarrow \Delta(\tau_t) \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta(\tau_x) \rightarrow 0$$

Далее, любой набор  $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$  задает народ  $\xi_k = \phi(\theta_k) \in [x_{k-1}, x_k]$

Рассмотрим  $\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$

$$= \sum f(\phi(\theta_k))(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})) = \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}) = (\overline{\theta_k} \in [t_{k-1}, t_k])$$

$$= \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}) + \sum f(\phi(\theta_k))(\phi'(\overline{\theta_k}) - \phi'(\theta_k))(t_k - t_{k-1})$$

$I = II + III$  (обозначение предыдущего равенства). Пусть  $\Delta(\tau_t) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Delta(\tau_x) \rightarrow 0$$

$$|\Rightarrow I \xrightarrow[\Delta(\tau_x) \rightarrow 0]{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} \int_a^b f(x)dx, \text{ т.к } f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

$$|III| \leq C \sum \omega_k(\phi') \Delta t_k \xrightarrow[\Delta(\tau_t) \rightarrow 0]{\Delta(\tau_x) \rightarrow 0} 0 \text{ т.к } \phi' \in \mathcal{R}_{[\alpha,\beta]}$$

Это означает:

$$\exists \lim_{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} II = \lim_{\Delta(\tau_t) \rightarrow 0} S(f(\phi)\phi', \tau_t, \theta_k) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

■

### П.3 Интегрирование по частям, формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

**Теорема §6.5** (Интегрирование по частям). Пусть  $u, v \in C_{[a,b]}^1$ . Тогда

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

*Доказательство.*  $u(x)v(x)$  - первообразная для  $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

■

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x, a)$$

Наша цель получить  $r_n(x, a)$  в виде интеграла от  $f$ , произведений и т.д  
Для  $n = 0$ , т.е  $f(x) = f(a) + r_0(x, a)$  такая формула есть

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Продолжим процесс вытаскивание произвольной из под  $\int$  - ла

$$\begin{aligned} f(a) + \int_a^x f'(t)dt &= f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t) = f(a) - f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = \\ &= f(a) + f'(a)(a-t) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = P_1(x) - \int_a^x \frac{1}{2} f''(t)d(x-t)^2 = \\ &= P_1(x) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = P_2(x) + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = \cdots \Rightarrow \end{aligned}$$

По индукции легко получить формулу:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

**Теорема §6.6.** Пусть  $f$  имеет непрерывную  $n+1$  производную на отрезке с концами  $a$  и  $x$ . Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Пример: Вычислить  $\int_0^1 \sin x^2 dx$  с точностью до  $\frac{1}{100}$

используя Тейлора.

$$|\sin x - P_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x |\sin^{(n+1)} t| |(x-t)^n| dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{-1}{n!} \int_0^x u^n du = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow |\sin x^2 - P_n(x^2)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \sin x^2 dx - \int_0^1 P_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

также  $n=4$ , т.к.  $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$ .  $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$$P_4(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} \quad \int_0^1 P_4(x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{3!} \int_0^1 x^6 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3!} \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{14-1}{42} = \frac{13}{42} \approx 0,31$$

§7 Критерий Лебега интегрируемости функций по Риману.

Критерий даёт внутреннее описание интегрируемой функции по Риману.

Устанавливает точную взаимосвязь между классами  $R[a;b]$  и  $C[a;b]$ .

п. 1. Множество меры нуль по Лебегу

Опр.  $E \subset R$  имеет меру нуль по Лебегу, если  $\forall \epsilon > 0 \exists I_n$  конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что  $E \subset \bigcup I_n$  и  $\sum |I_n| < \epsilon$

Утверждение 1:

- а) Точка и конечное множество точек, меры нуль
- б) Объединение конечного или счётного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль
- в) подмножество множества меры нуль - множество меры нуль
- г) отрезок  $[a;b]$ ,  $a < b$  не является множеством меры нуль

Док-во:

б) Пусть  $E_n$  множества меры нуль

Пусть  $\epsilon > 0$ . Для каждого  $E_n$  покрытие  $\{I_k\}$ :

//////////

Тогда //////////

- а) точку можно покрыть интервалом длины  $< \epsilon$ , остальное вытекает из б)
- в) упражнение простое
- г) упражнение потруднее. Указание: из произвольного покрытия  $[a;b]$  интерв. выделить конечное, затем индукция чтд

Множество  $Q$  всех рациональных точек - множество меры нуль.

п. 2. Непрерывность, модуль непрерывности, колебание функции

Определим  $w////$  - колебание функции на ///

////

Утверждение 2.

1)  $w(x_0)=0 \Leftrightarrow f$  непрерывна в точке  $x_0$

2)  $w(x_0)=\infty$  ////

Док-во:

Упражнение Указание использовать определения предела по Коши или по Гейне, а также критерий Коши существования предела в точке

п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Опр. Если некоторое свойство выполняется в любой точке за исключением точек множества меры нуль, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п.в.)

Теорема

$f \in R[a;b] \Leftrightarrow f$  ограничена и непрерывная почти всюду на  $[a;b]$

Док-во:

( $\Rightarrow$ ) ограниченность доказана ранее (T1 §3)

Надо доказать, что //// меры нуль

Так как ///

достаточно показать, что если  $\alpha > 0$ , то  $E=\\\\\\\\$  меры нуль

Строим на  $[a;b]$  последовательность разбиений 1\\\\\\\\

Например,  $[a;b]$  последовательно разделим пополам

С каждым разбиением свяжем две ступенчатые функции  $F_n$  и  $f_n$

Для фикс.  $n$

////

Полагаем\\\\\\\\

Пусть  $E'=\\\\\\\\$ -оно счётное - меры нуль.

Теперь нам достаточно доказать, что  $E \setminus E'$  меры нуль.

Докажем сначала, что  $E \setminus E' = \\\\\\\\\\\\\$

$x \in E'$  означает что  $x$  не точка разбиения  
=>  $x$  всегда внутри некоторого //

//////////

Теперь непосредственно заметим, что  $E \setminus E'$  меры нуль  
 $E > 0$  произвольное, //// по построению, значит ////

Разбиению /// соответствуют интервалы ////

на каждом из которых  $f_{//}$  и  $f_{//}$  постоянные

Разбьём их на две группы ///

Теперь замечаем, что  $E \setminus E'$  //////////

это конечное объединение

Итак, //////////

=>  $E \setminus E'$  меры нуль

=> доказана непрерывность п.в.

(<=) Ранее доказали, что это верно, если множество разрывов конечное (и  
даже более общий сл. ТЗ'§3)

Общее док-во -упр (обратный ход)

Теорема доказана!

Леман

## § 7 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Критерий дает внутреннее описание интегрируемой функции по Риману. Устанавливает тесную связь между классами  $R[a; b]$  и  $C_{[a; b]}$ .

п. 1. Доказательство меру нуль по Лебегу.

Опр.  $E \subset R$  имеет меру нуль по Лебегу, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n$  конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что  $E \subset \bigcup I_n$  и  $\sum_n |I_n| < \varepsilon$ .

Утверждение: 1

- Точка и конечное множество точек — меру нуль
- Объединение конечного или счетного симметричного множества меру нуль есть либо меру нуль
- Доказательство доказательства меру нуль — доказательство меру нуль.
- Отрезок  $[a; b]$ ,  $a < b$  не является меру нуль.

Док-во: б) Тогда  $E_n$  либо меру нуль.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Для каждого  $E_n$  найдите  $\{I_k^{(n)}\}$ :

$$E_n \subset \bigcup_k I_k^{(n)}, \quad \sum_k |I_k^{(n)}| < \varepsilon / 2^n.$$

Тогда  $\bigcup_n E_n \subset \bigcup_{n,k} I_k^{(n)}$  и  $\sum_{n,k} |I_k^{(n)}| = \sum_n \sum_k |I_k^{(n)}| < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

- Тому можно покрыть интервалами длиной  $< \varepsilon$ , оставшееся входит из б)
- упр. простое

- упр. потребнее. Указание: из промтв. покрытие  $[a; b]$  интервалом длиной  $\varepsilon$ , затем интегрируем!

ног!

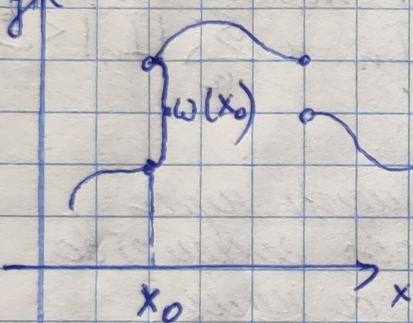


Мне кажется  
что!

Множество  $\mathbb{Q}$  всех рациональных точек — множество смертей нудь.

## п. 2 Непрерывность, изодуль непрерывности, коэффициент функции.

Определение:  $w_s(x_0) = \sup_{x', x'' \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]} |f(x') - f(x'')|$  — изодуль функции на  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$



$w(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow +0} w_s(x_0)$  — коэффициент функции в т.  $x_0$ .

### Утверждение 2.

- 1)  $w(x_0) = 0 \Leftrightarrow f$  непрерывна в т.  $x_0$
- 2)  $w(x_0) = \inf_{\delta > 0} w_s(x_0)$

Дан-бо упр Указание: использовать определение предела по Коши или по лине, а также критерий Коши существуетование предела в точке.

## п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Опр. если некоторое свойство выполняется в любой точке из исключенных точек множества смертей нудь, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п. в.)

Теорема.

$f \in \mathcal{R}_{[a; b]}$   $\Leftrightarrow f$  ограничена и непрерывна  
после всюду на  $[a; b]$ .

Док-во:  $\Rightarrow$  ограниченность доказана ранее (Т1 §3)

Надо доказать, что  $\{x : w(x) > 0\}$  мерой нуль.

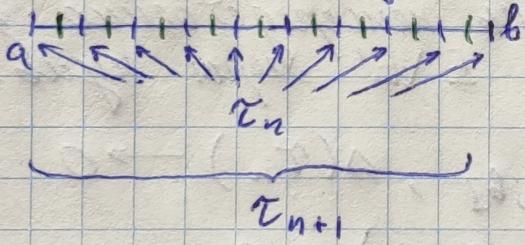
Так как  $\{x : w(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : w(x) > \frac{1}{k}\}$

достаточно показать, что если  $\delta > 0$ , то  
 $E = \{x : w(x) > \delta\}$  мерой нуль.

Сущим на  $[a; b]$  последовательность  
разбиений  $\mathcal{T}_n$ : 1)  $\Delta(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$

2)  $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$

Например,  $[a; b]$  послед-но делит  
неподелим



С самими разбиениями скажем две  
супрематичные функции  $f_n$  и  $\bar{f}_n$ .

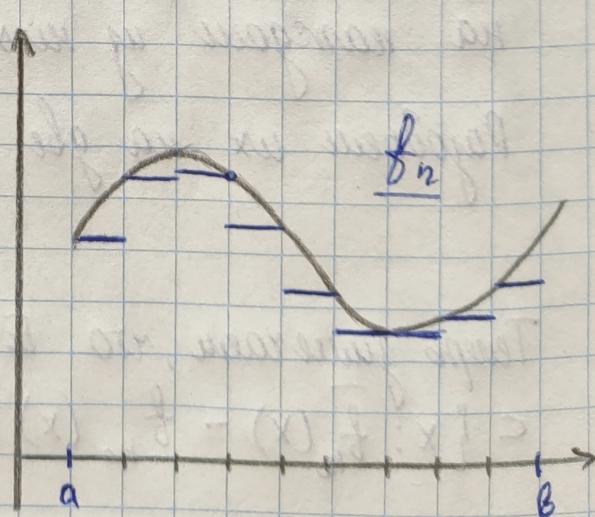
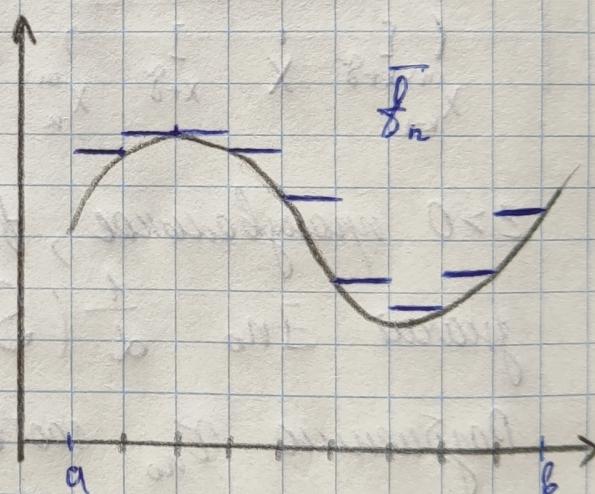
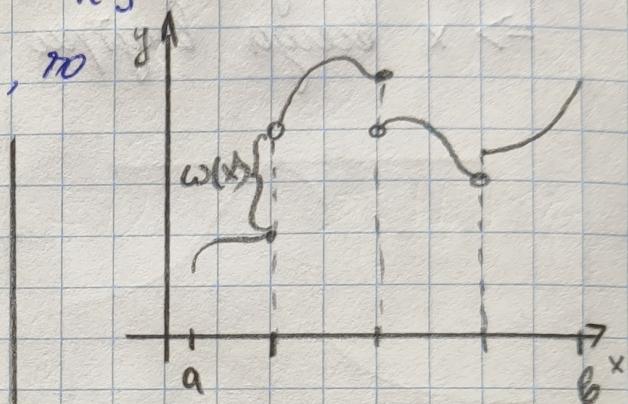
Две функ.  $n$ .

$$[a; b] = [a; x_1^n] \cup [x_1^n; x_2^n] \cup \dots \cup [x_{m-1}^n; x_m^n] \cup [x_m^n; b]$$

Помечаем  $\bar{f}_n(x) = M_k^n$ , если  $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]$

$f_n(x) = m_k^n$ , если  $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]$

$$\left( M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}^n; x_k^n]} f(x) \right)$$



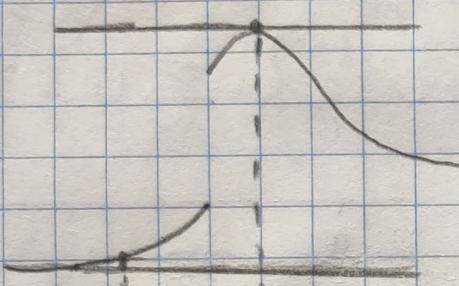
Пусть  $E' = \bigcup_n \mathcal{I}_n$  — это счетное — мероя нуль.

Теперь нам достаточно доказать, что  $E \setminus E'$  мероя нуль.

Докажем сначала, что  $E \setminus E' = \bigcap_n \{x : \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta\}$

$x \in E \setminus E'$  означает, что  $x$  не точка разбивки

$\Rightarrow x$  всегда внутри некоторого  $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$



$$(x_{k-1}^{(n)}, x] \quad x \quad [x, x_k^{(n)})$$

$w(x) > \delta$  означает, что  $w_{\delta}(x) > \delta$   $\forall \delta$   
 $\Rightarrow$  если  $\delta$  мало так, что  
 $[x - \delta, x + \delta] \subset (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ , то найдутся  
 $x' \text{ и } x'' : |f(x') - f(x'')| > \delta$

$$\Rightarrow M_k^n - m_k^n > \delta \text{ и } \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta$$

Теперь непосредственно заметим,  
что  $E \setminus E'$  мероя нуль.

$\varepsilon > 0$  произвольное,  $f \in R_{[a, b]}$ ,  $\Delta(\tau_n) \rightarrow 0$  по построению,

значит  $\exists n_0 \frac{1}{\delta} (S_{\tau_{n_0}} - s_{\tau_{n_0}}) < \varepsilon$

Разбиению  $\tau_{n_0}$  соответствуют интервалы  $\Delta_k^{n_0} = [x_{k-1}^{n_0}; x_k^{n_0}]$   
на каждом из них  $\bar{f}_{n_0}$  и  $\underline{f}_{n_0}$  — построенные.

Разобьем их на две группы  $\tilde{\Delta}_k^{n_0}$ , где  $\bar{f}_{n_0} - \underline{f}_{n_0} > \delta$

$\tilde{\Delta}_k^{n_0}$ , где  $\bar{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) \leq \delta$

Теперь заметим, что  $E \setminus E' = \bigcap_n \{x : \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \delta\} \subset$

$\subset \{x : \bar{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) > \delta\} = \bigcup_k \tilde{\Delta}_k^{n_0}$  — это конечное  
объединение

$$\text{так}, \sum_k |\tilde{\Delta}_k^{no}| = \frac{1}{\alpha} \sum_k \alpha |\tilde{\Delta}_k^{no}| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_k (\tilde{M}_k^{no} - \tilde{m}_k^{no}) |\tilde{\Delta}_k^{no}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \left( \sum_k (\tilde{M}_k^{no} - \tilde{m}_k^{no}) |\tilde{\Delta}_k^{no}| \right) = \frac{1}{\alpha} (S_{\tilde{\tau}_{no}} - S_{\tau_{no}}) < \varepsilon$$

$\Rightarrow E \setminus E'$  меры нуль.  $\Rightarrow$  доказана непрерывность п. в.

( $\Leftarrow$ ) Ранее доказали, что это верно, если ии-бо разложение конечное (и даже более общее с. ТЗ §3)  
Более ии-бо - упр. (обратный ход)

Теорема доказана!

## § 8 Длина кривой

### п. 1. Геометрия кривой

Опр. Множество точек плоскости  $\Gamma = \{(x; y) : x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ ,  $\varphi, \psi$  — непрерывные функции,  $t \in [a; b]$  наз-ся непрерывной кривой.

Пример:  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad - \text{кривые}$   
 $t \in [0; \pi] \quad t \in [0; 2\pi]$

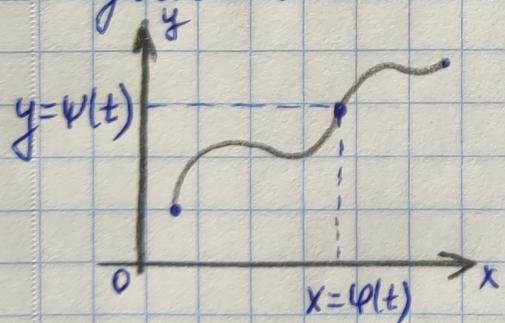
$t$  — параметр

$\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  — параметризации.

Оставши в стороне вопросов параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр.  $\Gamma = \{(x; y; z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)\}$ ,  $\varphi, \psi, \chi$  — непр-е функции,  $t \in [a; b]$  — непрерывное пространственное кривое

Физический смысл:



Параметр  $t$  — время.

Руныции определяют закон движения точки  $M$  с подчиняющимися  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  на плоскости.

Множество  $\Gamma$  точек  $M$  естественно рассматривать как след точки  $M$ , движущейся по закону

След кривой и. д. энглийский (пример погоды)

Опр. Непрерывные кривые наз-ся простой, если различными значениями параметра  $t$  в  $t_0$  разными точки кривой кроме и. д.  $t=a$  и  $t=b$  (т.орданова кривад)

## §8 Длина кривой

### п.1. Понятие кривой

Опр. Множество точек плоскости  $\mathbb{R}^2$  - непрерывные функции,  $\mathbb{R}$  называется непрерывной кривой

Пример 1

$\mathbb{R}^2$  - кривые

$t$ -параметр

$\mathbb{R}^2$ -параметризация

Оставим в стороне вопросы параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр.  $\mathbb{R}^2$ -непрерывные функции  $\mathbb{R}$ - непрерывная пространственная кривая

Физический смысл:

Параметр  $t$  - время

Функции определяют закон движения точки  $M$  с координатами  $x=t$ ,  $y=t$  на плоскости

Множество  $\Gamma$  точек  $M$  естественно рассматривать как след точки  $M$ , движущейся по закону.

След кривой может быть экзотическим(пример потом)

Определение непрерывная кривая называется простой, если различным значениям параметра соответствуют различные точки кривой, кроме может быть  $t=a$  и  $t=b$ (жорданова кривая)

### п. 2 Понятие длины кривой

Пусть  $\mathbb{R}^2$  кривая заданная параметрически

$\mathbb{R}^2$

Этому разбиению соответствует набор точек  $M_0, M_1, \dots, M_n$  на кривой  $M_k=\mathbb{R}^2$

Последовательно соединяя точки отрезками - получаем ломанную  $L_r$  - вписанная ломанная.(в кривую  $L$ , отвечающая разбиению  $r$ )

Длина  $k$ -го звена:

$\mathbb{R}^2$

Длина вписанной ломаной: $\mathbb{R}^2$

Опр. Кривая называется спрямляемой, если  $\mathbb{R}^2$ , в этом случае  $\mathbb{R}^2$  называется длиной

(то есть, дргими словами, если множество  $\mathbb{R}^2$  длин вписанных в кривую  $L$  ломанных, отвечающих всевозможным разбиениям  $r$ , ограничено)

Замечание:  $l > 0$

Далее рассматриваем "кусочно" простые кривые

Пример 1(продолжение)

$\mathbb{R}^2$

Свойства спрямляемых кривых:

- Если кривая  $L$  спрямляема, то длина  $l$  её дуги не зависит от параметризации этой кривой.
- Если  $L$  разбита точкой на две кривые  $L_1$  и  $L_2$ , то  $|L|=|L_1|+|L_2|$
- Пусть  $l(t)$  длина дуги кривой соответствующая параметрам от  $a$  до  $t$ .  
Функция  $l(t)$  - непрерывна

$l(t)$  называется переменной дугой на кривой  $L$

Если в качестве параметра взята длина дуги кривой, то такая параметризация называется естественной.

Пример 2.(график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину, то есть, не спрямляемая кривая)

$\mathbb{R}^2$

на  $[0; 1/\pi]$  непрерывная

Эскиз графика:

а) нули:  $x=0, x=1/\pi$  к э N



## § 8 Длина кривой

### п. 1. Точка кривой

Опр. Множество точек плоскости  $\Gamma = \{(x; y) : x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ ,  $\varphi, \psi$  - непрерывные функции,  $t \in [a; b]$  наз-ся непрерывной кривой.

Пример 1  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$  - кривые

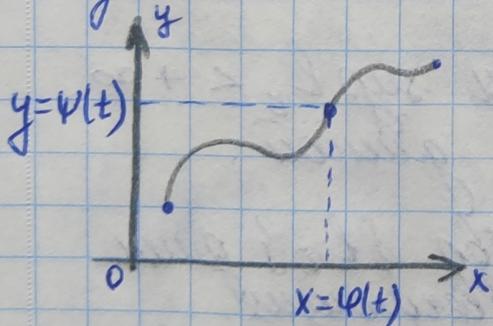
$t$  - параметр

$\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  - параметризации.

Оставши в строке вопросов параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр.  $\Gamma = \{(x, y, z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)\}$ ,  $\varphi, \psi, \chi$  - непр. е функции,  $t \in [a; b]$  - непрерывные пространственныe кривые

Физический смысл:



Параметр  $t$  - время.

Функции определяют закон движения точки  $M$  с координатами  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  на плоскости.

Множество  $\Gamma$  точек  $M$  естественно рассматривать как сеть точек  $M$ , движущихся по закону

Сеть кривой и. д. эвклидесский (пример потока)

Опр. Непрерывные кривые наз-ся простой, если различными значениями параметра соответствующие точки кривой кроме и. д.  $t = a$  и  $t = b$  (жорданова кривая)

## П. 2 Понятие длины кривой

Тогда  $\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [a; b] \end{cases}$

кривая, заданная параметрически

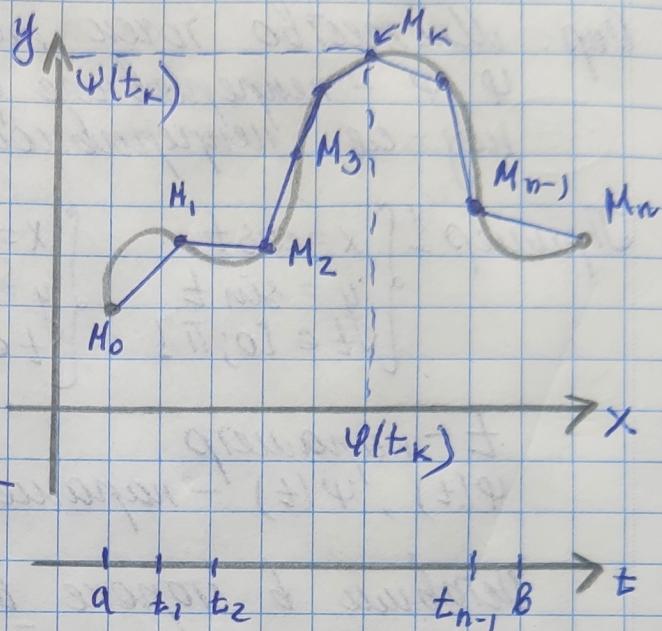
$\tau$ -разбиение  $[a; b]$ :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Такому разбиению соответствует набор точек  $M_0, M_1, \dots, M_n$  на кривой  $M_k = (\psi(t_k), \psi(t_k))$

Последовательно соединение точек отрезками — получается ломаную  $L_\tau$  — вписанной ломаной.

(В кривую  $L$ , отвечающую разб-ю  $\tau$ )



Длина  $\kappa$ -го звена:

$$|M_{k-1} M_k| = \sqrt{(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = l_k.$$

Длина вписанной ломаной:  $l_\tau = \sum_{k=1}^n l_k$

Оп. Кривая называется спрямляемой, если  $\sup_{\tau} l_\tau < +\infty$ , в этом случае  $\sup_{\tau} l_\tau = l$  наз-еи длиной.

(т.е., другие случаи, если множество  $\{l_\tau\}$  длий вписаных в кривую  $L$  ломаных, отвечающих бесконечному разбиению  $\tau$ , ограничено)

Замечание:  $l > 0$

Далее рассматриваем "нормальное" проекции кривые.

# Пример 1 (недоказаное)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \quad 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$$

$$l_x = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\sin t_k - \sin t_{k-1})^2 + (\cos t_k - \cos t_{k-1})^2} =$$



$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\cos t_k \cdot (t_k - t_{k-1}))^2 + (-\sin t_k \cdot (t_k - t_{k-1}))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2} \cdot \pi$$

$$\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad 0 < \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_n = 2\pi$$

$$l_{\tilde{x}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\sin \frac{\tilde{t}_k}{2} - \sin \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\tilde{t}_k}{2} - \cos \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{\tilde{t}_k}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\tilde{t}_k}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2}\pi$$

Свойства спрямимоных кривых:

1. Если кривая  $L$  спрямима, то длина  $\ell$  её души не зависит от параметризации этой кривой.
2. Если  $L$  разбита точкой на две кривые  $L_1$  и  $L_2$ , то  $|L| = |L_1| + |L_2|$ .
3. Пусть  $\ell(t)$  длина души кривой  $L$  соответствующей параметризации от  $a$  до  $t$ . Функция  $\ell(t)$  - непрерывна  $\ell(t)$  называется переменной длиной на кривой  $L$ .

Если в качестве параметра брать длину души кривой, то такой параметризации наз-ся дл-сф есть её величиной.

Пример 2 (график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину — т. е. не сплошная кривая)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

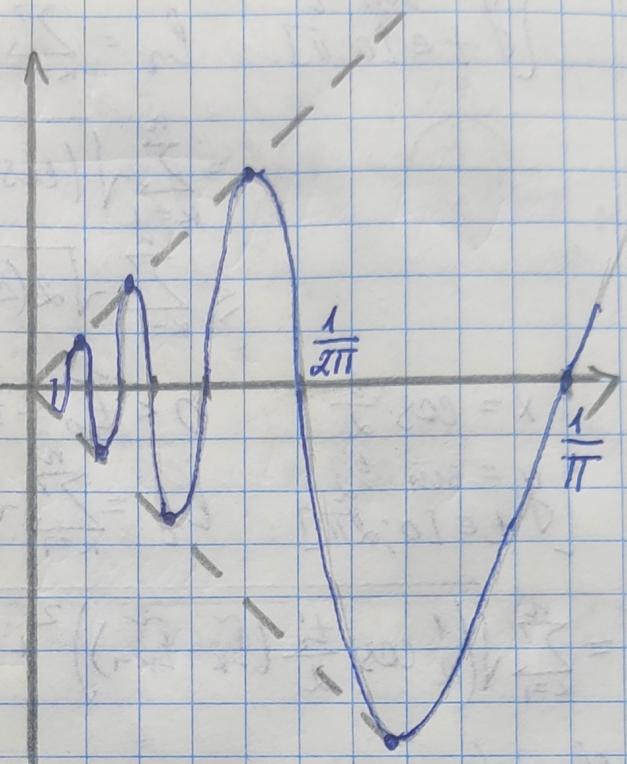
на  $[0, \frac{1}{\pi}]$  непрерывной

Эскиз графика:

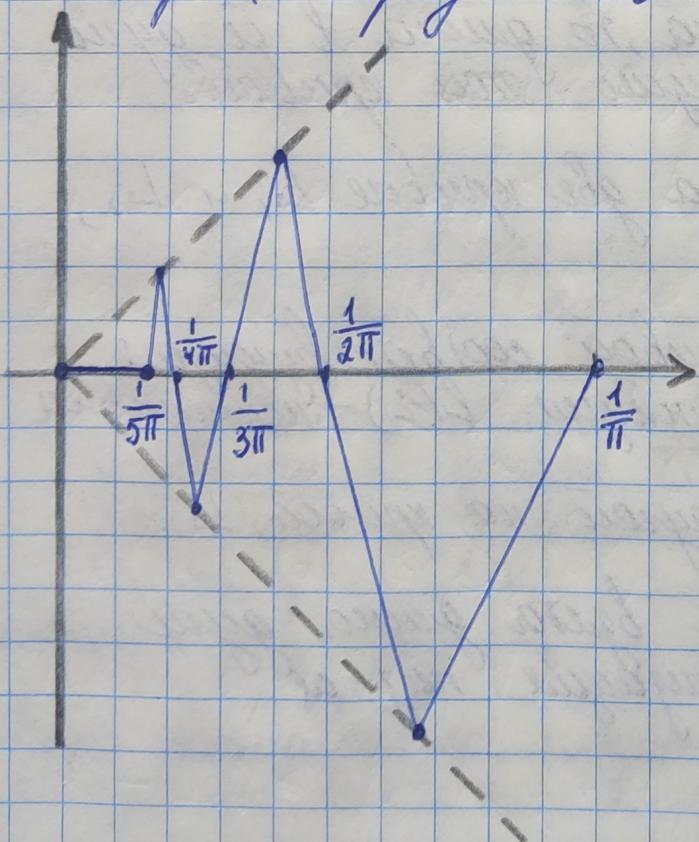
a) нули:  $x = 0, x = \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{N}$

b) точки  $f(x) = x$ :  $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$

b) точки  $f(x) = -x$ :  $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi}$



Впиши в график ломаную с четырьмя вершинами



Длина этой ломаной больше суммы длин всех треугольников, которые правна (считаем справа)

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 3\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi}$$

Если вписать аналитическое образование, начиная с  $n$  горбушками в график  $y = f(x)$ , то её длина  $l_n$

$$l_n > \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi} + \dots + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} > \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{2\pi + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n\pi + n\pi} = \\ = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \text{ Получаем } \sup l_n = +\infty$$

Замечание:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  имеет конечную длину на  $[a; b]$ .

$f(x)$  имеет ограниченную производную:  $|f'(x)| \leq C$

$$l_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \leq \sqrt{C^2 + 1}(b-a)$$

### П. 3. Длина кривой.

Теорема 1.

Если  $\varphi, \psi \in C^1_{[a; b]}$ , то кривая спрямляемая и

$$l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Доказ. Пусть  $\tau$  произвольное разбиение  $[a; b]$ .  
Длина вписанной кривой отображающей  $\tau$ :

$$l_n = \sum_k \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ и } \psi \text{ диф-ые} \\ \Rightarrow \text{но тк диф-ые} \end{array} \right| \\ = \sum_k \sqrt{(\varphi'(t_k^1)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(t_k^2)(t_k - t_{k-1}))^2} \leq \sum_k \sqrt{2M^2(t_k - t_{k-1})^2} \leq \\ \leq \sqrt{2} M(b-a) \quad \left( \begin{array}{l} t_k^1, t_k^2 \in (t_{k-1}, t_k) \text{ - в тк диф-ые} \\ \varphi'(t), \psi'(t) \text{ непр. на } [a; b] \Rightarrow \text{огранич.} \end{array} \right) \\ \Rightarrow \text{доказано спрямляемость.}$$

Дано, имеется оценка производимости:

$$\begin{aligned} l_2 & \stackrel{!}{=} \sum_k \sqrt{(\psi'(t_k^1))^2 + (\psi'(t_k^2))^2} (t_k - t_{k-1}) = \\ & = \sum_k \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} (t_k - t_{k-1}) + \\ & + \sum_k \left( \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} \right) (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Причина:  $l_2 = S(\sqrt{\psi'(t)^2 + \psi''(t)^2}, \{t_k\}, \tau) + \alpha(\psi', \psi'', \{t_k^1\}, \{t_k^2\}, \tau)$

Теперь наша задача выбрать такое  $\tau$ , чтобы  
 $l_2$  было близко к  $l$ , т.к.  $I = \int_a^b \sqrt{\psi'(t)^2 + \psi''(t)^2} dt$ ,  
а  $\alpha$  было малое.

Оценим  $\alpha = \sum_k \left( \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\psi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} \right) (t_k - t_{k-1})$

Две векторы  $a = (\psi'(t_k^1), \psi'(t_k^2))$  и  $b = (\psi'(t_k^1), \psi'(t_k^2))$   
верно  $||a|| - ||b|| \leq |a - b|$ ,  $|a - b| = |\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)|$ ,  
точнее этого  $|\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)| \leq M_k(\psi') - m_k(\psi')$ .

Значит,  $|\alpha| \leq \sum_k (M_k(\psi') - m_k(\psi')) (t_k - t_{k-1})$ ,

т.е.  $|\alpha| \leq S_\tau(\psi') - S_\tau(\psi')$

Таким образом,  $\forall \tau$

$$|l - I| \leq |l - l_2| + |l_2 - S(\sqrt{\psi'^2 + \psi''^2}, \{t_k\}, \tau)| + |S - I| \leq$$

$$\leq l - l_{\varepsilon} + S_{\varepsilon}(\psi') - S_{\varepsilon}(\psi) + \left| S\left(\sqrt{\psi'^2 + \psi'^{21}}, \{t_k^{12}\}, \tau\right) - I \right|$$

a) Пусть  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta$  и разбиение  $\tau_3$   $\Delta(\tau_3) < \delta$   
так, чтобы  $|S - I| < \frac{\varepsilon}{3}$

b)  $\exists \varepsilon_1 : l - l_{\varepsilon_1} < \frac{\varepsilon}{3}$

c)  $\exists \varepsilon_2 : S_{\varepsilon_2}(\psi') - S_{\varepsilon_2}(\psi) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Пусть  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \Rightarrow |l - I| < \varepsilon$

наг!

Лекция. Несобственный интеграл  
Опр несобственного интеграла  
свойства несобственных интегралов

## Лекции

### Несобственное интегрирование

Несобственный интеграл 1го рода (по неограниченному промежутку).

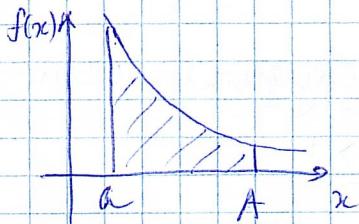
Оп.

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a; +\infty)$  и интегрируема по Риману на любом отрезке  $[a, A]$  где любое  $A > a$ .

Несобственным интегралом 1го рода от функции  $f(x)$  на  $[a; +\infty)$  называется предел

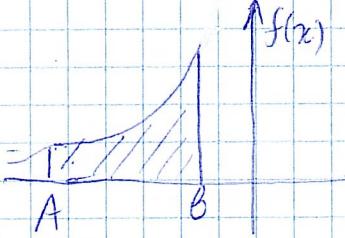
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится; если предел бесконечен или не существует, то интеграл расходится.



Аналогично, если  $f(x)$  определена на  $(-\infty; b]$  и интегрируема на  $[A, b]$  где любое  $A < b$ , то

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx.$$

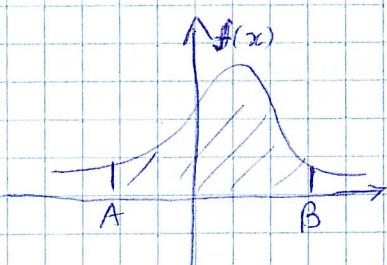


Если  $f(x)$  определена на  $(-\infty; +\infty)$  и интегрируема на  $[A; B]$  где любых

$A < B$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$$

(Здесь пределы на  $A$  и  $B$



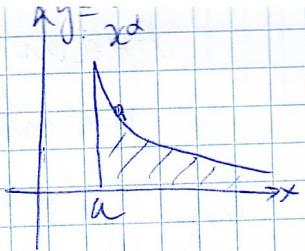
расматриваются независимо друг от друга)

## Пример

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^d} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A x^{-d} dx = (\star)$$

$A$

$a > 0$



Если  $d > 1$ , то  $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{-d+1}}{-d+1} \right) \Big|_a^A = \frac{1}{1-d} \lim_{A \rightarrow +\infty} (A^{1-d} - a^{1-d}) =$

$\frac{a^{1-d}}{1-d} = \frac{1}{(d-1)a^{1-d}}$ , итеграл сходится

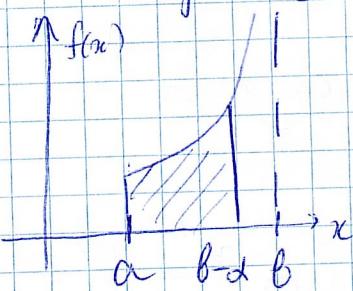
Пк.  $1-d < 0$

Если  $d < 1$ , то  $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-d} (A^{1-d} - a^{1-d}) = +\infty$ , итеграл расходится

Если  $d = 1$ , то  $(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A - \ln a = +\infty$ ,  
итеграл расходится

Несобственный интеграл 2го рода  
(от неограниченной функции)

опр.  
если функция  $f(x)$  определена на  $[a; b)$  и  
интегрируема на  $[a; b-d]$  при любом  $b-d \in (a; b)$ ,  
и пусть  $f(x)$  не ограничена при  $x \rightarrow b-0$ .



Несобственный интеграл 2го рода от  
функции  $f(x)$  на  $[a, b)$  называется

предел

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow +0} \int_a^{b-d} f(x) dx$$

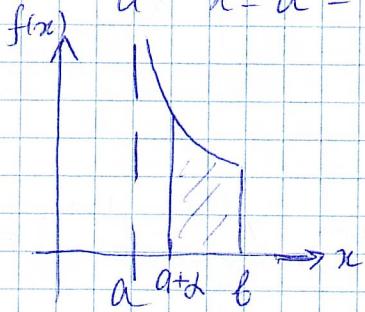
Интеграл сходится, если предел существует и конечен.

Точка  $x=b$  называется особой точкой функции  $f(x)$   
(или говорят, что в точке  $x=b$  функция имеет  
особенность).

Аналогично, якщо  $f(x)$  определена на  $(a; b]$ ,

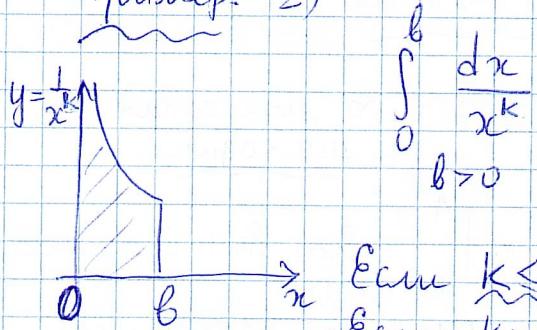
інтегрирується на  $[a+d; b]$   $\forall a+d \in (a; b)$ ,

якщо  $x=a$  - особа точка, то



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow +0} \int_{a+d}^b f(x) dx.$$

Приклад. 2)



Якщо  $k \leq 0$ , то це собственний інтервал, отже суміжні  
Якщо  $k > 0$ , то  $x=0$  - особа точка

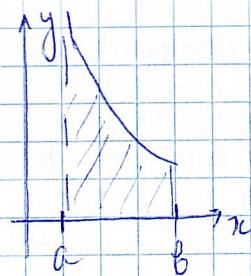
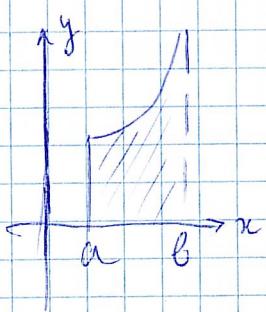
$$\text{Якщо } k=1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b \frac{dx}{x} = \lim_{d \rightarrow +0} \ln|x| \Big|_d^b = \\ = \lim_{d \rightarrow +0} \ln b - \underbrace{\ln d}_{\stackrel{+0}{\longrightarrow}} = +\infty \text{ - інтервал } \text{пакуючий}$$

$$\text{Якщо } 0 < k < 1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b x^{-k} dx = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \Big|_d^b = \\ = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{b^{-k+1}}{1-k} - \underbrace{\frac{d^{1-k}}{1-k}}_{\stackrel{0}{\longrightarrow}} = \frac{b^{1-k}}{1-k} \text{ - інтервал } \text{сьючущий}$$

$$\text{Якщо } k > 1, \text{ то } (*) = \lim_{d \rightarrow +0} \int_d^b x^{-k} dx = \lim_{d \rightarrow +0} \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \Big|_d^b =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +0} \frac{1}{1-k} \left( \underbrace{b^{1-k}}_{\stackrel{+\infty}{\longrightarrow}} - \underbrace{d^{1-k}}_{\stackrel{0}{\longrightarrow}} \right) = +\infty \text{ - інтервал } \text{пакуючий}$$

Інтервал  $\int_0^b \frac{dx}{x^k}$  сьючущий при  $k < 1$   
і пакуючий при  $k > 1$



Аналогичное рассматриваемое интегрирование

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k}$$

$x-a=t$   
 $dx=dt$   
 $x \rightarrow a+0, t \rightarrow 0$   
 $x=B, t=b-a$

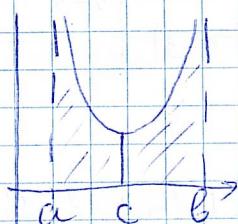
сходится при  $k < 1$   
расходится при  $k \geq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(B-x)^k} = - \int_{b-a}^{0} \frac{dt}{t^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k}$$

$B-x=t$   
 $dx=-dt$   
 $x=a, t=b-a$   
 $x \rightarrow B-0, t \rightarrow +0$

сходится при  $k < 1$   
расходится при  $k \geq 1$

Если  $x=a$  и  $x=B$  — две особые точки функции  $f(x)$ , то



$$\int_a^B f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^B f(x) dx,$$

где  $c \in (a; B)$  — произвольная точка.

Интеграл в левой части сходится, если сходится

оба интеграла в правой части.

В этом случае значение интеграла не зависит от выбора точки  $c$ .

Доказательство, если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на  $(a; B)$ , то

$$\begin{aligned}
 \int_a^c f(x) dx + \int_c^B f(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{a+\alpha}^c f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_c^{B-\beta} f(x) dx = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} (F(c) - F(a+\alpha)) + \lim_{\beta \rightarrow +0} (F(B-\beta) - F(c)) = \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow +0} F(B-\beta) - \lim_{\alpha \rightarrow +0} F(a+\alpha) \quad \text{не зависит от } c.
 \end{aligned}$$

Пример. 3)

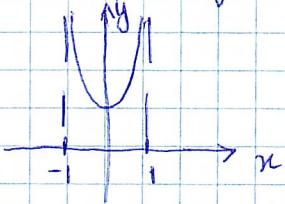
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow +0} \arcsin(1-\beta) - \lim_{\alpha \rightarrow -0} \arcsin(-1+\alpha) =$$

$x = \pm 1$  — две особые точки

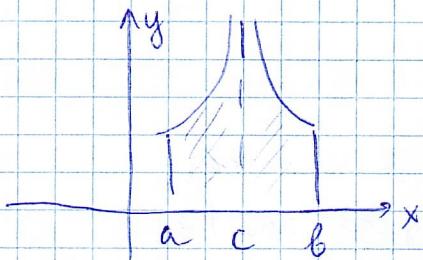
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

— несобственный интеграл сходится

Так как  $F(x) = \arcsin x$  непрерывна при  $x = \pm 1$ , то  
можно записать  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$



Если  $c \in (a; b)$  — особая точка внутри промежутка  $(a; b)$ , то



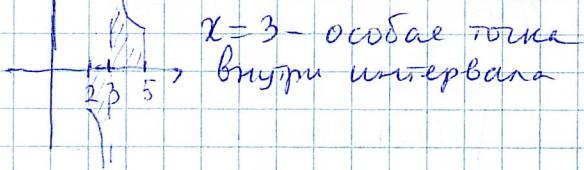
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Интеграл  $b$ : левая часть сходится,  
если сходится оба интеграла

В правой части

Пример 4)

$$\int_2^5 \frac{dx}{x-3} = \int_2^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^5 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_2^{3-\alpha} \frac{dx}{x-3} +$$



$$+ \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{3+\beta}^5 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln|x-3| \Big|_2^{3-\alpha} +$$

$$+ \lim_{\beta \rightarrow 0} \ln|x-3| \Big|_{3+\beta}^5 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\underbrace{\ln(3-\alpha) - \ln(-1)}_{-\infty}) + \lim_{\beta \rightarrow 0} (\underbrace{\ln 2 - \ln \beta}_{+\infty}) -$$

интеграл расходится, т.к. оба предела бесконечны

### Свойства несобственных интегралов

Будем рассматривать интеграл вида

$$\int_a^w f(x) dx, \quad \text{где } w \text{ — конечная особая точка или } +\infty.$$

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a; w)$  и интегрируема на  $[a; A]$  для любых  $A \in (a; w)$ .

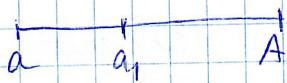
Если  $x=w$  — конечная особая точка, то назовем  $\int_a^w f(x) dx$

будем называть  $\int_a^w f(x) dx$ .

Две интегралы вида  $\int_w^b f(x) dx$ , где  $w=-\infty$  или конечная особая точка, имеют свойства аналогичные

1) Нүснә  $a < a_1 < \omega$ .

Төрға интеграл  $\int_a^\omega f(x)dx$  сәулеңде  $\Leftrightarrow \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^\omega f(x)dx$  сәулеңде



Dok. Нүснә  $A \geq a_1$ , төрға

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^A f(x)dx$$

(const  
сәбілдемеш  
интеграл)

Нүснә  $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx$  сүйсілгішін көзделсе  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  бұл нұрабарінің сүйсілгішін көзделсе  $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx$ .

$$\text{При шартта } \int_a^\omega f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^\omega f(x)dx,$$

т.е. ғана несобілдемеш интегралдар сипатедибо свойства агуитивности.

□

2) (линейлікты)

Егер интегралдар  $\int_a^\omega f(x)dx$  және  $\int_a^\omega g(x)dx$  сәулеңде, то сәулеңде интегралдар:

$$1) \int_a^\omega (f(x) + g(x))dx = \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx;$$

$$2) \int_a^\omega c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^\omega f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dok. 1) Әзір мәбдүс  $A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A (f(x) + g(x))dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx$$

При  $A \rightarrow \omega$  сүйсілгішінде предел  $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx$ ,

$\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A g(x)dx = \int_a^\omega g(x)dx$ . Следовательно, сүйсілгішін көзделсе

$$\begin{aligned} \int_a^\omega (f(x) + g(x))dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A (f(x) + g(x))dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx + \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A g(x)dx = \\ &= \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx \end{aligned}$$

2)  $\forall A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^A f(x)dx$$

При  $A \rightarrow \omega$  сүйсілгішінде  $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx$ . Следовательно,

$$\int_a^\omega c \cdot f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A c \cdot f(x)dx = c \cdot \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x)dx = c \cdot \int_a^\omega f(x)dx.$$

□

### 3) (интегрирование по частям)

Пусть функции  $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$  непрерывны на  $[a; \omega]$ .

Если интеграл  $\int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$  сходится и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x) \cdot v(x)$ , то сходится и интеграл

$$\int_a^{\omega} u(x) v'(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x) - u(a) v(a) - \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$$

Dоказ. Для любого  $A \in (a; \omega)$

$$\int_a^A u(x) v'(x) dx = u(A) v(A) - u(a) v(a) - \int_a^A v(x) u'(x) dx$$

При  $A \rightarrow \omega$ :  $u(A) v(A) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x)$ ,  $\int_a^A v(x) u'(x) dx \rightarrow \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$ .

Следовательно, существует конечный

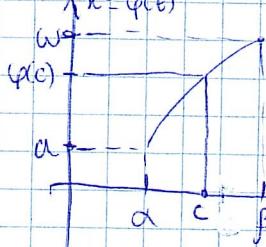
$$\int_a^{\omega} u(x) v'(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A u(x) v'(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} u(x) v(x) - u(a) v(a) - \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx$$

### 4) (замена переменных $x$ )

Пусть функции  $x = \varphi(t)$  и  $x = \varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ ,  
и  $x = \varphi(t)$  монотонна на этом промежутке,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = \omega$$

( $\beta$  может быть в том числе  $\pm \infty$ ).



Тогда для любой непрерывной на  $[a, \omega]$

и интегрируемой на  $[a, \omega]$   $\forall A \in (a; \omega)$

Функция  $f(x)$  справедлива формула замены переменных:

$$\int_a^{\omega} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Интеграл в левой и правой частях сходится или расходится одновременно

Dоказ. Для любого  $c \in (\alpha, \beta)$ :

$$\int_c^{\omega} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^c f(x) dx.$$

Если  $c \rightarrow \beta$ , то  $\varphi(c) \rightarrow \omega$ . Если существует конечный

$$\lim_{c \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^c f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\omega} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \text{ то существует и конечен}$$

$$\lim_{c \rightarrow \beta} \int_a^c f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\omega} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

## Несобственные интегралы (лекция 1)

### 1. Определение, основные свойства.

При определении интеграла Римана возникают два существенных ограничения. Во-первых, функция должна быть ограниченной. Во-вторых, определение работает на отрезках – ограниченных множествах.

Далее рассмотрим обобщение понятия интеграла на эти неподходящие по Риману случаи.

Если функция  $f(x)$  определена на конечном полуинтервале  $[a, b)$ , для любого  $b' \in (a, b)$  на  $[a, b']$  ограничена, но на всём  $[a, b)$  не ограничена, то точка  $b$  называется *особой точкой* для функции  $f(x)$ .

**Определение 1.** Пусть функция  $f(x)$  определена на конечном или бесконечном полуинтервале  $[a, b)$ ,  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $b$  – особая точка при  $b < +\infty$ , и для любого  $b' \in (a, b)$  функция интегрируема по Риману на  $[a, b']$ , существует

конечный  $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x)dx$ , тогда функция  $f(x)$  называется интегрируемой в не-

собственном смысле на множестве  $[a, b)$ , а указанный предел называется не-  
собственным интегралом и обозначается  $\int_a^b f(x)dx$ .

При этом говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится. В про-  
тивном случае говорят, что это расходящийся несобственный интеграл.

Если  $b = +\infty$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называют несобственным интегралом

первого рода (1-го рода), если  $b < +\infty$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  называют несобственным ин-  
тегралом второго рода (2-го рода).

В выше приведённом определении несобственного интеграла рассматривалась особенность в правом конце множества. Легко понять, что аналогично можно определить несобственный интеграл для особенности в левом конце множества интегрирования и на луче  $(-\infty, b]$ .

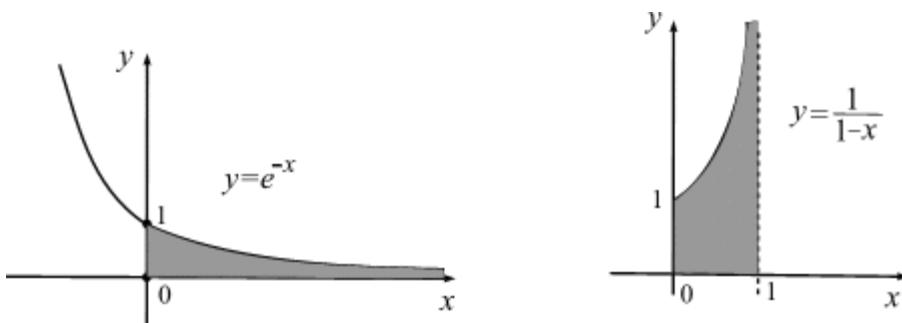
Рассмотрим примеры несобственных интегралов.

**Пример 1. а)**  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \int_0^{b'} e^{-x} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} (-e^{-b'} + 1) = 1$ , интеграл сходится

и получено его значение;

б)  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b' \rightarrow 1-0} \int_0^{b'} \frac{dx}{1-x} = \lim_{b' \rightarrow 1-0} (-\ln|1-b'| + \ln 1) = +\infty$ , следовательно, интеграл расходится.

Геометрический смысл этих интегралов:



Площадь не ограниченно простирающейся на плоскости фигуры:

- а) конечна,
- б) бесконечна.

**Утверждение 1.** Если функция  $f(x)$  ограничена на конечном полуинтервале  $[a, b)$  и для любого  $b' \in (a, b)$  интегрируема по Риману на  $[a, b']$ , то она интегрируема по Риману и на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Доопределим функцию в точке  $b$  произвольным образом  $f(b) = c$ . Из условия следует  $|f(x)| \leq C_1, \forall x \in [a, b)$ , ясно,  $|f(x)| \leq C, \forall x \in [a, b]$ , где  $C = \max\{C_1, c\}$ .

Рассмотрим теперь произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $b'$  такое, что  $b - b' < \varepsilon/4C$ . Для интегрируемой на  $[a, b']$  функции  $f(x)$  найдется разбиение  $\tau'$  отрезка  $[a, b']$  такое, что по нему  $S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon/2$ . Добавим к  $\tau'$  точку  $b$  и получим разбиение  $\tau$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда  $S_{\tau} - s_{\tau} = S_{\tau'} - s_{\tau'} + (M' - m')(b - b') < \varepsilon/2 + 2C \cdot \varepsilon/4C = \varepsilon$ , где  $M'$ ,  $m'$  – supremum и infimum функции  $f(x)$  на  $[b', b]$ . Таким образом, утверждение доказано.

Следовательно, определение несобственного интеграла в случае конечного промежутка  $[a, b)$  содержательно лишь в случае, когда функция  $f(x)$  на нём не ограничена. В противном случае, при условии интегрируемости по Риману на любом  $[a, b']$ , функция интегрируема по Риману и на всём множестве, или, иначе говоря, в собственном смысле.

## Теорема 1. Основные свойства несобственных интегралов.

**1. Линейность несобственного интеграла.** Если  $f$  и  $g$  интегрируемы в несобственном смысле на  $[a, b)$ , то для любых действительных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  функция  $\lambda f + \mu g$  тоже интегрируема на  $[a, b)$  и

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

**2. Аддитивность несобственного интеграла.** Для любого  $c \in (a, b)$  одновременно сходятся интегралы

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x) dx, \quad \text{при этом}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**3. Формула интегрирования по частям в несобственном интеграле.** Если функции  $f, g \in C^1_{[a,b)}$  и существует конечный  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$ , то интегралы

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad \text{сходятся одновременно и}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**4. Формула замены переменной в несобственном интеграле.** Если функция  $\varphi \in C^1_{[a,\beta)}$ , возрастающая,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(t) \rightarrow b$  при  $t \rightarrow \beta-0$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{сходятся одновременно и равны.}$$

**Доказательство.** Все свойства доказываются одинаково: для собственных интегралов (интегралов Римана) эти свойства справедливы, а затем к справедливым равенствам применяется предельный переход, который обладает соответствующими линейными и аддитивными свойствами.

**Пример 2.** Эталонные несобственные интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \begin{cases} \frac{1 - \delta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1, \\ -\ln \delta & \alpha = 1. \end{cases}$$

Сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .

6)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ . Сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ , так как

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{A^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha + 1} & \alpha \neq 1, \\ \ln A & \alpha = 1. \end{cases}$$

## 2. Критерии и признаки сходимости.

**Теорема 2 (Критерий Коши).** Для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно выполнение условия Коши: для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\bar{b}$  такое, что  $a \leq \bar{b} < b$  и для любых  $\bar{b} < b', b'' < b$  (для определенности считаем  $b'' > b'$ ) выполняется неравенство

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Положим  $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ ,  $a \leq y < b \leq +\infty$ . Тогда вопрос

сходимости  $\int_a^b f(x) dx$  означает существование конечного  $\lim_{y \rightarrow b-0} F(y)$ . Применение

критерия Коши существования конечного предела слева функции  $F(y)$  в точке  $b$  даёт: для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\bar{b}$  такое, что  $a \leq \bar{b} < b$  и для любых  $\bar{b} < b', b'' < b$  выполняется неравенство  $|F(b'') - F(\bar{b})| < \varepsilon$ . Остаётся подставить в это неравенство функцию  $F$ .

**Теорема 3 (Признаки Абеля и Дирихле).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на  $[a, b]$ , для любого  $b' \in (a, b)$  интегрируемы по Риману на  $[a, b']$ . Для сходимости  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  достаточно выполнения одного из свойств:

α)  $\int_a^b f(x) dx$  сходится,  $g(x)$  монотонна и ограничена на  $[a, b]$ ;

β)  $\left| \int_a^y f(x) dx \right| < C$  при  $a \leq y < b \leq +\infty$ ,  $g(x)$  монотонно стремится к 0 при  $x \rightarrow b-0$ .

**Доказательство.** Для любых  $a < b', b'' < b$  по второй теореме о среднем имеем  $\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)dx = g(b') \int_{b'}^c f(x)dx + g(b'') \int_c^{b''} f(x)dx$ , где  $c$  лежит между  $b'$  и  $b''$ .

Отсюда критерий Коши завершает доказательство сходимости рассматриваемого интеграла на основании выполнения любого из двух свойств  $\alpha$ ) или  $\beta$ ).

**Пример 3.** Интеграл Дирихле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится.

Действительно, он имеет единственную особенность (в «точке»  $+\infty$ ), поскольку функция  $\frac{\sin x}{x}$  в точке  $x = 0$  имеет устранимый разрыв. Если подынтегральную функцию положить равной 1 в точке 0, то она станет непрерывной на луче  $[0, +\infty)$ . Интеграл сходится на основании признака Абеля-Дирихле: функция  $\sin x$  непрерывна и имеет ограниченную первообразную  $-\cos x$ , а функция  $1/x$  монотонно убывает к 0 при  $x \rightarrow +\infty$ , то есть выполнено свойство  $\beta$ ).

**Теорема 4 (Критерий сходимости в терминах рядов).**

$\int_a^b f(x)dx$  сходится тогда и только тогда, когда для любой возрастающей к  $b$

последовательности точек  $b_n$  из  $[a, b)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$  сходится.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  в эту сторону доказательство проводится по критерию Коши.

$\Leftarrow$  в обратную сторону – доказательство от противного. Посредством критерия Коши создаётся ряд, у которого общий член не стремится к нулю:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| > \varepsilon, \quad \left| \int_{b_2}^{b_3} f(x)dx \right| > \varepsilon, \dots .$$

**Пример 4.**  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  расходится. Рассмотрим числовую последовательность

$b_n = \pi n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , ясно  $b_n \rightarrow +\infty$ , оценим слагаемые ряда:

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi |\sin x| dx = \frac{2}{\pi(n+1)}. \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

– расходится.

## Несобственные интегралы (лекция 2)

**Теорема 5 (Признаки сравнения).** Пусть  $f(x) \geq 0$  и  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ .

1. Если  $f(x) \leq g(x)$  на  $[a, b]$ , то

a) из сходимости  $\int_a^b g(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^b f(x)dx$ ;

б) из расходимости  $\int_a^b f(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^b g(x)dx$ .

2. Если  $f$  и  $g$  интегрируемы по Риману на  $[a, b']$  для любого  $b' \in (a, b)$  и су-

ществует конечный  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ , то

a) при  $c = 0$  выполняются утверждения пункта 1;

б) при  $c > 0$  интегралы  $\int_a^b f(x)dx$  и  $\int_a^b g(x)dx$  сходятся одновременно.

**Доказательство.** 1. Справедливость этого утверждения следует из критерия Коши.

2. В части а) из  $c = 0$  следует существование  $\bar{b}$  такого, что на  $[\bar{b}, b)$  выполняется неравенство  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ , то есть  $f(x) \leq g(x)$ . В части б) существует  $\bar{b}$

такое, что на  $[\bar{b}, b)$  справедливо двойное неравенство  $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2c$ , то есть

$\frac{c}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2cg(x)$  (важно  $g(x) > 0$ ). Это двойное неравенство и объясняет одинаковое поведение рассматриваемых интегралов.

Признаки сравнения – это очень эффективный инструмент в исследовании несобственных интегралов на сходимость.

**Пример 5.** Исследовать на сходимость интегралы:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} dx, \quad 2) \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

**Решения.** 1). Подынтегральная функция  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$  при  $x \rightarrow +\infty$  эквивалентна

функции  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ . Поскольку  $3/2 > 1$ , интеграл сходится.

2). На луче  $[1, +\infty)$  имеет место неравенство между положительными функциями  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  и  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  сходится.

3). Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x}{\sin x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{(-2x^{1/2} \cos x)} = 0$$

здесь в первом

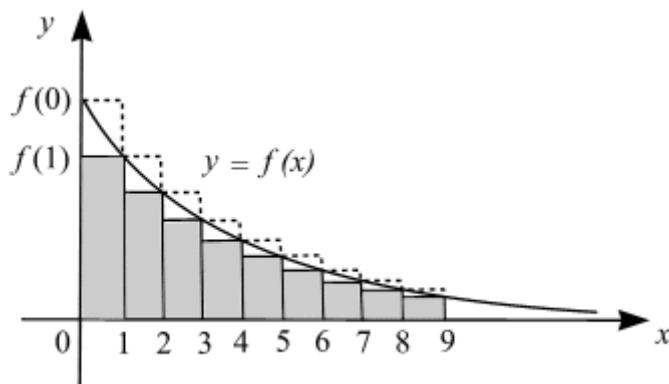
равенстве использовали правило Лопитала, во втором – первый замечательный

предел. Интеграл  $\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

**Теорема 6 (Интегральный признак сходимости рядов).** Пусть  $f(x) \geq 0$  на луче  $[1, +\infty)$  и убывает на нём. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Доказательство.** Функция  $F(b) = \int_1^b f(x) dx$  и сумма  $\sum_{n=1}^{[b]} f(n)$  возрастают в

силу не отрицательности функции  $f(x)$ . Значит, сходимость равносильна их ограниченности. Так как  $f(x)$  убывает, справедливы следующие оценки, завершающие доказательство:  $\sum_{n=2}^{[b]} f(n) \leq F(b) \leq \sum_{n=1}^{[b]} f(n)$ .



**Следствие.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  и интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  сходятся одновременно при  $p > 1$ .

### 3. Абсолютная и условная сходимость интегралов.

Для собственного интеграла Римана имеет место свойство: из интегрируемости функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  следует интегрируемость модуля функции  $|f(x)|$  на  $[a, b]$ . Причём, обратное утверждение не верно: функция Дирихле  $f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное}, \\ -1, & x - \text{иррациональное} \end{cases}$  не интегрируема по Риману на любом отрезке, а функция  $|f(x)| = 1$  – интегрируема.

**Определение.** Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  называется абсолютно сходящимся, если сходится  $\int_a^b |f(x)|dx$ .

**Теорема 7.** Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

**Доказательство.** По критерию Коши, так как  $\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx$ .

Обратное утверждение не верно.

**Пример 6.** Интеграл Дирихле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится, но не абсолютно (см. примеры 3-4).

Такие интегралы называются условно сходящимися.

Возможны случаи несобственных интегралов с несколькими особенностями. Укажем, в каком смысле они понимаются. Пусть рассматривается  $\int_a^b f(x)dx$ ,

где  $a, b$  особые точки, а между ними обычных точек нет. Если оба несобственных интеграла  $\int_a^c f(x)dx$  и  $\int_c^b f(x)dx$  существуют (здесь  $c$  между  $a$  и  $b$ ), то полагают по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В противном случае говорят, что интеграл, стоящий слева, расходится.

**Пример 7.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ для } p > 0.$$

Сначала посмотрим, что происходит возле нуля? А происходит следующая эквивалентность:  $\frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$ . Здесь  $\frac{\sin x}{x^p} > 0$ . Таким образом, сравнением с эталонным интегралом получаем, что  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$  при  $p - 1 < 1$  ( $p < 2$ ) сходится,

причём абсолютно в силу не отрицательности самой функции, а при  $p - 1 \geq 1$  ( $p \geq 2$ ) интеграл расходится.

Теперь посмотрим поведение на бесконечности с учётом  $p < 2$ . При  $p > 0$

интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  сходится по признаку Дирихле.

А что происходит здесь с абсолютной сходимостью? При  $x \in (1, +\infty)$   $\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$ , поэтому по признаку сравнения для  $1 < p < 2$  сходимость абсолютная.

Итак, представив  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ , мы получили одновременную сходимость слагаемых при  $0 < p < 2$ . При  $p \geq 2$  первое слагаемое расходится, значит, расходится исходный интеграл. При этом установлено, что для  $1 < p < 2$  сходимость обоих слагаемых, а значит и исходного интеграла, абсолютная.

**Пример 8.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

Френеля  $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ .

Здесь особенность только 1 рода, так как в нуле подынтегральная функция равна нулю и непрерывна справа. Сделаем замену переменной  $t = x^2$ , тогда

$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$  и  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$  сходятся одновременно, и при сходимости одного из них

равны. Отметим, что второй интеграл сходится по признаку Дирихле. Абсолютной сходимости нет – это устанавливается критерием сходимости в терминах рядов (см. пример 4). Таким образом, ряд условно сходящийся.

**Пример 9.** Исследовать на сходимость  $\int_0^{+\infty} \cos(x^3 + x) dx$ .

Обозначим  $y = x^3 + x$ , тогда  $y' = 3x^2 + 1 > 0$ , следовательно,  $y$  возрастает.

Из монотонности функции  $y(x)$  следует существование обратной функции  $x = \varphi(y)$ , тоже монотонно возрастающей. По правилу дифференцирования обратной функции получаем  $\varphi'(y) = 1/y'(\varphi(y)) = 1/(3\varphi^2(y) + 1)$  и по формуле замены переменной  $\int_0^{+\infty} \cos(x^3 + x) dx = \int_0^{+\infty} \cos y \cdot \varphi'(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{3\varphi^2(y) + 1} dy$ .

Так как  $\varphi(y) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty$ , получившийся интеграл сходится по признаку Дирихле.

#### 4. Главное значение несобственного интеграла.

Несобственный интеграл 1 рода  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$ . То есть он

сходится, если при не зависимом друг от друга стремлении  $A \rightarrow -\infty$ ,  $B \rightarrow +\infty$  существует конечный предел.

Для несобственного интеграла 2 рода, если особая точка  $c$  (точка, в окрестности которой функция не ограничена) находится внутри промежутка  $[a, b]$  и функция  $f(x)$  собственно интегрируема по каждому множеству  $[a, c - \alpha] \cup [c + \beta, b]$ , то несобственным интегралом 2 рода от  $f$  по  $[a, b]$  называют

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{c+\beta}^b f(x) dx.$$

Если указанные пределы существуют конечные, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

В некоторых случаях, в частности при исследовании сплошных сред, оказывается целесообразным отдельным расходящимся интегралам приписывать в некотором условном смысле числовое значение. Это можно сделать различными способами. Коши предложил делать это следующим образом.

Пусть интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  имеет единственную особенность внутри интер-

вала интегрирования в точке  $x = c$ . Тогда эту особенность симметрично вырезают, после чего переходят к пределу, то есть полагают

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[ \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right] = v.p. \int_a^b f(x) dx.$$

Такой предел может существовать и в том случае, если исходный интеграл в обычном смысле расходится. Рассмотренный предел называется главным значением несобственного интеграла и обозначается *v.p.* (от английского *value principal*, главное значение) перед знаком интеграла. Подобным образом главным значением интеграла, взятого по всей числовой оси, называется предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx, \text{ то есть предел при симметричном движении в}$$

бесконечности.

Интегралы расходящиеся, но имеющие главное значение часто называются сингулярными, в отличие от собственных или сходящихся несобственных интегралов, которые называют регулярными.

**Пример 10.** Интеграл  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$  расходится, так как первообразная функция, то

есть  $\ln|x|$ , имеет бесконечный разрыв на интервале интегрирования при  $x=0$ . В то же время главное значение

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^2 \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon] = \ln 2 \end{aligned}$$

существует, так как опасные слагаемые  $\pm \ln \varepsilon$  взаимно уничтожаются за счет симметрии до перехода к пределу.

**Пример 11.**  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_{-N}^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \sin N$ . Главное значение

рассмотренного несобственного расходящегося интеграла не существует.

**Пример 12.**  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_{-N}^N = 0$ . Главное значение существует, хотя сам интеграл расходится и потому является сингулярным.

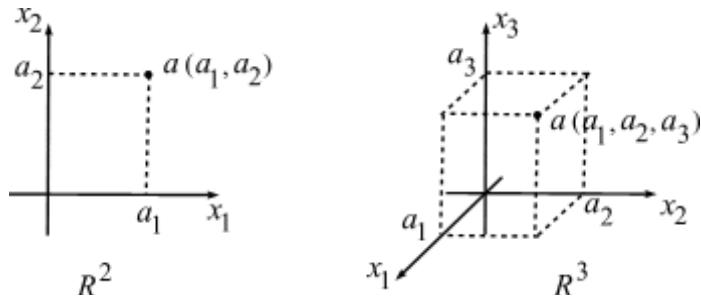
## Функции многих переменных

### §1. Пространство $R^n$

#### 1. Множество $R^n$ , евклидова метрика.

**Определение 1.**  $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R\}$  – множество упорядоченных наборов из  $n$  действительных чисел.

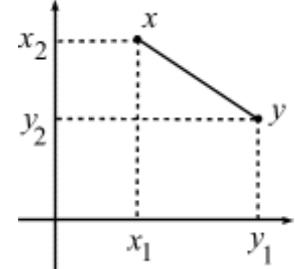
**Пример.**  $R^1, R^2, R^3$  – имеют хорошую геометрическую иллюстрацию. Координатная прямая, плоскость и координатное пространство:



**Определение 2.** Пусть  $x, y \in R^n$ . Величина

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

называется евклидовым расстоянием (евклидовой метрикой) между элементами  $x$  и  $y$ .



**Определение 3.** Множество  $R^n$  наделённое евклидовой метрикой  $\rho(x, y)$  называется  $n$ -мерным евклидовым пространством.

**Теорема 1.**  $\rho(x, y)$ , как функция двух переменных, обладает следующими свойствами:

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ , при этом  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (отделимость);
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (симметричность);
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (неравенство треугольника).

**Доказательство.** Свойства 1) и 2) вытекают из определения. Для доказательства свойства 3) нам понадобится следующее неравенство.

**Неравенство Коши-Буняковского (НКБ):**

$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$ , при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда найдется скаляр  $\lambda$  такой, что  $x = \lambda y$ , то есть  $x_1 = \lambda y_1, x_2 = \lambda y_2, \dots, x_n = \lambda y_n$ .

Для доказательства неравенства рассмотрим квадратный трёхчлен

$P(t) = (x_1 - ty_1)^2 + \dots + (x_n - ty_n)^2 = A t^2 - 2B t + C$ , где  $A = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ ,  $B = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ ,  $C = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ .

Если  $A = 0$ , то  $y = \mathbf{0}$ , то есть  $y = (0, 0, \dots, 0)$  и неравенство выполняется.

При  $A \neq 0$ , поскольку  $P(t) \geq 0$ , его дискриминант  $D_1 = B^2 - AC \leq 0$ , то есть  $B^2 \leq AC$  и НКБ выполняется. При этом, если  $D_1 = 0$ , то  $P(t)$  имеет корень, который назовём  $t = \lambda$ . Тогда  $(x_1 - \lambda y_1)^2 + \dots + (x_n - \lambda y_n)^2 = 0$  и  $x = \lambda y$ .

Вернёмся к доказательству свойства 3). Рассмотрим

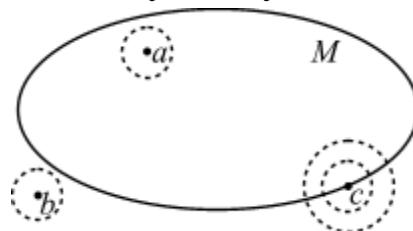
$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) &= ((x_1 - z_1) + (z_1 - y_1))^2 + \dots + ((x_n - z_n) + (z_n - y_n))^2 = \\ &= \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2((x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \dots + (x_n - z_n)(z_n - y_n)) \leq \text{по НКБ} \\ &\leq \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2\rho(x, z)\rho(z, y) = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2. \text{ чтд.} \end{aligned}$$

## 2. Топология $R^n$ .

Множество  $B(a, r) = \{x \in R^n : \rho(x, a) < r\}$  называется *открытым шаром* с центром в точке  $a$  радиуса  $r > 0$ .

Пусть множество  $M \subset R^n$ .

- $a$  – *внутренняя* точка  $M$ , если существует  $r > 0$  такое, что  $B(a, r) \subset M$ .
- $a$  – *границчная* точка  $M$ , если для любого  $r > 0$  в  $B(a, r)$  есть точки из  $M$ , и не принадлежащие множеству  $M$ .
- $a$  – *внешняя* точка  $M$ , если существует  $r > 0$  такое, что  $B(a, r) \cap M = \emptyset$ .



Здесь  $a$  – внутренняя,  $b$  – внешняя,  $c$  – границчная точки множества  $M$ .

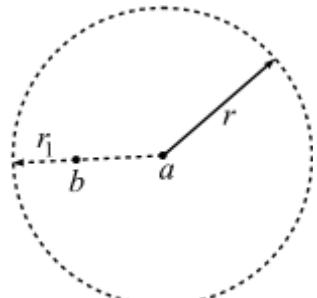
**Определение 4.** Множество  $M$  называется *открытым*, если для любого  $a \in M$  существует  $r > 0$  такое, что  $B(a, r) \subset M$ , то есть любая его точка – внутренняя.

**Определение 5.** Множество  $F$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $R^n \setminus F$  – открытое множество.

**Утверждение 1.** Открытый шар  $B(a, r)$  – открытое множество.

**Доказательство.** Пусть  $b \in B(a, r)$  – произвольная точка шара, ясно,  $\rho(b, a) < r$ . Определим  $r_1 = r - \rho(b, a)$ . Теперь заметим, что  $B(b, r_1) \subset B(a, r)$ . Пусть  $c \in B(b, r_1)$  – произвольная точка. Заметим, что  $\rho(c, a) \leq \rho(c, b) + \rho(b, a) < r_1 + \rho(b, a) = r$ , это означает, что  $c \in B(a, r)$ .

*Замечание.* Язык геометрии чрезвычайно удобен в



теории метрических пространств. Рисунок справа показывал, как надо решать поставленную задачу. Вместе с тем, доказательство носит самостоятельный характер и не опирается на него.

**Утверждение 2.** Множество  $\bar{B}(a, r) = \{x \in R^n: \rho(x, a) \leq r\}$  – замкнутое множество.

**Доказательство.** Необходимо заметить, что дополнение шара  $\bar{B}(a, r)$ , а им будет множество  $M = \{x \in R^n: \rho(x, a) > r\}$ , является открытым. Выполните его самостоятельно.

### Сходящиеся последовательности в $R^n$ .

**Определение 6.** Пусть точки  $x_m \in R^n$  ( $m = 1, 2, \dots$ ),  $a \in R^n$ , то есть  $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Последовательность точек  $x_m$  называется *сходящейся к точке  $a$*  ( $x_m \rightarrow a$ ) при  $m \rightarrow \infty$ , если  $\rho(x_m, a) \rightarrow 0$ .

В терминах  $\varepsilon$ - $N$ , как обычно:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ : при  $m \geq N$  выполняется  $\rho(x_m, a) < \varepsilon$ .

Открытый шар  $B(a, \varepsilon) = \{x \in R^n: \rho(x, a) < \varepsilon\}$  с центром в точке  $a$  радиуса  $\varepsilon > 0$  называется  *$\varepsilon$ -окрестностью* точки  $a$ .

**Утверждение 3.** Последовательность  $x_m \rightarrow a$  при  $m \rightarrow \infty \Leftrightarrow$  имеет место

покоординатная сходимость 
$$\begin{cases} x_1^{(m)} \rightarrow a_1 \\ x_2^{(m)} \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n^{(m)} \rightarrow a_n \end{cases} \text{при } m \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  Во-первых, заметим, что  $x_1^{(m)} \rightarrow a_1$  при  $m \rightarrow \infty$ . Поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x_m, a) = \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + (x_2^{(m)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2} \geq \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + 0} = |x_1^{(m)} - a_1|,$$

то из  $\rho(x_m, a) \rightarrow 0$ , следует  $x_1^{(m)} \rightarrow a_1$ . Аналогично, для остальных координат.

$\Leftarrow \rho^2(x_m, a) = (x_1^{(m)} - a_1)^2 + (x_2^{(m)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2 \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , поскольку каждое слагаемое стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$  в силу покоординатной сходимости.

**Утверждение 4.** (Характеризация замкнутых и открытых множеств в терминах последовательностей).

- 1).  $F$  замкнуто  $\Leftrightarrow$  из того, что  $x_m \in F$  и  $x_m \rightarrow x$  следует, что  $x \in F$ .
- 2).  $U$  открыто  $\Leftrightarrow$  из того, что  $x \in U$  и  $x_m \rightarrow x$  следует, что существует номер  $N$  такой, что при  $m \geq N$   $x_m \in U$ .

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  От противного, предположим  $x \notin F$ , тогда дополнение  $F$  – открытое множество, значит, существует шар  $B(x, \varepsilon)$ , который не пересекается с  $F$ . С другой стороны,  $x_m \rightarrow x$ , отсюда следует, что с некоторого номера  $x_m \in B(x, \varepsilon)$ . Таким образом, получили, что с одной стороны любое  $x_m \in F$ , с другой стороны при некотором индексе  $m$  имеем  $x_m \notin F$ .

$\Leftarrow$  Обратно. Допустим  $F$  обладает указанным в условии свойством, но не замкнуто. Тогда его дополнение не является открытым, что, в свою очередь, означает, что не все его точки внутренние. Выберем эту точку, она  $x \notin F$ , и при этом любой шар  $B(x, r)$  имеет непустое пересечение с  $F$ . Для таких шаров выберем  $r = 1/m$  и  $x_m \in B(x, 1/m) \cap F$ . Тогда получаем последовательность  $x_m \in F$  и  $x_m \rightarrow x$  и  $x \notin F$ . Противоречие.

2) Теперь это свойство можно доказать двумя способами. Дать самостоятельное доказательство, следуя идеям доказательства 1). Или переходя к дополнениям воспользоваться доказанным свойством 1).

## §2. Компакты в $R^n$

**Определение 1.** Множество  $K \subset R^n$  называется компактом, если из любого покрытия множества  $K$  открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если  $K \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , где  $U_{\alpha}$  – открытые множества, то можно выделить конечный набор индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}.$$

**Пример.** В пространстве  $R^1$  отрезок  $[a, b]$  – компакт.

Схема доказательства: 1) от противного; 2) при делении отрезка пополам выделяется та часть, которая не имеет конечного подпокрытия интервалами; 3) эта половинка снова делится пополам и опять выделяется половинка не имеющая конечного подпокрытия; и так далее.

Тем самым создаётся последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. По теореме о вложенных отрезках их пересечение состоит из единственной точки  $c$ , при этом она является пределом числовых последовательностей левых  $a_m$  и правых  $b_m$  концов вложенных отрезков.

Для построенной точки  $c$  можно выделить из данного покрытия одно открытое множество  $U$ , которому она принадлежит. Далее, при некотором  $\varepsilon > 0$  интервал  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  содержитя во множестве  $U$  и, поскольку  $a_m \rightarrow c$  и  $b_m \rightarrow c$ , начиная с некоторого номера все  $[a_m, b_m]$  попадают в  $U$ . Иными словами построенные отрезки покрылись одним множеством. Противоречие.

**Теорема 1.** Параллелепипед  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  – является компактом в  $R^n$ .

**Доказательство.** Поведём по схеме примера. От противного. Разобьём каждый координатный отрезок  $[a_k, b_k]$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ , на два:  $\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right]$  и  $\left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$ . Полученные отрезки дают  $2^n$  параллелепипедов в  $R^n$ , объединение которых составляет весь  $\Pi$ .

Пусть  $\{U_\alpha\}$  – произвольное покрытие  $\Pi$  открытыми множествами, обозначим  $\Pi_1 = [a^1_1, b^1_1] \times [a^1_2, b^1_2] \times \dots \times [a^1_n, b^1_n]$  тот из  $2^n$  параллелепипедов, который не имеет конечного подпокрытия (в силу нашего предположения). По его поводу повторим рассуждения, которые только что произвели относительно  $\Pi$ . И так далее.

Получим последовательность, вложенных друг в друга, параллелепипедов:  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ . Заметим, что выполняются свойства:

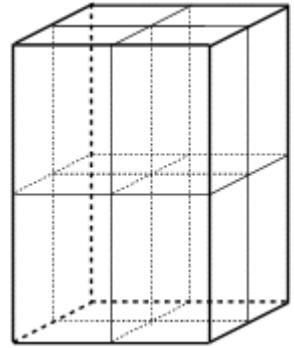
1) для каждой координаты  $k$  отрезки вложенные  $\left[a^{(m)}_k, b^{(m)}_k\right] \subset \left[a^{(m-1)}_k, b^{(m-1)}_k\right]$ ;

2) длины рёбер этих параллелепипедов по каждой координате стремятся к нулю:  $b^{(m)}_k - a^{(m)}_k = \frac{b^{(m-1)}_k - a^{(m-1)}_k}{2} = \frac{b_k - a_k}{2^m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для каждого  $k$  по теореме о вложенных отрезках существует единственное число  $c_k \in \bigcap_m \left[a^{(m)}_k, b^{(m)}_k\right]$ . Следовательно, точка  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \Pi_m$  для всех  $m$ . Поскольку  $c \in \Pi$ , найдется  $U_{\alpha_0}$  из покрытия  $\Pi$ , которому принадлежит  $c$ . Кроме того, для любого  $k$  имеет место сходимость  $a^{(m)}_k \rightarrow c_k$  и  $b^{(m)}_k \rightarrow c_k$  (покоординатная сходимость) и  $a_m = (a^{(m)}_1, a^{(m)}_2, \dots, a^{(m)}_n) \rightarrow c$ ,  $b_m = (b^{(m)}_1, b^{(m)}_2, \dots, b^{(m)}_n) \rightarrow c$ . Множество – открытое, значит, найдется шар с центром с такой, что  $B(c, r) \subset U_{\alpha_0}$  и с некоторого номера  $a_m$  и  $b_m$  лежат в шаре, как и  $\Pi_m$ . Тем самым,  $\Pi_m$  получит покрытие из одного множества  $U_{\alpha_0}$ . Противоречие.

**Утверждение 1.** Пусть  $K$  – компактное множество,  $F \subset K$ ,  $F$  – замкнутое множество. Тогда  $F$  – компакт.

**Доказательство.** Пусть  $\{U_\alpha\}$  – произвольное покрытие  $F$  открытыми множествами, добавим к этому покрытию открытое множество  $R^n \setminus F$ . Новый набор открытых множеств покрывает всё  $R^n$  и компакт  $K$ . Выберем конечное покрытие  $K$ , оно является конечным покрытием  $F$ , а если теперь отбросить от-



крытое множество  $R^n \setminus F$ , то оставшиеся открытые множества составляют подпокрытие из  $\{U_\alpha\}$ , конечное и покрывающее  $F$ .

**Определение 2.** Множество  $K \subset R^n$  называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

**Теорема 2. (Критерий компактности** множества в  $R^n$ ) Множество  $K$  – компакт в  $R^n$  тогда и только тогда, когда  $K$  – замкнутое и ограниченное.

**Доказательство.** Пусть  $K$  – компакт в  $R^n$ .

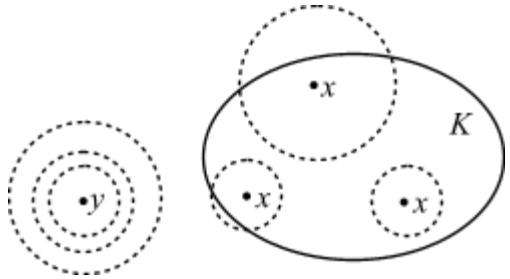
Заметим, что  $R^n \setminus K$  – открытое. Рассмотрим некоторую  $y \in R^n \setminus K$ . Поскольку если  $x \in K$ , получаем  $x \neq y$  и найдутся  $\varepsilon_x > 0$  и  $r_x > 0$  такие, что  $B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, r_x) = \emptyset$ . Рассмотрим покрытие множества  $K$  только что полученными  $B(x, \varepsilon_x)$  открытыми шариками для всех его точек:  $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x) \supset K$ . Поскольку  $K$  компакт  $\bigcup_{k=1}^m B(x_k, \varepsilon_{x_k}) \supset K$ . Теперь выберем минимальное из  $r_{x_k}$ :  $r = \min_{1 \leq k \leq m} r_{x_k}$ , тогда  $B(y, r) \cap B(x_k, \varepsilon_{x_k}) = \emptyset$  значит,  $B(y, r) \cap K = \emptyset$  и  $y$  – внутренняя точка дополнения,  $K$  – замкнутое.

**Ограничность.** Рассмотрим последовательность шаров с центром в  $\mathbf{0}$ , радиуса  $p$  – натуральное число. Ясно  $K \subset R^n = \bigcup_{p=1}^{\infty} B(\mathbf{0}, p)$ , поскольку  $K$  компакт, существует натуральное число  $s$ , такое, что  $K \subset \bigcup_{p=1}^s B(\mathbf{0}, p) = B(\mathbf{0}, s)$ .

Обратно. Так как  $K$  – ограниченное, то существует параллелепипед  $\Pi \supset K$ . Параллелепипед компактен (см. теорему 1), а множество  $K$  – замкнутое, по утверждению 1 оно компактно. Теорема доказана.

**Теорема 3. (Критерий компактности** множества в  $R^n$  в терминах последовательностей).  $K$  – компакт в  $R^n \Leftrightarrow$  из любой последовательности точек  $x_m \in K$  можно выделить подпоследовательность  $x_{m_k}$ , которая сходится к элементу множества  $K$ , то есть  $x_{m_k} \rightarrow x \in K$ .

Доказательство следует из соображений покоординатной сходимости и из известной леммы Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.



## Функции многих переменных (лекция 2)

### §3. Предел функции многих переменных

#### 1. Отображения, координатные функции, предел.

Будем говорить, что задана функция  $f: R^n \rightarrow R$ , если каждой точке  $x$  некоторого множества  $M \subset R^n$  ставится в соответствие некоторое число  $y$ . Поскольку  $x \in R^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  такая функция записывается как  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или коротко  $y = f(x)$ . Так как аргумент функции имеет несколько координат, её называют **функцией многих (нескольких) переменных**.

**Пример 1.** Функция  $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$  определена на  $n$ -мерном шаре радиуса 1 с центром в точке  $\mathbf{0}(0, 0, \dots, 0)$ . Множеством её значений является отрезок  $[0, 1]$ .

Будем также рассматривать отображения  $f: R^n \rightarrow R^m$ .

Здесь запись  $y = f(x)$  будет означать  $x \in R^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; в свою очередь  $y = f(x)$  означает  $y \in R^m$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

$$\text{Таким образом } y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \text{ и } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Функции  $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называются **координатными функциями** отображения  $f: R^n \rightarrow R^m$ . Довольно часто отображения из  $R^n$  в  $R^m$  называют **векторно-значными** функциями или просто функциями, действующими из  $R^n$  в  $R^m$ .

**Замечание** (о координатных функциях сложной функции).

Пусть имеются функции  $g: R^k \rightarrow R^n$  и  $f: R^n \rightarrow R^m$ , рассмотрим поподробнее сложную функцию  $f$  от  $g$ , которая действует из  $R^k$  в  $R^m$ ,  $x = g(t)$ ,  $y = f(x)$ ,  $y = f(g(t))$ .

$$x = g(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = g_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases}, \quad y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases},$$

$$y = f(g(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \\ y_2 = f_2(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \\ \dots \\ y_m = f_m(g_1(t_1, t_2, \dots, t_k), g_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, t_2, \dots, t_k)) \end{cases}.$$

**Определение 1. (Предела функции многих переменных в точке)**

Пусть  $a \in R^n$ ,  $A \in R^m$ .  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  означает:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ : при  $0 < \rho(x, a) < \delta$  выполняется  $\rho(f(x), A) < \varepsilon$  (по Коши).

**Замечание.** Здесь  $\rho(x, a)$  и  $\rho(f(x), A)$  – расстояния в пространствах разной размерности ( $R^n$  и  $R^m$ ).

Так же как и для функций одной переменной формулируется понятие предела по Гейне и имеет место

**Теорема 1.** (Эквивалентность определений по Коши и по Гейне).

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  по Коши  $\Leftrightarrow \forall x_k: x_k \neq a$  из  $x_k \rightarrow a$  следует  $f(x_k) \rightarrow A$  (по Гейне).

Поскольку сходимость в  $R^n$  (и в  $R^m$ ) равносильна покоординатной сходимости, справедлива

$$\text{Теорема 2. Пусть } A = (A_1, A_2, \dots, A_m). \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1 \\ \dots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_m(x) = A_m \end{cases}$$

Таким образом, исследование на существование и значение предела отображения сводится к исследованию координатных функций, то есть функций, действующих из  $R^n$  в  $R$ .

Это означает, что если некоторое свойство относительно пределов справедливо для функций  $f: R^n \rightarrow R$ , то оно естественным образом переносится и на отображения  $f: R^n \rightarrow R^m$ .

Определимся ещё с тем, что подразумевается под понятием предела функции  $f: R^n \rightarrow R$  при стремлении её аргумента  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в бесконечность.

**Определение 2.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  означает, что если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ : при  $\rho(0, x) > \delta$  выполняется  $|f(x) - A| = \rho(f(x), A) < \varepsilon$ .

Для предела функции многих переменных выполняются свойства, такие же, как и для функций одной переменной: арифметические, локальной ограниченности, закон локального сохранения знака. Их доказательства проводятся

точно так же, как и для функций одной переменной. Так, например, для предела в точке  $a$  следует лишь в рассуждениях заменить разность  $|x - a|$  на  $\rho(x, a)$ .

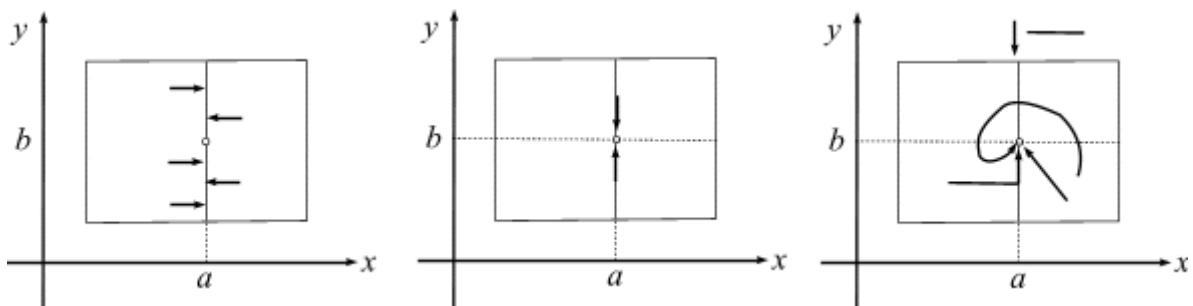
## 2. Повторные пределы.

Для функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нескольких переменных можно определить понятие предела по одной из переменных  $x_k$  при фиксированных значениях остальных переменных. В связи с этим возникает понятие повторного предела. Рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных.

**Определение 1.** Пусть функция  $f: R^2 \rightarrow R$ , то есть она имеет вид  $z = f(x, y)$  и задана в некоторой прямоугольной окрестности точки  $(a, b) \in R^2$ , за исключением быть может самой точки  $(a, b)$ . Тогда её предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  (I) называют

**двойным пределом.**

**Определение 2.** Если для каждого фиксированного  $y$  существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  и затем существует  $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$ , то говорим, что существует **первый повторный предел**. Обозначаем его для краткости (II<sub>1</sub>) – первый предельный переход по первой переменной. Аналогично определяется другой повторный предел  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ , обозначаем (II<sub>2</sub>).



На рисунке слева показано, что при вычислении предела  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = g(y)$  при фиксированном  $y$ , движение по  $x$  происходит исключительно в горизонтальном направлении.

На центральном рисунке показано движение по  $y$  при вычислении предела  $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$ .

На правом рисунке изображены произвольные траектории движения к точке  $(a, b)$ , по которым при вычислении двойного предела  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  должны получаться одинаковые результаты.

Возникает вопрос взаимосвязи между пределами I, II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>.

### Теорема (о двойном и повторных пределах).

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некотором прямоугольнике с центром в точке  $(a, b)$ , за исключением, быть может, самой точки  $(a, b)$ .

Тогда, если существует двойной предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  и для каждого  $y$  существует

$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  кроме, быть может,  $y = b$ , то существует повторный предел  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  и он равен двойному пределу.

**Доказательство.** Обозначим  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = g(y)$ . Пусть

$\varepsilon > 0$  произвольное, выберем  $\varepsilon_1$  такое, что  $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ . По определению предела функции (двойного) существует  $\delta > 0$  такое, что как только  $|x - a| < \delta$  и  $|y - b| < \delta$ , так выполняется  $|f(x, y) - A| < \varepsilon_1$ . Выполним в последнем неравенстве предельный переход по  $x \rightarrow a$  и получим  $|g(y) - A| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Тем самым установлено, что  $|g(y) - A| < \varepsilon$  как только  $|y - b| < \delta$ . Это означает, что существует  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A$

и  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ .

### Теорема (общий случай).

Пусть функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  многих переменных определена в некотором параллелепипеде с центром в точке  $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , за исключением может быть только самой точки  $a$ . Тогда, если существуют  $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

и  $\forall x_1 \lim_{\substack{x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то  $\exists \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \lim_{\substack{x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Приведём примеры взаимосвязей между пределами I, II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>.

**Пример 2.** У функции  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке  $(0, 0)$ , и они равны:

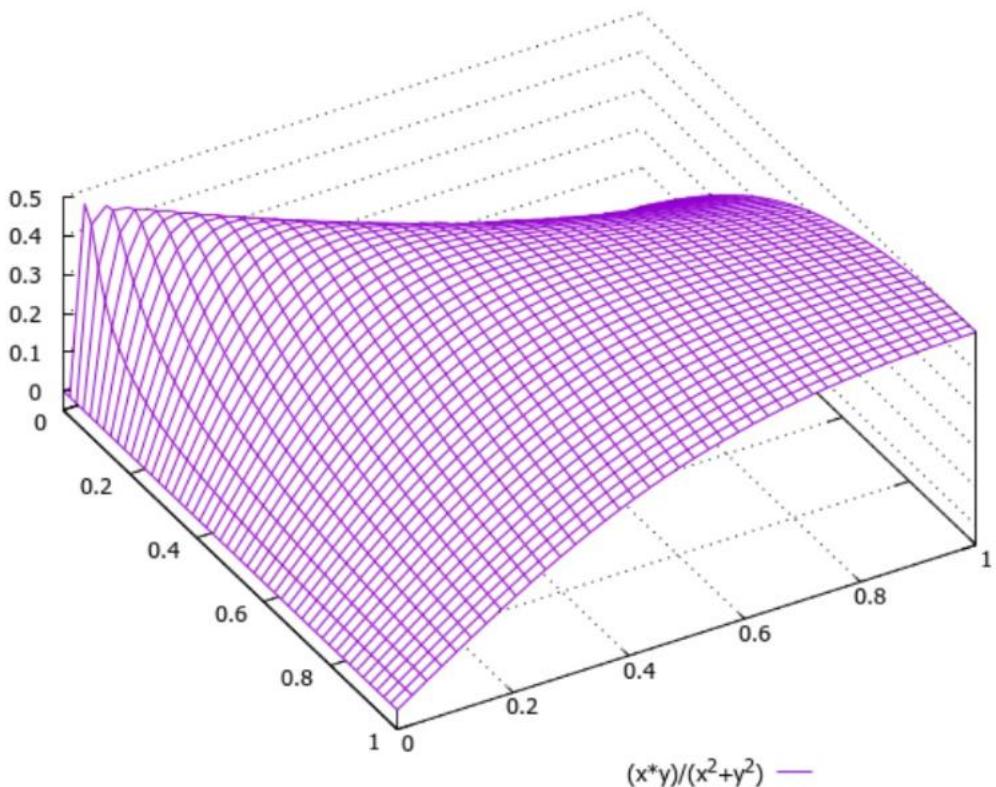
Во-первых,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0y}{0^2 + y^2} = 0$ , и  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ , ясно

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ . Во вторых, если  $x = y = t \rightarrow 0$  (двигаемся в точку  $(0, 0)$  по

прямой  $y = x$ ), то  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$ ; если же  $-x = y = t \rightarrow 0$  (двигаемся в

точку  $(0, 0)$  по прямой  $y = -x$ ), то  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2 + t^2} = -\frac{1}{2}$ . Значит, предела

не существует.

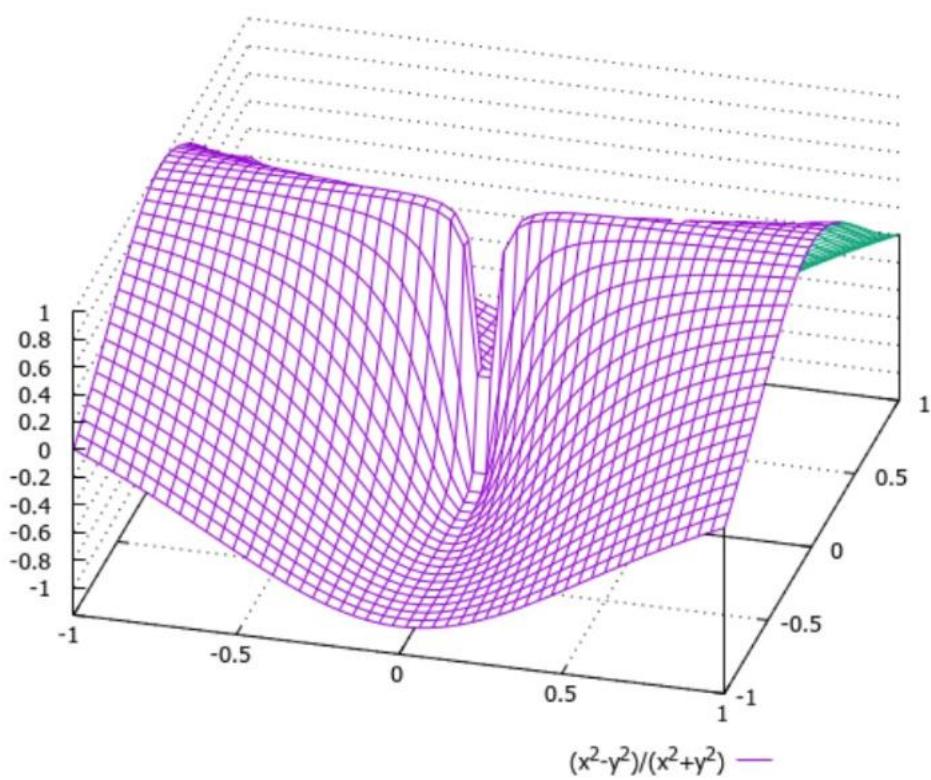


**Пример 3.** У функции  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке  $(0, 0)$ , но они не равны:

Во-первых,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1$ , и  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$ , ясно

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ . Следовательно, о пределе по совокупности переменных говорить не приходится, так как по двум разным направлениям подхода к точке  $(0, 0)$  получились разные ответы. Значит, единственного  $A$ , называемого пределом функции в точке, нет.



## §4. Непрерывные функции многих переменных

**Определение 1.** Отображение  $f: R^n \rightarrow R^m$  называется непрерывным в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Замечание 1.** Из определения предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{при } 0 < \rho(x, x_0) < \delta \text{ выполняется } \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

**Замечание 2.** Отметим, что в определении 1 точки  $x, a \in R^n$ ,  $f(x), f(a) \in R^m$ , то есть  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , кроме того  $f$  имеет  $m$  координатных

$$\text{функций } f_1(x), \dots, f_m(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a) \\ \dots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_m(x) = f_m(a) \end{cases}$$

**Замечание 3.** На языке шаров это означает:  $f[B(a, \delta)] \subset B(f(a), \varepsilon)$ .

**Теорема 1.** Расстояние  $\rho(x, y)$  является непрерывной функцией, действующей из  $R^n \times R^n$  в  $R$ .

**Доказательство.** Итак, надо доказать, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \rho(x, y) = \rho(a, b)$ .

Рассмотрим  $|\rho(x, y) - \rho(a, b)|$ . Из свойств расстояния следует:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) \Leftrightarrow \rho(x, y) - \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(b, y),$$

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) \Leftrightarrow \rho(a, b) - \rho(x, y) \leq \rho(a, x) + \rho(y, b),$$

то есть  $|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \leq \rho(a, x) + \rho(y, b)$ .

Поскольку и  $\rho(a, x) \rightarrow 0$ , и  $\rho(y, b) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , то и

$$|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \rightarrow 0.$$

## **Теорема 2. (Локальные свойства непрерывных функций).**

- 1.** Непрерывная в точке  $a$  функция  $f : R^n \rightarrow R$  локально ограничена, то есть существует  $\delta > 0$  и число  $C$  такое, что  $|f(x)| < C$  для любых  $x \in B(a, \delta)$ .
- 2.** Суперпозиция непрерывных функций – непрерывная функция.
- 3. Закон сохранения знака.** Если  $f : R^n \rightarrow R$ ,  $f(a) > 0$  и  $f$  непрерывна в точке  $a$ , то найдется открытый шар  $B(a, r)$  с центром в точке  $a$  такой, что  $f(x) > 0$  для любых  $x \in B(a, r)$ .
- 4. Арифметические свойства.** Если  $f, g : R^n \rightarrow R$  непрерывны в точке  $a$ , то функции  $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$  ( $g(a) \neq 0$ ) непрерывны в точке  $a$ .

По поводу доказательства повторимся о том, что их доказательства проводятся точно так же, как и для функций одной переменной. Следует лишь в рассуждениях, проведённых в прошлом семестре, заменить разность  $|x - a|$  на  $\rho(x, a)$ .

## **Непрерывность функции многих переменных по одной из переменных**

Пусть имеется функция многих переменных  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Введём понятие частного приращения функции в точке  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – по первой переменной,

$f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – по второй переменной, ... и т.д.

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной по переменной  $x_k$  в точке  $x$ , если  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ .

Очевидно, что из непрерывности функции  $y = f(x)$  в точке следует её непрерывность в этой точке по каждой из переменных в отдельности. В обратную сторону, вообще говоря, не верно.

**Пример 2. (возвращается).** У функции  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$

Обе функции  $f(0, y)$  и  $f(x, 0)$  непрерывны по  $x$  и  $y$  соответственно, поскольку они нулевые. Однако было замечено, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  не существует.

## §5. Глобальные свойства непрерывных функций

**Утверждение 1.** Пусть  $f: R^n \rightarrow R^m$ . Функция непрерывна в каждой точке  $R^n \Leftrightarrow$  прообраз открытого множества  $R^m$  есть открытое множество  $R^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $U$  открытое множество в пространстве  $R^m$ ,  $V$  – его прообраз:  $f^{-1}[U] = V$ . Возьмем произвольное  $a \in V$ , тогда  $b = f(a) \in U$ . Поскольку  $U$  открытое и  $b \in U$  найдется  $r > 0$  такое, что  $B(b, r) \subset U$ . Из определения непрерывности найдется  $\delta > 0$  такое, что из  $x \in B(a, \delta)$  следует  $f(x) \in B(f(a), r)$ . Из последнего включения получаем  $x \in f^{-1}[B(b, r)] \subset f^{-1}[U] = V$ , то есть  $B(a, \delta) \subset V$ .  $V$  – открытое множество.

**Обратно.** Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольное. Шар  $B(f(a), \varepsilon)$  является открытым множеством, при этом  $a \in f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$ . По условию множество  $f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$  – открытое множество. Значит, существует  $\delta > 0$  такое, что  $B(a, \delta) \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$ . Из последнего включения получаем  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$  в частности, если  $\rho(x, a) < \delta$ , то  $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

**Теорема 1.** Образ компакта при непрерывном отображении есть компакт. То есть, если  $f: R^n \rightarrow R^m$  – непрерывное отображение и  $K \subset R^n$  является компактом, то множество  $f[K]$  – компактное множество в  $R^m$ .

**Доказательство 1.** Напомним определение компактного множества:  $K \subset R^n$  называется компактом, если из любого покрытия множества  $K$  открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если  $K \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , где  $U_{\alpha}$  – открытые множества, то можно выделить конеч-

ный набор индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ :  $K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}$ .

Пусть  $\{V_{\alpha}\}$  система открытых множеств, причем  $f[K] \subset \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$  (взяли открытое покрытие  $f[K]$ ). Перейдем к прообразам множеств и получим включения  $K \subset f^{-1}[f[K]] \subset f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right] \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}[V_{\alpha}]$ . В силу утверждения 1 все множества  $U_{\alpha} = f^{-1}[V_{\alpha}]$  – открытые множества. Поскольку  $K$  – компакт, то можно выделить конечный набор индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ :  $K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}$ . В свою очередь

отсюда следует включение  $f[K] \subset \bigcup_{i=1}^p f(U_{\alpha_i}) \subset \bigcup_{i=1}^p V_{\alpha_i}$  и конечное покрытие  $f[K]$ .

**Доказательство 2.** Напомним критерий компактности множества в  $R^n$  в терминах последовательностей:  $K$  – компакт в  $R^n \Leftrightarrow$  из любой последовательности точек  $x_m \in K$  можно выделить подпоследовательность  $x_{m_k}$ , которая сходится к элементу множества  $K$ , то есть  $x_{m_k} \rightarrow x \in K$ .

Пусть  $y_m \in f[K]$  произвольная последовательность, этой последовательности соответствует последовательность  $x_m$ , где  $f(x_m) = y_m$ . Поскольку  $x_m \in K$  можно выделить подпоследовательность  $x_{m_k}$ , которая сходится к элементу множества  $K$ , то есть  $x_{m_k} \rightarrow x \in K$ . Отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ , поэтому  $y_{m_k} = f(x_{m_k}) \rightarrow f(x) = y$ . Тем самым построена подпоследовательность  $y_{m_k} \rightarrow y$ , что означает компактность  $f[K]$

**Теорема 2.** Пусть  $f: R^n \rightarrow R$  непрерывная на компакте  $K$ .

Тогда 1) Функция  $f$  ограничена на  $K$  (первая теорема Вейерштрасса);

2) Существуют точки  $x^*, x_* \in K$  такие, что  $f(x^*) = \sup_{x \in K} f(x)$  и  $f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x)$  (вторая теорема Вейерштрасса).

**Доказательство.** 1) При непрерывном отображении компакт переходит в компакт, кроме того компакт – ограниченное множество.

2) Поскольку множество значений функции ограничено, существует  $\sup_{x \in K} f(x) = M$ . По определению точной верхней грани, для любого натурального  $m$  существует  $x_m \in K$  такой, что  $f(x_m) > M - \frac{1}{m}$ . Поскольку  $K$  компакт, из по-

следовательности точек  $x_m \in K$  можно выделить подпоследовательность  $x_{m_k}$ , которая сходится к элементу множества  $K$ , то есть  $x_{m_k} \rightarrow x^* \in K$ . Поскольку  $f$  непрерывна на компакте, выполнив предельный переход в двойном неравенстве  $M \geq f(x_{m_k}) > M - \frac{1}{m_k}$ , получим  $M \geq f(x_*) \geq M$  и  $f(x^*) = \sup_{x \in K} f(x)$ . Существование  $x_* \in K$  можно заметить, рассматривая функцию  $-f(x)$ .

**Теорема 3.** Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на нём (теорема Кантора).

**Доказательство 1.** Напомним определение равномерной непрерывности. Отображение  $f: R^n \rightarrow R^m$  равномерно непрерывное на множестве  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что из  $x', x'' \in E$  и  $\rho(x', x'') < \delta$  следует  $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ .

Рассмотрим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из непрерывности в каждой точке  $x \in K$  найдутся  $\delta_x$  такие, что из  $\rho(y, x) < \delta_x \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ . Рассмотрим систему открытых шаров  $\{B(x, \delta_x/2)\}_{(x \in K)}$ . Объединение этих шаров покрывает компакт  $K$  (даже только своими центрами). Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:  $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \delta_{x_i}/2)$ . Определим  $\delta = \min_{1 \leq i \leq p} \{\delta_{x_i}/2\}$ . Заметим, что  $\delta$  – искомое. Пусть  $x', x'' \in K$ ,  $\rho(x', x'') < \delta$ . Точка  $x'$  попадает в какой-нибудь шар из конечного подпокрытия  $x' \in B(x_{\bar{i}}, \delta_{x_{\bar{i}}}/2)$ . Отсюда  $\rho(f(x'), f(x_{\bar{i}})) < \varepsilon/2$ . Далее,  $\rho(x'', x_{\bar{i}}) \leq \rho(x'', x') + \rho(x', x_{\bar{i}}) < \delta + \delta_{x_{\bar{i}}}/2 \leq 2 \cdot \delta_{x_{\bar{i}}}/2 = \delta_{x_{\bar{i}}}$ . Значит,  $\rho(f(x''), f(x_{\bar{i}})) < \varepsilon/2$  и  $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ .

**Доказательство 2.** Можно провести от противного, выделив последовательности  $x'_m$  и  $x''_m$ , для которых  $\rho(x'_m, x''_m) \rightarrow 0$  и  $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \geq \varepsilon > 0$ . Затем из соображений компактности выделить  $x'_{m_k} \rightarrow x \in K$ , одновременно получим  $x''_{m_k} \rightarrow x \in K$  и противоречие в неравенстве  $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \geq \varepsilon > 0$  для подпоследовательности с индексами  $m_k$ .

**Определение.** Множество  $E$  называется линейно связным, если любых точек  $a, b \in E$  существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки  $\Gamma_{a,b} \subset E$ .

Напомним непрерывная кривая  $\Gamma_{a,b}$  в  $R^n$  задается системой 
$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

$t \in [0, T]$ , где  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  – непрерывные на отрезке  $[0, T]$  функции, при этом  $a = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0))$  и  $b = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T))$ .

**Теорема 4.** Пусть  $E \subset R^n$  – линейное связное,  $f: E \rightarrow R$  – непрерывная,  $f(a) < 0, f(b) > 0$ . Тогда существует  $c \in E$  такое, что  $f(c) = 0$ .

**Доказательство.** Функция  $\Phi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$  и принимает значения разных знаков на концах отрезка. Значит, найдется точка  $\bar{t} \in [0, T]$ , в которой  $\Phi(\bar{t}) = 0$ .

Ясно, что  $c = (\varphi_1(\bar{t}), \varphi_2(\bar{t}), \dots, \varphi_n(\bar{t}))$  – искомая точка.

## §6 Линейная структура $R^n$

### 1. $R^n$ как векторное (линейное) пространство.

Пусть  $x, y \in R^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\lambda \in R$ .

Определим операции  $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$ .

Получим структуру линейного пространства  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  – его нуль,  $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  противоположный к  $x$  вектор, размерность пространства  $n$ , есть  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$  – стандартный базис  $\{e_k\}$ , здесь вектор  $e_k$  имеет 1 на  $k$ -том месте, остальные нули.

### 2. Евклидова норма, скалярное произведение.

**Опр.**  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$  евклидова **норма** в  $R^n$ .

**Свойства нормы.** 1).  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ . (неотрицательность и отделимость). 2).  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (однородность нормы) 3). Для любых  $x$  и  $y$  выполняется неравенство  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ , из которого следует, что если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  (непрерывность нормы относительно себя).

**Опр.** Функция  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  называется **скалярным произведением** векторов. Ясно,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  и выполняется неравенство Коши-Буняковского  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ .

### 3. Линейные отображения конечномерных пространств.

**Опр.** Отображение  $L: R^n \rightarrow R^m$  называется **линейным**, если обладает свойствами: 1)  $L(x + y) = L(x) + L(y)$  для любых  $x, y$  из  $R^n$  (свойство аддитивности); 2)  $L(\lambda x) = \lambda L(x)$  для любых  $x \in R^n$  и любых  $\lambda \in R$  (свойство однородности).

### Матричное представление линейных отображений.

**Пример 1.**  $y = 2x + 3$  не является линейным отображением из  $R$  в  $R$ .

$L: R \rightarrow R$  является линейным отображением из  $R$  в  $R \Leftrightarrow L(x) = k \cdot x$ , где  $k$  – фиксированное число.

Далее, пусть теперь  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное;  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  и  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$  – стандартные базисы в  $R^n$  и  $R^m$ . Во-первых, для произвольного  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  
 $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ . Во-вторых, поскольку  $L(e_j) \in R^m$  имеем представление

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i. \text{ В итоге получаем}$$

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \bar{e}_i.$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Отметим, что  $L(x) =$

### *Свойства линейных отображений.*

**1.** Пусть  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное. Тогда существует  $C > 0$  такое, что  $\|L(x)\| \leq C \|x\|$  для любого  $x$ .

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(e_j)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|L(e_j)\|^2} = C \|x\|.$$

**2.** Пусть  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство.  $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq C \|x_k - x\|$ .

**3.** Любое линейное отображение  $L: R^n \rightarrow R$  имеет вид:

$L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – некоторые числа.

**4.** Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

**5.** Отображение  $L: R^n \rightarrow R^m$  линейное  $\Leftrightarrow$  каждая координатная функция  $L_i: R^n \rightarrow R$  является линейным отображением.

## §6 Линейная структура $R^n$

### 1. $R^n$ как векторное (линейное) пространство.

Пусть  $x, y \in R^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\lambda \in R$ .

Определим операции  $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$ .

Получим структуру линейного пространства  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  – его нуль,  $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  противоположный к  $x$  вектор, размерность пространства  $n$ , есть  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$  – стандартный базис  $\{e_k\}$ , здесь вектор  $e_k$  имеет 1 на  $k$ -том месте, остальные нули.

### 2. Евклидова норма, скалярное произведение.

**Опр.**  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$  евклидова **норма** в  $R^n$ .

**Свойства нормы.** 1).  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ . (неотрицательность и отделимость). 2).  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (однородность нормы) 3). Для любых  $x$  и  $y$  выполняется неравенство  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ , из которого следует, что если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  (непрерывность нормы относительно себя).

**Опр.** Функция  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  называется **скалярным произведением** векторов. Ясно,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  и выполняется неравенство Коши-Буняковского  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ .

### 3. Линейные отображения конечномерных пространств.

**Опр.** Отображение  $L: R^n \rightarrow R^m$  называется **линейным**, если обладает свойствами: 1)  $L(x + y) = L(x) + L(y)$  для любых  $x, y$  из  $R^n$  (свойство аддитивности); 2)  $L(\lambda x) = \lambda L(x)$  для любых  $x \in R^n$  и любых  $\lambda \in R$  (свойство однородности).

### Матричное представление линейных отображений.

**Пример 1.**  $y = 2x + 3$  не является линейным отображением из  $R$  в  $R$ .

$L: R^n \rightarrow R^m$  является линейным отображением из  $R^n$  в  $R^m \Leftrightarrow L(x) = k \cdot x$ , где  $k$  – фиксированное число.

Далее, пусть теперь  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное;  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  и  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$  – стандартные базисы в  $R^n$  и  $R^m$ . Во-первых, для произвольного  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ . Во-вторых, поскольку  $L(e_j) \in R^m$  имеем представление

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i. \text{ В итоге получаем}$$

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \bar{e}_i.$$

$$\text{Отметим, что } L(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

### ***Свойства линейных отображений.***

**1.** Пусть  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное. Тогда существует  $C > 0$  такое, что  $\|L(x)\| \leq C \|x\|$  для любого  $x$ .

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(e_j)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|L(e_j)\|^2} = C \|x\|.$$

**2.** Пусть  $L: R^n \rightarrow R^m$  – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство.  $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq C \|x_k - x\|$ .

**3.** Любое линейное отображение  $L: R^n \rightarrow R^m$  имеет вид:

$$L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n, \text{ где } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ – некоторые числа.}$$

**4.** Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

**5.** Отображение  $L: R^n \rightarrow R^m$  линейное  $\Leftrightarrow$  каждая координатная функция  $L_i: R^n \rightarrow R$  является линейным отображением.

## §7 Дифференцируемость функций многих переменных

**Опр.** Отображение  $f: R^n \rightarrow R^m$  называется *дифференцируемым* в точке  $x$ , если существует линейное отображение  $L_x: R^n \rightarrow R^m$  такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + o(\Delta x)$$

здесь  $o(\Delta x): R^n \rightarrow R^m$  – о-малое от  $\Delta x$  обладает свойством  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|o(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0$ ,

поэтому далее иногда будем применять запись  $o(\Delta x) = \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$ . Линейное отображение  $L_x$  называется *дифференциалом* отображения  $f$  в точке  $x$  и обозначаются  $df(x)$  будем также писать  $f'(x)(\Delta x)$  вместо  $L_x(\Delta x)$

**Замечания. 0.** Для функций  $f: R \rightarrow R$  линейное отображение  $L_x(\Delta x)$  имеет вид  $A \cdot \Delta x$ , где  $A$  некоторое число. (Чему оно равно?)

1. Другая форма записи  $f(x) - f(a) = L_x(x - a) + o(x - a)$ .

2. Отображения  $f, L_x, o$  действуют из  $R^n$  в  $R^m$ , то есть каждое из них имеет  $m$  координатных функций, поведение которых и определяет поведение самих отображений.

**Утверждение 0.** Дифференцируемое отображение в точке  $x$  является непрерывным в этой точке.

Доказательство. Во-первых,  $f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$ . Во-вторых, линейное отображение является непрерывным, значит, из  $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$  следует  $L_x(\Delta x) \rightarrow L_x(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Наконец,  $\|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ . Значит,  $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $g: R^n \rightarrow R^m$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_m$  – его координатные функции ( $R^n \rightarrow R$ ). Тогда отображение  $g$  является линейным  $\Leftrightarrow$  каждая функция многих переменных  $g_k: R^n \rightarrow R$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) является линейной.

Доказательство. Пусть  $u, v \in R^n$ . Тогда  $g(u) = \begin{pmatrix} g_1(u) \\ \dots \\ g_m(u) \end{pmatrix}$ ,  $g(v) = \begin{pmatrix} g_1(v) \\ \dots \\ g_m(v) \end{pmatrix}$ ,

$g(u + v) = \begin{pmatrix} g_1(u + v) \\ \dots \\ g_m(u + v) \end{pmatrix}$ . По правилу сложения векторов имеем равенство

$g(u) + g(v) = \begin{pmatrix} g_1(u) + g_1(v) \\ \dots \\ g_m(u) + g_m(v) \end{pmatrix}$ . Таким образом,  $g(u) + g(v) = g(u + v) \Leftrightarrow$  имеет

место покоординатное равенство  $g_k(u) + g_k(v) = g_k(u + v)$ ,  $\forall k$ . Аналогично  $g(\lambda u) = \lambda g(u) \Leftrightarrow$  имеет место покоординатное равенство  $g_k(\lambda u) = \lambda g_k(u)$ ,  $\forall k$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $h: R^n \rightarrow R^m$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_m$  – его координатные функции ( $R^n \rightarrow R$ ). Тогда отображение  $h$  есть  $o(\Delta x) \Leftrightarrow$  каждая функция многих переменных  $h_k: R^n \rightarrow R$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) является  $o(\Delta x)$ .

Доказательство.  $\Rightarrow$  Следует из неравенства  $|h_k(\Delta x)| \leq \|h(\Delta x)\|$ .  
 $\Leftarrow$  Следствие покоординатной сходимости.

**Теорема 1.** Пусть  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_m$  – его координатные функции ( $R^n \rightarrow R$ ). Тогда отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $x \Leftrightarrow$  каждая функция многих переменных  $f_k: R^n \rightarrow R$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) является дифференцируемой в точке  $x$ .

Доказательство. Во-первых, 
$$f(x + \Delta x) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x + \Delta x) - f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x + \Delta x) - f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Далее, дифференцируемость каждой координатной функции равносильна  

$$\begin{pmatrix} L_{1x}(\Delta x) + o_1(\Delta x) \\ \dots \\ L_{mx}(\Delta x) + o_m(\Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1x}(\Delta x) \\ \dots \\ L_{mx}(\Delta x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(\Delta x) \\ \dots \\ o_m(\Delta x) \end{pmatrix}$$
 в силу утверждений 1 и 2 получаем  
 $L_x(\Delta x) + o(\Delta x)$ .

**Замечание 1.** Необходимо исследовать дифференцируемость функций нескольких переменных.

**Замечание 2.** Любое линейное отображение  $L: R^n \rightarrow R$  имеет вид:  $L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – некоторые числа.

**Опр.** Функция многих переменных  $f: R^n \rightarrow R$  является *дифференцируемой* в точке  $x$ , если существуют некоторые числа  $A_1, A_2, \dots, A_n$  такие, что

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \\ &+ o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right). \end{aligned}$$

## §8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных

**Опр.** Функция многих переменных  $f: R^n \rightarrow R$  является *дифференцируемой* в точке  $x$ , если существуют некоторые числа  $A_1, A_2, \dots, A_n$  такие, что

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \\ + o(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}).$$

**Замечание 1.** (Шаг в прошлое) Для функции  $f: R \rightarrow R$  определение дифференцируемости требует существование числа  $A$  со свойством:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

затем замечали, что  $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$

**Опр.** Пусть  $f: R^n \rightarrow R$ . Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной функции* многих переменных  $f$  по переменной  $x_k$  в точке  $x$  и обозначается  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ .

По сути дела все переменные кроме одной фиксируются, а по оставшейся независимой переменной происходит дифференцирование.

Возникает вопрос взаимосвязи между дифференцируемостью в точке и существовании частных производных.

**Теорема 1.** Если функция многих переменных  $f: R^n \rightarrow R$  является дифференцируемой в точке  $x$ , то в этой точке существуют все частные производные. При этом числа  $A_k$  в определении дифференцируемости есть  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ .

Доказательство. Положим в определении дифференцируемости все приращения  $\Delta x_j = 0$  для  $j \neq k$ :

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + A_k \Delta x_k + o(\Delta x_k).$$

Отсюда  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k} = A_k$ .

Вообще говоря, из существования всех частных производных в точке не следует дифференцируемость в этой точке, что показывает следующий пример.

**Пример.** (Снова возвращается). У функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } xy = 0 \end{cases}$$

существуют обе частные производные на

всей плоскости, но функция не дифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

Действительно. Имеем  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$  и

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Ясно, что в точках, где  $x$  или  $y$  равно 0, также частные производные равны 0. Дифференцируемость в остальных точках плоскости следует из соответствующих теорем для функций одной переменной. Однако в точке  $(0, 0)$  отсутствует непрерывность, значит, нет и дифференцируемости.

При усилении требований на частные производные дифференцируемость функции многих переменных может возникнуть.

**Теорема 2.** Если все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$  непрерывны в

окрестности точки  $x_0$ , то функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ .

Доказательство. Проведем его для функции двух переменных. Итак,  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$  воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях ( $0 < \theta, \tau < 1$ )

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) \cdot \Delta y$$

Введем в рассмотрение  $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  и

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Во-первых,  $\alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  и

$$\beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0.$$

Во-вторых,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$  и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y).$$

В итоге имеем представление:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \right) + (\alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y).$$

Ясно, что

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$  – линейная функция двух переменных. Осталось

заметить, что  $|\alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  – о-малое.

## §8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных (продолжение)

Сделаем небольшой обзор пройденного раньше.

### **1. Матрица Якоби.**

Во-первых, отображение  $f: R^n \rightarrow R^m$  называется *дифференцируемым* в точке  $x$ , если существует линейное отображение  $L_x: R^n \rightarrow R^m$  такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + o(\Delta x).$$

Во-вторых, отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $x \Leftrightarrow$  каждая функция многих переменных  $f_i: R^n \rightarrow R$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) является дифференцируемой в точке  $x$ .

В-третьих, дифференцируемость функций  $f_i$  в точке  $x$  означает, что  $f_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_{i1}\Delta x_1 + A_{i2}\Delta x_2 + \dots + A_{in}\Delta x_n + o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right)$ , при этом было замечено, что  $A_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ .

Отсюда следует, что линейное отображение  $L_x: R^n \rightarrow R^m$  определяется

$$\text{матрицей } J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби* отображения  $f$ . В случае  $n = m$  определитель этой матрицы называется *определителем Якоби* или *якобианом*.

Иными словами, матрица Якоби является производной векторной функции по векторному аргументу.

## 2. Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных.

Во-первых, в  $R^3$  уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  задает плоскость, проходящую через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярную вектору  $(A, B, C)$  – нормаль к плоскости.

Во-вторых, функция  $f: R^2 \rightarrow R$  в записи  $z = f(x, y)$  задает в  $R^3$  некоторое множество  $\{(x, y, z): z = f(x, y)\}$  – поверхность в  $R^3$  (график функции двух переменных).

**Опр.** Плоскость  $\pi$  назовем касательной к поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$  этой поверхности, если  $M_0 \in \pi$  и если  $M$  лежит на поверхности и  $M \rightarrow M_0$ , то угол между секущей  $M_0M$  и плоскость  $\pi$  стремится к нулю.

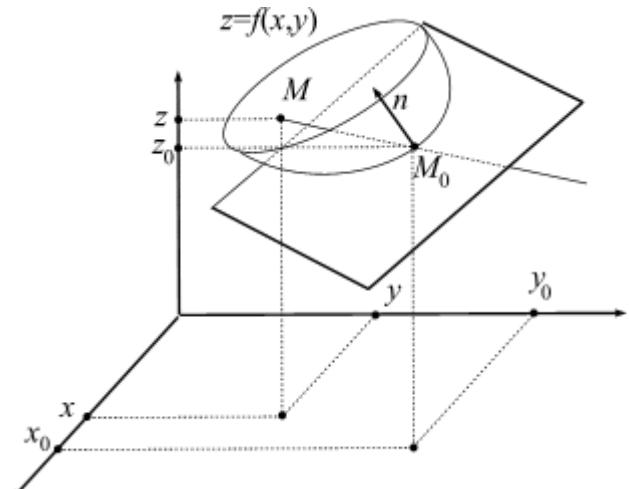
Ясно, что для этого достаточно, чтобы косинус угла  $\varphi$  между вектором  $\overrightarrow{M_0M}$  и нормалью  $n=(A, B, C)$  стремится к нулю.

Пусть  $f$  дифференцируема  $(x_0, y_0)$ . Покажем, что в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0 = f(x_0, y_0)$  у поверхности  $z = f(x, y)$  существует касательная плоскость в указанном смысле. Отметим, условие  $M \rightarrow M_0$  обеспечивает (с избытком) выполнение  $x \rightarrow x_0$  и  $y \rightarrow y_0$ .

$$\text{Итак, } z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

здесь  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ . теперь докажем, что плоскость  $\pi$ , заданная уравнением  $A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0$  искомая. Действительно, имеем  $\overrightarrow{M_0M}(\Delta x, \Delta y, z - z_0)$ ,  $n=(A, B, -1)$  и

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\overrightarrow{M_0M}, n)}{\|\overrightarrow{M_0M}\| \cdot \|n\|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z - z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \\ &= \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z - z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \leq \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$



## §9 Основные законы дифференцирования

**Теорема 1.** Если отображения  $f, g: R^n \rightarrow R^m$  дифференцируемы в точке  $x$ , то  $h = f + g$  дифференцируемое отображение в точке  $x$  и  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

Доказательство. Поскольку отображения  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$ , имеем:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x),$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + L_2(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_2(\Delta x).$$

Складываем, получаем

$$h(x + \Delta x) = h(x) + (L_1(\Delta x) + L_2(\Delta x)) + \|\Delta x\| \cdot (\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x)).$$

Остается заметить, что  $L_1 + L_2$  – линейное отображение,  $\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x) \rightarrow 0$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$  и вспомнить соглашение писать  $f'(x)(\Delta x)$  и  $g'(x)(\Delta x)$  вместо  $L_1(\Delta x)$  и  $L_2(\Delta x)$ . Теорема доказана.

**Замечание** Матрица Якоби отображения  $h$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 2.** (Дифференцирование композиции).

Если  $f: R^n \rightarrow R^m$  дифференцируемо в точке  $x$ ,  $g: R^m \rightarrow R^k$  дифференцируемо в точке  $y = f(x)$ , то отображение  $h = g \circ f$  дифференцируемо в точке  $x$  и при этом  $h'(x) = g'(y) \circ f'(x)$ .

Доказательство. Рассмотрим

$$h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) =$$

поскольку  $f$  дифференцируемо в точке  $x$  имеем  $f(x + \Delta x) - f(x) = L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x)$ . Обозначим  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , а поскольку  $y = f(x)$ , можно записать  $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$  и продолжить.

$$\begin{aligned} &= g(y + \Delta y) - g(y) = L_2(\Delta y) + \|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y) = \\ &= L_2(L_1(\Delta x)) + \|\Delta x\| \cdot L_2(\alpha_1(\Delta x)) + \|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y). \end{aligned}$$

Во-первых,  $L(\Delta x) = L_2(L_1(\Delta x))$  является линейным отображением из  $R^n$  в  $R^k$ .

Во-вторых, поскольку линейное отображение непрерывно  $L_2(\alpha_1(\Delta x)) \rightarrow 0$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Иными словами  $L_2(\alpha_1(\Delta x)) = \alpha(\Delta x)$ .

В-третьих, сделаем оценки.

$$\|\Delta y\| = \|f(x + \Delta x) - f(x)\| = \|L_1(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha_1(\Delta x)\| \leq (\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|) \cdot \|\Delta x\|$$

Это означает, что  $\|\Delta y\| \cdot \|\alpha_2(\Delta y)\| \leq \|\Delta x\| (\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|) \|\alpha_2(\Delta y)\|$ . В правой части неравенства если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\| \rightarrow \|L_1\|$ . Далее, если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$  ( $f$  дифференцируемо в точке  $x$ , значит, непрерывно и  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$ ). Таким образом, заметили, что  $\|\Delta y\| \cdot \alpha_2(\Delta y) = \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x)$ . Теорема доказана.

**Замечание** Матрица Якоби  $\left( \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right)$  отображения  $h$  является

произведением матриц:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_k}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{\partial g_i}{\partial y_s}(y) \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x).$$

**Теорема 3. (Дифференцируемость обратного отображения).**

Пусть  $f: R^n \rightarrow R^n$ ,  $V_x$  – окрестность точки  $x$ ,  $y = f(x)$ ,  $U_y$  – окрестность точки  $y$ ,  $f$  – взаимно однозначно отображает  $V_x$  на  $U_y$ ,  $f$  непрерывно в  $x$ ,  $f^{-1}$  – непрерывно в точке  $y$ . Если  $f$  дифференцируемо в точке  $x$  и существует  $(f'(x))^{-1}$ , то  $f^{-1}$  дифференцируемо в точке  $y$  и  $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$ .

Доказательство. Пусть  $\Delta y$  произвольное, достаточно малое  $(y + \Delta y) \in U_y$ . Обозначим  $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$ . Тогда, поскольку  $f(x) = y$  можно сделать следующие записи:  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$ ,  $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$  и, наконец,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Из условий непрерывности имеем  $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ .

Из дифференцируемости  $f$  в точке  $x$  имеем:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)(\Delta x) + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta x).$$

По условию существует  $(f'(x))^{-1}$  линейное отображение из  $R^n$  в  $R^n$ , значит,

$$(f'(x))^{-1}(\Delta y) = \Delta x + \|\Delta x\| \cdot (f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \quad (*).$$

Оценим: с одной стороны (слева):  $\|(f'(x))^{-1}(\Delta y)\| \leq C\|\Delta y\|$ , здесь воспользовались непрерывностью оператора. С другой стороны, (справа) имеем  $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \Rightarrow (f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \rightarrow 0$ , то есть  $(f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) = \alpha(\Delta y)$ . Можно считать  $\|\alpha(\Delta y)\| < 1/2$  и тогда  $\|\Delta x + \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)\| \geq 1/2\|\Delta x\|$  (здесь использовано неравенство треугольника вида  $\|a + b\| \geq \|a\| - \|b\|$ ).

В итоге получили  $\|\Delta x\| \leq 2C\|\Delta y\|$ . Перепишем соотношение (\*) так:

$$f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = (f'(x))^{-1}(\Delta y) - \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)$$

Поскольку  $\|- \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)\| \leq 2C\|\Delta y\| \|\alpha(\Delta y)\|$ , слагаемое  $- \|\Delta x\| \cdot \alpha(\Delta y)$  есть  $\|\Delta y\| \cdot \alpha(\Delta y)$ .

**Замечание.** Матрица Якоби  $(f^{-1})'(y)$  является обратной к  $f'(x)$ .

## §10. Приложения теоремы о производной сложной функции

Пусть теперь рассматривается числовая функция  $f: R^n \rightarrow R$  нескольких переменных, дифференцируемая в точке  $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , и пусть также заданы функции  $\varphi_k: R \rightarrow R$  дифференцируемые в точке  $t_0$ , при этом  $x_1^0 = \varphi_1(t_0)$ ,  $x_2^0 = \varphi_2(t_0)$ , ...,  $x_n^0 = \varphi_n(t_0)$ . Тогда функция  $g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  по теореме о производной сложной функции дифференцируема в точке  $t_0$ , при этом

$$g'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \cdot \varphi'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \cdot \varphi'_2(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M) \cdot \varphi'_n(t_0).$$

Остановимся сначала на функции трёх переменных  $u = f(x, y, z)$ , дифференцируемой в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Рассмотрим некоторый единичный вектор  $e(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , тогда прямая, проходящая через точку  $M_0$  в направлении этого вектора  $e$  задаётся уравнениями  $x = x_0 + t \cos\alpha$ ,  $y = y_0 + t \cos\beta$ ,  $z = z_0 + t \cos\gamma$ . Таким образом, на так заданной прямой функция  $u = f(x, y, z)$  представляет собой функцию одной независимой переменной  $t$  вида  $u = f(x_0 + t \cos\alpha, y_0 + t \cos\beta, z_0 + t \cos\gamma)$ .

**Определение 1.** Производную указанной сложной функции по переменной  $t$ , взятой в точке  $t = 0$ , называют производной функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0$  по направлению единичного вектора  $e$  и обозначают символом  $\frac{\partial u}{\partial e}$ .

Итак, по определению  $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos\gamma$ .

**Определение 2.** Градиентом функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  называется вектор с координатами  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)$ , обозначаемый  $\text{grad } f(M_0)$  или, что то же самое,  $\text{grad } u(M_0)$ .

В силу введённого понятия, производная по направлению представляет собой скалярное произведение вектор-градиента и единичного вектора, задающего направление:  $\frac{\partial u}{\partial e} = (e, \text{grad } u)$ .

**Утверждение.** Производная функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной в этой точке по любому другому направлению.

**Доказательство.** Для скалярного произведения имеем

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (e, \operatorname{grad} u) = \|e\| \|\operatorname{grad} u\| \cos \varphi = \|\operatorname{grad} u\| \cos \varphi, \text{ где } \varphi - \text{угол между векторами } \operatorname{grad} u \text{ и } e.$$

Учитывая, что максимальное значение полученное выражение принимает при  $\cos \varphi = 1$ , то есть  $\varphi = 0$ , получаем справедливость утверждения.

**Определение 3.** Поверхностью уровня  $C = \operatorname{const}$  функции  $u = f(x, y, z)$  называется множество точек  $\{(x, y, z)\}$ , в которых  $f(x, y, z) = C$ .

Если в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  поверхности уровня  $f(x, y, z) = C$  построить касательную плоскость, то легко убедиться в том, что вектор  $\operatorname{grad} f(M_0)$  является вектором нормали к этой касательной плоскости, то есть перпендикуляром к ней.

Совершенно аналогично определяется производная по направлению и градиент для дифференцируемой в точке  $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  функции  $n$  переменных.

**Замечание.** В случае функции двух переменных  $u = f(x, y)$  единичный вектор  $e$ , определяющий направление, имеет координаты  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . Поэтому формула вычисления производной по направлению в точке  $M_0(x_0, y_0)$  принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \sin \alpha.$$

### Теорема (о среднем).

Пусть  $G \subset R^n$  область (открытое связное множество),  $f: G \rightarrow R$ ,  $[x, x + h] \subset G$ . Если  $f$  непрерывна на  $[x, x + h]$  и дифференцируема на  $(x, x + h)$ , то существует  $\theta \in (0, 1)$ , такое, что

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot h_n.$$

Кратко  $f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)(h)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$ .

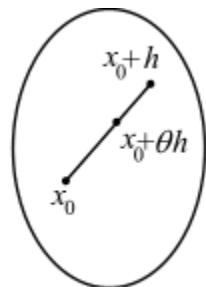
По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует  $\theta \in (0, 1)$ , такое, что  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0)$ . Остается правильно продифференцировать сложную функцию.

**Замечание 1.** Для отображений  $f: G \rightarrow R^m$  имеет место оценка (теорема о среднем)  $\|f(x + h) - f(x)\| \leq \left( \sup_{u \in G} \|f'(u)\| \right) \|h\|$ , здесь нормы  $h$  и  $f'(u)$  согласованы специальным образом.

**Теорема 2.** Если  $f: G \rightarrow R$  дифференцируемая в области  $G$  и  $f'(u) = 0 \forall u \in G$ , то  $f$  – постоянная.

Доказательство. 1). Если область  $G$  выпуклая (рис. сверху), выберем точку  $x_0$ , выпуклость позволит вместе с  $x_0 + h$  из  $G$  содержать весь отрезок  $[x_0, x_0 + h]$ . По теореме о среднем получим:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x + \theta h)(h) = 0$  – значения во всех точках совпадают с  $f(x_0)$ .



2). Для невыпуклых областей реализуем схему: есть путь  $x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x(1) = x_1$ . из 1) следует, что функция принимает одинаковые значения в любом шаге, лежащем в  $G$ . Теперь рассмотрим множество  $A = \{t \leq 1: f(x(t)) = f(x_0) \forall t' \in [0, t]\}$ .



Замечаем, что это множество непустое, ограниченное и если  $\sup A = t^* < 1$ , то взяв достаточно малый шар, так, чтобы он лежал в  $G$ , легко получить противоречие, увеличив  $t^*$ . Значит,  $t^* = 1$  и  $f(x_1) = f(x_0)$ .

## §11. Производные и дифференциалы высших порядков

### 1. О порядке взятия частных производных.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию двух переменных  $f(x, y) = \sin(xy)$ . Вычисляем  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(xy)) = -y \sin(xy)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(xy) - x \sin(xy)$ . Здесь частные производные взятые сначала в одном порядке, а затем в другом оказались одинаковыми.

**Пример 2** (функции, у которой смешанные производные не равны друг другу).  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$ .

$$\text{Вычисляем } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{Отметим, что } \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y \frac{-y^2}{+y^2} + 0 = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = -1. \text{ Легко } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

**Теорема 1 (о смешанных производных)**  $G$  область в  $R^n$  (открытое связное множество). Если  $f:G \rightarrow R$  имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , то в точках непрерывности они совпадают.

Доказательство. Проведем для  $n = 2$ , то есть для функции двух переменных  $f(x, y)$ . Итак, пусть  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  достаточно малы, так, чтобы  $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \in G \forall t \in [0, 1]$ . Обозначим:

$$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

и  $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$ . Легко,  $\varphi(1) - \varphi(0) = F(\Delta x, \Delta y)$ .

По теореме Лагранжа, получаем:

$$F(\Delta x, \Delta y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0)\Delta x =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y)\Delta x \Delta y, \text{ здесь } 0 < \theta, \lambda < 1.$$

Обозначив,  $\psi(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$ , получим

$$F(\Delta x, \Delta y) = \psi(1) - \psi(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y)\Delta x \Delta y \text{ здесь } 0 < \omega, \mu < 1. \text{ В итоге, получаем } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y) \text{ и после предельного перехода } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta y \rightarrow 0 \text{ и, в силу непрерывности смешанных производных, получим равенство } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

**Определение.** Если функция  $f:G \rightarrow R$  имеет все непрерывные частные производные до  $m$ -ого порядка, ее называют  $m$  раз непрерывно дифференцируемой в области  $G$ . Обозначают  $f \in C_U^m$ .

Например, функция  $f(x, y, z)$  два раза непрерывно дифференцируема в области, если в этой области непрерывны функции  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ .

Каким может оказаться количество различных функций?

## 2. Дифференциалы высших порядков.

### Первый.

(Одной переменной)  $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ . Запись  $df = f'(x)dx$ .

(Многих переменных)  $f'(x)(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \Delta x_n$ .

**Опр.**  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot dx_n$  называется первым дифференциалом.

### Второй.

#### *Сначала две переменные.*

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$  и  $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$  это две записи одного и того же

первого дифференциала. Теперь посмотрим  $\delta(df)$  (первый от первого), считая  $dx$  и  $dy$  фиксированными.

$$\delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \quad (\text{линейность первого дифференциала}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \cdot \delta x \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \cdot \delta y \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \cdot \delta x \cdot dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \cdot \delta y \cdot dy. \quad \text{Когда в}$$

первом дифференциале от первого положить  $dx = \delta x$  и  $dy = \delta y$  получаем

**второй дифференциал:**  $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$ ;

**второй дифференциал:**  $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$ .

**Дифференциал  $m$ -го порядка** определяется как первый дифференциал от  $m-1$ -го. Индукцией можно заметить, что

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(x, y) dx^k dy^{m-k}$$

#### *Многие переменные:*

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} dx_1^{m_1} \dots dx_n^{m_n}.$$

## §12. Формула Тейлора

**1. Шаг в прошлое (Одна переменная). Многочлен Тейлора** функции  $\varphi$  в  $t_0$ :

$$\varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

## **Формула Тейлора:**

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + r_m(t, t_0, \varphi),$$

**Пeano**  $r = o(t - t_0)^m$ ; условия  $\exists \varphi^{(m)}(t_0)$ ;

**Лагранж**  $r = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\xi) \cdot (t - t_0)^{m+1}$ ; условия  $\varphi \in C_{[t_0, t]}^m \cap C_{(t_0, t]}^{m+1}$ ;

**Интегральная**  $r = \frac{1}{m!} \int_{t_0}^t \phi^{(m+1)}(\tau) \cdot (t - \tau)^m d\tau.$

## 2. Шаг в настоящее.



**Теорема Формула Тейлора.** Пусть  $U$  – окрестность точки  $x \in R^n$ ,  $h \in R^n$ ,  $[x, x + h] \subset U$ ,  $f:U \rightarrow R$  имеет непрерывные частные производные до  $m$ -го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f|_x + r,$$

Brook Taylor                      где  $r = o(\|h\|^m)$  (*Пeano*);

если дополнительно  $f \in C_U^{m+1}$ , то

$$\exists \theta \in (0, 1), r = \frac{1}{(m+1)!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\theta h} \text{ (Лагранж);}$$

и интегральной форме  $r = \frac{1}{m!} \int_0^1 \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\tau h} \cdot (1-\tau)^m d\tau.$

Доказательство. Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$ . Она попадает в условия пункта 1 для отрезка  $[0, 1]$ . Можно записать формулу Тейлора:

лора  $\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + r_m$  и убеждаемся индукцией, что

получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того, чтобы получить форму Пеано надо поупражняться.

Замечание: Тогда:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x; y)$

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = x(u; v)$$

$$y = y(u; v)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2f = \delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial x} \delta(dx) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y\right) dy +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Не имеет места инвариантность дифференциала относительно выбора переменных  $x$ .

## §12. Формула Тейлора

**1. Шаг в прошлое (Одна переменная). Многочлен Тейлора** функции  $\varphi$  в  $t_0$ :

$$\varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

## **Формула Тейлора:**

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + r_m(t, t_0, \varphi),$$

**Пeano**  $r = o(t - t_0)^m$ ; условия  $\exists \varphi^{(m)}(t_0)$ ;

**Лагранж**  $r = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\xi) \cdot (t - t_0)^{m+1}$ ; условия  $\varphi \in C_{[t_0, t]}^m \cap C_{(t_0, t]}^{m+1}$ ;

$$\text{Интегральная } r = \frac{1}{m!} \int_{t_0}^t \phi^{(m+1)}(\tau) \cdot (t - \tau)^m d\tau.$$

## **2. Шаг в настоящее.**



**Теорема Формула Тейлора.** Пусть  $U$  – окрестность точки  $x \in R^n$ ,  $h \in R^n$ ,  $[x, x + h] \subset U$ ,  $f:U \rightarrow R$  имеет непрерывные частные производные до  $m$ -го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f|_x + r,$$

Brook Taylor                        где  $r = o(\|h\|^m)$  (**Пeano**);

если дополнительно  $f \in C_U^{m+1}$ , то

$$\exists \theta \in (0, 1), r = \frac{1}{(m+1)!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\theta h} \text{ (Лагранж);}$$

и интегральной форме  $r = \frac{1}{m!} \int_0^1 \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f \Big|_{x+\tau h} \cdot (1-\tau)^m d\tau.$

Доказательство. Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$ . Она попадает в условия пункта 1 для отрезка  $[0, 1]$ . Можно записать формулу Тейлора  $\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + r_m$  и убеждаемся индукцией, что

получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того чтобы получить форму Пеано надо поупражняться:

Условия позволяют записать формулу Лагранжа до  $m - 1$ -го порядка

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k f}{k!} \Big|_x + r_{m-1} = \left( \sum_{k=0}^m \frac{d^k f}{k!} \Big|_x \right) + \left( r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right)$$

Надо замечать, что  $\left( r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right) = o(\|h\|^m)$ .

Во-первых,  $r_{m-1} = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(\theta) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} \cdot h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}$ ,

во-вторых,  $\frac{d^m f}{m!} \Big|_x = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \cdot h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}$ .

Значит,

$$\left( r_{m-1} - \frac{d^m f}{m!} \Big|_x \right) = \frac{1}{m!} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} (h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}) C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \left( \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} - \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \right)$$

из соображений непрерывности  $C_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m \left( \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_{x+\theta h} - \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \Big|_x \right) = \alpha(h)$

Оценим  $\sqrt[m]{h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}} = \sqrt[m]{h_1 \cdot \dots \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_n \cdot \dots \cdot h_n} \leq \frac{m_1 h_1 + \dots + m_n h_n}{m}$  (Неравенство Коши

между средним геометрическим и средним арифметическим, далее неравенство

Коши-Буняковского)  $\leq \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2}{m}} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} = C \|h\|$ , значит,

$h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \leq D \|h\|^m$ , откуда следует требуемое.

## §12. Экстремум функции многих переменных

### 1. Необходимые условия экстремума.

**Опр.**  $f: R^n \rightarrow R$  имеет локальный минимум в точке  $x_0$ , если существует окрестность  $V$  точки  $x_0$ , такая, что  $\forall x \in V$  выполняется неравенство  $f(x_0) \leq f(x)$ .

Естественным образом определяется локальный максимум, общее название локальный экстремум, кроме того особо оговариваем строгие экстремумы.

#### Теорема 1. (необходимое условие экстремума)

Пусть в точке  $x_0$  имеет место локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные. Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$ , то есть  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

Как и для одной переменной надо посмотреть поведение

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k}$$

когда  $\Delta x_k \rightarrow +0$  или  $\Delta x_k \rightarrow -0$ .

**Замечание 1.** Локальные экстремумы лежат в точках, где  $\text{grad } f = 0$  или  $f$  не дифференцируема.

**Замечание 2.** Глобальные экстремумы надо искать в точках, где  $\text{grad } f = 0$  и на границе области задания.

### 2. Достаточные условия экстремума.

Для  $f: R \rightarrow R$  условия  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) > 0$  являются достаточными условиями локального (строгого) минимума функции  $f$  в точке  $x_0$ . Для функций многих переменных все обстоит также. Однако  $f''(x_0)$  является здесь квадратичной формой, определяемой матрицей вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Точнее, наличие локального экстремума, определяется поведением квадратичной формы  $\Phi_{x_0}(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ .

Некоторые факты теории квадратичных форм.

Пусть  $A = (a_{ij})$  – матрица  $n \times n$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n$ .  $\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$  –

квадратичная форма, при этом можно считать, что  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**Опр.** Квадратичная форма  $\Phi$  положительно определена, если  $\Phi(h) > 0$ , при  $h \neq 0$  и отрицательно определена, если  $\Phi(h) < 0$ , при  $h \neq 0$ .

**Критерий 1.** (Сильвестра)  $\Phi > 0 \Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0$ ;

$\Phi < 0 \Leftrightarrow a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ , и далее знаки определителей чередуются.

**Критерий 2.**  $\Phi > 0 \Leftrightarrow$  все собственные значения  $\lambda_i > 0$ ;  $\Phi < 0 \Leftrightarrow$  все  $\lambda_i < 0$ .

Свойство квадратичных форм:  $\exists m, M$  такие, что  $m \|h\| \leq \Phi(h) \leq M \|h\| \quad \forall h$ .

Оно основано на  $\exists m = \inf_{\|h\|=1} \Phi(h)$ ,  $M = \sup_{\|h\|=1} \Phi(h)$  так как  $\Phi(h) = (h, Ah)$  – непрерывная функция.

**Критерий 3.**  $\Phi > 0 \Leftrightarrow m > 0$ ;  $\Phi < 0 \Leftrightarrow M < 0$ .

**Теорема 2. (Достаточные условия экстремума)**

Пусть  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $f \in C^2_{V_{x_0}}$ ,  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

Тогда, если  $\Phi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$

a)  $\Phi > 0$ , то  $x_0$  точка строгого локального минимума;

b)  $\Phi < 0$ , то  $x_0$  точка строгого локального максимума;

c)  $\Phi$  – меняет знак, то экстремума нет.

Доказательство. a). По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0)(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h) + \|h\|^2 \alpha(h) \geq \\ &\geq \frac{m}{2} \|h\|^2 + \|h\|^2 \alpha(h) = \|h\|^2 \left( \frac{m}{2} + \alpha(h) \right). \end{aligned}$$

Выберем  $\delta > 0$  так, что  $|\alpha(h)| < m/4$ . Тогда  $m/2 + \alpha(h) > m/2 - m/4 = m/4 > 0$ .

Таким образом, получим  $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq m/4 > 0$  –  $x_0$  точка локального минимума.

b) упражнение.

c) Предположим, что  $\Phi$  меняет знак:  $\exists e_+, e_- \in S(\mathbf{0}, 1)$  такие, что  $\Phi(e_+) > 0$ ,  $\Phi(e_-) < 0$ . Тогда

$$f(x_0 + te_+) - f(x_0) = f'(x_0)(te_+) + \frac{f''(x_0)}{2!}(te_+)^2 + t^2\alpha(t) = t^2 \left( \frac{\Phi(e_+)}{2} + \alpha(t) \right).$$

Ясно, что при достаточно малых  $t$  эта величина положительная. Очевидно также, что при достаточно малых  $t$  значение  $f(x_0 + te_-) - f(x_0)$  отрицательное.

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если квадратичная форма  $\Phi$  такова, что  $\Phi(h) \geq 0 \forall h$ , то она называется *положительно полуопределенной*. Например,  $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 + 2h_2h_3 + 2h_3h_1$ .

**Пример 1.** Найдите точки локального экстремума функции

$$f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^3$$

Ищем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}. \text{ Решаем эту систему находим точки возможного экстремума } M_1(1/3, 2/3, -1/3) \text{ и } M_2(-1/4, -1/2, 1/4).$$

Вычисляем вторые производные  $f'_{xx} = 4$ ,  $f'_{xy} = f'_{yx} = -1$ ,  $f'_{xz} = f'_{zx} = 2$ ,  $f'_{yy} = 6y$ ,  $f'_{yz} = f'_{zy} = 0$ ,  $f'_{zz} = 2$ .

Значения этих частных производных в точке  $M_1$  являются коэффициентами

$d^2f|_{M_1}$ . Матрица квадратичной формы есть  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Вычислим главные ми-

норы  $4 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$ . В силу критерия Сильвестра в

$M_1$  локальный минимум (строгий).

Составим матрицу для точки  $M_2$ :  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , найдем знаки главных ми-

норов  $4 > 0$ ,  $-13 < 0$ ,  $-14 < 0$ . Ясно, строгих экстремумов нет. Заметим, что квадратичная форма  $d^2f|_{M_2} = 4dx^2 - 3dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy + 4dxdz$  знакопеременная. Положив  $dx \neq 0$  и  $dy = dz = 0$ , получаем  $d^2f|_{M_2} = 4dx^2 > 0$ , положив,  $dy \neq 0$  и  $dx = dz = 0$ ,  $d^2f|_{M_2} = -3dy^2 < 0$ . Точка  $M_2$  не является точкой локального экстремума.

## §13. Теорема о неявной функции

Основной вопрос: при каких условиях существует решение системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}.$$

То есть найдутся ли  $f_1, f_2, \dots, f_n$  такие, что при подстановке  $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в приведенную систему, получим тождества. Иначе говоря, стоит задача выяснить, при каких условия можно решить систему относительно переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Надежда есть только на локальное решение такой задачи, поскольку, например, для уравнения  $x^2 + y^2 = 1$  нет равносильного решения вида  $y = f(x)$ .

**1. Теорема о неявной функции (случай двух переменных):**  $F(x, y) = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $F$ , определенная в окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0) \in R^2$ , такова, что

1.  $F \in C_U^{(p)}$ ,  $p \geq 1 - p$  раз непрерывно дифференцируема в  $U$ ;
2.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
3.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда  $\exists \Pi = Ix_0 \times Iy_0 \subset U$  ( $\Pi$  – прямоугольник с центром в точке  $(x_0, y_0)$ ,  $Ix_0$  и  $Iy_0$  – отрезки с указанными центрами) и функция  $f: Ix_0 \rightarrow Iy_0$  такие, что

4.  $\forall (x, y) \in \Pi$  равенство  $F(x, y) = 0$  выполняется  $\Leftrightarrow$  имеет место  $y = f(x)$  на  $Ix_0$ ;

$$5. f \in C_{Ix_0}^{(p)}, \text{ при этом } f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . Поскольку  $F \in C_U^{(p)}$ , то  $F'_y(x, y) > 0$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , пусть ей будет круг радиуса  $2\beta > 0$ , содержащийся в  $U$ .

Функция  $F(x_0, y)$  строго возрастает на отрезке  $Iy_0 = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ .

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$$

Далее, поскольку  $F$  непрерывна в  $U$ ,  $F(x_0, y_0 - \beta) < 0$  и  $0 < F(x_0, y_0 + \beta)$ , существует  $\alpha > 0$  такое что  $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0$  выполняются неравенства  $F(x, y_0 - \beta) < 0$  и  $0 < F(x, y_0 + \beta)$  (сохранение знака непрерывной функции).

Покажем, что  $\Pi = Ix_0 \times Iy_0$  – искомый. Пусть  $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0$ , на отрезке с концами  $(x, y_0 - \beta)$  и  $(x, y_0 + \beta)$  рассмотрим функцию  $y \rightarrow F(x, y)$ . Эта функция строго возрастает, непрерывна и на концах принимает значения разных знаков. Значит,  $\exists! y(x) \in Iy_0$  такой, что  $F(x, y(x)) = 0$ . Положим  $f(x) = y(x)$ .

Отметим, что и для  $x_0 \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = Ix_0 \exists! y(x_0) \in Iy_0$  такой, что  $F(x_0, y(x_0)) = 0$ , однако такая точка уже есть – точка  $y_0$  ( $F(x_0, y_0) = 0$ ). Значит,  $f(x_0) = y_0$ . Итак,  $f: Ix_0 \rightarrow Iy_0$  определена однозначно и удовлетворяет 4.

Непрерывность  $f$  на  $Ix_0$ . Пусть  $x^* \in Ix_0$ ,  $f(x^*) = y^*$ . Из пункта 4. следует  $F(x^*, y^*) = 0$ , кроме того  $F'_y(x^*, y^*) > 0$ . Пусть  $0 < \varepsilon < \beta$ . Выше по  $\beta$  было найдено  $\alpha$  для  $x_0$  и  $y_0$ . Точно также по  $\varepsilon$ , найдем  $\delta$  для  $x^*$  и  $y^*$ , затем  $\tilde{\Pi} = I_{x^*, \delta} \times I_{y^*, \varepsilon}$ , а также функцию  $\tilde{f}: I_{x^*, \delta} \rightarrow I_{y^*, \varepsilon}$  такую, что

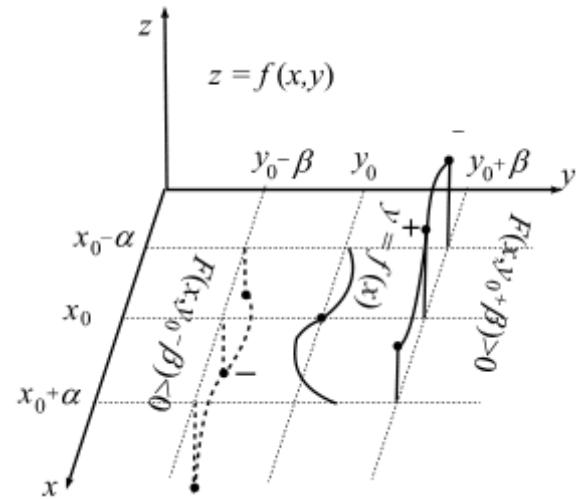
$$F(x, y) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi} \Leftrightarrow x \in I_{x^*, \delta} \text{ и } y = \tilde{f}(x) \quad (6)$$

Так как  $I_{x^*} \subset Ix_0$ ,  $I_{y^*} \subset Iy_0$ , из 4 и 6 получаем  $\tilde{f}(x) = f(x)$  в  $I_{x^*}$ . Остается заметить, что  $|x - x^*| < \delta \Rightarrow x \in I_{x^*} \Rightarrow \tilde{f}(x) \in I_{y^*, \varepsilon} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - y^*| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ . Непрерывность доказана.

Гладкость  $f$ . Пусть  $x \in I_{x^*}$ ,  $\Delta x$  достаточно мало,  $x + \Delta x \in I_{x^*}$ ,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \\ &= F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x + F'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y. \end{aligned}$$



Отсюда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{F'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}$ . Отправив  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем  $\Delta y \rightarrow 0$

(непрерывность  $f$ ). Предел в правой части равенства существует, так как  $F \in C_U^{(p)}$  и получим  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ . Осталось заметить, что дифференцируя правую часть как сложную функцию, будем получать производные более высоких порядков.

$$\text{Например, } f''(x) = -\frac{(F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy} \cdot f')F'_y - F'_x(F''_{yy}(x, f(x)) + F''_{yx} \cdot f')}{(F'_y(x, f(x)))^2}.$$

**2. Теорема о неявной функции** (Случай  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$ ).

Соглашение о краткой записи:  $(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = (x, y)$  – две переменные  $x$  – векторная,  $y$  – скалярная;  $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ ;  $I_{x_0}^\alpha$  – параллелепипед:  $x \in I_{x_0}^\alpha \Leftrightarrow |x_i - x_i^0| < \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$  ( $m$  – мерный параллелепипед) здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .  $I_{y_0}^\beta = \{y : |y - y_0| < \beta\}$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $F$ , определенная в окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0) \in R^{m+1}$ , такова, что

1.  $F \in C_U^{(p)}, p \geq 1 - p$  раз непрерывно дифференцируема в  $U$ ;
2.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
3.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда  $\exists \Pi = I_{x_0}^\alpha \times I_{y_0}^\beta \subset U$  и функция многих переменных  $f : I_{x_0}^\alpha \rightarrow I_{y_0}^\beta$  такие, что

4.  $\forall (x, y) \in \Pi$  равенство  $F(x, y) = 0$  выполняется  $\Leftrightarrow$  имеет место  $y = f(x)$   $x \in I_{x_0}^\alpha$ ;

5.  $f \in C_{I_{x_0}^\alpha}^{(p)}$ , при этом  $f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ .

Доказательство теоремы 2 весьма схоже с доказательством теоремы 1.

### 3. Теорема о неявной функции (Общий случай).

Необходимо установить существование решений системы и их свойства:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}.$$

Соглашения о краткой записи:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ; запись системы  $F(x, y) = 0$ , решения  $y = f(x)$ ;  $I_{x_0}^\alpha, I_{y_0}^\beta$  – соответствующие параллелепипеды,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}, \quad F'_x(x, y) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y) \right),$$

$$F'_y(x, y) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x, y) \right), \quad (F'_y(x, y))^{-1} \text{ – обратная матрица к } F'_y(x, y).$$

**Теорема 3.** Пусть отображение  $F$ , определенное в окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0) \in R^{m+n}$  таково, что

1.  $F \in C_U^{(p)}$ ,  $p \geq 1$  –  $p$  раз непрерывно дифференцируемо в  $U$ ;
2.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
3.  $F'_y(x_0, y_0)$  – обратимое.

Тогда  $\exists \Pi = I_{x_0}^\alpha \times I_{y_0}^\beta \subset U$  и отображение  $f : I_{x_0}^\alpha \rightarrow I_{y_0}^\beta$  такие, что

4.  $\forall (x, y) \in \Pi$  равенство  $F(x, y) = 0$  выполняется  $\Leftrightarrow$  имеет место  $y = f(x)$   $x \in I_{x_0}^\alpha$ ;

$$5. f'(x) = -\left( F'_y(x, f(x)) \right)^{-1} \left( F'_x(x, f(x)) \right).$$

Доказательство. Индукция по  $n$ . База  $n = 1$  – это теорема 2.

Пусть теорема справедлива для размерности  $n - 1$ .

По условию  $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x, y)\right) \neq 0$  отсюда в последней строке есть ненулевой элемент, можем считать, что  $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Для  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  находимся в условиях теоремы 2, следовательно, существует  $\tilde{\Pi} = (\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}) \times I^1 \subset U$  параллелепипед и  $\tilde{f}: \tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1} \rightarrow I^1$ ,  $\tilde{f} \in C_{\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}}^p$  такие, что

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi} \Leftrightarrow y_n = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \\ (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}.$$

Подставим  $y_n = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  в первые  $n - 1$  уравнения системы, получим новую систему:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = 0 \end{cases},$$

которую будем решать в  $\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}$ . Обозначим ее

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ \Phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0 \end{cases} \text{ или } \Phi(x, \tilde{y}) = 0, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Заметим, что система  $\Phi(x, \tilde{y}) = 0$  удовлетворяет требованиям индукционного предположения.

Во-первых,  $\Phi \in C_{\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}}^p$ , как композиция гладких функций.

Во-вторых,  $\Phi_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{n-1}^0) = F_i(x_0, y_0) = 0$ .

Теперь заметим  $\det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0)\right) \neq 0$ .

(Обратный ход). Имеем  $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \neq 0$ .

Рассмотрим связь между  $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x_0, y_0)$  и  $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$ .

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} F_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1},$$

здесь  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Если все элементы последнего столбца умножить на одно и то же число  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}$  и сложить с первым, то получим  $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$ . Вместе с этим, поскольку  $F_n(x, \tilde{y}, \tilde{f}(x, \tilde{y})) \equiv 0$  в  $\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}$ , то дифференцируя по  $y_1$ , получим  $\frac{\partial F_n}{\partial y_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} = 0$ . Тем самым имеем:

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0) & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

Проделав такую же операцию со вторым, третьим, ...,  $n - 1$  столбцом, приходим к

$$= \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0) \right) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что  $\det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0) \right) \neq 0$ .

Из предположения индукции следует, что  $\exists I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \subset \tilde{I}_{x_0}^m \times \tilde{I}_{\tilde{y}_0}^{n-1}$  и  $f : I_{x_0}^m \rightarrow I_{\tilde{y}_0}^{n-1}$  такие, что

$$\Phi(x, \tilde{y}) = 0 \text{ в } I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \Leftrightarrow \tilde{y} = f(x)$$

Далее легко заметить, что

$$F(x, y) = 0 \text{ в } I_{x_0}^m \times (I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \times I^1) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Наконец, для  $x \in I_{x_0}^m$  имеем тождество  $F(x, f(x)) \equiv 0$ , дифференцируем его и получаем  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0$  или  $f'(x) = -\left(F'_y(x, f(x))\right)^{-1}\left(F'_x(x, f(x))\right)$ .

## §14. Условный экстремум

Пусть на открытом множестве  $G \subset R^n$  заданы функции  $f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ , при этом  $m < n$ , и пусть  $E$  – подмножество точек множества  $G$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) будем называть **уравнениями связи**.

**Опр.1.** Точка  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in G$  называется **точкой условного минимума** функции  $f(x)$  при наличии связей (1), если найдется такая окрестность  $V_{x_0}$ , что  $\forall x \in V_{x_0} \cap G$  выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Иными словами в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$  при условии  $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$ .

Аналогично определяются точки строгого условного минимума, максимума, общее название – точки условного экстремума.

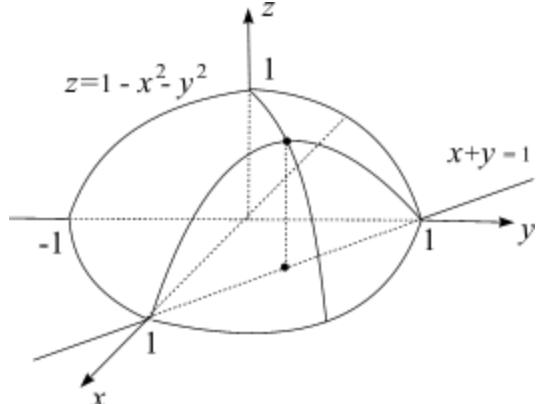
**Пример 1.** Найдите точки условного экстремума функции  $z = 1 - x^2 - y^2$ , если  $x + y = 1$ .

Уравнение связи  $x + y = 1$  легко разрешается относится,  $y = 1 - x$ . Подставим в функцию  $z = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$ . Функция  $2x - x^2$  имеет максимум при  $x = 1/2$ . Точка  $(1/2, 1/2)$  является точкой условного строгого максимума функции  $z(x, y)$  при наличии связи  $x + y = 1$ .

**Замечание.** Успех пришел после того как удалось решить уравнение связи. Однако это редкая удача.

**Пример 2.** Найти условные экстремумы функции  $f(x, y) = e^{axy}$ , где  $a \neq 0$ , при условии  $x^3 + y^3 + x + y = 4$ .

Здесь уравнение связи затруднительно разрешить относительно одной из переменных. Метод Лагранжа, который мы сейчас изучим, для примера 2 более эффективен, чем прямой метод исключения зависимых переменных.



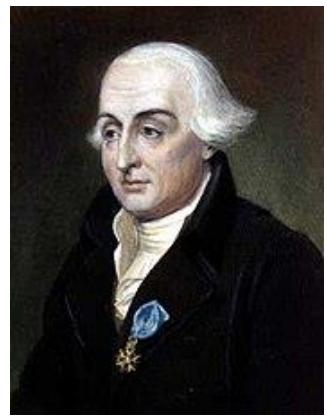
## Метод множителей Лагранжа.

**Опр. 3.** Рассмотрим функцию  $n + m$  переменных

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$$

где  $x \in G \subset R^n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^m$ . Числа  $\lambda_i$  называются **множителями Лагранжа**, а функция  $L$  – **функцией Лагранжа**. Будем говорить, что  $(x_0, \lambda_0)$  есть **стационарная точка функции Лагранжа**, если

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0, \lambda_0) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x_0, \lambda_0) = 0.$$



**Теорема 1. (необходимые условия условного экстремума).**

Пусть  $x_0$  – точка условного экстремума функции  $f(x)$  при наличии связей (1), и пусть функции  $f(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $f_m(x)$ , непрерывно дифференцируемые в окрестности точки  $x_0$ , причем ранг матрицы Якоби равен  $m$ .

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тогда найдутся такие множители Лагранжа  $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ , что  $(x_0, \lambda_0)$  будет стационарной точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Так как  $m < n$ , а ранг матрицы Якоби в точке  $x_0$  равен  $m$ , то хотя бы один из миноров этой матрицы порядка  $m$  отличен от нуля. Будем считать, что это

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{array} \right| \neq 0.$$

Поскольку  $f_1(x_0) = 0, \dots, f_m(x_0) = 0$ . Находимся в условиях теоремы о неявной функции для  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  (здесь первая группа переменных играет роль  $y$ , вторая —  $x$ ).

Значит, существует  $\Pi_{x_0} = I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)} \times I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$  и  $g: I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} \rightarrow I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}$  такие,

что имеет место:  $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$  при  $x \in \Pi_{x_0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$  при

$(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ . Таким образом, если  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ , то имеем:

$$\begin{cases} f_1(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0 \\ \dots \\ f_m(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0 \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим на  $I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$  функцию.

$$G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (5).$$

Во-первых, если  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ , то очевидно, получим

$G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , кроме того, выполняются уравнения связи. Во-вторых,  $G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Таким образом,  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  — точка безусловного экстремума функции  $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$ . Следовательно, в силу необходимых условий существования (безусловного) экстремума, получим

$$dG\Big|_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} = 0.$$

С одной стороны, воспользуемся (5) и в силу инвариантности формы первого дифференциала получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0$$

С другой стороны, дифференцируя тождества (4) в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ , снова в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \end{cases}$$

Умножим полученные равенства на  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и сложим с предыдущим равенством, получим:  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) \right) \cdot dx_k = 0$ . Вычислив диффе-

ренциал функции Лагранжа в точке  $(x_0, \lambda)$ , обнаружим, что

$$dL|_{(x_0, \lambda)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda) dx_k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0, \lambda) d\lambda_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) \right) \cdot dx_k = 0$$

$$\text{Здесь } \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0, \lambda) = f_i(x_0) = 0.$$

Решим систему линейных уравнений относительно переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Из условия следует, что она имеет единственное решение, пусть это будет  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ . Отсюда, в частности,  $\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_m}(x_0, \lambda_0) = 0$ .

Перепишем дифференциал функции Лагранжа в точке  $(x_0, \lambda_0)$ , получим

$$dL|_{(x_0, \lambda_0)} = \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) dx_k = 0.$$

Так как дифференциалы независимых переменных  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ , могут принимать любые значения, то  $\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x_0, \lambda_0) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0, \lambda_0) = 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 2. (Достаточные условия условного экстремума).**

Пусть функции многих переменных  $f, f_1, f_2, \dots, f_m$  имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки  $x_0 \in R^n$ , причем в точке  $x_0$  ранг функциональной матрицы (3) равен  $m$  и пусть  $(x_0, \lambda_0)$  стационарная точка функции Лагранжа  $L(x, \lambda)$ .

Тогда если квадратичная форма  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j$  положительно

определенна, то  $x_0$  точка условного строго локального минимума при наличии связей (1); если отрицательно определена, то  $x_0$  – точка условного строго локального максимума. Если форма знакопеременная, то  $x_0$  не является точкой условного экстремума.

**Доказательство.** Во-первых, воспользуемся тем, что в точке  $x_0$  ранг функциональной матрицы (3) равен  $m$ , также как в теореме 1 выделим параллелепипед  $\Pi_{x_0} = I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)} \times I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$  и отображение  $g : I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)} \rightarrow I_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}$  если взять

$(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$  и доопределить  $\begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$ , то для полученных

$x = (x_1, \dots, x_n)$  имеем  $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$ , то есть  $x \in E$ .

Далее,  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0) = f(x_1, \dots, x_n) = G(x_{m+1}, \dots, x_n)$ , где, как и раньше  $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$ .

Так, имеем  $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0)$ , где в правой части равенства  $x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$ .

В силу инвариантности первого дифференциала,  $dG(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = d_x L(x_0, \lambda_0) = 0$  (необходимое условие экстремума в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  для  $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$  на  $I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$ ).

Теперь рассмотрим второй дифференциал от обеих частей равенства  $G(x_{m+1}, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_0)$ ,

$$d^2 G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) d^2 x_k.$$

Поскольку  $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0, \lambda_0) = 0$  и  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0, \lambda_0) dx_k dx_j$  положительно определена, то  $d^2 G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  положительно определена и, значит,  $G(x_{m+1}, \dots, x_n)$

имеет в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  минимум. Итак, для  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in I_{(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)}$  имеет место неравенство  $G(x_{m+1}, \dots, x_n) \geq G(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ . Это соответствует  $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . То есть, условному экстремуму.

**Пример 2 возвращается.** Найти условные экстремумы функции  $f(x, y) = e^{axy}$ , где  $a \neq 0$ , при условии  $x^3 + y^3 + x + y = 4$ .

Построим функцию Лагранжа:  $L(x, y, \lambda) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4)$ . Стационарные точки функции Лагранжа определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = aye^{axy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = axe^{axy} + \lambda(3y^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Умножая первое уравнение на  $x$ , а второе на  $y$  и вычитая, получаем

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0.$$

Если  $\lambda = 0$ , то из первых двух уравнений  $x = y = 0$ . Но  $x = y = 0$  не удовлетворяют уравнению связи. Итак,  $\lambda \neq 0$ , поэтому  $x = y$ , а третий множитель  $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$ . Подставляя  $x = y$  в уравнение связи, получаем  $x = y = 1$ . При этом из первого уравнения получаем  $\lambda_0 = -ae^a/4$ .

Итак, точка  $(1, 1, -ae^a/4)$  единственная стационарная точка функции Лагранжа. Так как  $d(e^{axy}) = a(xdy + ydx)e^{axy}$ ,

$$d^2(e^{axy}) = a^2(xdy + ydx)^2 e^{axy} + 2adx dy e^{axy},$$

$d^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6xdx^2 + 6ydy^2$ , то для второго дифференциала функции Лагранжа получаем

$$d^2L(1, 1, -ae^a/4) = ae^a(a(dx + dy)^2 + 2dxdy - 3(dx^2 + dy^2)/2).$$

Дифференцируя уравнение связи, при  $x = y = 1$  получаем  $dy + dx = 0$  Подставляя  $dy = -dx$  в  $d^2L(1, 1, \lambda_0)$ , получаем равенство  $d^2L(1, 1, \lambda_0) = -5ae^a dx^2$ .

Поэтому при  $a < 0$  в точке  $(1, 1)$  будет условный минимум, а при  $a > 0$  – условный максимум функции  $f$ , причём экстремальное значение равно  $e^a$ .

## Теорема о диффеоморфизме

**Опр.1.** Пусть  $U, V$  – открытые подмножества в  $R^n$ , отображение  $f: U \rightarrow V$  называется диффеоморфизмом гладкости  $p$ , если  $f$  – биекция множеств  $U$  и  $V$ ;  $f$  –  $p$  раз непрерывно дифференцируемо;  $f^{-1}$  –  $p$  раз непрерывно дифференцируемо (Кратко:  $f \in C^p(U, V)$ ,  $f^{-1} \in C^p(V, U)$ ).

Теорема. Пусть отображение  $f: G \rightarrow R^n$ , где  $G$  область таково, что

1.  $f$  –  $p$  раз непрерывно дифференцируемо.

2.  $y_0 = f(x_0)$ .

3. Матрица  $f'(x_0)$  – обратимая.

Тогда существуют окрестности  $Ux_0$  и  $Vy_0$  такие, что  $f$  является их диффеоморфизмом гладкости  $p$ . При этом, если  $x \in Ux_0$  и  $y \in Vy_0$ , то  $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$ .

Доказательство. Пусть  $F(x, y) = f(x) - y$ . Тогда,  $F \in C^p(G \times R^n, V)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$  – обратимая. Тем самым находимся в условиях теоремы о неявной функции.

Значит,  $\exists \Pi = I_{x_0} \times I_{y_0} \subset G$  и отображение  $g: I_{y_0} \rightarrow I_{x_0}$  класса  $C^p$  такие, что

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y), \text{ при этом, } g'(y) = -(F'_x(x, y))^{-1}(F'_y(x, y)).$$

Замечаем  $F'_x(x, y) = f'(x)$ ,  $F'_y(x, y) = I$  и  $g'(y) = (f'(x))^{-1}$ .

Пусть  $V = I_{y_0}$ ,  $U = g[V]$ . Отсюда сразу получаем  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow U$  взаимно обратны. Далее из 1, 2, 3 получено, что образ внутренней точки  $x_0$  множества  $G$  является внутренней для  $f[G]$ , поскольку  $I_{f(x_0)} \subset f[G]$ .

(!) свойства 1, 2, 3 выполняются для любых  $y \in V$  и отсюда  $x = g(y)$  внутренняя точка, значит,  $U$  – открытое. Теорема доказана