МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

Содержание

1 ГЛАВА

1.1 Определение ряда. Основные свойства

1.1.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- $\sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{k=1}^{n} (a_n + b_n)$
- $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_n)$

1.1.1 Числовые ряды

Определение 1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,
а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичные суммы ряда

Определение 2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \ldots, S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ - ряд сходится
Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{n=2k} \\ 1, & \text{n=2k+1} \end{cases}$ - ряд расходится

1.1.2 Основные свойства

Теорема 1 (Критерий Коши)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall m \geq n > N \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходится } \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ - сходится}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n - 1 > N \ |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n \geq N + 1 \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

□

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - расходится } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание 1. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема 2 (Необходимый признак сходимости ряда). *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *- сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

□

Теорема 3 (Арифметические свойства). *Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ - \textit{сходится}}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \to S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k \to S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n^a + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

□

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

1.1.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема 4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены короторого неотрицательны, сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм ограничена*

Доказательство.
$\Rightarrow$ Ряд сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится $\xRightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}}$ $\{S_n\}$ - ограничена
$\Leftarrow$ $\{S_n\}$ - ограничена и $S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ $\{S_n\}$ - сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится □

Теорема 5 (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. *Из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

2. *Из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*

Доказательство. Конченое число членов ряда не влияет на сходимость $\Rightarrow$ будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \ \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n \text{ , если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\text{то } S_n^B \nearrow \text{ и сходится к } S^B \text{ при } n \to \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$$

$$\text{ограничена сверху } S^B \xRightarrow{\text{по th 4}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$$

2. (от противного)Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$ □

Теорема 6 (Признак сравнения в предельной форме). *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0 b_k > 0 \text{ и } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ - конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ |\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 :\ \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 3}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2} b_n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 5}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится $\xRightarrow{\text{по th 3}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$ - расходится $\xRightarrow{\text{по th 5}}$ $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - расходится $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится

□

1.1.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Теорема 7 (Телескопический признак). *Пусть* $a_n \searrow, a_n \geq 0$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

□