МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019-2020

Содержание

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$
- $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)$

П.1 Числовые ряды

Определение §1.1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,
а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичные суммы ряда

Определение §1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ - сумма ряда}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{1-q}$ - ряд сходится
Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{n=2k} \\ 1, & \text{n=2k+1} \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема §1.1 (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{ - \textit{сходится}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall m \geq n > N \ |\textstyle\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходится } \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ - сходится}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n-1 > N \ |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n \geq N+1 \ |\textstyle\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

■

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ - расходится } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ - сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема §1.2 (Необходимый признак сходимости ряда). *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *- сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

Теорема §1.3 (Арифметические свойства). *Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ - \textit{сходится}}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \to S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \to S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^\infty (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n^a + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^\infty \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^\infty a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^\infty a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема §1.4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами)**.** *Ряд, члены коротого неотрицательны, сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм ограничена*

Доказательство. $\Rightarrow$ Ряд сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится
$\xRightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}} \{S_n\}$ - ограничена
$\Leftarrow \{S_n\}$ - ограничена
$S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$ - сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится ■

Теорема §1.5 (Признак сравнения)**.** *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^\infty a_k, \sum_{k=n}^\infty b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. *Из сходимости $\sum_{k=1}^\infty b_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k$*

2. *Из расходимости $\sum_{k=1}^\infty a_k \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty b_k$*

Доказательство. Конченое число членов ряда не влияет на сходимость $\Rightarrow$ будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \ \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n \text{ , если сходится } \sum_{k=1}^\infty b_k$$

$$\text{то } S_n^B \nearrow \text{ и сходится к } S^B \text{ при } n \to \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$$

$$\text{ограничена сверху } S^B \xRightarrow{\text{по th 4}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ сходится}$$

2. (от противного)Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

$\blacksquare$

Теорема §1.6 (Признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0\ b_k > 0 \quad \textit{и}\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ - \textit{конечное}}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ |\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 :\ \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \dfrac{3c}{2} b_n$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится

2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \dfrac{c}{2} b_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится

$\blacksquare$

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$

Теорема §1.7 (Телескопический признак)**.** *Пусть* $a_k \searrow, a_k \geq 0$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *- сходится*
$\Leftrightarrow$ *сходится* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$$

$$\frac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$ Если ряд S^B_n - сходится $\Rightarrow S^A_{2^{n+1}} - a_1$ - сходится $\Rightarrow S^A_n \leq S^B$ и $\{S^A_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. $\dfrac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1$

$$S^B_{n+1} \leq 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$$

   Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S^B_n \leq 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$ и $\{S^B_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения

■

Теорема §1.8. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 7}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится
- Пусть $p \leq 1$

  $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ т.к $\frac{1}{n}$ - расходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p}$ - расходится

■

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема §1.9 (признак Даламбера)**.** *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\exists \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*
3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \; \forall n > N \; |\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q-\varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q+\varepsilon)a_n \quad \forall n = N+1, N+2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$

   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \widetilde{q}$$

$$N+1: a_{n+2} < a_{n+1}\widetilde{q}$$

$$N+2: a_{n+3} < a_{n+2}\widetilde{q} < a_{n+1}\widetilde{q}$$

$$\dots$$

$$N+k-1: a_{n+k} < a_{n+k-1}\widetilde{q} < \dots < a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1}$$

Т.к $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\widetilde{q} < 1$)$\Rightarrow$ сходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$
   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q - \varepsilon > 1$
   Тогда $\forall n > N\ a_n\widetilde{q} < a_{n+1} \xRightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1}$

   $a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 \xRightarrow{\text{по необходимому признаку}}$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.10 (радикальный признак Коши).
Пусть $a_n \geq 0$ *и* $\exists \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*

2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*

3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N+1, N+2, \ldots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists \widetilde{q} = \dfrac{q+1}{2} \ \ |q < \widetilde{q} < 1 \exists N > 0 : \ \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \widetilde{q} \Leftrightarrow a_n < \widetilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{q}^n \text{ - геометрическая прогрессия}(\widetilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ ряд сходится} \xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^{n^2}, \lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.11 (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q$, тогда*

1. Если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится

2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

3. Если $q = 1$, то признак не работает

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}$$

Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1))2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2\cdot(n+1)}=1$$

Раабе:

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{2(n+1)}{2n+1}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\text{ ряд расходится}$$

П.6 Число e, как сумма ряда

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}e_n$$

1.
$$e_n=(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{k!n^k}<\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=S_n\Rightarrow e_n<S_n$$

2. Пусть $m<n$
$$e_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}>\sum_{k=0}^{m}C_n^k\frac{1}{n^k}=$$
$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!n^m}=A_{n,m}$$
$\Rightarrow e_n>A_{n,m}$ Зафиксируем m. Тогда при $n\to\infty$ $e\geq S_m$

3. $|\Rightarrow e_n<S_n\leq e$ и $\{S_n\}\nearrow\xRightarrow{\text{По th Вейерштрасса}}$ Ряд сходится
$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

4. Оценка погрешности при приблежении числа e частичными суммами:

$$0 < e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}[1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots] = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Упражнение. Доказать, что e - иррационально

Упражнение. Доказать, что 2<e<3

§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

П.1

Определение §2.1. Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ называется знакочередующимся, где $\forall n \ a_n > 0$

Теорема §2.1 (Признак сходимости Лейбница знакочередующихся рядов). *Пусть дан знакочередующийся ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ a_n > 0$
Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *и* $\{a_n\} \searrow$, *то ряд сходится*

Доказательство.

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху}$$

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow | \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n\to\infty} S_{2m} = S$$

$$S_{2m+1} = S_m + a_{2m+1} \xrightarrow{S_m \to S, a_{2m+1} \to 0 \text{ При } n \to \infty} \lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = S$$

■

Замечание. Признак достаточный, но не необходимый!

Следствие (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница)**.**

$$S = S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$$

$$|R_n| = |(-1)^n||(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| =$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \le a_{n+1}$$

$$| \Rightarrow |R_n| \le a_{n+1}$$

Лемма (Абеля)**.** *Дано* $a_1, \dots, a_n$ *и* $b_1, \dots, b_n$*. При этом:*

1. $\{a_i\}$ *монотонно*

2. $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^{m} b_i| \le B$*, где* $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, также перепишем (2) условие, как $\exists B > 0 : |B_m| \le B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n$$

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = |B_1||a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}||a_{n-1} - a_n| + |B_n||a_n| \le$$

$$\le B(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с } +\text{, либо все с -}} + |a_n|) =$$

$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \overset{\text{Использую неравенство треугольника}}{\le} B(|a_1| + 2|a_n|)$$

■

Теорема §2.2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *тогда, если:*

1. a_n *монотонно стремится к 0*

2. $\exists C\ \forall n\ |\sum_{k=1}^{n} b_k| \le C$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится*

Доказательство. Из (1) условия a_n - монотонно $\to 0 \xRightarrow{\text{По определению предела}}$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{6C}$
Из (2) условия $\forall n \ \forall p \ |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| = |\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k| \leq 2C$
Рассмотрим $a_n, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, \dots, b_{n+p} \xRightarrow{\text{По лемме Абеля } (B = 2C)} |\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq$
$2C(|a_n|+2|a_{n+p}|) \leq 6C\dfrac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xRightarrow{\text{По критерию Коши}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится ■

Теорема §2.3 (Признак Абеля)**.** *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *тогда, если:*

1. a_n *монотонно и ограничена*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходится*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится*

Доказательство. Из (1) условия $\Rightarrow |a_n| \leq A \ \forall n$
Из (2) условия $\xRightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| < \dfrac{\varepsilon}{3A}$
Рассмотрим $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xRightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} \text{ - монот. из усл, } B = \frac{\varepsilon}{3A}} |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A}(\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2\overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится ■

Докозательство. Теоремы 1. Вариант 2. Из условия, что $\{a_n\} \searrow 0$ и того факта, что $|\sum_{n=1}^{m} (-1)^n| \leq 1$,
по теореме Дирихле следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ - сходится ■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем m. Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow \text{ к } 0, b_n = sin(nx)$$

$$S_m = sin(x) + sin(2x) + sin(3x) + \dots + sin(mx) =$$

$$= \frac{1}{sin(x/2)}(sin(x)sin(x/2) + sin(2x)sin(x/2) + \dots + sin(mx)sin(x/2)) =$$

$$= \frac{1}{2sin(x/2)}(cos(x/2) - cos(3x/2) + \dots + cos(\frac{2m-1}{2}x) - cos(\frac{2m+1}{2}x) =$$

$$= \frac{1}{2sin(x/2)}(cos(x/2) - cos(\frac{2m+1}{2}x))$$

Если $sin(x/2) = 0 \Rightarrow sin(nx) = 0 \Rightarrow$ ряд сходится

Если $sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{n} sin(nx)| \leq \dfrac{2}{2sin(x/2)} = \dfrac{1}{sin(x/2)} = C$

$| \xRightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$ ряд сходится

Упражнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема §3.1. *Абсолютный ряд сходится*

Доказательство. Дано $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится. Докажем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall n > N\ \forall p\ |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xRightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ \forall p\ |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится ■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\dfrac{(-1)^n}{n}|$ - расходитя $\Rightarrow$ ряд сходится не абсолютно

Определение. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

Теорема §3.2 (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов).

1. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *- абсолютно сходящиеся ряды, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_k$ *абсолютно сходится*

2. *Если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ *или* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, *тогда ряд* $\begin{cases} \text{абсолютно сходитя,} & q < 1 \\ \text{расходитя,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

Доказательство.

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника

2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

Теорема §3.3. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится. А ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *получен путем произвольной перестановки членов* a_n
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *абсолютно сходится и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$ В самом деле это биекция так, как $\forall k \; \exists i \; b_k = a_{f(i)}$ и $\forall n \; \exists i \; a_n = b_{f^{-1}(i)}$

1. $\forall m \; \exists l : \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \{a_1, \ldots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$

2. $\forall l \; \exists m' : \{a_1, \ldots, a_l\} \subset \{b_1, \ldots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$

- $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{m} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{l} |a_n|$ и $\{S_n^B\} \searrow \xRightarrow{\text{по th Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ Тогда:

$$\forall \varepsilon \; \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \; \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

  Возьмем $N = max\{N_1, N_2\}$
  Пусть $m \geq N | \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b| < \varepsilon \xRightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xRightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$

$$\{b_1, \ldots, b_m\} \subset \{a_1, \ldots, a_l\} \subset \{b_1, \ldots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^{l} a_n = \sum_{n=1}^{m} b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначис ее за } C}$$

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$|\textstyle\sum_{n=1}^{l} a_k - a| < \varepsilon$$

$| \Rightarrow |a-b| = |\sum_{n=1}^{m} b_n - b - \sum_{n=1}^{l} a_n + a + c| < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}}$ $a = b$

■

Теорема §3.4. *Есди ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходится, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений $a_m b_n$, расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$, то сумма полученного ряда равна $S = S^A S^B$*

Доказательство. Расположем $a_m b_n$ в удобном порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, \ldots, a_1b_n, \ldots$$

$$a_2b_1, a_2b_2, \ldots, a_2b_n, \ldots$$

$$\ldots$$

$$a_mb_1, a_mb_2, \ldots, a_mb_n, \ldots$$

$$\ldots$$

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + \ldots \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + \ldots$$

Введем обозначения:$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \to S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k \to S^B$
Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху
$S_n \nearrow$, т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$S_4 = |a_1b_1|+|a_1b_2|+|a_2b_2|+|a_2b_1| = (|a_1|+|a_2|)(|b_1|+|b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$

$$\dots$$

$S_{n^2} = |a_1b_1|+\dots+|a_1b_n|+\dots+|a_nb_1| = (|a_1|+\dots+|a_n|)(|b_1|+\dots+|b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. схожд.}}$$

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$ ряд (1) сходится абсолютно $\xRightarrow{\text{th 3}}$ исходный ряд сходится
Докажем, что $S = S^A S^B$
По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S_n^A} = \sum_{k=1}^{n} a_k, \widetilde{S_n^B} = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S_{n^2}}}_{\to \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S_n^A}}_{\to \tilde{S^A}} \cdot \underbrace{\widetilde{S_n^B}}_{\to \tilde{S^B}} \Rightarrow S = S^A S^B$$

■

Замечание. Пусть есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow$ сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Теорема §3.5 (Римана). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall A$ можно так переставить члены ряда, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*

Доказательство.
Пусть $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$ - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку
Пусть $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$ - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку
По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится $\Rightarrow$

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет нитого ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходится(противоречие). Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть $A \geq 0$:

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq$
$\leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:
Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$, то

$$|S_n - A| < max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$, то

$$|S_n - A| < max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.
Докажем, что $S_n \xrightarrow{n\to\infty} A$
Пусть $\forall \varepsilon > 0$ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xRightarrow{\text{Необходимы признак сход-ти}} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} A$$

$\blacksquare$

Упражнение. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходится

Упражнение. Докажите, что если при любой перестановки его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

Глава 2 Интеграл

§1 Неопределенный интеграл

П.1 Первообразные

Определение. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$

Определение. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ (точная) первообразная ф-ции $f : I \to \mathbb{R}$, если $\forall x \in I\ F'(x) = f(x)$

Воспоминания. *Теорема Лагранджа о среднем.* Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Лемма §1.1 (о точных первообразных). *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, F_1, F_2 - первообразные на $[a, b]$, тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$*

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G‘(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

∎

Лемма §1.2 (из будущего). *У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке*

Пример. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\dfrac{x|x|}{2})' = |x|$

Определение. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ называется обобщенной первообразной ф-ции $f : I \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ всюду за исключением конечного числа точек и F - непрерывная

Пример. $|x|$ - обобщенная первообразная $sign(x)$, т.к $|x|' = sign(x)$

Лемма §1.3. *Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке*

Лемма §1.4 (об обобщенной первообразной). *Если $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ обобщенные первообразные функции $f : I \to \mathbb{R}$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ - точки, в которых нет $F_1'(x)$ или нет $F_2'(x)$
На любом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ по предыдущей лемме F_1 и F_2 - точные первообразные ф-ции f (по лемме 3)

$$F_1(x) = F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}]$$
$$F_1(x) = F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i]$$
$$| \Rightarrow F_1(x_i) = F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1}$$

■

Обозначение. Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции f называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

Обозначение. $f(x)dx$ -подынтегральное выражение

Обозначение. Иногда удобно ввести обозначение: $F'(x)dx = dF(x)$

Замечание. У dx приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

П.2 Приемы отыскания первообразных

1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример.

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Пример.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = x - arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C$$
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C$$

Замечание. Когда использовать: $\int x^n f(x)dx, \int \ldots ln \ldots dx, \int \ldots arctg \ldots dx$

Пример.

$$\int xsin(x)dx = \int x(-cosx)'dx = x(-cosx) - \int (-cosx)dx =$$

$$= x(-cosx) + \int cos(x)dx = -xcosx + sinx + C$$

Пример.

$$\int lnxdx = \int x'ln(x)dx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если $\phi(x)$ - дифференцируемая функция, то $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y))dy = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}2xdx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}(x^2)'dx$$

Обозначим $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{y}dy = \frac{1}{2}ln(y) + C = \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$$F_1(x)\text{- Первообразна на } [a, b]$$

$$F_2(x)\text{- Первообразна на } [b, c]$$

Тогда:

$$\int f(x)dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

П.3 Первообразная от рациональной функции

Определение. Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\text{Где } P(x), Q(x) \text{ - многочлены}$$

Обозначение. $degP$ - степень многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots +$ $+ a_1x + a_0, a_n \neq 0$

Замечание. В комплесных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

Где $z_1 \dots z_n$ - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:
либо корень вещественный,$z_k \in \mathbb{R}$
либо есть комплесно сопряженные $z_k, \overline{z_k} : (z - z_k)(z - \overline{z_k}) =$
$= z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + z_k\overline{z_k}$

Лемма §1.5. *Если $P(x)$ - многочлен над $\mathbb{R}$, то его можно разбить на* $P(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$ *Это представление едиственно (с точностью до перестановки множителей)*

Лемма §1.6 (о делении с отсатком)**.** *Если $P(x), Q(x), deg(P) \geq deg(Q), Q \neq 0$, тогда $\exists!$ многочлены $q(x), r(x), deg(q) = deg(P) - deg(Q)$, $deg(r) < deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$*

Лемма §1.7. *Еслм $deg(P), deg(Q) > 0$, и $d(x) = NOD(P(x), Q(x))$, тогда $\exists u(x), v(x) : deg(u) < deg(Q), deg(v) < deg(P)$,*
$d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

Теорема §1.1 (о разложении в простые дроби)**.** *Пусть $P(x), Q(x)$ - многочлены, $0 < deg(P) < deg(Q), NOD(P(x), Q(x)) = 1$ и $P(x)$ как в лемме 5, тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{C_{ij}}{(x-x_j)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_n}\frac{a_{ij}x+b_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

Пример.

$$\frac{3x^2-13x+5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя $Q(x) = (x-1)(x-2)^2$

2. теорема о разложении в простые дроби: $R(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$. Найдем коэффициенты A, B, C

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int\frac{3x^2-13x+5}{x^3-5x^2+8x-4}dx = \int\frac{-5}{x-1}dx + \int\frac{8}{x-2}dx + \int\frac{-9}{(x-2)^2}dx$$

П.4 Первообразные простых дробей

Замечание.

$$\int\frac{1}{x-x_i}dx = \{y = x - x_i\} = \int\frac{dy}{y} = ln|y| + C = ln|x-x_i| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_i)^k}dx = \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x-\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{a>0}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2+1)}dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2+1)}dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y^2+1}dy =$$

$$= \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y+1} = \frac{1}{2}ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{x}{(1+x)^k}dx = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C$$

$$I_k(y) = \int \frac{1}{(1+y^2)^k}dy = \frac{y}{1+y^2}^k - \int y(\frac{1}{(1+y^2)^k})'dy = \frac{y}{1+y^2}^k - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1}2y)}{(1+y^2)^{2k}}dy =$$

$$= \frac{y}{1+y^2}^k + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}dy = \frac{y}{1+y^2}^k + 2k\int (\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}})dy =$$

$$= \frac{y}{1+y^2}^k + 2kI_k(y) - 2kI_{k+1}(y)$$

$$I_k(y) = \int \frac{1}{(1+y^2)^k}dy$$

$$I_1(y) = arctg\ y + C$$

$$I_{k+1}(y) = \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k(y)$$

П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

R - рациональная функция

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ замена $y = \sqrt[n]{ax+b}$ сводит к рациональной функции

   Замечание.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R(\frac{y^n-b}{a}, y)\frac{y^{n-1}}{a}dy$$

   Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1}+x-5}dx \ominus$$

$$y = \sqrt{x=1}, x = y^2-1, dx = 2ydy$$

$$\ominus \int \frac{\sqrt{2}y2y}{y+y^2-6}dy = 2\sqrt{2}\int \frac{y^2}{y^2+y-6}dy = 2\sqrt{2}\int (1-\frac{y-6}{y^2+y-6})dy = \dots$$

2. $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}), ad \neq bc$ замена $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(z(y), y)\cdot z'(y)dy$$

   Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}dx$$

3. $R(sinX, cosX)$ универсальная тригонометрическая замена $y = tg(\frac{x}{2})$

   $sinx = 2sin(x/2)cos(x/2) = 2tg(x/2)cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$

   $cosx = \frac{1-y}{1+y}$

   $dx = \frac{2}{1+y}dy$

   Если $R(-sinX, cosX) = -R(sinX, cosX), t = cosX$

   Если $R(sinX, -cosX) = -R(sinX, cosX), t = sinX$

   Если $R(-sinX, -cosX) = R(sinX, cosX), t = tgX$

4. $R(shX, chX)$ по аналогии с пунктом (3) + работает замена $y = e^x$

П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций
  - Разложение на простые дроби
  - Метод Остроградского(*)
- Интегрирование тригонометрических функций
  - $\int R(sinX; cosX)dx \quad , t = tg(\dfrac{x}{2})$ - универсальная подстановка
  - Четность/нечетность функции $\to$ специальная замена
  - Частные случаи(**)
- Интегрирование иррациональных функций
  - $\int R(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})dx$

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots)dx$$

    $t = \sqrt[N]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, N = NOK(m, n, \dots)$
  - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ - выделение полного квадрата или замена Эйлера(***)
  - Биноминальный интеграл (****)

Замечание. Все методы сводятся к интегрированию рациональных функции

П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.

$$\int sin^{2m}(x)cos^{2n}(x)dx \quad \textit{используя формулы понижения степени получим}$$

$$\int (\frac{1-cos(2x)}{2})^m(\frac{1+cos(2x)}{2})^n dx$$

2.
$$\int sin^{2m+1}(x)cos^{2n}(x)dx = \int sin^{2m}(x)cos^{2n+1}(x)dx =$$
$$= -\int sin^{2m}(x)cos^{2n}(x)d\underbrace{cos(x)}_{t} = -\int (1-t^2)^m t^{2n} dt$$

3. $\int sin(ax)cos(bx)dx = (1)$
$\int sin(ax)sin(bx)dx = (2)$
$\int cos(ax)cos(bx)dx = (3)$

$$(1) = \int \frac{1}{2}(sin(a+b)x + sin(a-b)x)dx$$
$$(2) = \int \frac{1}{2}(cos(a-b)x - cos(a+b)x)dx$$
$$(3) = \int \frac{1}{2}(cos(a+b)x + cos(a-b)x)dx$$

П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$$ax^2+bx+c = a\underbrace{(x+\frac{b}{2a})}_{u}{}^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака a сводится к:

- $\int R(u; \sqrt{a^2-u^2})du$
- $\int R(u; \sqrt{u^2-a^2})du$
- $\int R(u; \sqrt{a^2+u^2})du$

случай	подстановка (замена)	du	корень
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = asin(t)$	$du = acos(t)dt$	$acos(t)$
	$u = acos(t)$	$du = -asin(t)dt$	$asin(t)$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = \dfrac{a}{sin(t)}$	$du = -\dfrac{acos(t)}{sin^2(t)}dt$	$\sqrt{(\dfrac{a}{sin(t)})^2 - a^2} = a\ ctg(t)$
	$u = \dfrac{a}{cos(t)}$	$du = -\dfrac{asin(t)}{cos^2(t)}dt$	$\sqrt{(\dfrac{a}{cos(t)})^2 - a^2} = a\ tg(t)$
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = \dfrac{a}{tg(t)}$	$du = \dfrac{a}{cos^2(t)}dt$	$\sqrt{(\dfrac{a}{tg(t)})^2 - a^2} = \dfrac{a}{cos(t)}$
	$u = \dfrac{a}{ctg(t)}$	$du = -\dfrac{a}{sin^2(t)}dt$	$\sqrt{(\dfrac{a}{ctg(t)})^2 - a^2} = \dfrac{a}{sin(t)}$

Пример.

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \left\{\begin{aligned} x &= tg(t) \\ dx &= \frac{dt}{cos^2(t)} \\ x^2+1 &= \frac{1}{cos^2(t)} \end{aligned}\right\} = \int \frac{tg^2(t)-tg(t)+1}{\dfrac{1}{cos^2(t)}\cdot\dfrac{1}{cos(t)}} \cdot \frac{dt}{cos^2(t)} =$$

$$= \int (tg^2(t)+1)cos(t)\,dt - \int tg(t)cos(t)\,dt = \int \frac{1}{cos^2 t}cos(t)\,dt - \int tg(t)cos(t)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{aligned} u &= tg(\frac{t}{2}) \\ dt &= \frac{2du}{1+u^2} \\ cos(t) &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2}du + cos(t) = ln|u| + cos(t) + C =$$

$$= ln|tg(\frac{arctg(x)}{2})| + cos(arctg(x)) + C$$

П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

1. $a > 0$ $\underbrace{\sqrt{ax^2 + bx + c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{a}x$

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}x + ax^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

   Получаем рациональную функцию под интегралом

2. 2 различных корня $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_0},\ t^2(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c$$

$$t^2(x - x_0) = a(x - x_1)$$

$$x = \frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) =$$

$$= t(\frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} - x_0)$$

П.10 Биноминальные интегралы

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx\ , m, n, p \in \mathbb{Q}$$

a) p - целое, тогда по биному Ньютона

b) p - дробное

   Выполнить замену $z = x^n$, тогда $x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$

$$\Rightarrow \int z^{\frac{m}{n}}(az + b)^p\frac{1}{n}z^{n(\frac{1}{n}-1)}dz =$$

   Вариант 1

$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(az + b)^p dz, \text{ если } \frac{m+1}{n}\text{- целое, то}$$

$$p = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow t^\nu = az + b = ax^n + b \Rightarrow \text{получим рациональную функцию}$$

Вариант 2

$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1+p}(\frac{az+b}{z})^p dz$$

Если $\dfrac{m+1}{n}+p-1$ - целое, то $t^\nu = \dfrac{az+b}{z} = \dfrac{ax^n+b}{x^n}$

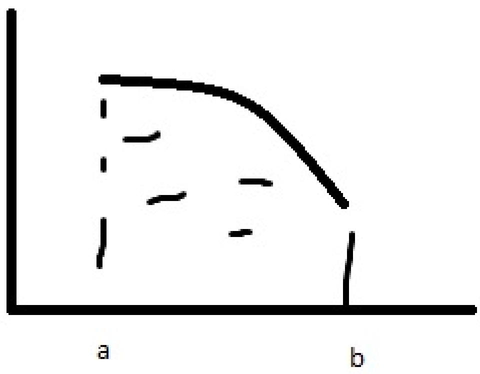
Теорема §1.2 (Чебышева)**.**

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

вычесляется в элементарных функциях только, если

1. *p-целое*
2. *p-дробное,* $\dfrac{\mu}{\nu}$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{n} \text{ - целое} \qquad , t^\nu = ax^n+b \\ \dfrac{m+1}{n}+p \text{ - целое}, t^\nu = \dfrac{ax^n+b}{x^n} \end{array}\right.$

Глава 3 Определенные интегралы



$$f:[a,b]\to R, f(x)\geq 0$$

Формула (Ньютона-Лейбница)**.**

$$S = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx, \text{ где } F \text{ - первообразная f}$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Определение. Кольцо множеств - набор множеств замкнутый относительно $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Пример. Подмножество $\mathbb{R}^2$:

- Все подмножества пл-ти $P(\mathbb{R}^2)$
- $\{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$
- Все ограниченые множества
- Все многоугольники $(+\emptyset)$

Определение. Площадь на кольце R подмножеств $\mathbb{R}^2$ это функция $S : R \to \mathbb{R}$, такая что:

1. $\forall A \subset R, S(A) \geq 0$
2. $\forall A, B \subset R, A \cap B = \emptyset \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. не меняется при сдвигах, поворотах, отражениях. Т.е $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(L(A)) = S(A)$
4. $S([0,1]^2) = 1$

Замечание. Аналогично $V : R(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ - объем

Замечание. Аналогично $l : R(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ - длина

Замечание. 1. Из определения $S(\emptyset) = 0$
$S(A \cup \emptyset) = S(\emptyset) + S(A)$

2. $S([0, a] \times [0, b]) = ab$

Замечание. Площадь однозначно определяется на кольце многоугольников

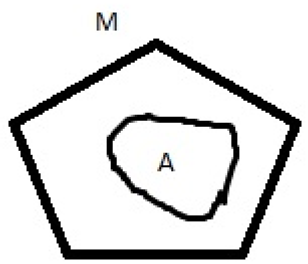
Следствие §0.1. $A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$

Доказательство.

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

■

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченное множество.

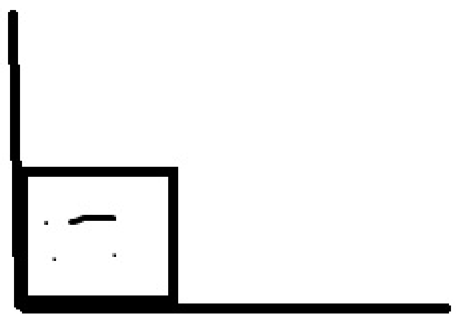


$$S^*(A) = inf(S(M), \text{M - многоугольник}, A \subset M) \text{ - Внешняя площадь}$$

$$S_*(A) = sup(S(M), \text{M - многоугольник}, M \subset A)) \text{ - Внутренняя площадь}$$

Причем $S^*(A) \geq S_*(A)$

Пример. Когда не совпадают:



$E = (Q \cap [0,1]^2)$ - точки единичного квадрата с рациональными координатами $\Rightarrow$

$$S^*(E) = 1$$

$$S_*(E) = 0$$

Определение. Если $S_*(A) = S^*(A)$, тогда A - квадрируемое

Теорема §0.1. *Множество квадрируемых множеств это кольцо. И площадь продолжается на них с сохранением всех свойств*

П.1 Модель интеграла Дарбу

Определение. Разбиение отрезка $[a, b]$, это коннечный набор точек $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

Свойство. P_2 - *подразбиение* P_1, если $P_1 \subset P_2$

Свойство. У любых двух разбиений есть общее подразбиение

Определение. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - ограниченая функция. Определим *верхний интеграл Дарбу.*
Пусть $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. На каждом отрезке $A_i = [x_i; x_{i+1}]$ выберем $C_i \geq f(x) \forall x \in A$.

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf_{P,C_i} \{\sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i)\}$$

Аналогично определяется *нижний интегралл Дарбу*

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx =$$

$$= \sup_{P,C_i} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x_{i+1} - x_i), P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}, C_i \leq f(x) \forall x \in [x_i; x_{i+1}] \right\}$$

Замечание.

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx$$

Пример.

$$f_D : [0, 1] \to [0, 1]$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Замечание. Если они совпадают, то f *интегрируема по Дарбу*

$$\int_a^{b} f(x)dx = \int_{a*}^{b} f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$$

Интеграл Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$

П.2 Модель интегралла Римана

$$\text{Пусть } f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

$\tau=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$
Набор точек $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ - подчиненён разбиению P, если

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

Формула (Сумма Римана)**.**

$$S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

Определение. *Шаг разбиения*: $\Delta(\tau)=max_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})$

Определение. *Интеграл Римана* I - называется интегралом Римана, f на $[a,b]$,если

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:|I-S(f,\tau,\xi)|<\varepsilon$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta(P)\to 0}S(f,\tau,\xi)$$

Если этот предел существует и независит от τ,ξ

Пример. $f\equiv c$ на [a,b]

$$S(f,\tau,\xi)=c(b-a)$$

Пример.

$$D(X)=\begin{cases}1, & \text{рац на } [0,1]\\ 0, & \text{ир на } [0,1]\end{cases}$$

$\forall\tau$ - разбиение $[0,1]$ $\exists\xi_k'\in\mathbb{Q},\xi_k''\notin\mathbb{Q}$

$$S(D,\tau,\xi_k')=\sum_{n=1}^{\infty}1(x_k-x_{k-1})=1$$

$$S(D,\tau,\xi_k'')=\sum_{n=1}^{\infty}0(x_k-x_{k-1})=0$$

$$|\Rightarrow\nexists lim$$

Пример.

$$R(X) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{несократима} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ на [a,b]}$$

$$S(R,\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{k} R(\xi_i)\delta x_i = \sum_{R(\xi_i)<\frac{1}{N}} R(\xi_i)\delta x_i + \sum_{R(\xi_i)\geq\frac{1}{N}} R(\xi_i)\delta x_i <$$

$$< \sum_{R(\xi_i)<\frac{1}{N}} \frac{1}{N}\delta x_i + \sum_{R(\xi_i)\geq\frac{1}{N}} 1\delta x_i < \frac{1}{N} \sum_{R(\xi_i)<\frac{1}{N}} \delta x_i + \Delta(\tau)\text{кол-во } \{R(\xi_i) \geq \frac{1}{N}\} <$$

Грубой оценкой является N^2

$N = 1, x = 1 \longrightarrow 1$

$N = 2, x = 1, x = \frac{1}{2} \longrightarrow 2$

$N = 3, x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3} \longrightarrow 4$

Далее, если кол-во $\{x : R(x) \geq \frac{1}{N}\}$ не более N^2, то для $\left\{x\colon R(x) \geq \frac{1}{N+1}\right\}$ могут добавляться дроби $\frac{k}{N+1}, k = 1, \ldots, n$

Т.е добавится не более N штук $N^2 + N < (N+1)^2$

$$S(R,\tau,\xi) < \frac{1}{N} + \Delta(\tau)N^2$$

Засчет выбора достаточно малого $\Delta(\tau) : \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\Delta = \frac{1}{N^3}$
$\Rightarrow \forall\tau : \Delta(\tau) < \delta$ получаем:

$$|0 - S(R,\tau,\xi)| = \frac{1}{N} + \delta N^2 = \frac{1}{N} + \frac{N^2}{N^3} = \frac{2}{N} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 R(x)dx$$

П.3 Верхние и нижние суммы Дарбу

Определение. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ограниченая функция. Определим *верхнюю и нижнею суммы Дарбу.*

f - огр на $[a, b]$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]}(f(x)), m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]}(f(x))$$

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{n} M_k \Delta x_k, s_\tau = \sum_{k=0}^{n} m_k \Delta x_k$$

Свойство §0.1.

$$s_\tau \leq S(f, \tau, \xi) \leq S_\tau \ \forall \xi$$

Свойство §0.2.

$$\tau' \subseteq \tau'' \Rightarrow S_{\tau''} \leq S_{\tau'}$$

Свойство §0.3.

$$\forall \tau', \tau'' : s_{\tau'} \leq S_{\tau''}$$

Определение. Нижний интеграл Дарбу:

$$\sup_\tau(s_\tau) = \underline{I} = \int_{a*}^{b} f(x)dx$$

Определение. Верхний интеграл Дарбу:

$$\inf_\tau(S_\tau) = \overline{I} = \int_{a}^{b*} f(x)dx$$

Свойство §0.4.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau \ \exists \overline{\xi} : 0 \leq S_\tau - S(f, \tau, \overline{\xi}) < \varepsilon$$

Доказательство. По определению M_k : $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : M_k - f(\xi_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}, \underline{\xi} = \xi_k$

$$S_\tau - S(f, \tau, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^{n} (M_k - f(\xi_k))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$$

■

Свойство §0.5.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau \ \exists \underline{\xi} : 0 \leq S(f, \tau, \underline{\xi}) - S_\tau < \varepsilon$$

Свойство §0.6. Пусть τ' полученна из τ путем добавления p точек. Тогда $S_\tau - S_{\tau'} \leq (M-m)p\Delta(\tau)$, $S_{\tau'} - S_\tau \leq (M-m)p\Delta(\tau)$

Доказательство. добавление 1 точки: $x_{k-1} < x' < x_k$

$$S_\tau - S_{\tau'} = M_k(x_k - x_{k-1}) - (M'_k(x_k - x') + M''_k(x' - x_{k-1})) =$$

$$= (M_k - M_{k'})(x_k - x') + (M_k - M''_k)(x' - x_{k-1}) \leq (M-m)\Delta(\tau)$$

Далее по индукции

■

Лемма §0.1 (Дарбу)**.**

$$\overline{I} = \lim_{\Delta(\tau)\to 0} S_\tau$$

$$\underline{I} = \lim_{\Delta(\tau)\to 0} s_\tau$$

Доказательство. $M = m \Rightarrow f(x) = const = m = M$ $\underline{I} = s_\tau, \overline{I} = S_\tau$

$$M > m, \forall\varepsilon\ \exists\tau^* : S_{\tau^*} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2}\text{по опр inf}$$

Пусть p - кол-во точек τ^*, лежащие внутри $[a,b]$. Выберем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$$

Пусть $\tau : \Delta(\tau) < \delta$, $\tau' = \tau \cup \tau^*$

$$S_\tau - \underline{I} = S_\tau - S_{\tau'} + S_{\tau'} - \underline{I} \leq (M-m)p\Delta(\tau) + S_{\tau'} - \underline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для второго *УПР!* ■

Теорема §0.2 (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)**.** *Ограниченная на $[a,b]$ ф-ция f интегрируема по Риману* $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau :$ $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Доказательство. $\Rightarrow$
Тогда $\exists\delta > 0$ из определения инт-мости выберем $\tau : \Delta(\tau) < \delta$

$$|I - S(f,\tau,\xi)| < \frac{\varepsilon}{4}\ \forall\xi$$

По св-ву 4 и 5 выберем $\underline{\xi}, \overline{\xi}$:

$$S_\tau - S(f,\tau,\overline{\xi}) < \frac{\varepsilon}{4},\ S(f,\tau,\underline{\xi}) - s_\tau < \frac{\varepsilon}{4}$$

$S_\tau - s_\tau = S_\tau - S(f,\tau,\overline{\xi}) + S(f,\tau,\overline{\xi}) - I + I - S(f,\tau,\underline{\xi}) + S(f,\tau,\underline{\xi}) - s_\tau < \varepsilon$

$\Leftarrow$
Из условия следует: $\underline{I} = \overline{I} = I$ - обозначение.
По лемме Дарбу: по ε выберем $\delta : \Delta(\tau) < \delta$

$$S_\tau - I < \frac{\varepsilon}{2}, I - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall \xi \text{ по св-ву } 1 |S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$$

■

Воспоминания. В прошлом семестре вводилось определение колебания функции f на $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\omega_k = \sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]} |f(x'') - f(x')|$$

Очевидно, что

$$\omega_k = \underbrace{M_k}_{\sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)} + \underbrace{m_k}_{\inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)}$$

Следовательно,

$$\underbrace{S_\tau - s_\tau}_{\text{Эта разность фигурирует в Теореме 1}} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$$

Следствие. Ограниченная на $[a,b]$ функция f интегрируема
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Разбиение $\tau : \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$

§1 Некоторые классы интегрируемых функций

П.1 Некоторые классы интегрируемых функций

Теорема §1.1 (Основное св-во интегрируемых функций, необходиоме условие)**.** *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то она ограничена на* $[a,b]$

От противного. Пусть f не ограничена на $[a,b]$ и пусть выбрано разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$
Т.к f не ограничена на $[a,b]$, то f не ограничена на каком-то маленьком отрезке разбиения. Пусть это будет $[x_0, x_1]$. Тогда $\exists$ последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$(здесь (n) просто номер ξ_1), $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty$
Фиксируем точки на других отрезках: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда для данного τ и ξ_i сумма $\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ какое-то определенное число.

$$| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S(f,\tau,\xi) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau,\xi_1^{(n)},\xi_2,\xi_3,\dots) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{f(\xi_1^{(n)})}_{\to\infty}\Delta x_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{Число}}) = \infty$$

$$| \Rightarrow \forall M > 0\ \exists n_0 : |S(f,\tau,\xi_1^{n_0},\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_k)| > M \tag{1}$$

$| \Rightarrow$ интегральные суммы не могут стремиться к конечному пределу при $\Delta(\tau) \to 0$
Действительно, если $\exists \lim_{\Delta(\tau)\to 0} S(f,\tau,\xi) = A$ - конечное, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall \tau : \Delta(\tau) < \delta\ \forall \xi\ |S(f,\tau,\xi) - A| < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |S(f,\tau,\xi)| \le |S(f,\tau,\xi) - A| + |A| < \varepsilon + |A|$$

А мы получили в 1, что $\forall$разбиения τ при фиксированном ε можно выбрать ξ так, что $|S(f,\tau,\xi)| > |A| + \varepsilon = M \Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.2. *Непревная на отрезке функция - интегрируема*

Доказательство. По теореме Кантор, любая непрерывная на отрезке функция - равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение τ такое, что $\Delta(\tau) < \delta$, тогда если $x', x'' \in [x_{k-1}; x_k]$, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\sup\limits_{x',x''} |f(x') - f(x'')| = \sup(f(x')) - \inf(f(x'')) = M_k - m_k \le \varepsilon$ Равенство появилось из-за sup

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum M_k - m_k \Delta x_k \le \varepsilon(b-a)$$

$\Rightarrow$ по критерию Дарбу (§0.2) функция интегрируема

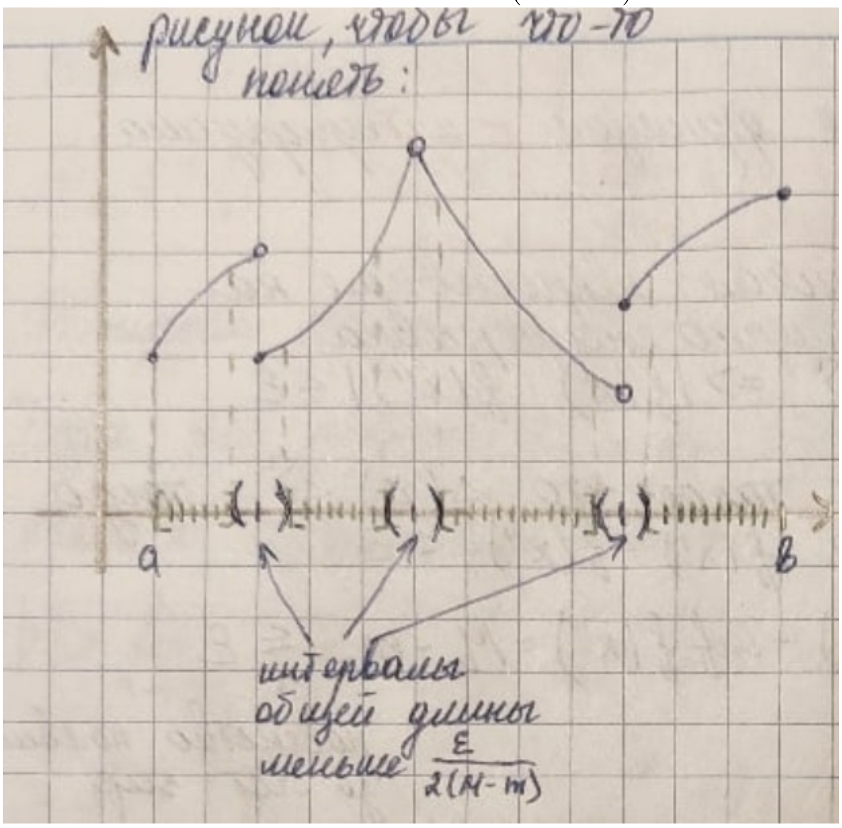
■

Теорема §1.3. *Если f имеет конечное число разрывов и ограничена на $[a,b]$, то f интегрируема*

Эта теорема будет следовать из более сильной теоремы

Теорема (3!). *Пусть f ограничена на $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва f и имеющих общую сумму длин меньшую, чем ε, то f интегрируема на $[a, b]$*

Доказательство. $\varepsilon > 0$. Покроем все разрывы конечным числом интервалов общей длинны меньше чем $\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$



Если из $[a, b]$ удалить конечное число интервалов, то останется объединение конечного числа отрезков на которых f непрерывна.

Разобъем каждый отрезок так, что колебание ω_i там меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$

Объеденим эти разбиения и интервалы с разрывами получаем некоторое разбиение τ

Итак,

$$S_\tau - s_\tau = \sum \omega_k \Delta x_k = \underbrace{\sum \omega_i \Delta x_i}_{\text{Сумма по всем маленьким отрезкам}} + \underbrace{\sum \omega_j \Delta x_j}_{\text{Сумма по всем интервалам}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\sum \Delta x_i}_{\substack{\text{по маленьким отрезкам,} \\ \text{длинны в сумме} \\ <(b-a)}} + \underbrace{(M-m)\sum \Delta x_j}_{\substack{\text{по интервалам,} \\ \text{их длинна}<\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|\Rightarrow$ по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема

■

Замечание. В теореме 3' П.1 и на рисунке точек разрыва может быть бесконечно числом

Теорема §1.4 (Критерий Лебега)**.** *Пусть f огграничена на $[a,b]$. f интегрируема $\Leftrightarrow$ множество точек разрыва обладает свойством: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists I_n$ - конечная или бесконечная посл-ть интервалов такая, что $\{$множество точек разрыва$\} \subset \bigcup I_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ (другими словами, мн-во точек разрыва меры 0)*

Теорема §1.5. *Монотонная на $[a,b]$ функциия - интегрируема*

Доказательство. $f - \underbrace{\text{монотонная}}_{\text{(пусть возврастает)}} \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)\ \forall x \in [a,b]$

Пусть $\varepsilon > 0$. τ - разбиение $[a,b]$ на равные отрезки длинной меньше $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, т.е $\Delta(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

Очевидно, что $\forall [x_{i-1}, x_i]$ $m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$, т.к f возврастает $\Rightarrow$ $S_\tau - s_\tau = \sum (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \le \Delta(\tau) \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$

$$= \Delta(\tau)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

$|\Rightarrow$ по критерию Дарбу §0.2 функция интегрируема ■

§2 Пространство интегрируемых функций. Основные свойства интеграла

$\mathcal{R}_{[a,b]}$ - множество интегрируемых функций на отрезке $[a,b]$
Мы уже выяснили, что в этом мн-ве лежат непрерывные, монотонные, разрывные функции с мн-вом разрывных точек разрыва меры 0 (§1.4)

Теорема §2.1. *Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, тогда:*

1. $f + g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

2. $\alpha f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

3. $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

4. $fg \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

5. *Пусть* $[c,d] \subset [a,b]$. *Тогда если* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}, f\Big|_{[c,d]} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Доказательство. 1. Пусть τ - разбиение $[a,b], \{\xi_i\} = \xi$ - отмечены.
Тогда $S(f+g,\tau,\xi) = \sum_{i=1}^{k}(f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i = S(f,\tau,\xi)+S(g,\tau,\xi)$
T.k $\exists\lim_{\Delta(\tau)\to 0} S(f,\tau,\xi)\exists\lim_{\Delta(\tau)\to 0} S(g,\tau,\xi)$, то $\exists\lim_{\Delta(\tau)\to 0} S(f+g,\tau,\xi)$

$| \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ и $\int\limits_a^b (f+g)dx = \int\limits_a^b fdx + \int\limits_a^b gdx$

2. Аналогично 1)

3. Аналогично 1)

4. Удобнее на языке колебаний
$f,g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow$ они ограничены $\Rightarrow \exists A > 0, B > 0:$

$$|f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq AB\ \forall x \in [a,b]$$

Пусть τ - разбиение $[a,b]$. Рассмотрим разность из определения колебаний ф-ции fg:

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| = |f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')| =$$

$$= \underbrace{|f(x'') - f(x')|}_{\substack{\text{Разность из}\\ \text{опр. колебания}\\ \text{функции f}}} \cdot \underbrace{|g(x'')|}_{\leq B} + \underbrace{|g(x'') - g(x')|}_{\substack{\text{Разность из}\\ \text{опр. колебания}\\ \text{функции g}}} \cdot \underbrace{|f(x')|}_{\leq A}$$

Следовательно, $\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$

$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g) \Rightarrow \omega_i(fg) \leq B\omega_i(f) + A\omega_i(g)$

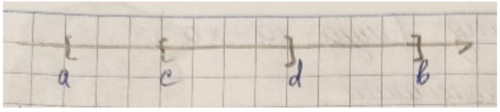
Получаем:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i \leq B\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\Delta x_i + A\sum_{i=1}^{k}\omega_i(g)\Delta x_i \tag{2}$$

f и g интегрируема $\Rightarrow$ по теореме 2 пр.2 $\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau_{1,2}$: (у каждой ф-ции своё)

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon, \sum_{i=1}^{k}\omega_i(g)\Delta x_i < \varepsilon$$

$|\Rightarrow$ правая часть неравенства 2 $\to 0 \Rightarrow$ левая часть неравентсва $\to 0 \Rightarrow$ по той же тореме 2 пр.2 fg - интегрируема

5. 

$[c, d] \subset [a, b]$

Простые факты:

(a) Если f ограничена на $[a, b]$, то f ограничена на $[c, d]$

(b) Пусть τ - разбиение $[c, d]$ мелкости $\Delta(\tau)$. Тогда можно добавить к точкам из τ конченое число точек принадлежащих $[a, b] \setminus [c, d]$, причем в так, чтобы объединение этих точек с τ_1 давало разбиение τ с мелкостью $\Delta(\tau_1) = \Delta(\tau)$

Получаем:

$$0 \leq S_\tau - s_\tau = \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau}} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{суммирование} \\ \text{по разбиению } \tau_1, \\ \text{слагаемых больше}}} (M_i - m_i)\Delta x_i = S_{\tau_1} - s_{\tau_1} \xrightarrow[\substack{\text{по кр Дарбу§0.2} \\ f\text{ -интегр. на } [a,b]}]{} 0$$

$| \Rightarrow S_\tau - s_\tau \to 0 \Rightarrow f$ интегрируема на $[c, d]$

■

§6 Формула Ньютона-Лейбница и приложения

П.1 Свойства интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int\limits_a^x f(t)dt$$

Теорема §6.1 (Непрерывность). *Пусть* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. *Тогда* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *- непрерывная функция на* $[a,b]$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,b]}\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

$F(x)$ определена $\forall x$;

$$\text{Из} f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Rightarrow |f(x)| \leq C \text{ на } [a,b]$$

Далее $F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt$
Итак:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |\int\limits_x^{x+h} f(t)dt| <= C|h| \text{ - липшицевость}$$

$$| \Rightarrow \lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x) \text{ - непрерывность}$$

■

Лемма §6.1 (дифференцируемость). *Пусть* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *и непрерывна в т.* $x \in [a,b]$, *тогда* F *дифференцируема в т.* x *и* $F'(x) = f(x)$

Доказательство.

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} [f(x) + f(t) - f(x)]dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+h} f(x)dt + \int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt = f(x) \cdot h + \alpha(x,h)$$

Итак:
$$F(x+h)-F(x)=f(x)\cdot h+\alpha(x,h)$$
Где $\alpha(x,h)=\int\limits_x^h(f(t)-f(x))dt$
Критерий дифференцируемости: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(x,h)}{h}=0$
Проверим:
Из непрерывности $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |t-x|<\delta\Rightarrow|f(t)-f(x)|<\varepsilon$
Пусть теперь $|h|<\delta$, тогда $\forall t\in(x,x+h)|x-t|<h$ и
$$|\tfrac{\alpha(x,h)}{h}|=|\tfrac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt|<|\tfrac{1}{h}\varepsilon h|=\varepsilon$$
■

Теорема §6.2 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Каждая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$*. Кроме этого для любой первообразной* $G:\int\limits_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$

Доказательство. По лемме $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$, т.е F - первообразная. Далее, если G еще одна первообразная для f, то $G(x)=F(x)+A\ \forall x\in[a,b]$ и
$$G(b)-G(a)=F(b)-F(a)=F(b)=\int\limits_a^b f(x)dx$$
■

П.2 Замена переменной в интеграле Римана

Сначала случай простой: f - непрерывна

Теорема §6.3. $f\in C_{[a,b]},\phi\in C^1_{[\alpha,\beta]},\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$.
Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Доказательство. $f(x)$ - непрерывна $\xRightarrow{\text{по теореме 2§3}} f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$
$f(x),\phi(x),\phi'(t)$ - непрерывны $\Rightarrow$ т.к композиция непрерывных функций непрерывна и произведение непрерывных функций непрерывная функция, получаем:
$$f(\phi(t))\phi'(t)\in\mathcal{R}_{[a,b]}$$

Итак, оба интеграла существуют. Пусть F - первообразная f на $[a,b]$, тогда очевидно $G(\beta)-G(\alpha) = F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$ (В первом и последнем равенстве используется теорема 2) $\blacksquare$

Замечание. Композиция непрерывных функций - непрерывная функция. Но композиция интегрируемых по риману функций может оказаться не интегрируемой

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} - \text{несократима} \\ 0, & x - \text{ иррационально} \end{cases}$ - функция Римана интегрируема на $[0,1]$

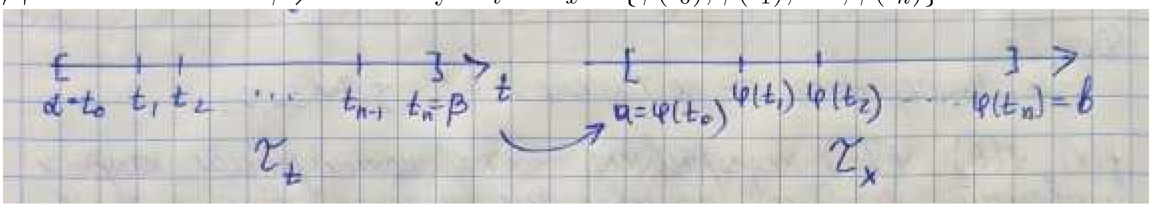
$g(x) = sgn(x)$ - интегрируема на $[0,1]$

Но $g(f(x)) = D(x)$ - функция Дирихле не интегрируема

Теорема §6.4. *Пусть* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \phi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ *и* ϕ *строго возрастает, причем* $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$

Тогда $f(\phi(t))\phi'(t) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *и* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Доказательство. $\phi \nearrow$ поэтому $\forall \tau_t \xrightarrow{!} \tau_x = \{\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_n)\}$



$\phi(t)$ - непрерывна на $[\alpha,\beta] \Rightarrow \phi(t)$ - равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$

$| \Rightarrow \Delta(\tau_t) \to 0 \Rightarrow \Delta(\tau_x) \to 0$

Далее, любой набор $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ задает народ $\xi_k = \phi(\theta_k) \in [x_{k-1}, x_k]$

Рассмотрим $\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1} =$

$= \sum f(\phi(\theta_k))(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})) = \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\overline{\theta_k})(t_k - t_{k-1}) = (\overline{\theta_k} \in [t_{k-1}, t_k])$

$= \sum f(\phi(\theta_k))\phi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}) + \sum f(\phi(\theta_k))(\phi'(\overline{\theta_k}) - \phi'(\theta_k))(t_k - t_{k-1})$

$I = II + III$ (обозначение предыдущего равенства). Пусть $\Delta(\tau_t) \to 0 \Rightarrow \Delta(\tau_x) \to 0$

$| \Rightarrow I \xrightarrow[\Delta(\tau_x)\to 0]{} \int\limits_a^b f(x)dx$, т.к $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

$$|III| \leq C \sum \omega_k(\phi')\Delta t_k \xrightarrow[\Delta(\tau_t)\to 0]{} 0 \text{ т.к } \phi' \in \mathcal{R}_{[\alpha,\beta]}$$

Это означает:

$$\exists \lim_{\Delta(\tau_t)\to 0} II = \lim_{\Delta(\tau_t)\to 0} S(f(\phi)\phi', \tau_t, \theta_k) = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

$\blacksquare$

П.3 Интегрирование по частям, формула Тейлора с остаточным членов в интегральной форме

Теорема §6.5 (Интегрирование по частям). *Пусть* $u, v \in C^1_{[a,b]}$. *Тогда* $\int\limits_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Доказательство. $u(x)v(x)$ - первообразная для $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\blacksquare$

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x,a)$$

Наша цель получить $r_n(x,a)$ в виде интеграла от f, произведений и т.д
Для $n = 0$, т.е $f(x) = f(a) + r_0(x,a)$ такая формула есть

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$$

Продолжим процесс вытаскивание произвольной из под $\int$ - ла

$$f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt = f(a) - \int\limits_a^x f'(t)d(x-t) = f(a) - f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f(a) + f'(a)(a-t) + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt = P_1(x) - \int\limits_a^x \frac{1}{2}f''(t)d(x-t)^2 =$$

$$= P_1(x) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int\limits_a^x f'''(t)(x-t)^2dt = P_2(x) + \frac{1}{2}\int\limits_a^x f'''(t)(x-t)^2dt = \dots \Rightarrow$$

По индукции легко получить формулу:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Теорема §6.6. *Пусть f имеет непрерывную $n+1$ производную на отрезке с концами a и x. Тогда*

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Пример: Вычислить $\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx$ с точностью до $\frac{1}{100}$

интеграл Френеля.

$$|\sin x - P_n(x)| \le \frac{1}{n!}\int\limits_0^x |\sin^{(n+1)} x|\, (x-t)^n\, dt \le \frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n\, dt =$$

$$= \frac{-1}{n!}\int\limits_0^x u^n\, du = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow |\sin x^2 - P_n(x^2)| \le \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx - \int\limits_0^1 P_n(x)\, dx\right| \le \frac{1}{(n+1)!}$$

если $n=4$, то $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$. $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$P_4(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!}$ $\quad \int\limits_0^1 P_4(x^2)\, dx = \int\limits_0^1 x^2 dx - \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 x^6 dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\,\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{14-1}{42} = \frac{13}{42} \approx 0{,}31$$

§7 Критерий Лебега интегрируемости функций по Риману.
Критерий даёт внутреннее описание интегрируемой функции по Риману.
Устанавливает точную взаимосвязь между классами R[a;b] и C[a;b].
п. 1. Множество меры нуль по Лебегу
Опр. E c=R имеет меру нуль по Лебегу, если Ve >0 Э I_n конечная или бесконечная полседовательность интервалов такая, что E c= UI_n и
E |I | < e
Утверждение 1:
а) Точка и конечное множество точек, меры нуль
б) Объединение конечного или счётного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль
в) подмножество множества меры нуль - множество меры нуль
г) отрезок [a;b], a<b не является мноежством меры нуль

Док-во:
б) Пусть E_n множества меры нуль
Пусть E>0. Для каждого E_n покрытие {I_k}:
//////////
Тогда ///////
а) точку можно покрыть интервалом длины <E, остальное вытекает из б)
в) упражнение простое
г) упражнение потруднее. Указание: из произвольного покрытия [a;b] интерв. выделить конечное, затем индукция чтд
Множество Q всех рациональных точек - множество меры нуль.
п. 2. Непрерывность, модуль непрерывности, колебание функции
Определим w///// - колебание функции на ///
////

Утверждение 2.
1) w(x_0)=0 <=> f непрерывна в точке _0
2) w(x_0)=inf////
Док-во:
Упражнение Указание использовать определения предела по Коши или по Гейне, а также критерий коши существования предела в точке
п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману
Опр. Если некторое свойство выполняется в любой точке за исключением точек множества меры нуль, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п.в.)
Теорема
fэR_[a;b] <=> f ограничена и непрерывная почти всюду на [a;b]
Док-во:
(=>) огранниченость доказана ранне (T1 §3)
Надо доказать, что //// меры нуь
Так как ///
достаточно показать, что если aplha >0, то E=////// меры нуль
Строим на [a;b] последовательность разбиений 1/////
Например, [a;b] подследовательно разделим пополам
С каждым разбиением свяжем две ступенчатые функции F_n и f_n
Для фикс. n
////
Полагаем//////
Пусть E'=////-оно счётное - меры нуль.
Теперь нам достаточно доказать, что E\E' меры нуль.
Докажем сначала, что E\E'=///////

хэE\E' означает что x не точка разбиения
=> x всегда внутри некоторого///
////////////
Теперь непосредственно заметим, что E\E' меры нуль
E>0 произвольное, //// по построению,значит ////
Разбиению /// соответствуют интервалы ////
на каждом из которых f// и f// постоянные
Разбьём их на две группы ///
Теперь замечаем, что E\E' /////////
это коненчое объедиение
Итак, //////////
=> E\E' меры нуль
=> доказана непрерывность п.в.
(<=) Ранее доказали, что это верно, если множество разрывов конечное(и даже более общий сл. T3'§3)
Общее док-во -упр(обратный ход)
Теорема доказана!

§ 7 Критерий Лебега интегрируемости функций по Риману.

Критерий даёт внутреннее описание интегрируемой функции по Риману. Устанавливает точную взаимосвязь между классами $\mathcal{R}_{[a;b]}$ и $C_{[a;b]}$.

п. 1. Множества меры нуль по Лебегу.

Опр. $E \subset \mathbb{R}$ имеет меру нуль по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_n$ конечная или бесконечная последовательность интервалов такая, что $E \subset \bigcup_n I_n$ и $\sum_n |I_n| < \varepsilon$

Утверждение 1

а) Точка и конечное мн-во точек, – меры нуль

б) Объединение конечного или счётного семейства множеств меры нуль есть мн-во меры нуль.

в) Подмножество множества меры нуль – множество меры нуль.

г) Отрезок $[a;b]$, $a<b$ не является множеством меры нуль.

Док-во: б) Пусть E_n мн-ва меры нуль.
Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого E_n покрытие $\{I_k^{(n)}\}$:
$$E_n \subset \bigcup_k I_k^{(n)}, \quad \sum_k |I_k^{(n)}| < \varepsilon/2^n.$$

Тогда $\bigcup_n E_n \subset \bigcup_{n,k} I_k^{(n)}$ и $\sum_{n,k} |I_k^{(n)}| = \sum_n \sum_k |I_k^{(n)}| < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

а) Точку можно покрыть интервалом длины $< \varepsilon$, остальное вытекает из б)

в) упр. простое

г) упр. потруднее. Указание: из произв. покрытия $[a;b]$ интерв. выделить конечное, затем индукция.

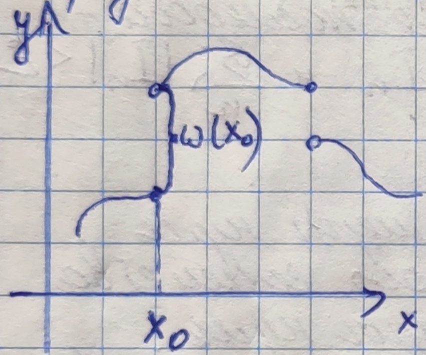
чтд!

Не может быть!

Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных точек — множество меры нуль.

п. 2 Непрерывность, модуль непрерывности, колебание функции.

Определим: $\omega_\delta(x_0) = \sup\limits_{x', x'' \in [x_0-\delta; x_0+\delta]} |f(x') - f(x'')|$ — колебание функции на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$



$\omega(x_0) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega_\delta(x_0)$ — колебание функции в т. x_0.

Утверждение 2.

1) $\omega(x_0) = 0 \iff f$ непрерывна в т. x_0

2) $\omega(x_0) = \inf\limits_{\delta>0} \omega_\delta(x_0)$

Док-во: упр. Указание: использовать определение предела по Коши или по Гейне, а также критерий Коши существования предела в точке.

п. 3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Опр. Если некоторое свойство выполняется в любой точке за исключением точек множества меры нуль, то говорят, что свойство имеет место почти всюду (п. в.)

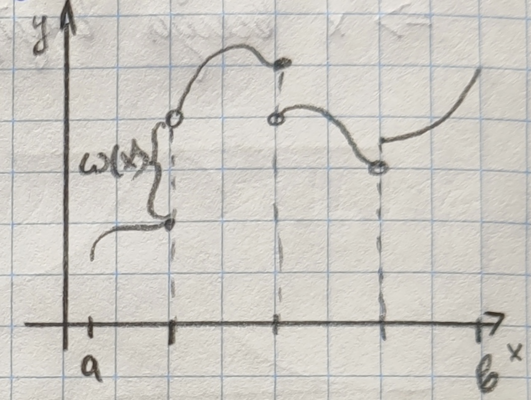
Теорема.

$f \in \mathcal{R}_{[a;b]} \Longleftrightarrow f$ ограничена и непрерывна почти всюду на $[a;b]$.

Док-во: $(\Rightarrow)$ ограниченность доказана ранее (Т1 §3)

Надо доказать, что $\{x : \omega(x) > 0\}$ меры нуль.

Так как $\{x : \omega(x) > 0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{x : \omega(x) \geq \frac{1}{k}\}$

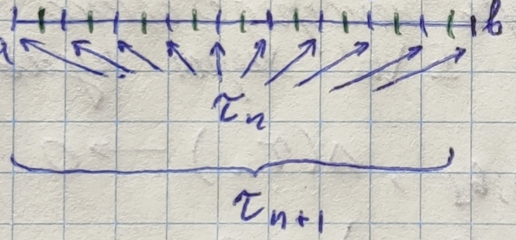


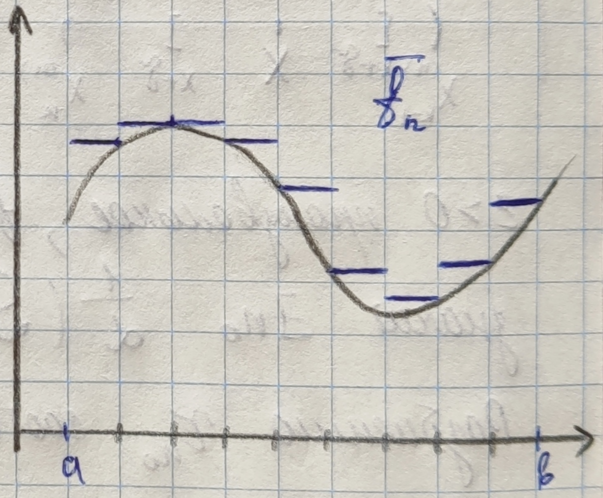
достаточно показать, что если $\alpha > 0$, то $E = \{x : \omega(x) \geq \alpha\}$ меры нуль.

Строим на $[a;b]$ последовательность разбиений τ_n: 1) $\Delta(\tau_n) \to 0$

2) $\tau_n \subset \tau_{n+1}$

Например, $[a;b]$ послед-но делим пополам





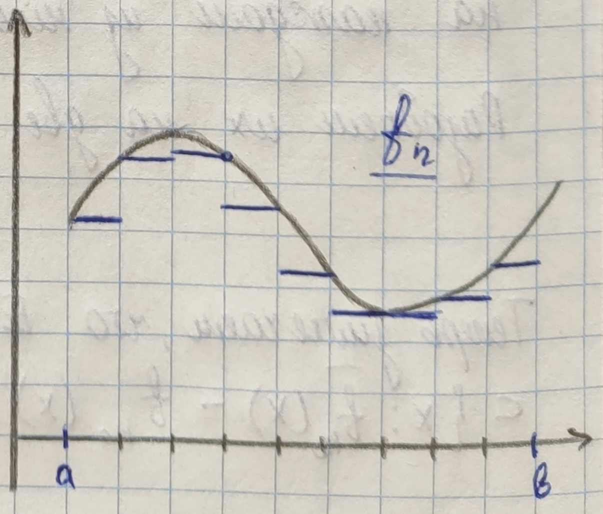
С каждым разбиением свяжем две ступенчатые функции $\overline{f}_n$ и $\underline{f}_n$.

Для фикс. n.

$[a;b] = [a; x_1^n) \cup [x_1^n; x_2^n) \cup \ldots \cup [x_{m-2}^n; x_{m-1}^n) \cup [x_{m-1}^n; b]$

Полагаем $\overline{f}_n(x) = M_k^n$, если $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n)$

$\underline{f}_n(x) = m_k^n$, если $x \in [x_{k-1}^n; x_k^n)$



$\left(M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}; x_k)} f(x) \quad , \; m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}; x_k)} f(x) \right)$

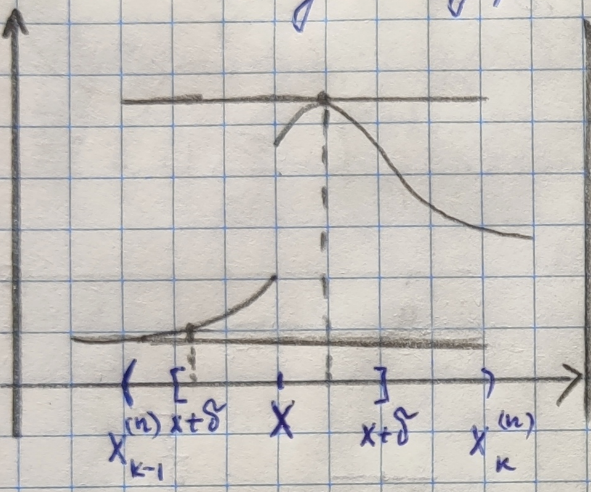
Пусть $E' = \bigcup\limits_n \tau_n$ – оно счётное – меры нуль.

Теперь нам достаточно доказать, что $E \setminus E'$ меры нуль.

Докажем сначала, что $E \setminus E' = \bigcap\limits_n \{x : \overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \alpha\}$

$x \in E \setminus E'$ означает, что x не точка разбиения

$\Rightarrow$ x всегда внутри некоторого $(x_{k-1}^n ; x_k^n)$



$\omega(x) > \alpha$ означает, что $\omega_\delta(x) > \alpha \ \forall \delta$

$\Rightarrow$ если δ мало так, что $[x-\delta ; x+\delta] \subset (x_{k-1}^n ; x_k^n)$, то найдутся x' и x'' : $|f(x') - f(x'')| > \alpha$

$\Rightarrow M_k^n - m_k^n > \alpha$ и $\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \alpha$

Теперь непосредственно заметим, что $E \setminus E'$ меры нуль.

$\varepsilon > 0$ произвольное, $f \in \mathcal{R}_{[a;b]}$, $\Delta(\tau_n) \to 0$ по построен,

значит $\exists n_0 \ \frac{1}{\alpha}(S_{\tau_{n_0}} - s_{\tau_{n_0}}) < \varepsilon$

Разбиению τ_{n_0} соответствуют интервалы $\Delta_k^{n_0} = [x_{k-1}^{n_0} ; x_k^{n_0})$

на каждом из них $\overline{f}_{n_0}$ и $\underline{f}_{n_0}$ – постоянные.

Разобьем их на две группы $\tilde{\Delta}_k^{n_0}$, где $\overline{f}_{n_0} - \underline{f}_{n_0} > \alpha$

$\tilde{\tilde{\Delta}}_k^{n_0}$, где $\overline{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) \le \alpha$

Теперь замечаем, что $E \setminus E' = \bigcap\limits_n \{x : \overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) > \alpha\} \subset$

$\subset \{x : \overline{f}_{n_0}(x) - \underline{f}_{n_0}(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_k \tilde{\Delta}_k^{n_0}$ – это конечное объединение

Итак, $\sum\limits_k |\tilde{\Delta}_k^{n_0}| = \frac{1}{\alpha}\sum\limits_k \alpha |\tilde{\Delta}_k^{n_0}| \leq \frac{1}{\alpha}\sum\limits_k (\tilde{M}_k^{n_0} - \tilde{m}_k^{n_0})|\tilde{\Delta}_k^{n_0}| \leq$

$\leq \frac{1}{\alpha}\left(\sum\limits_k (M_k^{n_0} - m_k^{n_0})|\Delta_k^{n_0}|\right) = \frac{1}{\alpha}\left(S_{\tau_{n_0}} - s_{\tau_{n_0}}\right) < \varepsilon$

$\Rightarrow E \setminus E'$ меры нуль. $\Rightarrow$ доказана непрерывность п. в.

$\Leftarrow$ Ранее доказали, что это верно, если мн-во разрывов конечное (и даже более общий сл. Т3' §3)
Общее док-во – упр. (обратный ход)

Теорема доказана!

§8 Длина кривой

п. 1. Понятие кривой

Опр. Множество точек плоскости $\Gamma = \{(x;y): x=\varphi(t), y=\psi(t),$ φ, ψ – непрерывные функции, $t \in [a;b]\}$ наз-ся непрерывной кривой.

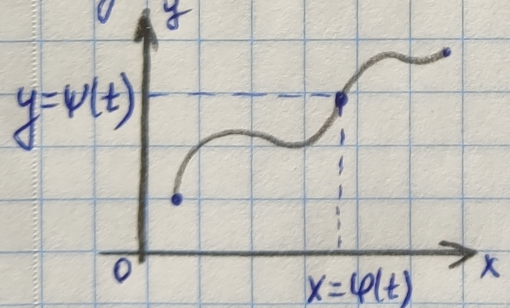
Пример: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} x=\cos \frac{t}{2} \\ y=\sin \frac{t}{2} \\ t\in[0;2\pi] \end{cases}$ – кривые

t – параметр
$\varphi(t), \psi(t)$ – параметризация.

Оставим в стороне вопросы параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр. $\Gamma = \{(x;y;z): x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t),$ φ, ψ, χ – непр-е функции, $t\in[a;b]\}$ – непрерывная пространственная кривая

Физический смысл:



Параметр t – время.
Функции определяют закон движения точки M с координатами $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ на плоскости.

Множество Γ точек M естественно рассматривать как след точки M, движущейся по закону.

След кривой м.б. экзотическим (пример потом)

Опр. Непрерывная кривая наз-ся простой, если различным значениям параметра соотв-т различные точки кривой кроме м.б. $t=a$ и $t=b$. (жорданова кривая)

§8 Длина кривой
п.1. Понятие кривой
Опр. Множество точке плоскости /// - непрерывные функции, ///
называеся непрерывной кривой
Пример 1
//// - кривые
t-параметр
///-параметризация
Оставим в строноне вопросы параметризации и перехода от одной параметризации к другой
Опр. ///-непрерывные функции ///- непрерывная пространственная кривая
Физический смысл:
Параметр t - время
Функции определяют закон движения точки M с координатами x=// y=/// на плоскости
Множество Г точек M естественно рассматривать как след точки M, движущейся по закону.
След кривой может быть экзотиеским(пример потом)
Определение непрерывная кривая называется простой, если различным значениям параметра соотвествуют различные точки кривой, кроме может быть t=a и t=b(жорданова кривая)
п. 2 Понятие длины кривой
Пусть //// кривая заданная параметрически
/////
Этому разбиению соответствует набор точек M_0, M_1,..., M_n на кривой
M_k=////
Последовательно соединяем точки отрезками - получаем ломанную L_r - вписанная ломанная.(в кривую L, отвечающая разбиению r)
Длина k-го звена:
///
Длина вписанной ломаной:///
Опр. Кривая называется спрямляемой, если ///, в этом случае /// называется длиной
(то есть, дригими словами, если множество /// длин вписанных в кривую L ломанных, отвечающих всевозможным разбиениям r, ограничено)
Замечание: l>0
Далее рассматриваем "кусочно" простые кривые
Пример 1(продолжение)
////
Свойства спрямляемых кривых:
1. Если кривая L спрямляема, то длина l её дуги не зависит от параметризации этой кривой.
2. Если L разбита точкой на две кривые L_1 и L_2, то $|L|=|L\_1|+|L\_2|$
3. Пусть l(t) длина дуги кривой соответствующая параметрам от a до t. Функция l(t) - непрерывна
l(t) называется переменной дугой на кривой L
Если в качестве параметра взята длина дуги кривой, то такая параметризация называется естественной.
Пример 2.(график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину, то есть, не спрямляемая кривая)
//////
на [0; 1/pi] непрерывная
Эскиз графика:
а) нули: x=0, x=1/pik k э N

б) точки f(x)=x: x=1/(pi/2+2pik)
в)точки f(x)=-x: x=1/(pi/2+pi(2k-1))
впишем в график ломаную с четырмя горбушками
Длина этой ломаной больше суммы длин высот треугольников, которая равна(считаем справа)
1/(pi/2+pi)+//////
Если вписать аналогичным образом ломанную с n горбушками в график y=f(x), то её длина l_r
l_r>//////////
Получаем sup l_r =+oo
Замечание
f(x)=///// имеет конечную длину на [a;b]
f(x) имеет ограниченную производную: |f'(x)|<=c
l_r =/////
п.3. Длина кривой
Теорема 1
Если ////, то кривая спрямляема и ////
Док-во:
Пусть r произвольное разбиение [a;b]
Длина вписанной ломанной отвечающей r:
////////////
= > доказали спрямляемость
Далее вместо оценки продолжим:
//////
Получаем: //////
Теперь наша задача, взять такой r, чтобы l_r было близко к l, S к ////, а alpha было малое.
Оценим aplha=///////
Для векторов /////
верно ////
кроме этого ///
Значит, |aplha|<=//////, то есть |aplha|<=S/////
Таким образом Vr/////
а) Пусть epsilon>0 выберем delta и разбиение r//// так, чтобы ////
б) /////
в)/////
Пусть ///=>////, чтд!

§ 8 Длина кривой

п. 1. Понятие кривой

Опр. Множество точек плоскости $\Gamma = \{(x;y): x=\varphi(t), y=\psi(t),$
φ, ψ — непрерывные функции, $t \in [a;b]\}$
наз-ся непрерывной кривой.

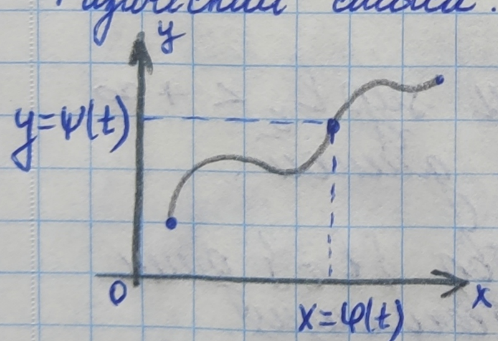
Пример 1 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin t/2 \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$ — кривые

t — параметр
$\varphi(t), \psi(t)$ — параметризация.

Оставим в стороне вопросы параметризации и перехода от одной параметризации к другой

Опр. $\Gamma = \{(x;y;z): x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t),$
φ, ψ, χ — непр-е функции, $t \in [a;b]\}$ —
непрерывная пространственная кривая

Физический смысл:



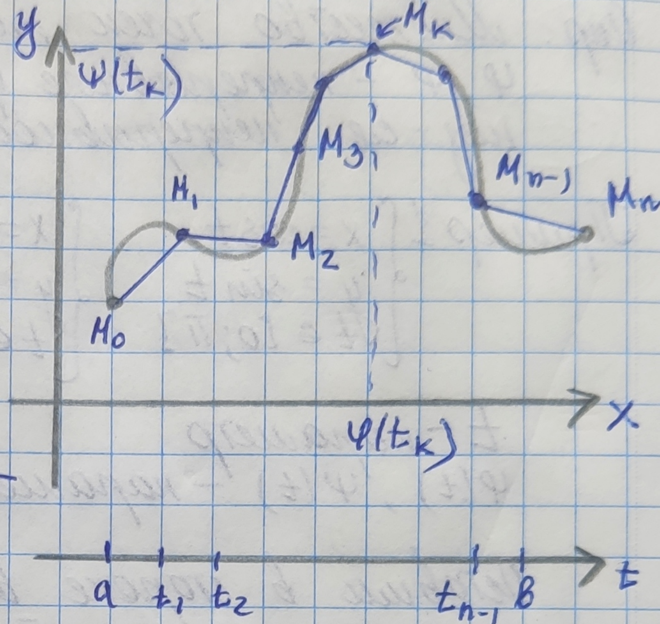
Параметр t — время.
Функции определяют закон движения точки M с координатами $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$
на плоскости.

Множество Γ точек M естественно рассматривать как след точки M, движущейся по закону.

След кривой м.б. экзотическим (пример потом)

Опр. Непрерывная кривая наз-ся простой, если различным значениям параметра соотв-т различные точки кривой кроме м.б. $t=a$ и $t=b$. (жорданова кривая) п. 2 Понятие длины кривой

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [a;b] \end{cases}$ кривая L, заданная параметрически.



τ – разбиение $[a;b]$:
$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.
Этому разбиению соответствует набор точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ на кривой $M_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$

Последовательно соединяем точки отрезками – получаем ломаную L_τ – вписанная ломаная
(в кривую L, отвечающая разб-ю τ)

Длина к-го звена:

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2} = l_k.$$

Длина вписанной ломаной: $l_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k$

Опр. Кривая называется спрямляемой, если $\sup\limits_\tau l_\tau < +\infty$, в этом случае $\sup\limits_\tau l_\tau = l$ наз-ся длиной.

(Т.е., другими словами, если множество $\{l_\tau\}$ длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям τ, ограничено)

Замечание: $l > 0$

Далее рассматриваем „кусочно" простые кривые.

Пример 1 (продолжение)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \qquad 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$$

$$l_\tau = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\sin t_k - \sin t_{k-1})^2 + (\cos t_k - \cos t_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\cos t_k' \cdot (t_k - t_{k-1}))^2 + (-\sin t_k'' \cdot (t_k - t_{k-1}))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2} \cdot \pi$$

$$\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin t/2 \\ t \in [0;2\pi] \end{cases} \qquad 0 < \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \ldots < \tilde{t}_n = 2\pi$$

$$l_{\tilde{\tau}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\sin \frac{\tilde{t}_k}{2} - \sin \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\tilde{t}_k}{2} - \cos \frac{\tilde{t}_{k-1}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{t_k'}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\tilde{t}_k''}{2} (\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1})\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \sqrt{2(\Delta t_k)^2} = \sqrt{2}\pi$$

Свойства спрямляемых кривых:

1. Если кривая L спрямляема, то длина l её дуги не зависит от параметризации этой кривой.

2. Если L разбита точкой на две кривые L_1 и L_2, то $|L| = |L_1| + |L_2|$

3. Пусть $l(t)$ длина дуги кривой соответствующая параметрам от a до t. Функция $l(t)$ – непрерывна

$l(t)$ называется переменной дугой на кривой L.

Если в качестве параметра взята длина дуги кривой, то такая параметризация наз-ся естественной.

Пример 2 (график непрерывной на отрезке функции имеет бесконечную длину — т.е. не спрямляемая кривая)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

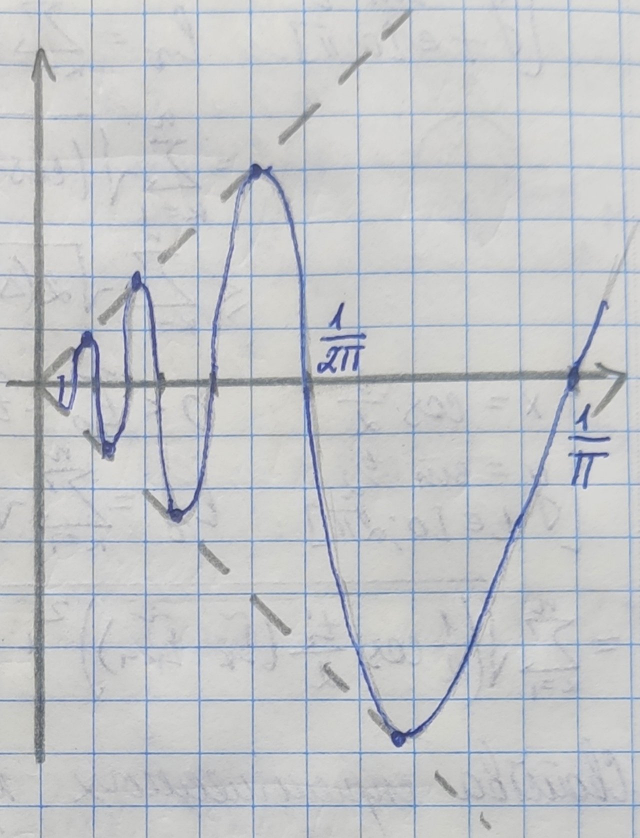
на $\left[0; \frac{1}{\pi}\right]$ непрерывная

Эскиз графика:

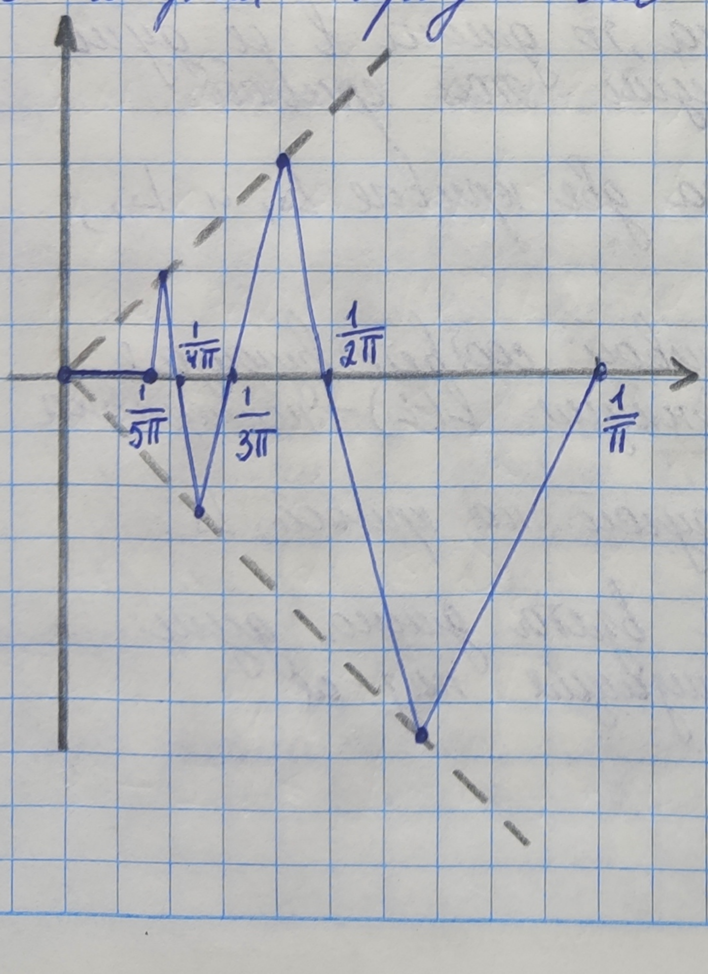
а) нули: $x = 0$, $x = \frac{1}{\pi k}$ $k \in \mathbb{N}$

б) точки $f(x) = x$: $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$

в) точки $f(x) = -x$: $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi}$



Впишем в график ломаную с четырьмя горбушками



Длина этой ломаной больше суммы длин высот треугольников, которая равна (считаем справа)

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 3\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi}$$

Если вписать аналогичным образом ломаную с n горбушками в график $y=f(x)$, то её длина l_τ

$$l_\tau > \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi} + \ldots + \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi} > \frac{1}{\pi+\pi} + \frac{1}{2\pi+2\pi} + \ldots + \frac{1}{n\pi+n\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$ Получаем $\sup l_\tau = +\infty$

Замечание: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет конечную длину на $[a;b]$.

$f(x)$ имеет ограниченную производную: $|f'(x)| \leq C$

$$l_\tau = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \leq \sqrt{C^2+1}\,(b-a)$$

п. 3. Длина кривой.

Теорема 1.

Если $\varphi, \psi \in C^1_{[a;b]}$, то кривая спрямляемая и

$$l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

Док-во: Пусть τ произвольное разбиение $[a;b]$.
Длина вписанной ломаной отвечающей τ:

$$l_\tau = \sum_k \sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2} = \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ и } \psi \text{ диф-ма} \\ \Rightarrow \text{по th Лагранжа} \end{array} \right|$$

$$= \sum_k \sqrt{(\varphi'(t_k^1)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(t_k^2)(t_k-t_{k-1}))^2} \overset{!}{\leq} \sum_k \sqrt{2M^2(t_k - t_{k-1})^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,M(b-a)$$ $\left(\begin{array}{l} t_k^1, t_k^2 \in (t_{k-1}; t_k) \text{ - из th Лагранжа} \\ \varphi'(t), \psi'(t) \text{ непр. на } [a;b] \Rightarrow \text{огранич.} \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ доказали спрямляемость.

Далее, вместо оценки продолжим:

$$l_\tau \overset{!}{=} \sum_k \sqrt{(\varphi'(t_k^1))^2 + (\psi'(t_k^2))^2}\,(t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \sum_k \sqrt{\varphi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^1)^2}\,(t_k - t_{k-1}) +$$

$$+ \sum_k \left(\sqrt{\varphi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\varphi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^1)^2} \right)(t_k - t_{k-1})$$

Получаем: $l_\tau = S\left(\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}, \{t_k^1\}, \tau\right) +$

$$+ \alpha(\varphi', \psi', \{t_k^1\}, \{t_k^2\}, \tau)$$

Теперь наша задача взять такое τ, чтобы l_τ было близко к l, S к $I = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$, а α было малое.

Оценим $\alpha = \sum_k \left(\sqrt{\varphi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^2)^2} - \sqrt{\varphi'(t_k^1)^2 + \psi'(t_k^1)^2} \right)(t_k - t_{k-1})$

Для векторов $a = (\varphi'(t_k^1); \psi'(t_k^2))$ и $b = (\varphi'(t_k^1); \psi'(t_k^1))$

верно $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$, $|a - b| = |\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)|$,

кроме этого $|\psi'(t_k^2) - \psi'(t_k^1)| \le M_k(\psi') - m_k(\psi')$.

Значит, $|\alpha| \le \sum_k (M_k(\psi') - m_k(\psi'))(t_k - t_{k-1})$,

т.е. $|\alpha| \le S_\tau(\psi') - s_\tau(\psi')$

Таким образом, $\forall \tau$

$$|l - I| \le |l - l_\tau| + \left|l_\tau - S\left(\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}, \{t_k^1\}, \tau\right)\right| + |S - I| \le$$

$\leq l - l_\tau + S_\tau(\psi') - s_\tau(\psi') + |\mathfrak{S}(\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}, \{t_k^1\}, \tau) - I|$

а) Пусть $\varepsilon > 0$ выберем δ и разбиение τ_3 $\Delta(\tau_3) < \delta$ так, чтобы $|\mathfrak{S} - I| < \varepsilon/3$

б) $\exists \tau_1 : \; l - l_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}$

в) $\exists \tau_2 : \; S_{\tau_2}(\psi') - s_{\tau_2}(\psi') < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \Rightarrow |l - I| < \varepsilon$

чтд!

Лекция. Несобственный интеграл
Опр несобственного интеграла
свойства несобственных интегралов

Лекция

Несобственные интегралы

Несобственный интеграл 1го рода (по неограниченному промежутку).

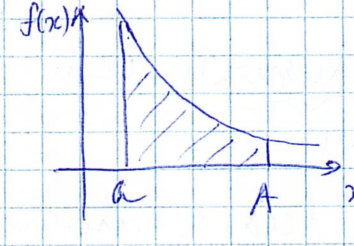
Опр.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;+\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, A]$ для любого $A>a$.

Несобственным интегралом 1го рода от функции $f(x)$ по $[a;+\infty)$ называется предел

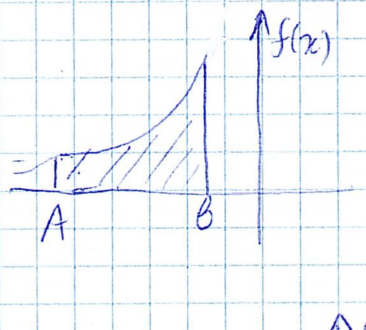
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится; если предел бесконечен или не существует, то интеграл расходится



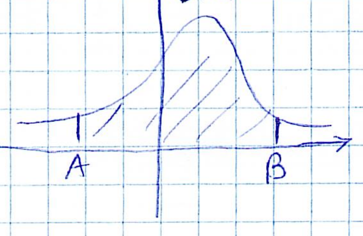
Аналогично, если $f(x)$ определена на $(-\infty; b]$ и интегрируема на $[A, b]$ для любого $A<b$, то

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx.$$



Если $f(x)$ определена на $(-\infty;+\infty)$ и интегрируема на $[A;B]$ для любых $A<B$, то

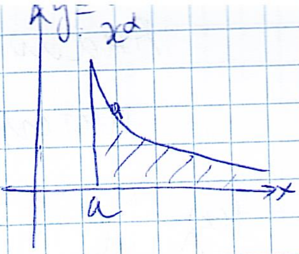
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx$$



(Здесь пределы по A и B рассматриваются независимо друг от друга)

Пример

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A x^{-\alpha}dx = (*)$



$a > 0$

Если $\alpha > 1$, то $(*) = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \Bigg|_a^A = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{A\to+\infty} (\underbrace{A^{1-\alpha}}_{\downarrow\, 0,} - a^{1-\alpha}) =$

т.к. $1-\alpha<0$

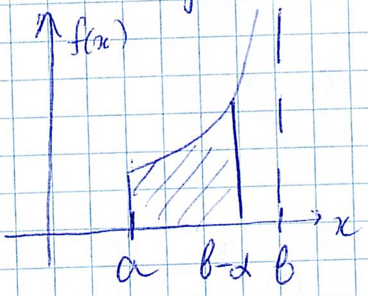
$= -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{1-\alpha}}$, интеграл сходится

Если $\alpha < 1$, то $(*) = \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} (\underbrace{A^{1-\alpha}}_{\downarrow\, +\infty} - a^{1-\alpha}) = +\infty$, интеграл расходится

Если $\alpha = 1$, то $(*) = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln|x| \Big|_a^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln A - \ln a = +\infty$, интеграл расходится

Несобственный интеграл 2го рода (от неограниченной функции)

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; b)$ и интегрируема на $[a; b-\alpha]$ для любого $b-\alpha \in (a; b)$, и пусть $f(x)$ не ограничена при $x \to b-0$.



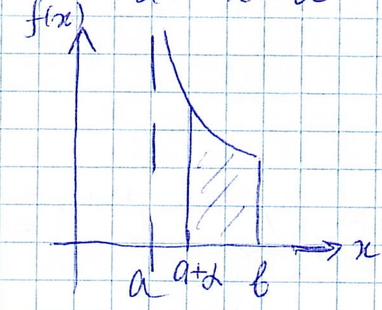
Несобственным интегралом 2го рода от функции $f(x)$ по $[a, b)$ называется предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$$

Интеграл сходится, если предел существует и конечен.

Точка $x = b$ называется особой точкой функции $f(x)$ (или говорят, что в точке $x = b$ функция имеет особенность).

Аналогично, если $f(x)$ определена на $(a;b]$, интегрируема на $[a+\alpha;b]$ $\forall\, a+\alpha\in(a;b)$, и $x=a$ – особая точка, то

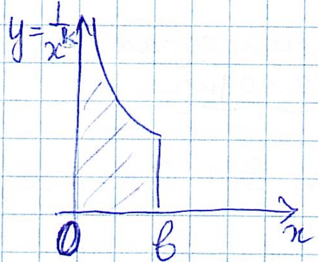


$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{a+\alpha}^b f(x)\,dx.$$

Пример. 2)

$$\int_0^b \frac{dx}{x^k}=(*)$$

$b>0$



Если $k\le 0$, то это собственный интеграл, он сходится

Если $k>0$, то $x=0$ – особая точка

Если $k=1$, то $(*)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_\alpha^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\alpha\to+0}\ln|x|\Big|_\alpha^b=$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\ln b-\underbrace{\ln\alpha}_{\downarrow\,-\infty}=+\infty$$ – интеграл расходится

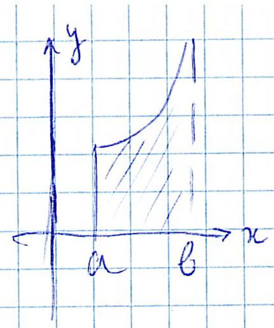
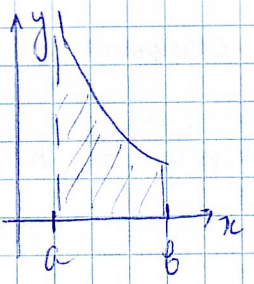
Если $0<k<1$, то $(*)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_\alpha^b x^{-k}\,dx=\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\Big|_\alpha^b=$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{b^{-k+1}}{1-k}-\underbrace{\frac{\alpha^{1-k}}{1-k}}_{\substack{\downarrow\\ 0,\\ \text{т.к. } 1-k>0}}=\frac{b^{1-k}}{1-k}$$ – интеграл сходится

Если $k>1$, то $(*)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_\alpha^b x^{-k}\,dx=\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\Big|_\alpha^b=$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\underbrace{\frac{1}{1-k}}_{\wedge\, 0}\Big(b^{1-k}-\underbrace{\alpha^{1-k}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty,\\ \text{т.к. } 1-k<0}}\Big)=+\infty$$ – интеграл расходится

Интеграл $\int_0^b\frac{dx}{x^k}$ сходится при $k<1$ и расходится при $k\geqslant 1$

Аналогично рассматриваются интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k} \qquad \text{сходится при } k<1, \quad \text{расходится при } k\geq 1$$

$x-a=t$

$dx=dt$

$x\to a+0,\ t\to +0$

$x=b,\ t=b-a$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = -\int_{b-a}^{0} \frac{dt}{t^k} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^k} \qquad \text{сходится при } k<1, \quad \text{расходится при } k\geq 1.$$

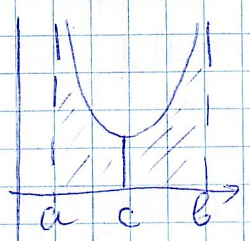
$b-x=t$

$dx=-dt$

$x=a,\ t=b-a$

$x\to b-0,\ t\to +0$

Если $x=a$ и $x=b$ — две особые точки функции $f(x)$, то



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где $c\in(a;b)$ — произвольная точка.

Интеграл в левой части сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

В этом случае значение интеграла не зависит от выбора точки c.

Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_{a+\alpha}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+0}\int_c^{b-\beta} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\bigl(F(c)-F(a+\alpha)\bigr) + \lim_{\beta\to+0}\bigl(F(b-\beta)-F(c)\bigr) =$$

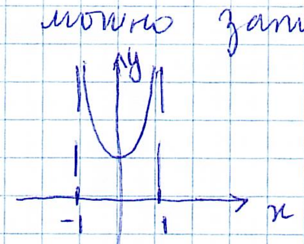
$$= \lim_{\beta\to+0} F(b-\beta) - \lim_{\alpha\to+0} F(a+\alpha) \qquad \text{не зависит от } c.$$

Пример. 3) $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to+0}\arcsin(1-\beta) - \lim_{\alpha\to-0}\arcsin(-1+\alpha) =$$

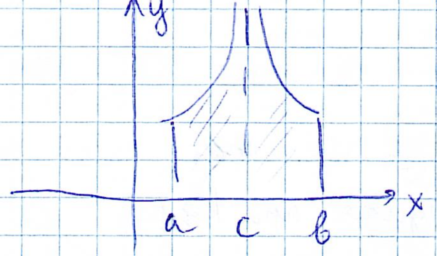
$x=\pm1$ — две особые точки

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ — интеграл сходится

Так как $F(x) = \arcsin x$ непрерывна при $x = \pm 1$, то можно записать кратко: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi$



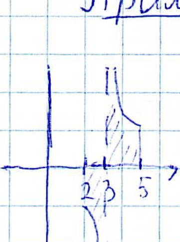
Если $c \in (a;b)$ — особая точка внутри промежутка $(a;b)$, то



$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Интеграл в левой части сходится, если сходятся оба интеграла в правой части

Пример 4) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x-3} = \int\limits_2^3 \frac{dx}{x-3} + \int\limits_3^5 \frac{dx}{x-3} = \lim\limits_{\alpha \to +0} \int\limits_2^{3-\alpha} \frac{dx}{x-3} +$



$x = 3$ — особая точка внутри интервала

$$+ \lim\limits_{\beta \to +0} \int\limits_{3+\beta}^{5} \frac{dx}{x-3} = \lim\limits_{\alpha \to +0} \ln|x-3| \Big|_2^{3-\alpha} +$$

$$+ \lim\limits_{\beta \to +0} \ln|x-3| \Big|_{3+\beta}^{5} = \lim\limits_{\alpha \to +0} \big(\underbrace{\ln|-\alpha|}_{\downarrow \, -\infty} - \ln|-1|\big) + \lim\limits_{\beta \to +0} \big(\ln 2 - \underbrace{\ln \beta}_{\downarrow \, +\infty}\big) -$$

интеграл расходится, т.к. оба предела бесконечны

Свойства несобственных интегралов

Будем рассматривать интеграл вида

$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$, где ω — конечная особая точка или $+\infty$.

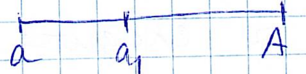
Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\omega)$ и интегрируема на $[a,A]$ для любого $A \in (a;\omega)$.

Если $x = \omega$ — конечная особая точка, то под "$x \to \omega$" будем понимать "$x \to \omega - 0$".

Для интегралов вида $\int\limits_{\omega}^{b} f(x)dx$, где $\omega = -\infty$ или конечная особая точка, свойства аналогичны.

1) Пусть $a < a_1 < \omega$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_{a_1}^\omega f(x)dx$ сходится



Док. Пусть $A \geqslant a_1$, тогда $$\int\limits_a^A f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx}_{\substack{\| \\ const \\ (\text{собственный} \\ \text{интеграл})}} + \int\limits_{a_1}^A f(x)dx$$

Предел $\lim\limits_{A\to\omega} \int\limits_a^A f(x)\,dx$ существует и конечен $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ в правой части существует и конечен $\lim\limits_{A\to\omega} \int\limits_{a_1}^A f(x)dx$.

При этом $$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^\omega f(x)dx,$$

т.е. для несобственных интегралов справедливо свойства аддитивности.

$\boxtimes$

2) (линейность)

Если интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ сходятся, то сходятся и интегралы:

1) $$\int\limits_a^\omega (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx + \int\limits_a^\omega g(x)dx;$$

2) $$\int\limits_a^\omega c\cdot f(x)dx = c\cdot \int\limits_a^\omega f(x)\,dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Док. 1) Для любого $A \in (a;\omega)$
$$\int\limits_a^A (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^A f(x)\,dx + \int\limits_a^A g(x)\,dx$$

При $A\to\omega$ существуют пределы $\lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx$,

$\lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A g(x)dx = \int\limits_a^\omega g(x)dx$. Следовательно, существует и предел

$$\int\limits_a^\omega (f(x)+g(x))\,dx = \lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A (f(x)+g(x))\,dx = \lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A f(x)dx + \lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A g(x)dx =$$
$$= \int\limits_a^\omega f(x)dx + \int\limits_a^\omega g(x)dx$$

2) $\forall A \in (a;\omega)$ $$\int\limits_a^A c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int\limits_a^A f(x)dx$$

При $A\to\omega$ существует $\lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx$. Следовательно,

существует и $$\int\limits_a^\omega c\cdot f(x)dx = \lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A c\cdot f(x)dx = c\cdot\lim\limits_{A\to\omega}\int\limits_a^A f(x)dx = c\cdot\int\limits_a^\omega f(x)dx.$$

$\boxtimes$

3) (Интегрирование по частям)

Пусть функции $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на $[a;\omega)$.
Если интеграл $\int_a^\omega v(x)u'(x)dx$ сходится и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)\cdot v(x)$, то сходится и интеграл

$$\int_a^\omega u(x)v'(x)dx = \lim_{x\to\omega} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^\omega v(x)u'(x)dx$$

Док. Для любого $A\in(a;\omega)$

$$\int_a^A u(x)v'(x)dx = u(A)v(A) - u(a)v(a) - \int_a^A v(x)u'(x)dx$$

При $A\to\omega$: $\quad u(A)v(A)\to\lim\limits_{x\to\omega}u(x)v(x)$, $\quad \int_a^A v(x)u'(x)dx\to\int_a^\omega v(x)u'(x)dx$.

Следовательно, существует конечный

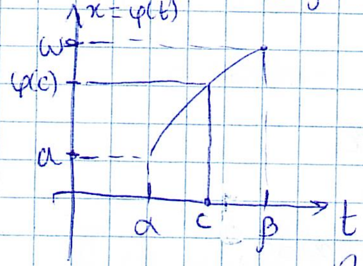
$$\int_a^\omega u(x)v'(x)dx = \lim_{A\to\omega}\int_a^A u(x)v'(x)dx = \lim_{x\to\omega}u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^\omega v(x)u'(x)dx$$

$\boxtimes$

4) (замена переменных)

Пусть функции $x=\varphi(t)$ и $x'=\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta)$ (или $(\beta;\alpha]$),
и $x=\varphi(t)$ монотонна на этом промежутке,

$\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=\omega$ (β может быть в том числе и $=\pm\infty$).



Тогда для любой непрерывной на $[a,\omega)$ и интегрируемой на $[a,A]$ $\forall A\in(a;\omega)$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменных:

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Интегралы в левой и правой частях сходятся или расходятся одновременно

Док. Для любого $c\in(\alpha,\beta)$. $\quad \int_\alpha^c f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_a^{\varphi(c)} f(x)dx$.

Если $c\to\beta$, то $\varphi(c)\to\omega$. Если существует конечный

$\lim\limits_{c\to\beta}\int_\alpha^c f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$, то существует и конечен

$$\lim_{c\to\beta}\int_a^{\varphi(c)} f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

$\boxtimes$

Несобственные интегралы (лекция 1)

1. Определение, основные свойства.

При определении интеграла Римана возникают два существенных ограничения. Во-первых, функция должна быть ограниченной. Во-вторых, определение работает на отрезках – ограниченных множествах.

Далее рассмотрим обобщение понятия интеграла на эти неподходящие по Риману случаи.

Если функция $f(x)$ определена на конечном полуинтервале $[a, b)$, для любого $b' \in (a, b)$ на $[a, b']$ ограничена, но на всём $[a, b)$ не ограничена, то точка b называется *особой точкой* для функции $f(x)$.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, b – особая точка при $b < +\infty$, и для любого $b' \in (a, b)$ функция интегрируема по Риману на $[a, b']$, существует конечный $\lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)dx$, тогда функция $f(x)$ называется интегрируемой в несобственном смысле на множестве $[a,b)$, а указанный предел называется несобственным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. В противном случае говорят, что это расходящийся несобственный интеграл.

Если $b = +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют несобственным интегралом первого рода (1-го рода), если $b < +\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом второго рода (2-го рода).

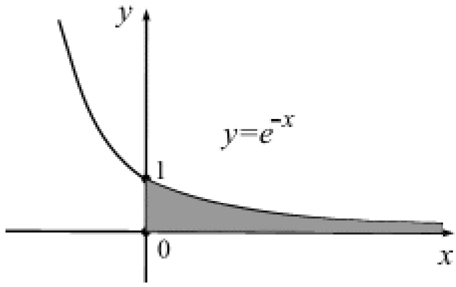
В выше приведённом определении несобственного интеграла рассматривалась особенность в правом конце множества. Легко понять, что аналогично можно определить несобственный интеграл для особенности в левом конце множества интегрирования и на луче $(-\infty,b]$.

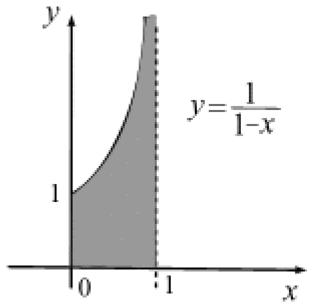
Рассмотрим примеры несобственных интегралов.

Пример 1. *а*) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b'\to+\infty}\int\limits_0^{b'} e^{-x}dx = \lim\limits_{b'\to+\infty}(-e^{-b'}+1)=1$, интеграл сходится и получено его значение;

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim\limits_{b'\to 1-0}\int\limits_0^{b'}\frac{dx}{1-x} = \lim\limits_{b'\to 1-0}(-\ln|1-b'|+\ln 1) = +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

Геометрический смысл этих интегралов:





Площадь не ограниченно простирающейся на плоскости фигуры:
а) конечна,
б) бесконечна.

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ ограничена на конечном полуинтервале $[a, b)$ и для любого $b' \in (a, b)$ интегрируема по Риману на $[a, b']$, то она интегрируема по Риману и на $[a, b]$.

Доказательство. Доопределим функцию в точке b произвольным образом $f(b) = c$. Из условия следует $|f(x)| \le C_1$, $\forall x \in [a, b)$, ясно, $|f(x)| \le C$, $\forall x \in [a, b]$, где $C = \max\{C_1, c\}$.

Рассмотрим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть b' такое, что $b - b' < \varepsilon/4C$. Для интегрируемой на $[a, b']$ функции $f(x)$ найдется разбиение τ' отрезка $[a, b']$ такое, что по нему $S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon/2$. Добавим к τ' точку b и получим разбиение τ отрезка $[a, b]$. Тогда $S_\tau - s_\tau = S_{\tau'} - s_{\tau'} + (M' - m')(b - b') < \varepsilon/2 + 2C\cdot\varepsilon/4C = \varepsilon$, где M', m' – супремум и инфимум функции $f(x)$ на $[b', b]$. Таким образом, утверждение доказано.

Следовательно, определение несобственного интеграла в случае конечного промежутка $[a, b)$ содержательно лишь в случае, когда функция $f(x)$ на нём не ограничена. В противном случае, при условии интегрируемости по Риману на любом $[a, b']$, функция интегрируема по Риману и на всём множестве, или, иначе говоря, в собственном смысле.

Теорема 1. Основные свойства несобственных интегралов.

1. Линейность несобственного интеграла. Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$, то для любых действительных чисел λ и μ функция $\lambda f + \mu g$ тоже интегрируема на $[a, b)$ и $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)dx + \mu\int\limits_a^b g(x)dx.$

2. Аддитивность несобственного интеграла. Для любого $c \in (a, b)$ одновременно сходятся интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$, при этом $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

3. Формула интегрирования по частям в несобственном интеграле. Если функции f, $g \in C^1{}_{[a,b)}$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$ сходятся одновременно и $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$.

4. Формула замены переменной в несобственном интеграле. Если функция $\varphi \in C^1{}_{[\alpha,\beta)}$, возрастающая, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \to b$ при $t \to \beta$-0, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ сходятся одновременно и равны.

Доказательство. Все свойства доказываются одинаково: для собственных интегралов (интегралов Римана) эти свойства справедливы, а затем к справедливым равенствам применяется предельный переход, который обладает соответствующими линейными и аддитивными свойствами.

Пример 2. Эталонные несобственные интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\begin{cases}\dfrac{1-\delta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha\neq 1,\\ -\ln\delta & \alpha=1.\end{cases}$$

Сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, так как

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{A^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha + 1} & \alpha \ne 1, \\ \ln A & \alpha = 1. \end{cases}$$

2. Критерии и признаки сходимости.

Теорема 2 (Критерий Коши). Для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно выполнение условия Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{b}$ такое, что $a \le \bar{b} < b$ и для любых $\bar{b} < b', b'' < b$ (для определенности считаем $b'' > b'$) выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $F(y) = \int\limits_a^y f(x)dx$, $a \le y < b \le +\infty$. Тогда вопрос сходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ означает существование конечного $\lim\limits_{y \to b-0} F(y)$. Применение критерия Коши существования конечного предела слева функции $F(y)$ в точке b даёт: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{b}$ такое, что $a \le \bar{b} < b$ и для любых $\bar{b} < b', b'' < b$ выполняется неравенство $\left| F(b'') - F(b') \right| < \varepsilon$. Остаётся подставить в это неравенство функцию F.

Теорема 3 (Признаки Абеля и Дирихле). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a,b)$, для любого $b' \in (a, b)$ интегрируемы по Риману на $[a, b']$. Для сходимости $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ достаточно выполнения одного из свойств:

α) $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a,b)$;

β) $\left| \int\limits_a^y f(x)dx \right| < C$ при $a \le y < b \le +\infty$, $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to b-0$.

Доказательство. Для любых $a<b',b''<b$ по второй теореме о среднем имеем $\int\limits_{b'}^{b''} f(x)g\left(x\right)dx = g\left(b'\right)\int\limits_{b'}^{c} f(x)dx + g\left(b''\right)\int\limits_{c}^{b''} f(x)dx$, где c лежит между b' и b''. Отсюда критерий Коши завершает доказательство сходимости рассматриваемого интеграла на основании выполнения любого из двух свойств α) или β).

Пример 3. Интеграл Дирихле $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Действительно, он имеет единственную особенность (в «точке» $+\infty$), поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв. Если подынтегральную функцию положить равной 1 в точке 0, то она станет непрерывной на луче $[0,+\infty)$. Интеграл сходится на основании признака Абеля-Дирихле: функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $-\cos x$, а функция $1/x$ монотонно убывает к 0 при $x \to +\infty$, то есть выполнено свойство β).

Теорема 4 (Критерий сходимости в терминах рядов).

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любой возрастающей к b последовательности точек b_n из $[a, b)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} f\left(x\right)dx$ сходится.

Доказательство. => в эту сторону доказательство проводится по критерию Коши.

<= в обратную сторону – доказательство от противного. Посредством критерия Коши создаётся ряд, у которого общий член не стремится к нулю: $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| > \varepsilon,\ \left|\int\limits_{b_2}^{b_3} f(x)dx\right| > \varepsilon,\ \dots$.

Пример 4. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Рассмотрим числовую последовательность $b_n = \pi n$, где $n = 1, 2, \dots$, ясно $b_n \to +\infty$, оценим слагаемые ряда:

$\int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi\left(n+1\right)} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi\left(n+1\right)} \int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi\left(n+1\right)}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – расходится.

Несобственные интегралы (лекция 2)

Теорема 5 (Признаки сравнения). Пусть $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ на $[a, b)$.

1. Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b)$, то

а) из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Если f и g интегрируемы по Риману на $[a, b']$ для любого $b' \in (a,b)$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$, то

а) при $c = 0$ выполняются утверждения пункта 1;

б) при $c > 0$ интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся одновременно.

Доказательство. 1. Справедливость этого утверждения следует из критерия Коши.

2. В части *а*) из $c = 0$ следует существование $\bar{b}$ такого, что на $[\bar{b}, b)$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, то есть $f(x) \leq g(x)$. В части *б*) существует $\bar{b}$ такое, что на $[\bar{b}, b)$ справедливо двойное неравенство $\dfrac{c}{2} \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 2c$, то есть $\dfrac{c}{2} g(x) \leq f(x) \leq 2cg(x)$ (важно $g(x) > 0$). Это двойное неравенство и объясняет одинаковое поведение рассматриваемых интегралов.

Признаки сравнения – это очень эффективный инструмент в исследовании несобственных интегралов на сходимость.

Пример 5. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} dx$, 2) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$, 3) $\int\limits_0^{+\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$.

Решения. 1). Подынтегральная функция $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$ при $x \to +\infty$ эквивалентна функции $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Поскольку $3/2 > 1$, интеграл сходится.

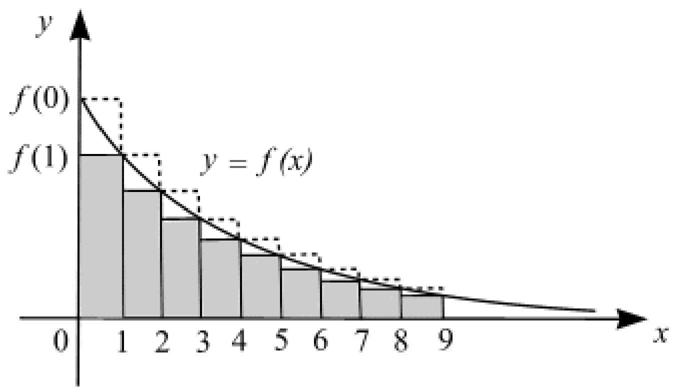
2). На луче $[1, +\infty)$ имеет место неравенство между положительными функциями $e^{-x^2} \le e^{-x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится.

3). Поскольку

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{1/\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\cos x}{\sin x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot x^{-3/2}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot(-2x^{\frac{1}{2}}\cos x) = 0$ здесь в первом равенстве использовали правило Лопиталя, во втором – первый замечательный предел. Интеграл $\int\limits_0^{+\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

Теорема 6 (Интегральный признак сходимости рядов). Пусть $f(x) \ge 0$ на луче $[1,+\infty)$ и убывает на нём. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Функция $F(b) = \int\limits_1^b f(x)dx$ и сумма $\sum\limits_{n=1}^{[b]} f(n)$ возрастают в силу не отрицательности функции $f(x)$. Значит, сходимость равносильна их ограниченности. Так как $f(x)$ убывает, справедливы следующие оценки, завершающие доказательство: $\sum\limits_{n=2}^{[b]} f(n) \le F(b) \le \sum\limits_{n=1}^{[b]} f(n)$.



Следствие. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ сходятся одновременно при $p > 1$.

3. Абсолютная и условная сходимость интегралов.

Для собственного интеграла Римана имеет место свойство: из интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$ следует интегрируемость модуля функции $|f(x)|$ на $[a, b]$. Причём, обратное утверждение не верно: функция Дирихле $f(x)=\begin{cases} 1, & x-\textit{рациональное}, \\ -1, & x-\textit{иррациональное} \end{cases}$ не интегрируема по Риману на любом отрезке, а функция $|f(x)| = 1$ – интегрируема.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 7. Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши, так как $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \le \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|dx$.

Обратное утверждение не верно.

Пример 6. Интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, но не абсолютно (см. примеры 3-4).

Такие интегралы называются условно сходящимися.

Возможны случаи несобственных интегралов с несколькими особенностями. Укажем, в каком смысле они понимаются. Пусть рассматривается $\int\limits_a^b f(x)dx$, где a,b особые точки, а между ними особых точек нет. Если оба несобственных интеграла $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ существуют (здесь c между a и b), то полагают по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

В противном случае говорят, что интеграл, стоящий слева, расходится.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ для $p > 0$.

Сначала посмотрим, что происходит возле нуля? А происходит следующая эквивалентность: $\frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$. Здесь $\frac{\sin x}{x^p} > 0$. Таким образом, сравнением с эталонным интегралом получаем, что $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ при $p - 1 < 1$ ($p < 2$) сходится, причём абсолютно в силу не отрицательности самой функции, а при $p - 1 \geq 1$ ($p \geq 2$) интеграл расходится.

Теперь посмотрим поведение на бесконечности с учётом $p < 2$. При $p > 0$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится по признаку Дирихле.

А что происходит здесь с абсолютной сходимостью? При $x \in (1, +\infty)$ $\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$, поэтому по признаку сравнения для $1 < p < 2$ сходимость абсолютная.

Итак, представив $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, мы получили одновременную сходимость слагаемых при $0 < p < 2$. При $p \geq 2$ первое слагаемое расходится, значит, расходится исходный интеграл. При этом установлено, что для $1 < p < 2$ сходимость обоих слагаемых, а значит и исходного интеграла, абсолютная.

Пример 8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Здесь особенность только 1 рода, так как в нуле подынтегральная функция равна нулю и непрерывна справа. Сделаем замену переменной $t = x^2$, тогда $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$ сходятся одновременно, и при сходимости одного из них равны. Отметим, что второй интеграл сходится по признаку Дирихле. Абсолютной сходимости нет – это устанавливается критерием сходимости в терминах рядов (см. пример 4). Таким образом, ряд условно сходящийся.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(x^3+x\right)dx$.

Обозначим $y = x^3 + x$, тогда $y' = 3x^2 + 1 > 0$, следовательно, y возрастает. Из монотонности функции $y(x)$ следует существование обратной функции $x = \varphi(y)$, тоже монотонно возрастающей. По правилу дифференцирования обратной функции получаем $\varphi'(y) = 1/y'(\varphi(y)) = 1/(3\,\varphi^2(y) + 1)$ и по формуле замены переменной $\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(x^3+x\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos y \cdot \varphi'(y)dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos y}{3\varphi^2(y)+1}dy$.

Так как $\varphi(y) \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$, получившийся интеграл сходится по признаку Дирихле.

4. Главное значение несобственного интеграла.

Несобственный интеграл 1 рода $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_A^B f(x)dx$. То есть он сходится, если при не зависимом друг от друга стремлении $A \to -\infty$, $B \to +\infty$ существует конечный предел.

Для несобственного интеграла 2 рода, если особая точка c (точка, в окрестности которой функция не ограничена) находится внутри промежутка $[a,b]$ и функция $f(x)$ собственно интегрируема по каждому множеству $[a,c-\alpha]\bigcup[c+\beta,b]$, то несобственным интегралом 2 рода от f по $[a,b]$ называют

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to+0} \int\limits_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Если указанные пределы существуют конечные, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

В некоторых случаях, в частности при исследовании сплошных сред, оказывается целесообразным отдельным расходящимся интегралам приписывать в некотором условном смысле числовое значение. Это можно сделать различными способами. Коши предложил делать это следующим образом.

Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет единственную особенность внутри интервала интегрирования в точке $x = c$. Тогда эту особенность симметрично вырезают, после чего переходят к пределу, то есть полагают

$$\lim_{\alpha\to+0}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx+\int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\right]=v.p.\int_a^b f(x)dx.$$

Такой предел может существовать и в том случае, если исходный интеграл в обычном смысле расходится. Рассмотренный предел называется главным значением несобственного интеграла и обозначается *v.p.* (от английского *value principal*, главное значение) перед знаком интеграла. Подобным образом главным значением интеграла, взятого по всей числовой оси, называется предел $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx$, то есть предел при симметричном движении в бесконечности.

Интегралы расходящиеся, но имеющие главное значение часто называются сингулярными, в отличие от собственных или сходящихся несобственных интегралов, которые называют регулярными.

Пример 10. Интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ расходится, так как первообразная функция, то есть $\ln|x|$, имеет бесконечный разрыв на интервале интегрирования при $x=0$. В то же время главное значение

$$v.p.\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{2}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\ln\varepsilon-\ln1+\ln2-\ln\varepsilon\right]=\ln2$$

существует, так как опасные слагаемые $\pm\ln\varepsilon$ взаимно уничтожаются за счет симметрии до перехода к пределу.

Пример 11. $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\cos dx=\lim\limits_{N\to+\infty}\sin x\Big|_{-N}^{N}=\lim\limits_{N\to+\infty}2\sin N$. Главное значение рассмотренного несобственного расходящегося интеграла не существует.

Пример 12. $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin dx=\lim\limits_{N\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-N}^{N}=0$. Главное значение существует, хотя сам интеграл расходится и потому является сингулярным.

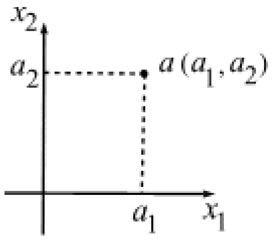
Функции многих переменных

§1. Пространство R^n

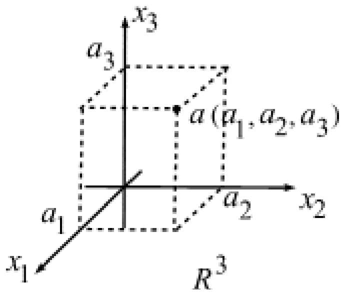
1. Множество R^n, евклидова метрика.

Определение 1. $R^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n \in R\}$ – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел.

Пример. R^1, R^2, R^3 – имеют хорошую геометрическую иллюстрацию. Координатная прямая, плоскость и координатное пространство:

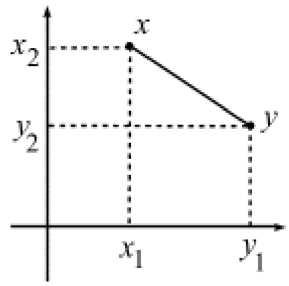


R^2



R^3

Определение 2. Пусть $x, y \in R^n$. Величина



$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

называется евклидовым расстоянием (евклидовой метрикой) между элементами x и y.

Определение 3. Множество R^n наделённое евклидовой метрикой $\rho(x, y)$ называется n-мерным евклидовым пространством.

Теорема 1. $\rho(x, y)$, как функция двух переменных, обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (отделимость);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Доказательство. Свойства 1) и 2) вытекают из определения. Для доказательства свойства 3) нам понадобится следующее неравенство.

***Неравенство Коши-Буняковского (НКБ)*:**

$|x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_n{}^2}$, при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда найдется скаляр λ такой, что $x = \lambda y$, то есть $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, ..., $x_n = \lambda y_n$.

Для доказательства неравенства рассмотрим квадратный трёхчлен

$P(t) = (x_1 - ty_1)^2 + ... + (x_n - ty_n)^2 = A\,t^2 - 2B\,t + C$, где $A = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_n{}^2$, $B = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, $C = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2$.

Если $A = 0$, то $y = \mathbf{0}$, то есть $y = (0, 0, ..., 0)$ и неравенство выполняется.

При $A \neq 0$, поскольку $P(t) \geq 0$, его дискриминант $D_1 = B^2 - AC \leq 0$, то есть $B^2 \leq AC$ и НКБ выполняется. При этом, если $D_1 = 0$, то $P(t)$ имеет корень, который назовём $t = \lambda$. Тогда $(x_1 - \lambda y_1)^2 + \ldots + (x_n - \lambda y_n)^2 = 0$ и $x = \lambda y$.

Вернёмся к доказательству свойства 3). Рассмотрим

$$\rho^2(x, y) = ((x_1 - z_1) + (z_1 - y_1))^2 + \ldots + ((x_n - z_n) + (z_n - y_n))^2 =$$

$$= \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2((x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \ldots + (x_n - z_n)(z_n - y_n)) \leq \text{по НКБ}$$

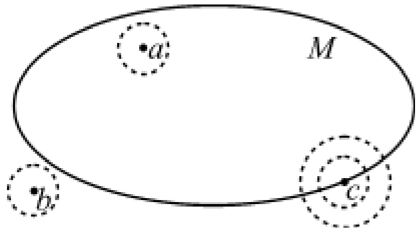
$$\leq \rho^2(x, z) + \rho^2(z, y) + 2\rho(x, z)\rho(z, y) = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2. \text{ чтд.}$$

2. Топология R^n.

Множество $B(a, r) = \{x \in R^n: \rho(x, a) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке a радиуса $r > 0$.

Пусть множество $M \subset R^n$.

- a – *внутренняя* точка M, если существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \subset M$.
- a – *граничная* точка M, если для любого $r > 0$ в $B(a, r)$ есть точки и из M, и не принадлежащие множеству M.
- a – *внешняя* точка M, если существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \cap M = \varnothing$.



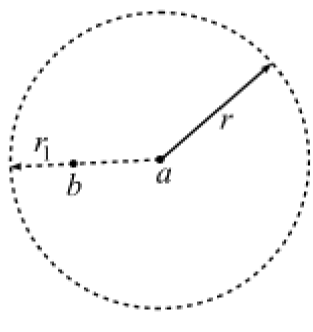
Здесь a – внутренняя, b – внешняя, c – граничная точки множества M.

Определение 4. Множество M называется *открытым*, если для любого $a \in M$ существует $r > 0$ такое, что $B(a, r) \subset M$, то есть любая его точка – внутренняя.

Определение 5. Множество F называется *замкнутым*, если его дополнение $R^n \setminus F$ – открытое множество.

Утверждение 1. Открытый шар $B(a, r)$ – открытое множество.

Доказательство. Пусть $b \in B(a, r)$ – произвольная точка шара, ясно, $\rho(b, a) < r$. Определим $r_1 = r - \rho(b, a)$. Теперь заметим, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$. Пусть $c \in B(b, r_1)$ – произвольная точка. Заметим, что
$\rho(c, a) \leq \rho(c, b) + \rho(b, a) < r_1 + \rho(b, a) = r$, это означает, что $c \in B(a, r)$.



Замечание. Язык геометрии чрезвычайно удобен в теории метрических пространств. Рисунок справа показывал, как надо решать поставленную задачу. Вместе с тем, доказательство носит самостоятельный характер и не опирается на него.

Утверждение 2. Множество $\bar{B}(a, r) = \{x \in R^n: \rho(x, a) \leq r\}$ – замкнутое множество.

Доказательство. Необходимо заметить, что дополнение шара $\bar{B}(a, r)$, а им будет множество $M = \{x \in R^n: \rho(x, a) > r\}$, является открытым. Выполните его самостоятельно.

Сходящиеся последовательности в $\boldsymbol{R^n}$.

Определение 6. Пусть точки $x_m \in R^n$ $(m = 1, 2, ...)$, $a \in R^n$, то есть $x_m = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}\right)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Последовательность точек x_m называется *сходящейся* к точке a ($x_m \to a$) при $m \to \infty$, если $\rho(x_m, a) \to 0$.

В терминах ε-N , как обычно: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: при $m \geq N$ выполняется $\rho(x_m, a) < \varepsilon$.

Открытый шар $B(a, \varepsilon) = \{x \in R^n: \rho(x, a) < \varepsilon\}$ с центром в точке a радиуса $\varepsilon > 0$ называется *ε-окрестностью* точки a.

Утверждение 3. Последовательность $x_m \to a$ при $m \to \infty$ <=> имеет место покоординатная сходимость $\begin{cases} x_1^{(m)} \to a_1 \\ x_2^{(m)} \to a_2 \\ \quad ... \\ x_n^{(m)} \to a_n \end{cases}$ при $m \to \infty$.

Доказательство. => Во-первых, заметим, что $x_1^{(m)} \to a_1$ при $m \to \infty$. Поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x_m, a) = \sqrt{\left(x_1^{(m)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(m)} - a_2\right)^2 + ... + \left(x_n^{(m)} - a_n\right)^2} \geq \sqrt{\left(x_1^{(m)} - a_1\right)^2 + 0} = \left|x_1^{(m)} - a_1\right|,$$

то из $\rho(x_m, a) \to 0$, следует $x_1^{(m)} \to a_1$. Аналогично, для остальных координат.

<= $\rho^2(x_m, a) = \left(x_1^{(m)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(m)} - a_2\right)^2 + ... + \left(x_n^{(m)} - a_n\right)^2 \to 0$ при $m \to \infty$, поскольку каждое слагаемое стремится к нулю при $m \to \infty$ в силу покоординатной сходимости.

Утверждение 4. (Характеризация замкнутых и открытых множеств в терминах последовательностей).

1). F замкнуто <=> из того, что $x_m \in F$ и $x_m \to x$ следует, что $x \in F$.

2). U открыто <=> из того, что $x \in U$ и $x_m \to x$ следует, что существует номер N такой, что при $m \geq N$ $x_m \in U$.

Доказательство. 1) => От противного, предположим $x \notin F$, тогда дополнение F – открытое множество, значит, существует шар $B(x, \varepsilon)$, который не пересекается с F. С другой стороны, $x_m \to x$, отсюда следует, что с некоторого номера $x_m \in B(x, \varepsilon)$. Таким образом, получили, что с одной стороны любое $x_m \in F$, с другой стороны при некотором индексе m имеем $x_m \notin F$.

<= Обратно. Допустим F обладает указанным в условии свойством, но не замкнуто. Тогда его дополнение не является открытым, что, в свою очередь, означает, что не все его точки внутренние. Выберем эту точку, она $x \notin F$, и при этом любой шар $B(x, r)$ имеет непустое пересечение с F. Для таких шаров выберем $r = 1/m$ и $x_m \in B(x, 1/m) \cap F$. Тогда получаем последовательность $x_m \in F$ и $x_m \to x$ и $x \notin F$. Противоречие.

2) Теперь это свойство можно доказать двумя способами. Дать самостоятельное доказательство, следуя идеям доказательства 1). Или переходя к дополнениям воспользоваться доказанным свойством 1).

§2. Компакты в R^n

Определение 1. Множество $K \subset R^n$ называется компактом, если из любого покрытия множества K открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где U_α – открытые множества, то можно выделить конечный набор индексов α_1, α_2, ..., α_p: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$.

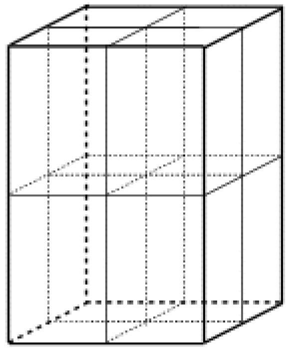
Пример. В пространстве R^1 отрезок $[a, b]$ – компакт.

Схема доказательства: 1) от противного; 2) при делении отрезка пополам выделяется та часть, которая не имеет конечного подпокрытия интервалами; 3) эта половинка снова делится пополам и опять выделяется половинка не имеющая конечного подпокрытия; и так далее.

Тем самым создаётся последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. По теореме о вложенных отрезках их пересечение состоит из единственной точки c, при этом она является пределом числовых последовательностей левых a_m и правых b_m концов вложенных отрезков.

Для построенной точки c можно выделить из данного покрытия одно открытое множество U, которому она принадлежит. Далее, при некотором $\varepsilon > 0$ интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ содержится во множестве U и, поскольку $a_m \to c$ и $b_m \to c$, начиная с некоторого номера все $[a_m, b_m]$ попадают в U. Иными словами построенные отрезки покрылись одним множеством. Противоречие.

Теорема 1. Параллелепипед $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ – является компактом в R^n.



Доказательство. Поведём по схеме примера. От противного. Разобьём каждый координатный отрезок $[a_k, b_k]$, где $k = 1, 2, ..., n$, на два: $\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$. Полученные отрезки дают 2^n параллелепипедов в R^n, объединение которых составляет весь Π.

Пусть $\{U_\alpha\}$ – произвольное покрытие Π открытыми множествами, обозначим $\Pi_1 = [a^1{}_1, b^1{}_1] \times [a^1{}_2, b^1{}_2] \times ... \times [a^1{}_n, b^1{}_n]$ тот из 2^n параллелепипедов, который не имеет конечного подпокрытия (в силу нашего предположения). По его поводу повторим рассуждения, которые только что произвели относительно Π. И так далее.

Получим последовательность, вложенных друг в друга, параллелепипедов: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, ...$. Заметим, что выполняются свойства:

1) для каждой координаты k отрезки вложенные $\left[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}\right] \subset \left[a_k^{(m-1)}, b_k^{(m-1)}\right]$;

2) длины рёбер этих параллелепипедов по каждой координате стремятся к нулю: $b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{b_k^{(m-1)} - a_k^{(m-1)}}{2} = \frac{b_k - a_k}{2^m} \to 0$ при $m \to \infty$.

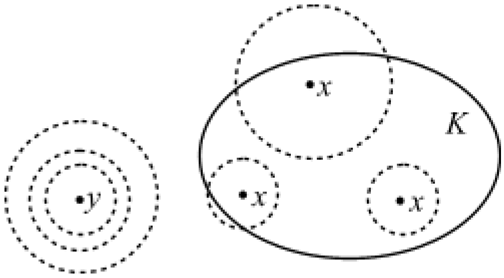
Таким образом, для каждого k по теореме о вложенных отрезках существует единственное число $c_k \in \bigcap_m \left[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}\right]$. Следовательно, точка $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \Pi_m$ для всех m. Поскольку $c \in \Pi$, найдется U_{α_0} из покрытия Π, которому принадлежит c. Кроме того, для любого k имеет место сходимость $a_k^{(m)} \to c_k$ и $b_k^{(m)} \to c_k$ (покоординатная сходимость) и $a_m = \left(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, ..., a_n^{(m)}\right) \to c$, $b_m = \left(b_1^{(m)}, b_2^{(m)}, ..., b_n^{(m)}\right) \to c$. Множество – открытое, значит, найдется шар с центром с такой, что $B(c, r) \subset U_{\alpha_0}$ и с некоторого номера a_m и b_m лежат в шаре, как и Π_m. Тем самым, Π_m получит покрытие из одного множества U_{α_0}. Противоречие.

Утверждение 1. Пусть K – компактное множество, $F \subset K$, F – замкнутое множество. Тогда F – компакт.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ – произвольное покрытие F открытыми множествами, добавим к этому покрытию открытое множество $R^n \setminus F$. Новый набор открытых множеств покрывает всё R^n и компакт K. Выберем конечное покрытие K, оно является конечным покрытием F, а если теперь отбросить открытое множество $R^n \setminus F$, то оставшиеся открытые множества составляют подпокрытие из $\{U_\alpha\}$, конечное и покрывающее F.

Определение 2. Множество $K \subset R^n$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Теорема 2. (***Критерий компактности*** множества в R^n) Множество K – компакт в R^n тогда и только тогда, когда K – замкнутое и ограниченное.



Доказательство. Пусть K – компакт в R^n. Заметим, что $R^n \setminus K$ – открытое. Рассмотрим некоторую y $\in R^n \setminus K$. Поскольку если $x \in K$, получаем $x \neq y$ и найдутся $\varepsilon_x > 0$ и $r_x > 0$ такие, что $B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, r_x) = \varnothing$. Рассмотрим покрытие множества K только что полученными $B(x, \varepsilon_x)$ открытыми шариками для всех его точек: $\bigcup_{x\in K} B(x, \varepsilon_x) \supset K$. Поскольку K компакт $\bigcup_{k=1}^{m} B\left(x_k, \varepsilon_{x_k}\right) \supset K$. Теперь выберем минимальное из r_{x_k} : $r = \min_{1\le k\le m} r_{x_k}$, тогда $B(y, r) \cap B\left(x_k, \varepsilon_{x_k}\right) = \varnothing$ значит, $B(y, r) \cap K = \varnothing$ и y – внутренняя точка дополнения, K – замкнутое.

Ограниченность. Рассмотрим последовательность шаров с центром в $\mathbf{0}$, радиуса p – натуральное число. Ясно $K \subset R^n = \bigcup_{p=1}^{\infty} B(\mathbf{0}, p)$, поскольку K компакт, существует натуральное число s, такое, что $K \subset \bigcup_{p=1}^{s} B(\mathbf{0}, p) = B(\mathbf{0}, s)$.

Обратно. Так как K – ограниченное, то существует параллелепипед $\Pi \supset K$. Параллелепипед компактен (см. теорему 1), а множество K – замкнутое, по утверждению 1 оно компактно. Теорема доказана.

Теорема 3. (***Критерий компактности*** множества в R^n в терминах последовательностей). K – компакт в $R^n \Leftrightarrow$ из любой последовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k}, которая сходится к элементу множества K, то есть $x_{m_k} \to x \in K$.

Доказательство следует из соображений покоординатной сходимости и из известной леммы Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Функции многих переменных (лекция 2)

§3. Предел функции многих переменных

1. Отображения, координатные функции, предел.

Будем говорить, что задана функция f: $R^n \to R$, если каждой точке x некоторого множества $M \subset R^n$ ставится в соответствие некоторое число y. Поскольку $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такая функция записывается как $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или коротко $y = f(x)$. Так как аргумент функции имеет несколько координат, её называют ***функцией многих*** (нескольких) ***переменных***.

Пример 1. Функция $y=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2}$ определена на n-мерном шаре радиуса 1 с центром в точке $\mathbf{0}(0, 0, ..., 0)$. Множеством её значений является отрезок $[0, 1]$.

Будем также рассматривать отображения f: $R^n \to R^m$.
Здесь запись $y = f(x)$ будет означать $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;
в свою очередь $y = f(x)$ означает $y \in R^m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$.

Таким образом $y=f\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases} y_1=f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ y_2=f_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ \quad ...\\ y_m=f_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\end{cases}$ и $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ ...\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ f_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ ...\\ f_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\end{pmatrix}$

Функции $y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются ***координатными функциями*** отображения f : $R^n \to R^m$. Довольно часто отображения из R^n в R^m называют *векторно-значными* функциями или просто функциями, действующими из R^n в R^m.

Замечание (о координатных функциях сложной функции).

Пусть имеются функции g: $R^k \to R^n$ и f: $R^n \to R^m$, рассмотрим поподробнее сложную функцию f от g, которая действует из R^k в R^m, $x = g(t)$, $y = f(x)$, $y = f(g(t))$.

$$x=g\left(t\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=g_1\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\\ x_2=g_2\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\\ \quad ...\\ x_n=g_n\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\end{cases},\ y=f\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases} y_1=f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ y_2=f_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\ \quad ...\\ y_m=f_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\end{cases},$$

$$y=f(g(t))\Leftrightarrow\begin{cases} y_1=f_1\left(g_1\left(t_1,t_2,...,t_k\right),g_2\left(t_1,t_2,...,t_k\right),...,g_n\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\right)\\ y_2=f_2\left(g_1\left(t_1,t_2,...,t_k\right),g_2\left(t_1,t_2,...,t_k\right),...,g_n\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\right)\\ \qquad\qquad\qquad ...\\ y_m=f_m\left(g_1\left(t_1,t_2,...,t_k\right),g_2\left(t_1,t_2,...,t_k\right),...,g_n\left(t_1,t_2,...,t_k\right)\right)\end{cases}.$$

***Определение* 1. (*Предела функции многих переменных в точке*)**

Пусть $a \in R^n, A \in R^m$. $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=A$ означает:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: при $0<\rho(x, a)<\delta$ выполняется $\rho(f(x), A)<\varepsilon$ (по Коши).

Замечание. Здесь $\rho(x, a)$ и $\rho(f(x), A)$ – расстояния в пространствах разной размерности (R^n и R^m).

Так же как и для функций одной переменной формулируется понятие предела по Гейне и имеет место

***Теорема* 1.** (Эквивалентность определений по Коши и по Гейне).

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$ по Коши $\Leftrightarrow \forall\ x_k$: $x_k \neq a$ из $x_k \to a$ следует $f(x_k) \to A$ (по Гейне).

Поскольку сходимость в R^n (и в R^m) равносильна покоординатной сходимости, справедлива

Теорема 2. Пусть $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f_1\left(x\right)=A_1\\ \quad ...\\ \lim\limits_{x\to a} f_m\left(x\right)=A_m\end{cases}$

Таким образом, исследование на существование и значение предела отображения сводится к исследованию координатных функций, то есть функций, действующих из R^n в R.

Это означает, что если некоторое свойство относительно пределов справедливо для функций $f: R^n \to R$, то оно естественным образом переносится и на отображения $f: R^n \to R^m$.

Определимся ещё с тем, что подразумевается под понятием предела функции $f: R^n \to R$ при стремлением её аргумента $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в бесконечность.

Определение 2. $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=A$ означает, что если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: при $\rho(0, x)>\delta$ выполняется $|f(x)-A|=\rho(f(x), A)<\varepsilon$.

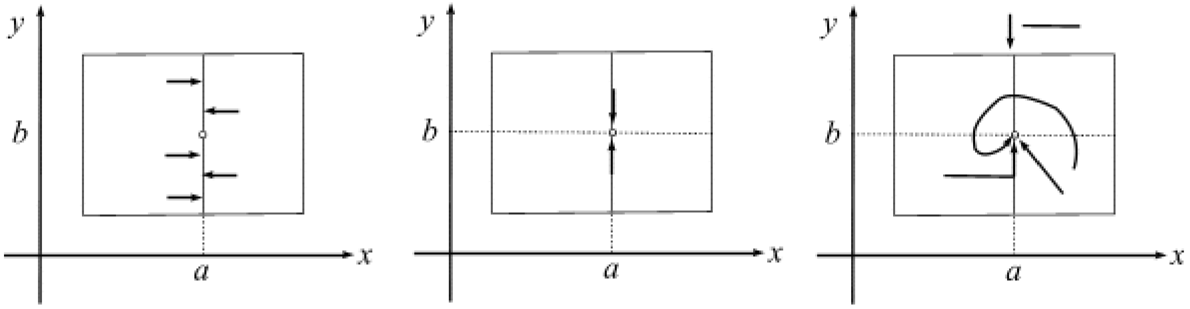
Для предела функции многих переменных выполняются свойства, такие же, как и для функций одной переменной: арифметические, локальной ограниченности, закон локального сохранения знака. Их доказательства проводятся точно так же, как и для функций одной переменной. Так, например, для предела в точке a следует лишь в рассуждениях заменить разность $|x - a|$ на $\rho(x, a)$.

2. Повторные пределы.

Для функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ нескольких переменных можно определить понятие предела по одной из переменных x_k при фиксированных значениях остальных переменных. В связи с этим возникает понятие повторного предела. Рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных.

Определение* 1.** Пусть функция $f : R^2 \to R$, то есть она имеет вид $z = f(x, y)$ и задана в некоторой прямоугольной окрестности точки $(a, b) \in R^2$, за исключением быть может самой точки (a, b). Тогда её предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ (I) называют ***двойным пределом.

Определение* 2.** Если для каждого фиксированного y существует $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ и затем существует $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right)$, то говорим, что существует ***повторный предел. Обозначаем его для краткости (II_1) – первый предельный переход по первой переменной. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$, обозначаем (II_2).



На рисунке слева показано, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a} f(x, y) = g(y)$ при фиксированном y, движение по x происходит исключительно в горизонтальном направлении.

На центральном рисунке показано движение по y при вычислении предела $\lim\limits_{y\to b} g(y)$.

На правом рисунке изображены произвольные траектории движения к точке (a, b), по которым при вычислении двойного предела $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ должны получаться одинаковые результаты.

Возникает вопрос взаимосвязи между пределами I, II_1, II_2.

Теорема (о двойном и повторных пределах).

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некотором прямоугольнике с центром в точке (a, b), за исключением, быть может, самой точки (a, b).

Тогда, если существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ и для каждого y существует $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ кроме, быть может, $y = b$, то существует повторный предел $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ и он равен двойному пределу.

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = g(y)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное, выберем ε_1 такое, что $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$. По определению предела функции (двойного) существует $\delta > 0$ такое, что как только $|x - a| < \delta$ и $|y - b| < \delta$, так выполняется $|f(x, y) - A| < \varepsilon_1$. Выполним в последнем неравенстве предельный переход по $x \to a$ и получим $|g(y) - A| \le \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тем самым установлено, что $|g(y) - A| < \varepsilon$ как только $|y - b| < \delta$. Это означает, что существует $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$.

Теорема (общий случай).

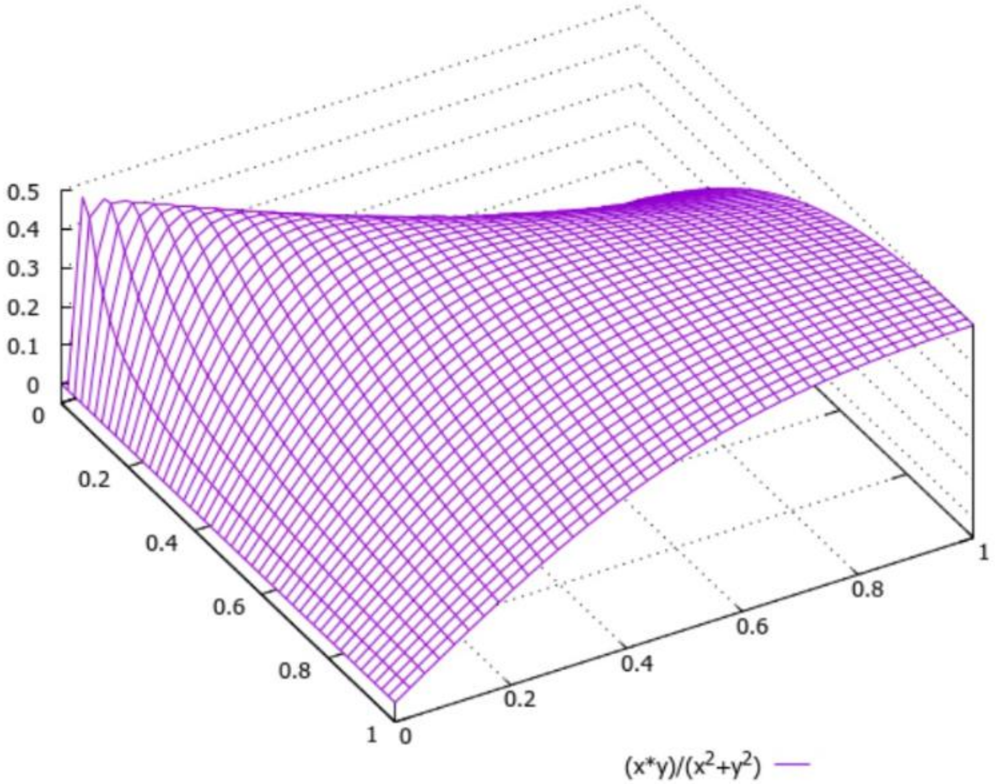
Пусть функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ многих переменных определена в некотором параллелепипеде с центром в точке $a(a_1, a_2, ..., a_n)$, за исключением может быть только самой точки a. Тогда, если существуют $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ... x_n)$ и $\forall\ x_1$ $\lim\limits_{\substack{x_2\to a_2\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ... x_n)$, то $\exists$ $\lim\limits_{x_1\to a_1}\lim\limits_{\substack{x_2\to a_2\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ... x_n) = \lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ... x_n)$.

Приведём примеры взаимосвязей между пределами I, II_1, II_2.

Пример 2. У функции $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{если } x^2+y^2>0\\ 0 & \text{если } xy=0\end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке (0, 0), и они равны:

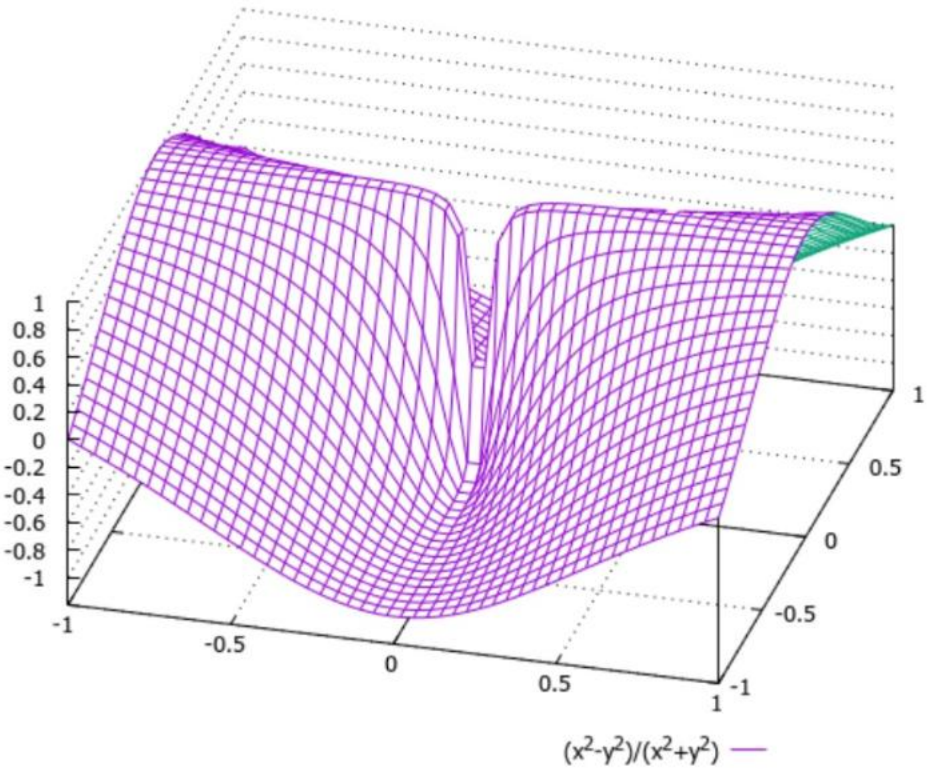
Во-первых, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0y}{0^2+y^2}=0$, и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0$, ясно $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$. Во вторых, если $x = y = t \to 0$ (двигаемся в точку (0, 0) по прямой $y = x$), то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2+t^2}=\dfrac{1}{2}$; если же $-x = y = t \to 0$ (двигаемся в точку (0, 0) по прямой $y = -x$), то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t^2}{t^2+t^2}=-\dfrac{1}{2}$. Значит, предела не существует.



Пример 3. У функции $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{если } x^2+y^2>0\\ 0 & \text{если } xy=0\end{cases}$

существуют оба повторных предела в точке (0, 0), но они не равны:

Во-первых, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=-1$, и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\left(-1\right)=-1$, ясно $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$. Следовательно, о пределе по совокупности переменных говорить не приходится, так как по двум разным направлениям подхода к точке (0, 0) получились разные ответы. Значит, единственного A, называемого пределом функции в точке, нет.



§4. Непрерывные функции многих переменных

Определение 1. Отображение f: $R^n \to R^m$ называется непрерывным в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$.

***Замечание* 1**. Из определения предела имеем:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$: при $0 < \ \rho(x, x_0) < \delta$ выполняется $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

***Замечание* 2.** Отметим, что в определении 1 точки x, $a \in R^n$, $f(x)$, $f(a) \in R^m$, то есть $x(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)$, $a(a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n)$, кроме того f имеет m координатных функций $f_1(x)$, …, $f_m(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = f\left(a\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f_1\left(x\right) = f_1\left(a\right) \\ \qquad \ldots \\ \lim\limits_{x \to a} f_m\left(x\right) = f_m\left(a\right) \end{cases}$

***Замечание* 3.** На языке шаров это означает: $f[B(a,\ \delta)] \subset B(f(a),\ \varepsilon)$.

Теорема 1. Расстояние $\rho(x, y)$ является непрерывной функцией, действующей из $R^n \times R^n$ в R .

Доказательство. Итак, надо доказать, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \rho(x, y) = \rho(a, b)$.

Рассмотрим $|\rho(x, y) - \rho(a, b)|$. Из свойств расстояния следует:

$\rho(x, y) \le \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) \ \ \Leftrightarrow\ \ \rho(x, y) - \rho(a, b) \le \rho(x, a) + \rho(b, y)$,

$\rho(a, b) \le \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) \ \ \Leftrightarrow\ \ \rho(a, b) - \rho(x, y) \le \rho(a, x) + \rho(y, b)$,

то есть $|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \le \rho(a, x) + \rho(y, b)$.

Поскольку и $\rho(a, x) \to 0$, и $\rho(y, b) \to 0$ при $x \to a$, $y \to b$, то и

$$|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \to 0.$$

Теорема 2. (Локальные свойства непрерывных функций).

1. Непрерывная в точке a функция $f : R^n \to R$ локально ограничена, то есть существует $\delta > 0$ и число C такое, что $|f(x)| < C$ для любых $x \in B\,(a,\ \delta)$.

2. Суперпозиция непрерывных функций – непрерывная функция.

3. Закон сохранения знака. Если $f : R^n \to R$, $f(a) > 0$ и f непрерывна в точке a, то найдется открытый шар $B(a,\ r)$ с центром в точке a такой, что $f(x) > 0$ для любых $x \in B(a,\ r)$.

4. Арифметические свойства. Если $f,\ g : R^n \to R$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ $(g(a)\neq 0)$ непрерывны в точке a.

По поводу доказательства повторимся о том, что их доказательства проводятся точно так же, как и для функций одной переменной. Следует лишь в рассуждениях, проведённых в прошлом семестре, заменить разность $|x - a|$ на $\rho(x,\ a)$.

Непрерывность функции многих переменных по одной из переменных

Пусть имеется функция многих переменных $y = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$. Введём понятие частного приращения функции в точке $x(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$:

$f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) - f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – по первой переменной,

$f(x_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ ...,\ x_n) - f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – по второй переменной, ... и т.д.

***Определение* 2.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной по переменной x_k в точке x, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} f\left(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right) = f\left(x_1, ..., x_k, ..., x_n\right)$.

Очевидно, что из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке следует её непрерывность в этой точке по каждой из переменных в отдельности. В обратную сторону, вообще говоря, не верно.

Пример 2. (возвращается). У функции $f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \textit{если } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \textit{если } xy = 0 \end{cases}$

Обе функции $f(0,\ y)$ и $f(x,\ 0)$ непрерывны по x и y соответственно, поскольку они нулевые. Однако было замечено, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f\left(x, y\right)$ не существует.

§5. Глобальные свойства непрерывных функций

Утверждение 1. Пусть $f : R^n \to R^m$. Функция непрерывна в каждой точке R^n $\Leftrightarrow$ прообраз открытого множества R^m есть открытое множество R^n.

Доказательство. Пусть U открытое множество в пространстве R^m, V – его прообраз: $f^{-1}[U] = V$. Возьмем произвольное $a \in V$, тогда $b = f(a) \in U$. Поскольку U открытое и $b \in U$ найдется $r > 0$ такое, что $B(b, r) \subset U$. Из определения непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что из $x \in B(a, \delta)$ следует $f(x) \in B(f(a), r)$. Из последнего включения получаем $x \in f^{-1}[B(b, r)] \subset f^{-1}[U] = V$, то есть $B(a, \delta) \subset V$. V – открытое множество.

Обратно. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Шар $B(f(a), \varepsilon)$ является открытым множеством, при этом $a \in f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$. По условию множество $f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$ – открытое множество. Значит, существует $\delta > 0$ такое, что $B(a, \delta) \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$. Из последнего включения получаем $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ в частности, если $\rho(x, a) < \delta$, то $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Теорема 1. Образ компакта при непрерывном отображении есть компакт. То есть, если f: $R^n \to R^m$ – непрерывное отображение и $K \subset R^n$ является компактом, то множество $f[K]$ – компактное множество в R^m.

***Доказательство* 1.** Напомним определение компактного множества: $K \subset R^n$ называется компактом, если из любого покрытия множества K открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие из этого покрытия. То есть, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где U_α – открытые множества, то можно выделить конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$.

Пусть $\{V_\alpha\}$ система открытых множеств, причем $f[K] \subset \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$ (взяли открытое покрытие $f[K]$). Перейдем к прообразам множеств и получим включения $K \subset f^{-1}\left[f[K]\right] \subset f^{-1}\left[\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha\right] \subset \bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}[V_\alpha]$. В силу утверждения 1 все множества $U_\alpha = f^{-1}[V_\alpha]$ – открытые множества. Поскольку K – компакт, то можно выделить конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$. В свою очередь отсюда следует включение $f[K] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} f\left(U_{\alpha_i}\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} V_{\alpha_i}$ и конечное покрытие $f[K]$.

***Доказательство* 2.** Напомним критерий компактности множества в R^n в терминах последовательностей: K – компакт в R^n $\Leftrightarrow$ из любой последовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k}, которая сходится к элементу множества K, то есть $x_{m_k} \to x \in K$.

Пусть $y_m \in f[K]$ произвольная последовательность, этой последовательности соответствует последовательность x_m, где $f(x_m) = y_m$. Поскольку $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k}, которая сходится к элементу множества K, то есть $x_{m_k} \to x \in K$. Отображение f непрерывно в точке x, поэтому $y_{m_k} = f\left(x_{m_k}\right) \to f\left(x\right) = y$. Тем самым построена подпоследовательность $y_{m_k} \to y$, что означает компактность $f[K]$

Теорема 2. Пусть $f: R^n \to R$ непрерывная на компакте K.

Тогда 1) Функция f ограничена на K (первая теорема Вейерштрасса);
2) Существуют точки $x^*, x_* \in K$ такие, что $f\left(x^*\right) = \sup\limits_{x \in K} f\left(x\right)$ и $f\left(x_*\right) = \inf\limits_{x \in K} f\left(x\right)$ (вторая теорема Вейерштрасса).

Доказательство. 1) При непрерывном отображении компакт переходит в компакт, кроме того компакт – ограниченное множество.

2) Поскольку множество значений функции ограничено, существует $\sup\limits_{x \in K} f\left(x\right) = M$. По определению точной верхней грани, для любого натурального m существует $x_m \in K$ такой, что $f\left(x_m\right) > M - \dfrac{1}{m}$. Поскольку K компакт, из последовательности точек $x_m \in K$ можно выделить подпоследовательность x_{m_k}, которая сходится к элементу множества K, то есть $x_{m_k} \to x^* \in K$. Поскольку f непрерывна на компакте, выполнив предельный переход в двойном неравенстве $M \ge f\left(x_{m_k}\right) > M - \dfrac{1}{m_k}$, получим $M \ge f\left(x_*\right) \ge M$ и $f\left(x^*\right) = \sup\limits_{x \in K} f\left(x\right)$. Существование $x_* \in K$ можно заметить, рассматривая функцию $-f(x)$.

Теорема 3. Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на нём (теорема Кантора).

***Доказательство* 1.** Напомним определение равномерной непрерывности. Отображение f: $R^n \to R^m$ равномерно непрерывное на множестве Е, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из x', $x'' \in E$ и $\rho(x', x'') < \delta$ следует $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности в каждой точке $x \in K$ найдутся δ_x такие, что из $\rho(y, x) < \delta_x \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. Рассмотрим систему открытых шаров $\{B(x, \delta_x/2)\}_{(x \in K)}$. Объединение этих шаров покрывает компакт K (даже только своими центрами). Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup_{i=2}^{p} B\left(x_i, \delta_{x_i}/2\right)$. Определим $\delta = \min_{1 \le i \le p}\left\{\delta_{x_i}/2\right\}$. Заметим, что δ – искомое. Пусть $x', x'' \in K$, $\rho(x', x'') < \delta$. Точка x' попадает в какой-нибудь шар из конечного подпокрытия $x' \in B\left(x_{\bar{i}}, \delta_{x_{\bar{i}}}/2\right)$. Отсюда $\rho\left(f\left(x'\right), f\left(x_{\bar{i}}\right)\right) < \varepsilon/2$. Далее, $\rho\left(x'', x_{\bar{i}}\right) \le \rho\left(x'', x'\right) + \rho\left(x', x_{\bar{i}}\right) < \delta + \delta_{x_{\bar{i}}}/2 \le 2 \cdot \delta_{x_{\bar{i}}}/2 = \delta_{x_{\bar{i}}}$. Значит, $\rho\left(f\left(x''\right), f\left(x_{\bar{i}}\right)\right) < \varepsilon/2$ и $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

***Доказательство* 2.** Можно провести от противного, выделив последовательности x'_m и x''_m, для которых $\rho(x'_m, x''_m) \to 0$ и $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \ge \varepsilon > 0$. Затем из соображений компактности выделить $x'_{m_k} \to x \in K$, одновременно получим $x''_{m_k} \to x \in K$ и противоречие в неравенстве $\rho(f(x'_m), f(x''_m)) \ge \varepsilon > 0$ для подпоследовательности с индексами m_k.

Определение. Множество E называется линейно связным, если любых точек $a, b \in E$ существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки $\Gamma_{a,b} \subset E$.

Напомним непрерывная кривая $\Gamma_{a,b}$ в R^n задается системой $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \quad \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$

$t \in [0, T]$, где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ – непрерывные на отрезке $[0, T]$ функции, при этом $a = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)$ и $b = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)$.

Теорема 4. Пусть $E \subset R^n$ – линейное связное, f: $E \to R$ – непрерывная, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Тогда существует $c \in E$ такое, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Функция $\Phi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ и принимает значения разных знаков на концах отрезка. Значит, найдется точка $\bar{t} \in [0, T]$, в которой $\Phi(\bar{t}) = 0$.

Ясно, что $c = \left(\varphi_1(\bar{t}), \varphi_2(\bar{t}), \dots, \varphi_n(\bar{t})\right)$ – искомая точка.

§6 Линейная структура R^n

1. ***R^n как векторное (линейное) пространство.***

Пусть $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\lambda \in R$.

Определим операции $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x = \ (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{cases}$.

Получим структуру линейного пространства $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – его нуль, $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ противоположный к x вектор, размерность пространства n, есть $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ – стандартный базис $\{e_k\}$, здесь вектор e_k имеет 1 на k-том месте, остальные нули.

2. ***Евклидова норма, скалярное произведение.***

Опр. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ евклидова ***норма*** в R^n.

Свойства нормы. 1). $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$. (неотрицательность и отделимость). **2).** $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность нормы) 3). Для любых x и y выполняется неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$, из которого следует, что если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$ (непрерывность нормы относительно себя).

Опр. Функция $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ называется ***скалярным произведением*** векторов. Ясно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и выполняется неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

3. Линейные отображения конечномерных пространств.

Опр. Отображение L: $R^n \to R^m$ называется ***линейным***, если обладает свойствами: 1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ для любых x, y из R^n (свойство аддитивности); 2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ для любых $x \in R^n$ и любых $\lambda \in R$ (свойство однородности).

Матричное представление линейных отображений.

***Пример* 1.** $y = 2x + 3$ не является линейным отображением из R в R.
L: $R \to R$ является линейным отображением из R в $R \Leftrightarrow L(x) = k \cdot x$, где k – фиксированное число.

Далее, пусть теперь L: $R^n \to R^m$ – линейное; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m\}$ – стандартные базисы в R^n и R^m. Во-первых, для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Во-вторых, поскольку $L(e_j) \in R^m$ имеем представление $L(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{e}_i$. В итоге получаем

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{e}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)\overline{e}_i .$$

Отметим, что $L(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$.

Свойства линейных отображений.

1. Пусть L: $R^n \to R^m$ – линейное. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\|L(x)\| \le C\|x\|$ для любого x.

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j)\right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|L(e_j)\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|L(e_j)\|^2} = C\|x\| .$$

2. Пусть L: $R^n \to R^m$ – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство. $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \le C\|x_k - x\|$.

3. Любое линейное отображение L: $R^n \to R$ имеет вид:
$L(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые числа.

4. Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

5. Отображение L: $R^n \to R^m$ линейное ⇔ каждая координатная функция $L_i : R^n \to R$ является линейным отображением.

§6 Линейная структура R^n

1. ***R^n как векторное (линейное) пространство.***

Пусть $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\lambda \in R$.

Определим операции $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x = \ (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{cases}$.

Получим структуру линейного пространства $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – его нуль, $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ противоположный к x вектор, размерность пространства n, есть $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ – стандартный базис $\{e_k\}$, здесь вектор e_k имеет 1 на k-том месте, остальные нули.

2. ***Евклидова норма, скалярное произведение.***

Опр. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ евклидова ***норма*** в R^n.

Свойства нормы. 1). $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$. (неотрицательность и отделимость). **2).** $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность нормы) 3). Для любых x и y выполняется неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Из неравенства треугольника следует неравенство $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$, из которого следует, что если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$ (непрерывность нормы относительно себя).

Опр. Функция $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ называется ***скалярным произведением*** векторов. Ясно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и выполняется неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

3. Линейные отображения конечномерных пространств.

Опр. Отображение L: $R^n \to R^m$ называется ***линейным***, если обладает свойствами: 1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ для любых x, y из R^n (свойство аддитивности); 2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ для любых $x \in R^n$ и любых $\lambda \in R$ (свойство однородности).

Матричное представление линейных отображений.

Пример **1.** $y = 2x + 3$ не является линейным отображением из R в R.

L: $R \to R$ является линейным отображением из R в R $\Leftrightarrow$ $L(x) = k\cdot x$, где k – фиксированное число.

Далее, пусть теперь L: $R^n \to R^m$ – линейное; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m\}$ – стандартные базисы в R^n и R^m. Во-первых, для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Во-вторых, поскольку $L(e_j) \in R^m$ имеем представление $L(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{e}_i$. В итоге получаем

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)\overline{e}_i .$$

Отметим, что $L(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$.

Свойства линейных отображений.

1. Пусть L: $R^n \to R^m$ – линейное. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\|L(x)\| \le C\|x\|$ для любого x.

Доказательство.

$$\|L(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j)\right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|L(e_j)\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|L(e_j)\|^2} = C\|x\|.$$

2. Пусть L: $R^n \to R^m$ – линейное. Тогда оно непрерывное.

Доказательство. $\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \le C\|x_k - x\|$.

3. Любое линейное отображение L: $R^n \to R$ имеет вид:

$L(x) = A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые числа.

4. Композиции линейных отображений соответствует произведение их матричных представлений.

5. Отображение L: $R^n \to R^m$ линейное $\Leftrightarrow$ каждая координатная функция $L_i : R^n \to R$ является линейным отображением.

§7 Дифференцируемость функций многих переменных

Опр. Отображение f: $R^n \to R^m$ называется *дифференцируемым* в точке x, если существует линейное отображение L_x: $R^n \to R^m$ такое, что

$$f(x+\Delta x)-f(x)=L_x(\Delta x)+o(\Delta x)$$

здесь $o(\Delta x)$: $R^n \to R^m$ – о-малое от Δx обладает свойством $\lim\limits_{\Delta x\to \mathbf{0}}\frac{\|o(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0$, поэтому далее иногда будем применять запись $o(\Delta x) = \|\Delta x\|\cdot\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to \mathbf{0}$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$. Линейное отображение L_x называется *дифференциалом* отображения f в точке x и обозначаются d$f(x)$ будем также писать $f'(x)(\Delta x)$ вместо $L_x(\Delta x)$

Замечания. **0.** Для функций f: $R \to R$ линейное отображение $L_x(\Delta x)$ имеет вид $A\cdot\Delta x$, где A некоторое число. (Чему оно равно?)

1. Другая форма записи $f(x) - f(a) = L_x(x - a) + o(x - a)$.

2. Отображения f, L_x, o действуют из R^n в R^m, то есть каждое из них имеет m координатных функций, поведение которых и определяет поведение самих отображений.

Утверждение **0.** Дифференцируемое отображение в точке x является непрерывным в этой точке.

Доказательство. Во-первых, $f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot\alpha(\Delta x)$. Во-вторых, линейное отображение является непрерывным, значит, из $\Delta x \to \mathbf{0}$ следует $L_x(\Delta x) \to L_x(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Наконец, $\|\Delta x\|\cdot\alpha(\Delta x) \to 0$. Значит, $f(x + \Delta x) \to f(x)$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$.

Утверждение **1.** Пусть g: $R^n \to R^m$, g_1, g_2, …, g_m – его координатные функции ($R^n \to R$). Тогда отображение g является линейным ⇔ каждая функция многих переменных g_k: $R^n \to R$ ($k = 1, 2, …, n$) является линейной.

Доказательство. Пусть u, $v \in R^n$. Тогда $g(u)=\begin{pmatrix} g_1(u) \\ \dots \\ g_m(u)\end{pmatrix}$, $g(v)=\begin{pmatrix} g_1(v) \\ \dots \\ g_m(v)\end{pmatrix}$, $g(u+v)=\begin{pmatrix} g_1(u+v) \\ \dots \\ g_m(u+v)\end{pmatrix}$. По правилу сложения векторов имеем равенство $g(u)+g(v)=\begin{pmatrix} g_1(u)+g_1(v) \\ \dots \\ g_m(u)+g_m(v)\end{pmatrix}$. Таким образом, $g(u) + g(v) = g(u + v)$ ⇔ имеет место покоординатное равенство $g_k(u) + g_k(v) = g_k(u + v)$, $\forall k$. Аналогично $g(\lambda u) = \lambda g(u) \Leftrightarrow$ имеет место покоординатное равенство $g_k(\lambda u) = \lambda g_k(u)$, $\forall k$.

***Утверждение* 2.** Пусть h: $R^n \to R^m$, $h_1, h_2, \ldots, h_m$ – его координатные функции ($R^n \to R$). Тогда отображение h есть $o(\Delta x) \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных h_k: $R^n \to R$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) является $o(\Delta x)$.

Доказательство. => Следует из неравенства $|h_k(\Delta x)| \le \|h(\Delta x)\|$.
<= Следствие покоординатной сходимости.

Теорема 1. Пусть f: $R^n \to R^m$, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ – его координатные функции ($R^n \to R$). Тогда отображение f дифференцируемо в точке $x \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных f_k: $R^n \to R$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) является дифференцируемой в точке x.

Доказательство. Во-первых, $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\begin{pmatrix} f_1\left(x+\Delta x\right)-f_1\left(x\right) \\ \ldots \\ f_m\left(x+\Delta x\right)-f_m\left(x\right) \end{pmatrix}$.

Далее, дифференцируемость каждой координатной функции равносильна $\begin{pmatrix} L_{1x}\left(\Delta x\right)+o_1\left(\Delta x\right) \\ \ldots \\ L_{mx}\left(\Delta x\right)+o_m\left(\Delta x\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{1x}\left(\Delta x\right) \\ \ldots \\ L_{mx}\left(\Delta x\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o_1\left(\Delta x\right) \\ \ldots \\ o_m\left(\Delta x\right) \end{pmatrix}$ в силу утверждений 1 и 2 получаем $L_x(\Delta x) + o(\Delta x)$.

***Замечание* 1.** Необходимо исследовать дифференцируемость функций нескольких переменных.

***Замечание* 2.** Любое линейное отображение L: $R^n \to R$ имеет вид: $L\left(x\right)=A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – некоторые числа.

Опр. Функция многих переменных f: $R^n \to R$ является *дифференцируемой* в точке x, если существуют некоторые числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что

$$f\left(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n\right)=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)+A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_n\Delta x_n+$$

$$+o\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}\right).$$

§8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных

Опр. Функция многих переменных f: $R^n \to R$ является *дифференцируемой* в точке x, если существуют некоторые числа A_1, A_2, …, A_n такие, что

$$f\left(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, ..., x_n+\Delta x_n\right)=f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)+A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+$$

$$+o\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_n^2}\right).$$

***Замечание* 1.** (Шаг в прошлое) Для функции f: $R \to R$ определение дифференцируемости требует существование числа A со свойством:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

затем замечали, что $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=f'\left(x\right)$.

Опр. Пусть f: $R^n \to R$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)-f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной функции* многих переменных f по переменной x_k в точке x и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x\right)$.

По сути дела все переменные кроме одной фиксируются, а по оставшейся независимой переменной происходит дифференцирование.

Возникает вопрос взаимосвязи между дифференцируемостью в точке и существовании частных производных.

Теорема 1. Если функция многих переменных f: $R^n \to R$ является дифференцируемой в точке x, то в этой точке существуют все частные производные. При этом числа A_k в определении дифференцируемости и есть $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x\right)$.

Доказательство. Положим в определении дифференцируемости все приращения $\Delta x_j=0$ для $j \neq k$:

$$f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)=f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)+A_k\Delta x_k+o\left(\Delta x_k\right).$$

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)-f\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right)}{\Delta x_k}=A_k$.

Вообще говоря, из существования всех частных производных в точке не следует дифференцируемость в этой точке, что показывает следующий пример.

Пример. (Снова возвращается). У функции $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{если } x^2+y^2>0\\ 0 & \text{если } xy=0\end{cases}$ существуют обе частные производные на всей плоскости, но функция не дифференцируема в точке (0, 0).

Действительно. Имеем $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Ясно, что в точках, где x или y равно 0, также частные производные равны 0. Дифференцируемость в остальных точках плоскости следует из соответствующих теорем для функций одной переменной. Однако в точке (0, 0) отсутствует непрерывность, значит, нет и дифференцируемости.

При усилении требований на частные производные дифференцируемость функции многих переменных может возникнуть.

Теорема 2. Если все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ непрерывны в окрестности точки x_0, то функция f дифференцируема в точке x_0.

Доказательство. Проведем его для функции двух переменных. Итак, $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$ воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях ($0<\theta,\tau<1$)

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\tau\Delta y)\cdot\Delta y$$

Введем в рассмотрение $\alpha(\Delta x,\Delta y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\tau\Delta y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Во-первых, $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)\to 0$. Во-вторых, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\tau\Delta y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\beta(\Delta x,\Delta y)$. В итоге имеем представление: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right)+\left(\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y\right)$. Ясно, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y$ – линейная функция двух переменных. Осталось заметить, что $\left|\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y\right|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – o-малое.

§8 Дифференциал и частные производные функции многих переменных (продолжение)

Сделаем небольшой обзор пройденного раньше.

1. ***Матрица Якоби.***

Во-первых, отображение f: $R^n \to R^m$ называется *дифференцируемым* в точке x, если существует линейное отображение L_x: $R^n \to R^m$ такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x(\Delta x) + o(\Delta x).$$

Во-вторых, отображение f дифференцируемо в точке $x \Leftrightarrow$ каждая функция многих переменных f_i: $R^n \to R$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) является дифференцируемой в точке x.

В-третьих, дифференцируемость функций f_i в точке x означает, что $f_i\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n\right) = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + A_{i1}\Delta x_1 + A_{i2}\Delta x_2 + \ldots + A_{in}\Delta x_n +$
$+o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}\right)$, при этом было замечено, что $A_j = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

Отсюда следует, что линейное отображение L_x: $R^n \to R^m$ определяется матрицей $J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$.

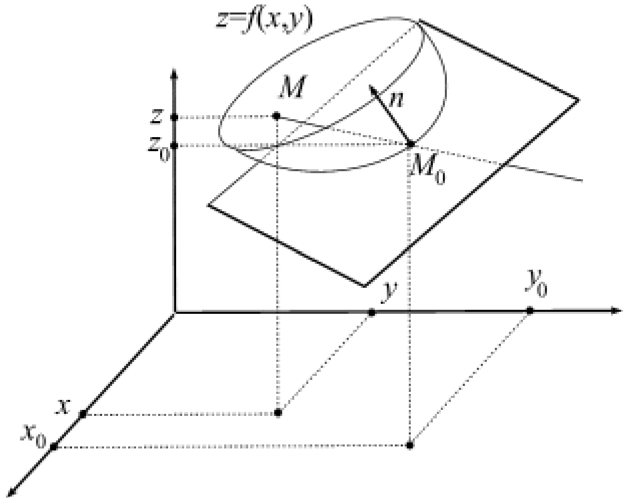
Эта матрица называется ***матрицей Якоби*** отображения f. В случае $n = m$ определитель этой матрицы называется ***определителем Якоби*** или ***якобианом***.

Иными словами, матрица Якоби является производной векторной функции по векторному аргументу.

2. Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных.

Во-первых, в R^3 уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ задает плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярную вектору (A, B, C) – нормаль к плоскости.

Во-вторых, функция f: $R^2 \to R$ в записи $z = f(x, y)$ задает в R^3 некоторое множество $\{(x, y, z){:}\ z = f(x, y)\}$ – поверхность в R^3 (график функции двух переменных).



Опр. Плоскость π назовем касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0 этой поверхности, если $M_0 \in \pi$ и если M лежит на поверхности и $M \to M_0$, то угол между секущей M_0M и плоскость π стремится к нулю.

Ясно, что для этого достаточно, чтобы косинус угла φ между вектором $\overrightarrow{M_0M}$ и нормалью $n=(A, B, C)$ стремится к нулю.

Пусть f дифференцируема (x_0, y_0). Покажем, что в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ у поверхности $z = f(x, y)$ существует касательная плоскость в указанном смысле. Отметим, условие $M \to M_0$ обеспечивает (с избытком) выполнение $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

Итак, $$z - z_0 = f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right) = A(x - x_0) + B\left(z - z_0\right) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. теперь докажем, что плоскость π, заданная уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ искомая. Действительно, имеем $\overrightarrow{M_0M}\left(\Delta x, \Delta y, z - z_0\right)$, $n=(A, B, -1)$ и

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{M_0M}, n\right)}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\| \cdot \|n\|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \left(z - z_0\right)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} =$$

$$= \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \left(z - z_0\right)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \le \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \to 0.$$

§9 Основные законы дифференцирования

Теорема **1.** Если отображения f, g: $R^n \to R^m$ дифференцируемы в точке x, то $h = f + g$ дифференцируемое отображение в точке x и $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Доказательство. Поскольку отображения f и g дифференцируемы в точке x, имеем:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + L_1(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot\alpha_1(\Delta x),$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + L_2(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot\alpha_2(\Delta x).$$

Складываем, получаем

$$h(x + \Delta x) = h(x) + (L_1(\Delta x) + L_2(\Delta x)) + \|\Delta x\|\cdot(\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x)).$$

Остается заметить, что $L_1 + L_2$ – линейное отображение, $\alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$ и вспомнить соглашение писать $f'(x)(\Delta x)$ и $g'(x)(\Delta x)$ вместо $L_1(\Delta x)$ и $L_2(\Delta x)$. Теорема доказана.

Замечание Матрица Якоби отображения h имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1 + \partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_2 + \partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m + \partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. (Дифференцирование композиции).

Если f: $R^n \to R^m$ дифференцируемо в точке x, g: $R^m \to R^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x)$, то отображение $h = g \circ f$ дифференцируемо в точке x и при этом $h'(x) = g'(y) \circ f'(x)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) =$$

поскольку f дифференцируемо в точке x имеем $f(x + \Delta x) - f(x) = L_1(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot\alpha_1(\Delta x)$. Обозначим $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а поскольку $y = f(x)$, можно записать $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ и продолжить.

$$= g(y + \Delta y) - g(y) = L_2(\Delta y) + \|\Delta y\|\cdot\alpha_2(\Delta y) =$$

$$= L_2(L_1(\Delta x)) + \|\Delta x\|\cdot L_2(\alpha_1(\Delta x)) + \|\Delta y\|\cdot\alpha_2(\Delta y).$$

Во-первых, $L(\Delta x) = L_2(L_1(\Delta x))$ является линейным отображением из R^n в R^k.

Во-вторых, поскольку линейное отображение непрерывно $L_2(\alpha_1(\Delta x)) \to 0$, при $\Delta x \to 0$. Иными словами $L_2(\alpha_1(\Delta x)) = \alpha(\Delta x)$.

В-третьих, сделаем оценки.

$$\|\Delta y\| = \|f(x + \Delta x) - f(x)\| = \|L_1(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot\alpha_1(\Delta x)\| \le (\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|)\cdot\|\Delta x\|$$

Это означает, что $\|\Delta y\|\cdot\|\alpha_2(\Delta y)\| \le \|\Delta x\|(\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\|)\ \|\alpha_2(\Delta y)\|$. В правой части неравенства если $\Delta x \to 0$, то $\|L_1\| + \|\alpha_1(\Delta x)\| \to \|L_1\|$. Далее, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ (f дифференцируемо в точке x, значит, непрерывно и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0$). Таким образом, заметили, что $\|\Delta y\|\cdot\alpha_2(\Delta y) = \|\Delta x\|\cdot\alpha(\Delta x)$. Теорема доказана.

Замечание Матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)\right)$ отображения h является произведением матриц:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2}(y) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m}(y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1}(y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2}(y) & \dots & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_m}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1}(y) & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_2}(y) & \dots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_m}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{\partial g_i}{\partial y_s}(y) \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x).$$

Теорема 3. (***Дифференцируемость обратного отображения***).

Пусть f: $R^n \to R^n$, V_x – окрестность точки x, $y = f(x)$, U_y – окрестность точки y, f – взаимно однозначно отображает V_x на U_y, f непрерывно в x, f^{-1}– непрерывно в точке y. Если f дифференцируемо в точке x и существует $(f'(x))^{-1}$, то f^{-1} дифференцируемо в точке y и $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Доказательство. Пусть Δy произвольное, достаточно малое $(y + \Delta y) \in U_y$. Обозначим $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. Тогда, поскольку $f(x) = y$ можно сделать следующие записи: $x = f^{-1}(y)$, $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$, $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ и, наконец, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Из условий непрерывности имеем $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$.

Из дифференцируемости f в точке x имеем:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)(\Delta x) + \|\Delta x\|\cdot \alpha(\Delta x).$$

По условию существует $(f'(x))^{-1}$ линейное отображение из R^n в R^n, значит,

$$(f'(x))^{-1} (\Delta y) = \Delta x + \|\Delta x\|\cdot(f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \ (*).$$

Оценим: с одной стороны (слева): $\|(f'(x))^{-1} (\Delta y)\| \le C\|\Delta y\|$, здесь воспользовались непрерывностью оператора. С другой стороны, (справа) имеем $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x) \to 0 \Rightarrow (f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) \to 0$, то есть $(f'(x))^{-1}(\alpha(\Delta x)) = \alpha(\Delta y)$. Можно считать $\|\alpha(\Delta y)\| < 1/2$ и тогда $\|\Delta x + \|\Delta x\|\cdot \alpha(\Delta y)\| \ge 1/2\|\Delta x\|$ (здесь использовано неравенство треугольника вида $\|a + b\| \ge \|a\| - \|b\|$).

В итоге получили $\|\Delta x\| \le 2C\|\Delta y\|$. Перепишем соотношение (*) так:

$$f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = (f'(x))^{-1} (\Delta y) - \|\Delta x\|\cdot \alpha(\Delta y)$$

Поскольку $\|-\|\Delta x\|\cdot \alpha(\Delta y)\| \le 2C\|\Delta y\|\|\alpha(\Delta y)\|$, слагаемое $-\|\Delta x\|\cdot \alpha(\Delta y)$ есть $\|\Delta y\|\cdot \alpha(\Delta y)$.

Замечание. Матрица Якоби $(f^{-1})(y)$ является обратной к $f'(x)$.

§10. Приложения теоремы о производной сложной функции

Пусть теперь рассматривается числовая функция $f{:}R^n \to R$ нескольких переменных, дифференцируемая в точке $M\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, и пусть также заданы функции φ_k: $R \to R$ дифференцируемые в точке t_0, при этом $x_1^0 = \varphi_1\left(t_0\right)$, $x_2^0 = \varphi_2\left(t_0\right)$, …, $x_n^0 = \varphi_n\left(t_0\right)$. Тогда функция $g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ по теореме о производной сложной функции дифференцируема в точке t_0, при этом

$$g'\left(t_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(M\right) \cdot \varphi_1'\left(t_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(M\right) \cdot \varphi_2'\left(t_0\right) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(M\right) \cdot \varphi_n'\left(t_0\right).$$

Остановимся сначала на функции трёх переменных $u = f\left(x, y, z\right)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим некоторый единичный вектор $\boldsymbol{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда прямая, проходящая через точку M_0 в направлении этого вектора $\boldsymbol{e}$ задаётся уравнениями $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$. Таким образом, на так заданной прямой функция $u = f\left(x, y, z\right)$ представляет собой функцию одной независимой переменной t вида $u = f\left(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma\right)$.

Определение 1. Производную указанной сложной функции по переменной t, взятой в точке $t = 0$, называют производной функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в точке M_0 по направлению единичного вектора $\boldsymbol{e}$ и обозначают символом $\partial u/\partial \boldsymbol{e}$.

Итак, по определению $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right)\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right)\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(M_0\right)\cos\gamma$.

Определение 2. Градиентом функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор с координатами $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(M_0\right)$, обозначаемый $\operatorname{grad} f(M_0)$ или, что то же самое, $\operatorname{grad} u(M_0)$.

В силу введённого понятия, производная по направлению представляет собой скалярное произведение вектор-градиента и единичного вектора, задающего направление: $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \left(e, grad\, u\right)$.

Утверждение. Производная функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной в этой точке по любому другому направлению.

Доказательство. Для скалярного произведения имеем $\frac{\partial u}{\partial e} = (e, grad\, u) = |e||grad\, u|\cos\varphi = |grad\, u|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $grad\, u$ и $\boldsymbol{e}$.

Учитывая, что максимальное значение полученное выражение принимает при $\cos\varphi = 1$, то есть $\varphi = 0$, получаем справедливость утверждения.

Определение 3. Поверхностью уровня C = const функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек $\{(x, y, z)\}$, в которых $f(x, y, z) = C$.

Если в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности уровня $f(x, y, z) = C$ построить касательную плоскость, то легко убедиться в том, что вектор $\mathrm{grad}\, f(M_0)$ является вектором нормали к этой касательной плоскости, то есть перпендикуляром к ней.

Совершенно аналогично определяется производная по направлению и градиент для дифференцируемой в точке $M\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ функции n переменных.

Замечание. В случае функции двух переменных $u = f(x, y)$ единичный вектор $\boldsymbol{e}$, определяющий направление, имеет координаты $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Поэтому формула вычисления производной по направлению в точке $M_0(x_0, y_0)$ принимает вид $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\sin\alpha$.

Теорема (о среднем).

Пусть $G \subset R^n$ область (открытое связное множество), $f:G \to R$, $[x, x + h] \subset G$. Если f непрерывна на $[x, x + h]$ и дифференцируема на $(x, x + h)$, то существует $\theta \in (0, 1)$, такое, что

$$f\left(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n\right) - f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, ..., x_n + \theta h_n\right) \cdot h_1 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, ..., x_n + \theta h_n\right) \cdot h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, ..., x_n + \theta h_n\right) \cdot h_n .$$

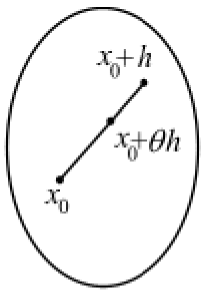
Кратко $f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta \cdot h)(h)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f\left(x_1 + th_1, x_2 + th_2, ..., x_n + th_n\right)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует $\theta \in (0, 1)$, такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. Остается правильно продифференцировать сложную функцию.

***Замечание* 1**. Для отображений f: $G \to R^m$ имеет место оценка (теорема о среднем) $\left\| f\left(x+h\right) - f\left(x\right) \right\| \le \left(\sup\limits_{u \in G} \left\| f'\left(u\right) \right\| \right) \left\| h \right\|$, здесь нормы h и f′(u) согласованы специальным образом.

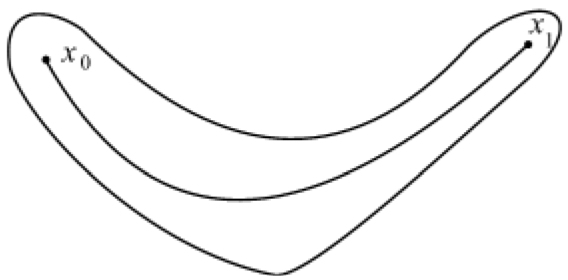
***Теорема* 2.** Если $f:G \to R$ дифференцируемая в области G и $f'(u) = 0$ $\forall u \in G$, то f – постоянная.

Доказательство. 1). Если область G выпуклая (рис. сверху), выберем точку x_0, выпуклость позволит вместе с $x_0 + h$ из G содержать весь отрезок , $[x_0, x_0 + h]$. По теореме о среднем получим:



$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x + \theta \cdot h)(h) = 0$ – значения во всех точках совпадают с $f(x_0)$.

2). Для невыпуклых областей реализуем схему: есть путь $x(t)$, $t \in [0, 1]$, $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. из 1) следует, что функция принимает одинаковые значения в любом шаре, лежащем в G. Теперь рассмотрим множество $A = \{t \le 1: f(x(t')) = f(x_0)\ \forall t' \in [0, t]\}$. Замечаем, что это множество непустое, ограниченное и если $\sup A = t^* < 1$, то взяв достаточно малый шар, так, чтобы он лежал в G, легко получить противоречие, увеличив t^*. Значит, $t^* = 1$ и $f(x_1) = f(x_0)$.



§11. Производные и дифференциалы высших порядков

1. ***О порядке взятия частных производных.***

Пример **1.** Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = \sin(xy)$. Вычисляем $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos(xy)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$. Здесь частные производные взятые сначала в одном порядке, а затем в другом оказались одинаковыми.

Пример **2** (функции, у которой смешанные производные не равны друг другу). $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{\textit{если} } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{\textit{если} } x = y = 0 \end{cases}$.

Вычисляем $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2x\left(x^2 + y^2\right) - 2x\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y\frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y\frac{-y^2}{+y^2} + 0 = -y$

$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = -1$. Легко $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Теорема 1 (*о смешанных производных*) G область в R^n (открытое связное множество). Если $f{:}G \to R$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, то в точках непрерывности они совпадают.

Доказательство. Проведем для $n = 2$, то есть для функции двух переменных $f(x, y)$. Итак, пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0), Δx и Δy достаточно малы, так, чтобы $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \in G\ \forall t \in [0, 1]$. Обозначим:

$$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

и $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$. Легко, $\varphi(1) - \varphi(0) = \mathrm{F}(\Delta x, \Delta y)$.

По теореме Лагранжа, получаем:

$F(\Delta x,\ \Delta y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y\right)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0 + \theta\Delta x, y_0\right)\Delta x =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y\right)\Delta x\Delta y$, здесь $0 < \theta, \lambda < 1$.

Обозначив, $\psi(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)$, получим

$F(\Delta x, \Delta y) = \psi(1) - \psi(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y\right)\Delta x\Delta y$ здесь $0 < \omega, \mu < 1$. В итоге, получаем $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \lambda\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0 + \omega\Delta x, y_0 + \mu\Delta y\right)$ и после предельного перехода $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ и, в силу непрерывности смешанных производных, получим равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right)$.

Определение. Если функция $f{:}G \to R$ имеет все непрерывные частные производные до m-ого порядка, ее называют m раз непрерывно дифференцируемой в области G. Обозначают $f \in C_U^m$.

Например, функция $f(x, y, z)$ два раза непрерывно дифференцируема в области, если в этой области непрерывны функции f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$.

Каким может оказаться количество различных функций?

2. ***Дифференциалы высших порядков.***

Первый.

(Одной переменной) $f(x+\Delta x) = f(x) + \underline{f'(x)\cdot\Delta x} + o(\Delta x)$. Запись $\underline{\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x}$.

(Многих переменных) $f'(x)(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\cdot\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot\Delta x_n$.

Опр. $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot dx_n$ называется первым дифференциалом.

Второй.

Сначала две переменные.

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ и $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$ это две записи одного и того же первого дифференциала. Теперь посмотрим $\delta(df)$ (первый от первого), считая dx и dy фиксированными.

$\delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$ (линейность первого дифференциала) =

$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\cdot\delta x\cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\cdot\delta y\cdot dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\cdot\delta x\cdot dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\cdot\delta y\cdot dy$. Когда в первом дифференциале от первого положить $dx = \delta x$ и $dy = \delta y$ получаем

второй дифференциал: $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$;

второй дифференциал: $d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$.

Дифференциал m-го порядка определяется как первый дифференциал от $m-1$-го. Индукцией можно заметить, что

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(x,y)dx^k dy^{m-k}$$

Многие переменные:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n=m} C^m_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} dx_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot dx_n^{m_n}.$$

§12. Формула Тейлора

1. ***Шаг в прошлое*** **(*Одна переменная*).** ***Многочлен Тейлора*** функции φ в t_0:

$$\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

***Формула Тейлора*:**

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+r_m(t,t_0,\varphi),$$

Пеано $r = o(t-t_0)^m$; условия $\exists\varphi^{(m)}(t_0)$;

Лагранж $r=\dfrac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\xi)\cdot(t-t_0)^{m+1}$; условия $\varphi\in C^m_{[t_0,t]}\cap C^{m+1}_{(t_0,t)}$;

Интегральная $r=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\varphi^{(m+1)}(\tau)\cdot(t-\tau)^m\,d\tau$.

2. Шаг в настоящее.

Brook Taylor

Теорема ***Формула Тейлора.*** Пусть U – окрестность точки $x\in R^n$, $h\in R^n$, $[x, x+h]\subset U$, $f{:}U\to R$ имеет непрерывные частные производные до m-го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{k=m}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\Big|_x+r,$$

где $r = o(\|h\|^m)$**(*Пеано*);**

если дополнительно $f\in C_U^{m+1}$, то

$$\exists\theta\in(0,1),\ r=\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f\Big|_{x+\theta h}\ \text{(Лагранж)};$$

и интегральной форме $r=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_0^1\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f\Big|_{x+\tau h}\cdot(1-\tau)^m\,d\tau$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=f(x_1+th_1, x_2+th_2,\ldots,x_n+th_n)$. Она попадает в условия пункта 1 для отрезка [0, 1]. Можно записать формулу Тейлора $\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}+r_m$ и убеждаемся индукцией, что получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того, чтобы получить форму Пеано надо поупражняться.

Замечание: Пусть: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x;y)$

$x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $x = x(u;v)$

$y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $y = y(u;v)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 f = \delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial f}{\partial y}\delta(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y\right) dy +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора перем-х.

§12. Формула Тейлора

1. ***Шаг в прошлое*** (***Одна переменная***). ***Многочлен Тейлора*** функции φ в t_0:

$$\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m.$$

***Формула Тейлора*:**

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+r_m(t,t_0,\varphi),$$

Пеано $r = o(t-t_0)^m$; условия $\exists\varphi^{(m)}(t_0)$;

Лагранж $r=\dfrac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\xi)\cdot(t-t_0)^{m+1}$; условия $\varphi\in C^m_{[t_0,t]}\cap C^{m+1}_{(t_0,t)}$;

Интегральная $r=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\varphi^{(m+1)}(\tau)\cdot(t-\tau)^m\,d\tau$.

2. Шаг в настоящее.

Brook Taylor

Теорема ***Формула Тейлора*.** Пусть U – окрестность точки $x\in R^n$, $h\in R^n$, $[x, x+h]\subset U$, $f{:}U\to R$ имеет непрерывные частные производные до m-го порядка включительно. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{k=m}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\Big|_x+r,$$

где $r = o(\|h\|^m)$(***Пеано***);

если дополнительно $f\in C_U^{m+1}$, то

$$\exists\theta\in(0,1),\ r=\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f\Big|_{x+\theta h}\ \text{(Лагранж)};$$

и интегральной форме $r=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_0^1\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f\Big|_{x+\tau h}\cdot(1-\tau)^m\,d\tau$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=f\left(x_1+th_1,x_2+th_2,...,x_n+th_n\right)$. Она попадает в условия пункта 1 для отрезка [0, 1]. Можно записать формулу Тейлора $\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+...+\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}+r_m$ и убеждаемся индукцией, что получена формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и интегральной форме. Для того чтобы получить форму Пеано надо поупражняться:

Условия позволяют записать формулу Лагранжа до m – 1-го порядка

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{d^k f}{k!}\Big|_x+r_{m-1}=\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{d^k f}{k!}\Big|_x\right)+\left(r_{m-1}-\frac{d^m f}{m!}\Big|_x\right)$$

Надо замечать, что $\left(r_{m-1}-\frac{d^m f}{m!}\Big|_x\right)=o\left(\|h\|^m\right)$.

Во-первых, $r_{m-1}=\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta)=\frac{1}{m!}\sum_{m_1+m_2+...+m_n=m}C^m_{(m_1,m_2,...,m_n)}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_{x+\theta h}\cdot h_1^{m_1}\cdot...\cdot h_n^{m_n}$,

во-вторых, $\frac{d^m f}{m!}\Big|_x=\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)=\frac{1}{m!}\sum_{m_1+m_2+...+m_n=m}C^m_{(m_1,m_2,...,m_n)}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_x\cdot h_1^{m_1}\cdot...\cdot h_n^{m_n}$.

Значит,

$$\left(r_{m-1}-\frac{d^m f}{m!}\Big|_x\right)=\frac{1}{m!}\sum_{m_1+m_2+...+m_n=m}\left(h_1^{m_1}\cdot...\cdot h_n^{m_n}\right)C^m_{(m_1,m_2,...,m_n)}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_{x+\theta h}-\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_x\right)$$

из соображений непрерывности $C^m_{(m_1,m_2,...,m_n)}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_{x+\theta h}-\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\Big|_x\right)=\alpha(h)$

Оценим $\sqrt[m]{h_1^{m_1}\cdot...\cdot h_n^{m_n}}=\sqrt[m]{h_1\cdot...\cdot h_1\cdot...\cdot h_n\cdot...\cdot h_n}\le\frac{m_1h_1+...+m_nh_n}{m}$ (Неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим, далее неравенство Коши-Буняковского) $\le\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+...+m_n^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}}{m}=C\|h\|$, значит, $h_1^{m_1}\cdot...\cdot h_n^{m_n}\le D\|h\|^m$, откуда следует требуемое.

§12. Экстремум функции многих переменных

1. ***Необходимые условия экстремума.***

Опр. $f\colon R^n \to R$ имеет локальный минимум в точке x_0, если существует окрестность V точки x_0, такая, что $\forall x \in V$ выполняется неравенство $f(x_0) \le f(x)$.

Естественным образом определяется локальный максимум, общее название локальный экстремум, кроме того особо оговариваем строгие экстремумы.

Теорема 1. (***необходимое условие экстремума***)

Пусть в точке x_0 имеет место локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$, то есть $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Как и для одной переменной надо посмотреть поведение

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}{\Delta x_k}$$

когда $\Delta x_k \to +0$ или $\Delta x_k \to -0$.

Замечание **1.** Локальные экстремумы лежат в точках, где $\operatorname{grad} f = 0$ или f не дифференцируема.

Замечание **2.** Глобальные экстремумы надо искать в точках, где $\operatorname{grad} f = 0$ и на границе области задания.

2. Достаточные условия экстремума.

Для $f\colon R \to R$ условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ являются достаточными условиями локального (строгого) минимума функции f в точке x_0. Для функций многих переменных все обстоит также. Однако $f''(x_0)$ является здесь квадратичной формой, определяемой матрицей вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Точнее, наличие локального экстремума, определяется поведением квадратичной формы $\Phi_{x_0}\left(h_1,h_2,...,h_n\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_0\right)h_i h_j$.

Некоторые факты теории квадратичных форм.

Пусть $A=(a_{ij})$ – матрица $n \times n$, $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in R^n$. $\Phi\left(h\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_i h_j$ – квадратичная форма, при этом можно считать, что $a_{ij}=a_{ji}$.

Опр. Квадратичная форма Φ *положительно определена*, если $\Phi(h) > 0$, при $h \neq \mathbf{0}$ и отрицательно определена, если $\Phi(h) < 0$, при $h \neq \mathbf{0}$.

***Критерий* 1**. (Сильвестра) $\Phi > 0 \Leftrightarrow a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, …, $|A| > 0$;

$\Phi < 0 \Leftrightarrow a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, и далее знаки определителей чередуются.

***Критерий* 2.** $\Phi > 0 \Leftrightarrow$ все собственные значения $\lambda_i > 0$; $\Phi < 0 \Leftrightarrow$ все $\lambda_i < 0$.

Свойство квадратичных форм: $\exists m$, M такие, что $m\|h\| \leq \Phi\left(h\right) \leq M\|h\|$ $\forall h$. Оно основано на $\exists\, m=\inf\limits_{\|h\|=1}\Phi\left(h\right)$, $M=\sup\limits_{\|h\|=1}\Phi\left(h\right)$ так как $\Phi(h)=(h, Ah)$ – непрерывная функция.

***Критерий* 3.** $\Phi > 0 \Leftrightarrow m > 0$; $\Phi < 0 \Leftrightarrow M < 0$.

Теорема 2. (*Достаточные условия экстремума*)

Пусть f: $R^n \to R$, $f \in C^2_{V_{x_0}}$, grad $f(x_0)=0$.

Тогда, если $\Phi_{x_0}\left(h\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_0\right)h_i h_j$

a) $\Phi > 0$, то x_0 точка строгого локального минимума;

b) $\Phi < 0$, то x_0 точка строгого локального максимума;

с) Φ – меняет знак, то экстремума нет.

Доказательство. *a*). По формуле Тейлора имеем:

$$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(h\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(h\right)+\|h\|^2\alpha\left(h\right)\geq$$

$$\geq\frac{m}{2}\|h\|^2+\|h\|^2\alpha\left(h\right)==\|h\|^2\left(\frac{m}{2}+\alpha\left(h\right)\right).$$

Выберем $\delta > 0$ так, что $|\alpha(h)| < m/4$. Тогда $m/2+\alpha(h) > m/2 - m/4 = m/4 > 0$.

Таким образом, получим $f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)\geq m/4>0$ – x_0 точка локального минимума.

b) упражнение.

c) Предположим, что Φ меняет знак: $\exists e_+,\ e_- \in \mathrm{S}(\mathbf{0}, 1)$ такие, что $\Phi(e_+) > 0$, $\Phi(e_-) < 0$. Тогда

$$f\left(x_0+te_+\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(te_+\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(te_+\right)+t^2\alpha\left(t\right)=t^2\left(\frac{\Phi\left(e_+\right)}{2}+\alpha\left(t\right)\right).$$

Ясно, что при достаточно малых t эта величина положительная. Очевидно также, что при достаточно малых t значение $f\left(x_0+te_-\right)-f\left(x_0\right)$ отрицательное.

Теорема доказана.

Замечание **1**. Если квадратичная форма Φ такова, что $\Phi(h) \geq 0\ \forall h$, то она называется *положительно полуопределенной*. Например, $h_1^2+h_2^2+h_3^2+2h_1h_2+2h_2h_3+2h_3h_1$.

Пример **1.** Найдите точки локального экстремума функции

$$f(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^3$$

Ищем необходимые условия экстремума:

$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}$ то есть $\begin{cases}4x-y+2z=0\\ -x-1+3y^2=0\\ 2x+2z=0\end{cases}$. Решаем эту систему находим точки возможного экстремума $M_1(1/3,\ 2/3,\ -1/3)$ и $M_2(-1/4,\ -1/2,\ 1/4)$.

Вычисляем вторые производные $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -1$, $f''_{xz} = f''_{zx} = 2$, $f''_{yy} = 6y$, $f''_{yz} = f''_{zy} = 0$, $f''_{zz}=2$.

Значения этих частных производных в точке M_1 являются коэффициентами $\mathrm{d}^2f|_{M1}$. Матрица квадратичной формы есть $\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Вычислим главные миноры $4 > 0$, $\begin{vmatrix}4&-1\\-1&4\end{vmatrix}=15>0$, $\begin{vmatrix}4&-1&2\\-1&4&0\\2&0&2\end{vmatrix}=14>0$. В силу критерия Сильвестра в M_1 локальный минимум (строгий).

Составим матрицу для точки M_2: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, найдем знаки главных миноров $4 > 0$, $-13 < 0$, $-14 < 0$. Ясно, строгих экстремумов нет. Заметим, что квадратичная форма $\mathrm{d}^2 f|_{M2} = 4\mathrm{d}x^2 - 3\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}z^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ знакопеременная. Положив $\mathrm{d}x \neq 0$ и $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$, получаем $\mathrm{d}^2 f|_{M2} = 4\mathrm{d}x^2 > 0$, положив, $\mathrm{d}y \neq 0$ и $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z = 0$, $\mathrm{d}^2 f|_{M2} = -\, 3\mathrm{d}y^2 < 0$. Точка M_2 не является точкой локального экстремума.

§13. Теорема о неявной функции

Основной вопрос: при каких условиях существует решение системы уравнений $\begin{cases} F_1\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \\ F_2\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \\ \quad\quad\quad ... \\ F_n\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \end{cases}$.

То есть найдутся ли $f_1, f_2, \dots, f_n$ такие, что при подстановке $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\dots$, $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в приведенную систему, получим тождества. Иначе говоря, стоит задача выяснить, при каких условия можно решить систему относительно переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Надежда есть только на локальное решение такой задачи, поскольку, например, для уравнения $x^2 + y^2 = 1$ нет равносильного решения вида $y = f(x)$.

1. ***Теорема о неявной функции*** **(*случай двух переменных*):** $F(x, y) = 0$.

Теорема 1. Пусть функция F, определенная в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^2$, такова, что

1. $F \in C_U^{(p)}$, $p \geq 1$ – p раз непрерывно дифференцируема в U;

2. $F(x_0, y_0) = 0$;

3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists \Pi = Ix_0 \times Iy_0 \subset U$ (Π – прямоугольник с центром в точке (x_0, y_0), Ix_0 и Iy_0 – отрезки с указанными центрами) и функция $f : Ix_0 \to Iy_0$ такие, что

4. $\forall (x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется $\Leftrightarrow$ имеет место $y = f(x)$ на Ix_0;

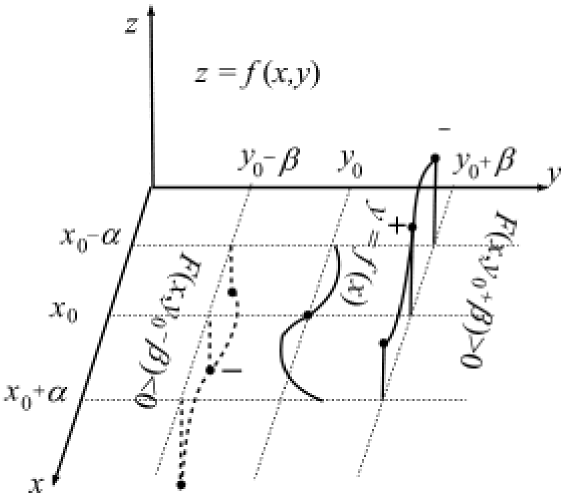
5. $f \in C_{Ix_0}^{(p)}$, при этом $f'\left(x\right) = -\dfrac{F'_x\left(x, f\left(x\right)\right)}{F'_y\left(x, f\left(x\right)\right)}$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$, Поскольку $F \in C_U^{(p)}$, то $F'_y(x, y) > 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), пусть ей будет круг радиуса $2\beta > 0$, содержащийся в U.

Функция $F(x_0, y)$ строго возрастает на отрезке $Iy_0 = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$$

Далее, поскольку F непрерывна в U, $F(x_0,\ y_0 - \beta) < 0$ и $0 < F(x_0,\ y_0 + \beta)$, существует $\alpha > 0$ такое что $\forall\ x \in [x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha] = Ix_0$ выполняются неравенства $F(x,\ y_0 - \beta) < 0$ и $0 < F(x,\ y_0 + \beta)$ (сохранение знака непрерывной функции).



Покажем, что $\Pi = Ix_0 \times Iy_0$ – искомый. Пусть $x \in [x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha] = Ix_0$, на отрезке с концами $(x,\ y_0 - \beta)$ и $(x,\ y_0 + \beta)$ рассмотрим функцию $y \to F(x,\ y)$. Эта функция строго возрастает, непрерывна и на концах принимает значения разных знаков. Значит, $\exists!\ y(x) \in Iy_0$ такой, что $F(x,\ y(x)) = 0$. Положим $f(x) = y(x)$.

Отметим, что и для $x_0 \in [x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha] = Ix_0$ $\exists!\ y(x_0) \in Iy_0$ такой, что $F(x_0,\ y(x_0)) = 0$, однако такая точка уже есть – точка y_0 ($F(x_0,\ y_0) = 0$). Значит, $f(x_0) = y_0$. Итак, f: $Ix_0 \to Iy_0$ определена однозначно и удовлетворяет 4.

<u>Непрерывность</u> f на Ix_0. Пусть $x^* \in Ix_0$, $f(x^*) = y^*$. Из пункта 4. следует $F(x^*,\ y^*) = 0$, кроме того $F'_y(x^*,\ y^*) > 0$. Пусть $0 < \varepsilon < \beta$. Выше по β было найдено α для x_0 и y_0. Точно также по ε, найдем δ для x^* и y^*, затем $\tilde{\Pi} = I_{x^*,\delta} \times I_{y^*,\varepsilon}$, а также функцию $\tilde{f} : I_{x^*,\delta} \to I_{y^*,\varepsilon}$ такую, что

$$F(x,\ y) = 0 \text{ в } \tilde{\Pi} \Leftrightarrow x \in I_{x^*,\delta} \text{ и } y = \tilde{f}(x) \qquad (6)$$

Так как $I_{x^*} \subset Ix_0$, $I_{y^*} \subset Iy_0$, из 4 и 6 получаем $\tilde{f}(x) = f(x)$ в I_{x^*}. Остается заметить, что $|x - x^*| < \delta \Rightarrow x \in I_{x^*} \Rightarrow \tilde{f}(x) \in I_{y^*,\varepsilon} \Rightarrow \left|\tilde{f}(x) - y^*\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x) - f(x^*)\right| < \varepsilon$. Непрерывность доказана.

<u>Гладкость</u> f. Пусть $x \in I_{x^*}$, Δx достаточно мало, $x + \Delta x \in I_{x^*}$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Тогда

$$0 = F\left(x + \Delta x, f\left(x + \Delta x\right)\right) - F\left(x, f\left(x\right)\right) = F\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - F\left(x, y\right) =$$

$$= F'_x\left(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y\right)\Delta x + F'_y\left(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y\right)\Delta y\,.$$

Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{F'_x\left(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y\right)}{F'_y\left(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y\right)}$. Отправив $\Delta x\to 0$, получаем $\Delta y\to 0$ (непрерывность f). Предел в правой части равенства существует, так как $F\in C_U^{(p)}$ и получим $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$. Осталось заметить, что дифференцируя правую часть как сложную функцию, будем получать производные более высоких порядков.

Например, $f''(x)=-\dfrac{\left(F''_{xx}(x,f(x))+F''_{xy}\cdot f'\right)F'_y-F'_x\left(F''_{yy}(x,f(x))+F''_{yx}\cdot f'\right)}{\left(F'_y(x,f(x))\right)^2}$.

2. *Теорема о неявной функции* (Случай $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$).

Соглашение о краткой записи: $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = (x, y)$ – две переменные x – векторная, y – скалярная; $(x_0,y_0)=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0,y_0\right)$; $I_{x_0}^{\alpha}$ – параллелепипед: $x\in I_{x_0}^{\alpha} \Leftrightarrow \left|x_i-x_i^0\right|<\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (m – мерный параллелепипед) здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. $I_{y_0}^{\beta}=\left\{y:\left|y-y_0\right|<\beta\right\}$.

Теорема 2. Пусть функция F, определенная в окрестности U точки $(x_0, y_0)\in R^{m+1}$, такова, что

1. $F\in C_U^{(p)}$, $p \ge 1 - p$ раз непрерывно дифференцируема в U;

2. $F(x_0, y_0) = 0$;

3. $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$.

Тогда $\exists\,\Pi=I_{x_0}^{\alpha}\times I_{y_0}^{\beta}\subset U$ и функция многих переменных $f:I_{x_0}^{\alpha}\to I_{y_0}^{\beta}$ такие, что

4. $\forall(x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется $\Leftrightarrow$ имеет место $y = f(x)$ $x\in I_{x_0}^{\alpha}$;

5. $f\in C_{I_{x_0}^{\alpha}}^{(p)}$, при этом $f'_{x_i}(x)=-\dfrac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$.

Доказательство теоремы 2 весьма схоже с доказательством теоремы 1.

3. ***Теорема о неявной функции*** **(*Общий случай*).**

Необходимо установить существование решений системы и их свойства:

$$\begin{cases} F_1\left(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n\right)=0 \\ F_2\left(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n\right)=0 \\ \qquad\qquad ... \\ F_n\left(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n\right)=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=f_1\left(x_1,x_2,...,x_m\right) \\ y_2=f_2\left(x_1,x_2,...,x_m\right) \\ \qquad ... \\ y_n=f_n\left(x_1,x_2,...,x_m\right) \end{cases}.$$

Соглашения о краткой записи: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2,\ldots, y_n)$, $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2,\ldots, y_n)$; запись системы $F(x, y) = 0$, решения $y = f(x)$; $I_{x_0}^{\alpha}, I_{y_0}^{\beta}$ – соответствующие параллелепипеды,

$$f'\left(x\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x\right) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\left(x\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x\right) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}\left(x\right) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(x\right) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\left(x\right) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\left(x\right) \end{pmatrix}, \qquad F'_x\left(x,y\right)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(x,y\right)\right),$$

$F'_y\left(x,y\right)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\left(x,y\right)\right)$, $\left(F'_y\left(x,y\right)\right)^{-1}$ – обратная матрица к $F'_y\left(x,y\right)$.

Теорема 3. Пусть отображение F, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^{m+n}$ таково, что

1. $F\in C_U^{(p)}$, $p \geq 1$ – p раз непрерывно дифференцируемо в U;

2. $F(x_0, y_0) = 0$;

3. $F'_y\,(x_0, y_0)$ – обратимое.

Тогда $\exists \Pi = I_{x_0}^{\alpha}\times I_{y_0}^{\beta}\subset U$ и отображение $f: I_{x_0}^{\alpha}\to I_{y_0}^{\beta}$ такие, что

4. $\forall(x, y) \in \Pi$ равенство $F(x, y) = 0$ выполняется $\Leftrightarrow$ имеет место $y = f(x)$ $x\in I_{x_0}^{\alpha}$;

5. $f'\left(x\right)=-\left(F'_y\left(x,f\left(x\right)\right)\right)^{-1}\left(F'_x\left(x,f\left(x\right)\right)\right)$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ – это теорема 2.

Пусть теорема справедлива для размерности $n-1$.

По условию $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x,y)\right)\neq 0$ отсюда в последней строке есть ненулевой элемент, можем считать, что $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0,y_0)\neq 0$.

Для $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2,\ldots, y_n) = 0$ находимся в условиях теоремы 2, следовательно, существует $\tilde{\Pi}=\left(\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}\right)\times I^1\subset U$ параллелепипед и $\tilde{f}:\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}\to I^1$, $\tilde{f}\in C^p_{\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}}$ такие, что

$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2,\ldots, y_n) = 0$ в $\tilde{\Pi}$ $\Leftrightarrow$ $y_n=\tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)$, $\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)\in\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}$.

Подставим $y_n=\tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)$ в первые $n-1$ уравнения системы, получим новую систему:

$$\begin{cases} F_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,\tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)\right)=0 \\ F_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,\tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)\right)=0 \\ \ldots \\ F_{n-1}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,\tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)\right)=0 \end{cases},$$

которую будем решать в $\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}$. Обозначим ее

$$\begin{cases} \Phi_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)=0 \\ \Phi_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)=0 \\ \ldots \\ \Phi_{n-1}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)=0 \end{cases} \text{ или } \Phi\left(x,\tilde{y}\right)=0,\ \tilde{y}=\left(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right).$$

Заметим, что система $\Phi\left(x,\tilde{y}\right)=0$ удовлетворяет требованиям индукционного предположения.

Во-первых, $\Phi\in C^p_{\tilde{I}^m\times\tilde{I}^{n-1}}$, как композиция гладких функций.

Во-вторых, $\Phi_i\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\ldots,y_{n-1}^0\right)=F_i\left(x_0,y_0\right)=0$.

Теперь заметим $\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0, \tilde{y}_0)\right) \neq 0$.

(Обратный ход). Имеем $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \neq 0$.

Рассмотрим связь между $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} F_i\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., \tilde{f}\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_{n-1}\right)\right) = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1},$$

здесь $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Если все элементы последнего столбца умножить на одно и то же число $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}$ и сложить с первым, то получим $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}(x_0, \tilde{y}_0)$. Вместе с этим, поскольку $F_n\left(x, \tilde{y}, \tilde{f}(x, \tilde{y})\right) \equiv 0$ в $\tilde{I}^m \times \tilde{I}^{n-1}$, то дифференцируя по y_1, получим $\frac{\partial F_n}{\partial y_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} = 0$. Тем самым имеем:

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) \quad (x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(x_0,\tilde{y}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(x_0,\tilde{y}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(x_0,y_0) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1}(x_0,\tilde{y}_0) & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}(x_0,y_0) \\
0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0,y_0)
\end{vmatrix}=
$$

Проделав такую же операцию со вторым, третьим, …, $n-1$ столбцом, приходим к

$$
=\begin{vmatrix}
\boxed{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0,\tilde{y}_0)\right)} & \begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) \\ \dots\end{matrix} \\
0 \quad 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0,y_0)
\end{vmatrix}.
$$

Отсюда следует, что $\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}(x_0,\tilde{y}_0)\right)\neq 0$.

Из предположения индукции следует, что $\exists\, I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \subset \tilde{I}_{x_0}^m \times \tilde{I}_{\tilde{y}_0}^{n-1}$ и $f : I_{x_0}^m \to I_{\tilde{y}_0}^{n-1}$ такие, что

$$
\Phi(x,\tilde{y})=0 \text{ в } I_{x_0}^m \times I_{\tilde{y}_0}^{n-1} \Leftrightarrow \tilde{y}=f(x)
$$

Далее легко заметить, что

$$
F(x, y) = 0 \text{ в } I_{x_0}^m \times \left(I_{\tilde{y}_0}^{n-1}\times I^1\right) \Leftrightarrow y = f(x).
$$

Наконец, для $x\in I_{x_0}^m$ имеем тождество $F\left(x, f(x)\right)\equiv 0$, дифференцируем его и получаем $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=0$ или $f'(x)=-\left(F'_y\left(x,f(x)\right)\right)^{-1}\left(F'_x\left(x,f(x)\right)\right)$.

§14. Условный экстремум

Пусть на открытом множестве $G\subset R^n$ заданы функции $f(x)$, $f_1(x)$, …, $f_m(x)$, при этом $m<n$, и пусть E – подмножество точек множества G, удовлетворяющие системе уравнений

$$f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0. \qquad (1)$$

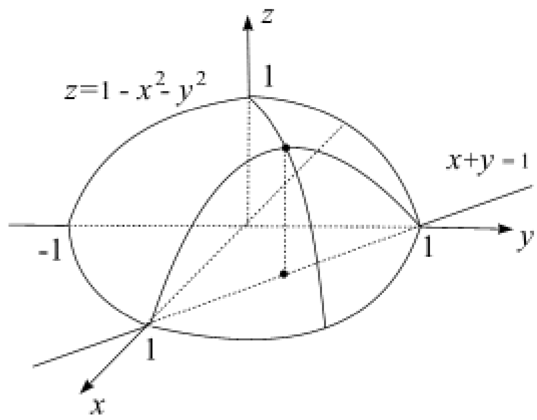
Уравнения (1) будем называть ***уравнениями связи***.

Опр.1. Точка $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in G$ называется ***точкой условного минимума*** функции $f(x)$ при наличии связей (1), если найдется такая окрестность V_{x_0}, что $\forall x \in V_{x_0} \cap G$ выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Иными словами в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ при условии $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$.

Аналогично определяются точки строгого условного минимума, максимума, общее название – точки условного экстремума.

***Пример* 1.** Найдите точки условного экстремума функции $z = 1 - x^2 - y^2$, если $x + y = 1$.



Уравнение связи $x + y = 1$ легко разрешается относит, $y = 1 - x$. Подставим в функцию $z = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$. Функция $2x - x^2$имеет максимум при $x = 1/2$. Точка (1/2, 1/2) является точкой условного строго максимума функции $z(x, y)$ при наличии связи $x + y = 1$.

Замечание. Успех пришел после того как удалось решить уравнение связи. Однако это редкая удача.

***Пример* 2.** Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = e^{axy}$, где $a \neq 0$, при условии $x^3 + y^3 + x + y = 4$.

Здесь уравнение связи затруднительно разрешить относительно одной из переменных. Метод Лагранжа, который мы сейчас изучим, для примера 2 более эффективен, чем прямой метод исключения зависимых переменных.

Метод множителей Лагранжа.

Опр. 3. Рассмотрим функцию $n + m$ переменных

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x)$$

где $x \in G \subset R^n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^m$. Числа λ_iназываются ***множителями Лагранжа***, а функцияL – ***функцией Лагранжа***.Будем говорить, что (x_0, λ_0) есть ***стационарная точка функции Лагранжа***, если

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0,\lambda_0)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0,\lambda_0)=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_0,\lambda_0)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x_0,\lambda_0)=0.$$

Теорема 1. (*необходимые условия условного экстремума*).

Пусть x_0– точка условного экстремума функции $f(x)$ при наличии связей (1), и пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, …, $f_m(x)$, непрерывно дифференцируемые в окрестности точки x_0, причем ранг матрицы Якоби равен m.

$$J(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тогда найдутся такие множители Лагранжа$\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$, что (x_0, λ_0) будет стационарной точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Так как $m<n$, а ранг матрицы Якоби в точке x_0 равен m, то хотя бы один из миноров этой матрицы порядка m отличен от нуля. Будем считать, что это

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку $f_1(x_0) = 0, \ldots, f_m(x_0) = 0$. Находимся в условиях теоремы о неявной функции для $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$и $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ (здесь первая группа переменных играет роль y, вторая – x).

Значит, существует $\Pi_{x_0} = I_{\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)} \times I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}$ и $g : I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)} \to I_{\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)}$ такие, что имеет место: $f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0$ при $x \in \Pi_{x_0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \\ \ldots \\ x_m = g_m\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \end{cases}$ при $\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \in I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}$. Таким образом, если $\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \in I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}$, то имеем:

$$\begin{cases} f_1\left(g_1\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), g_2\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), \ldots, g_m\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \equiv 0 \\ \ldots \\ f_m\left(g_1\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), g_2\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), \ldots, g_m\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \equiv 0 \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим на $I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}$ функцию.

$$G\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) = f\left(g_1\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), g_2\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), \ldots, g_m\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right), x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \text{ (5).}$$

Во-первых, если $\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) \in I_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}$, то, очевидно,получим $G\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, кроме того, выполняются уравнения связи. Во-вторых, $G\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right) = f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$. Таким образом, $\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ – точка безусловного экстремума функции $G\left(x_{m+1}, \ldots, x_n\right)$. Следовательно, в силу необходимых условий существования (безусловного) экстремума, получим

$$dG\Big|_{\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)} = 0.$$

С одной стороны, воспользуемся (5) и в силу инвариантности формы первого дифференциала получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0\right)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_0\right)dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_0\right)dx_n = 0$$

С другой стороны, дифференцируя тождества (4) в точке $\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$, снова в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \\ ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + ... + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)dx_n = 0 \end{cases}$$

Умножим полученные равенства на λ_1, λ_2, …, λ_m и сложим с предыдущим равенством, получим: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0)\right)\cdot dx_k = 0$. Вычислив дифференциал функции Лагранжа в точке (x_0, λ), обнаружим, что

$$dL\Big|_{(x_0,\lambda)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0,\lambda)dx_k + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0,\lambda)d\lambda_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0)\right)\cdot dx_k = 0$$

.

Здесь $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_0,\lambda) = f_i(x_0) = 0$.

Решим систему линейных уравнений относительно переменных λ_1, λ_2, …, λ_m

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) + ... + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) + ... + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) = 0 \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) + ... + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Из условия следует, что она имеет единственное решение, пусть это будет $\lambda_1{}^0$, … , $\lambda_m{}^0$.Отсюда, в частности, $\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_0,\lambda_0) = 0$, …, $\frac{\partial L}{\partial x_m}(x_0,\lambda_0) = 0$.

Перепишем дифференциал функции Лагранжа в точке (x_0, λ_0), получим $dL\Big|_{(x_0,\lambda_0)} = \sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_0,\lambda_0)dx_k = 0$.

Так как дифференциалы независимых переменных dx_{m+1}, …, dx_n, могут принимать любые значения, то $\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x_0,\lambda_0) = 0$, …, $\frac{\partial L}{\partial x_n}(x_0,\lambda_0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. (*Достаточные условия условного экстремума*).

Пусть функции многих переменных f, f_1, f_2, …, f_m имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки $x_0 \in R^n$, причем в точке x_0 ранг функциональной матрицы (3) равен m и пусть (x_0, λ_0) стационарная точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Тогда если квадратичная форма $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}(x_0,\lambda_0)dx_k dx_j$ положительно определена, то x_0 точка условного строго локального минимума при наличии связей (1);если отрицательно определена, то x_0 – точка условного строго локального максимума. Если форма знакопеременная, то x_0 не является точкой условного экстремума.

Доказательство. Во-первых, воспользуемся тем, что в точке x_0 ранг функциональной матрицы (3) равен m, также как в теореме 1 выделим параллелепипед $\Pi_{x_0} = I_{\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)} \times I_{\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)}$ и отображение $g : I_{\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)} \to I_{\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)}$ если взять $\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \in I_{\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)}$ и доопределить $\begin{cases} x_1 = g_1\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \\ \quad ... \\ x_m = g_m\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \end{cases}$, то для полученных $x = (x_1, …, x_n)$ имеем $f_1(x) = 0$, …, $f_m(x) = 0$, то есть $x \in E$.

Далее, $L(x_1, …, x_n, \lambda_0) = f(x_1, …, x_n) = G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right)$, где, как и раньше $G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) = f\left(g_1\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), g_2\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), ..., g_m\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), x_{m+1}, ..., x_n\right)$.

Так, имеем $G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) = L(x_1, …, x_n, \lambda_0)$, где в правой части равенства $x_1 = g_1\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), ..., x_m = g_m\left(x_{m+1}, ..., x_n\right)$.

В силу инвариантности первого дифференциала, $dG\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right) = d_x L\left(x_0, \lambda_0\right) = 0$ (необходимое условие экстремума в точке $\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$ для $G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right)$ на $I_{\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)}$).

Теперь рассмотрим второй дифференциал от обеих частей равенства $G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) = L(x_1, …, x_n, \lambda_0)$,

$$d^2G\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}\left(x_0, \lambda_0\right)dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_k}\left(x_0, \lambda_0\right)d^2 x_k.$$

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x_k}\left(x_0, \lambda_0\right) = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}\left(x_0, \lambda_0\right)dx_k dx_j$ положительно определена, то $d^2G\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$ положительно определена и, значит, $G\left(x_{m+1}, ..., x_n\right)$

имеет в точке $\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$ минимум. Итак, для $\left(x_{m+1},...,x_n\right)\in I_{\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)}$ имеет место неравенство $G\left(x_{m+1},...,x_n\right)\geq G\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$. Это соответствует $f\left(x_1,...,x_n\right)\geq f\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$. То есть, условному экстремуму.

Пример 2 возвращается. Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = e^{axy}$, где $a \neq 0$, при условии $x^3 + y^3 + x + y = 4$.

Построим функцию Лагранжа: $\mathrm{L}(x, y, \lambda) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4)$. Стационарные точки функции Лагранжа определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = aye^{axy} + \lambda\left(3x^2+1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = axe^{axy} + \lambda\left(3y^2+1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Умножая первое уравнение на x , а второе на y и вычитая, получаем

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0.$$

Если $\lambda = 0$, то из первых двух уравнений $x = y = 0$. Но $x = y = 0$ не удовлетворяют уравнению связи. Итак, $\lambda \neq 0$, поэтому $x = y$, а третий множитель $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$. Подставляя $x = y$ в уравнение связи, получаем $x = y = 1$. При этом из первого уравнения получаем $\lambda_0 = -ae^a/4$.

Итак, точка $(1, 1, -ae^a/4)$ единственная стационарная точка функции Лагранжа. Так как $\mathrm{d}(e^{axy}) = a(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)\, e^{axy}$,

$$\mathrm{d}^2(e^{axy}) = a^2(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)^2\, e^{axy} + 2a\mathrm{d}x\mathrm{d}y\, e^{axy},$$

$\mathrm{d}^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6x\mathrm{d}x^2 + 6y\mathrm{d}y^2$, то для второго дифференциала функции Лагранжа получаем

$$\mathrm{d}^2L(1, 1, -ae^a/4) = ae^a(a(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)/2).$$

Дифференцируя уравнение связи, при $x = y = 1$ получаем $\mathrm{d}y + \mathrm{d}x = 0$ Подставляя $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ в $\mathrm{d}^2L(1, 1, \lambda_0)$, получаем равенство $\mathrm{d}^2L(1, 1, \lambda_0) = -5\, ae^a dx^2$.

Поэтому при $a < 0$ в точке $(1, 1)$ будет условный минимум, а при $a > 0$ – условный максимум функции f, причём экстремальное значение равно e^a.

Теорема о диффеоморфизме

Опр.1. Пусть U, V – открытые подмножества в R^n, отображение $f: U \to V$ называется диффеоморфизмом гладкости p, если f – биекция множеств U и V; f – p раз непрерывно дифференцируемо; f^{-1} – p раз непрерывно дифференцируемо (Кратко: $f \in C^p(U, V)$, : $f^{-1} \in C^p(V, U)$).

Теорема. Пусть отображение f: $G \to R^n$, где G область таково, что

1. f – p раз непрерывно дифференцируемо.
2. $y_0 = f(x_0)$.
3. Матрица $f'(x_0)$ – обратимая.

Тогда существуют окрестности Ux_0 и Vy_0 такие, что f является их диффеоморфизмом гладкости p. При этом, если $x \in Ux_0$ и $y \in Vy_0$, то $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $F(x, y) = f(x) - y$. Тогда, $F \in C^p(G \times R^n, V)$, $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ – обратимая. Тем самым находимся в условиях теоремы о неявной функции.

Значит, $\exists \Pi = I_{x_0} \times I_{y_0} \subset G$ и отображение $g: I_{y_0} \to I_{x_0}$ класса C^p такие, что

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y), \text{ при этом, } g'(y) = -\left(F'_x(x,y)\right)^{-1}\left(F'_y(x,y)\right).$$

Замечаем $F'_x(x,y) = f'(x)$, $F'_y(x,y) = I$ и $g'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}$.

Пусть $V = I_{y_0}$, $U = g[V]$. Отсюда сразу получаем $f: U \to V$, $g: V \to U$ взаимно обратны. Далее из 1, 2, 3 получено, что образ внутренней точки x_0 множества G является внутренней для $f[G]$, поскольку $I_{f(x_0)} \subset f[G]$.

(!) свойства 1, 2, 3 выполняются для любых $y \in V$ и отсюда $x = g(y)$ внутренняя точка, значит, U – открытое. Теорема доказана