

# МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Ряды</b>	<b>2</b>
§1	Определение ряда. Основные свойства . . . . .	2
П.0	Конечные суммы . . . . .	2
П.1	Числовые ряды . . . . .	2
П.2	Основные свойства . . . . .	3
П.3	Неотрицательные числовые ряды . . . . .	4
П.4	Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ . . . . .	6
П.5	Признак Коши. Признак Даламбера . . . . .	7
П.6	Число $e$ , как сумма ряда . . . . .	10
§2	Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля . . . . .	11
П.1	. . . . .	11
§3	Абсолютно и условно сходящиеся ряды . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Интеграл</b>	<b>18</b>
§1	Неопределенный интеграл . . . . .	18
П.1	Первообразные . . . . .	18
П.2	Приемы отыскания первообразных . . . . .	20
П.3	Первообразная от рациональной функции . . . . .	22
П.4	Первообразные простых дробей . . . . .	23
П.5	первообразные сводящиеся к рациональным . . . . .	24
П.6	План изучения . . . . .	25
П.7	Частные случаи интегрирования тригонометрических функций . . . . .	26
П.8	$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ . . . . .	26
П.9	Подстановка Эйлера . . . . .	28
П.10	Биномиальные интегралы . . . . .	28
П.11	Определенные интегралы . . . . .	29

# Глава 1 Ряды

## §1 Определение ряда. Основные свойства

### П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$
- $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)$

### П.1 Числовые ряды

**Определение §1.1.** Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где  $a_k \in \mathbb{R}$  - общий член последовательности,

а  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  - частичные суммы ряда

**Определение §1.2.** Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

**Пример.**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если  $|q| < 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$  - ряд сходится

Если  $|q| > 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = 1$ , то  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  - ряд расходится

Если  $q = -1$ , то  $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$  - ряд расходится

## П.2 Основные свойства

**Теорема §1.1** (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} &\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k - \text{сходится} \\ &\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n-1 > N |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N+1 \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

**Следствие.** Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

**Замечание.** Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

**Теорема §1.2** (Необходимый признак сходимости ряда). Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится

*Доказательство.*

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

**Теорема §1.3** (Арифметические свойства). Пусть ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходятся, тогда

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится}$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$   $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$   
Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

**Замечание.** В частности  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

### П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

**Теорема §1.4** (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены которого неотрицательны, сходится  $\Leftrightarrow$  посл-ть частичных сумм ограничена*

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Ряд сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  последовательность частичных сумм сходится  
 $\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}} \{S_n\}$  - ограничена

$\Leftarrow \{S_n\}$  - ограничена

$S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$  - сходится  $\xrightarrow{\text{По определению}}$  ряд сходится

■

**Теорема §1.5** (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$  сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2. Из расходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$  расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

*Доказательство.* Конечное число членов ряда не влияет на сходимость  
 $\Rightarrow$  будем считать, что  $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то  $S_n^B \nearrow$  и сходится к  $S^B$  при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху  $S^B \xrightarrow{\text{по th 4}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$

2. (от противного) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - расходится, а  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится, тогда по пункту 1 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - сходится  $\Rightarrow \perp$

■

**Теорема §1.6** (Признак сравнения в предельной форме). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k > 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 - \text{конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$  - сходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2. Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_n$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$  - расходится  
 $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится

■

#### П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

**Теорема §1.7** (Телескопический признак). Пусть  $a_n \searrow, a_n \geq 0$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится  
 $\Leftrightarrow$  сходится  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

*Доказательство.* Правый ряд  $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1.  $S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$  Если ряд  $S_n^B$  - сходится  $\Rightarrow S_{2^{n+1}}^A - a_1$  - сходится  
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$  и  $\{S_n^A\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2.  $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$$

Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$  и  $\{S_n^B\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$   
 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится

*Примечание:* Расхождение доказывается по признаку сравнения



**Теорема §1.8.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$   $\begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

- Пусть  $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$  Рассмотрим ряд из th 7  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$  - геометрическая прогрессия  $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$  - сходится  $\xRightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  - сходится
- Пусть  $p \leq 1$   
 $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  т.к  $\frac{1}{n}$  - расходится  $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p}$  - расходится

■

## П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

**Теорема §1.9** (признак Даламбера). Пусть  $a_n > 0$  и  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , тогда

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n!, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q + \varepsilon < 1$  (Например  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ ) Тогда  $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \tilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \tilde{q} < a_{n+1} \tilde{q}^2$$

...

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \tilde{q} < \dots < a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$$

Т.к  $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k$  - геометрическая прогрессия ( $\tilde{q} < 1$ )  $\Rightarrow$  сходится  $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$  - сходится  $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится

2. Пусть  $q > 1$

Возьмем  $\varepsilon : \tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда  $\forall n > N \ a_n \tilde{q} < a_{n+1} \xrightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1} \tilde{q}^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{\text{по необходимому признаку}} \text{ряд расходится}$

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.10** (радикальный признак Коши).

Пусть  $a_n \geq 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , тогда

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Замечание.** Признак удобно применять, если в  $a_n$  есть  $2^n, n^k$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \ | \sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть  $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} | q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n - \text{геометрическая прогрессия} (\tilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ряд сходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$



2. Пусть  $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$   
ряд расходится

3. Пусть  $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

**Теорема §1.11** (Признак Раабе). Пусть  $a_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$ , тогда

1. Если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - расходится
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  - сходится
3. Если  $q = 1$ , то признак не работает

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

## П.6 Число е, как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n \end{aligned}$$

2. Пусть  $m < n$

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m} \\ &\Rightarrow e_n > A_{n,m} \text{ Зафиксируем } m. \text{ Тогда при } n \rightarrow \infty e \geq S_m \end{aligned}$$

3.  $\Rightarrow e_n < S_n \leq e$  и  $\{S_n\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th Вейерштрасса}} \text{Ряд сходится}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа е частичными суммами:

$$\begin{aligned} 0 < e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

**Упражнение.** Доказать, что е - иррационально

**Упражнение.** Доказать, что  $2 < e < 3$

## §2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

### П.1

**Определение §2.1.** Ряд вида  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  называется знакопеременным, где  $\forall n \ a_n > 0$

**Теорема §2.1** (Признак сходимости Лейбница знакопеременных рядов). Пусть дан знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ a_n > 0$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $\{a_n\} \searrow$ , то ряд сходится

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху} \\ S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow \mid \xrightarrow[\text{по th Вейерштрасса}]{\text{no th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \\ S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow[S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0]{\text{При } n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Признак достаточный, но не необходимый!

**Следствие** (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$\begin{aligned} S &= S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots \\ |R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1} \\ &\mid \Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1} \end{aligned}$$

**Лемма (Абеля).** Дано  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ . При этом:

1.  $\{a_i\}$  монотонно
2.  $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим  $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ , также перепишем (2) условие, как  $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\
&= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\
\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &= |B_1| |a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}| |a_{n-1} - a_n| + |B_n| |a_n| \leq \\
&\leq B \left( \underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n| \right) = \\
&= B (|a_1 - a_n| + |a_n|) \stackrel{\text{Использую неравенство треугольника}}{\leq} B (|a_1| + 2|a_n|)
\end{aligned}$$

■

**Теорема §2.2** (Признак Дирихле). Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:

1.  $a_n$  монотонно стремится к 0
2.  $\exists C \forall n \left| \sum_{k=1}^m b_k \right| \leq C$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $a_n$  - монотонно  $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$   
Из (2) условия  $\forall n \forall p \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \right| \leq 2C$   
Рассмотрим  $a_n, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля } (B=2C)} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$  ■

**Теорема §2.3** (Признак Абеля). Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  тогда, если:

1.  $a_n$  монотонно и ограничена
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  - сходится

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится

*Доказательство.* Из (1) условия  $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$

Из (2) условия  $\xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \mid \sum_{k=n}^{n+p} b_k \mid < \frac{\varepsilon}{3A}$

Рассмотрим  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$  и  $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xrightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} - \text{монот. из усл. } B = \frac{\varepsilon}{3A}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сходится ■

*Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2.* Из условия, что  $\{a_n\} \searrow 0$  и того факта, что  $|\sum_{n=1}^m (-1)^n| \leq 1$ ,

по теореме Дирихле следует, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  - сходится ■

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем  $m$ . Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0, b_n = \sin(nx)$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(mx) = \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \dots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \dots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) \end{aligned}$$

Если  $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$  ряд сходится

Если  $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$

$\mid \xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}} \text{ряд сходится}$

**Упражнение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

### §3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

**Определение.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Теорема §3.1.** Абсолютный ряд сходится

*Доказательство.* Дано  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится. Докажем, что сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - сходится  $\xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится ■

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  - сходится по признаку Лейбница, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$  - расходится  $\Rightarrow$  ряд сходится не абсолютно

**Определение.** Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

**Теорема §3.2** (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов). 1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$  абсолютно сходится

2. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , тогда ряд  $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходится,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

*Доказательство.*

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника
2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

**Теорема §3.3.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится. А ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  получен путем произвольной перестановки членов  $a_n$   
Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

*Доказательство.*  $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$  В самом деле это биекция так, как  $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$  и  $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

$$1. \forall m \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$$

$$2. \forall l \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$$

$$\bullet A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n| \text{ и } \{S_n^B\} \searrow \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \text{ряд}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\bullet \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \text{ Тогда:}$$

$$\forall \varepsilon \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

$$\text{Возьмем } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\text{Пусть } m \geq N | \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b | < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_C$$

$$\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначис ее за } C$$

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$| \sum_{n=1}^l a_k - a | < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |a - b| = | \sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c | < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} a = b$$



**Теорема §3.4.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - абсолютно сходится, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений  $a_m b_n$ , расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$ , то сумма полученного ряда равна  $S = S^A S^B$

*Доказательство.* Расположим  $a_m b_n$  в удобном порядке:

$$\begin{aligned}
 & a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\
 & a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\
 & \dots \\
 & a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\
 & \dots \\
 & a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения:  $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху

$S_n \nearrow$ , т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$S_{n^2} = |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. сходим.}}$$

Конечное число в силу абс. сходим.

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$  ряд (1) сходится абсолютно  $\xrightarrow{\text{th 3}}$  исходный ряд сходится

Докажем, что  $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S}_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S}_{n^2}}_{\rightarrow \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow \tilde{S}^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow \tilde{S}^B} \Rightarrow S = S^A S^B$$

■



**Замечание.** Пусть есть ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится  $\Leftrightarrow$  сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

**Теорема §3.5 (Римана).** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно, то  $\forall A$  можно так переставить члены ряда, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$

*Доказательство.*

Пусть  $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$  - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть  $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$  - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - расходится  $\Rightarrow$

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходиться (противоречие).

Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть  $A \geq 0$ :

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если  $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если  $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$ , то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть  $\forall \varepsilon > 0$  Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимый признак сходимости}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

■

**Упражнение.** Покажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходиться

**Упражнение.** Докажите, что если при любой перестановке его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

## Глава 2 Интеграл

### §1 Неопределенный интеграл

#### П.1 Первообразные

**Определение.** Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на некотором интервале, если  $F'(x) = f(x)$

**Определение.** Функция  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  (точная) первообразная функции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\forall x \in I F'(x) = f(x)$

**Воспоминания.** Теорема Лагранжа о среднем. Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Лемма §1.1** (о точных первообразных). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2$  - первообразные на  $[a, b]$ , тогда  $F_1(x) = F_2(x) + C$ , где  $C \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Рассмотрим  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G'(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

**Лемма §1.2** (из будущего). У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке

**Пример.**  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

**Определение.** Функция  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  называется обобщенной первообразной ф-ции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $F'(x) = f(x)$  всюду за исключением конечного числа точек и  $F$  - непрерывная

**Пример.**  $|x|$  - обобщенная первообразная  $sign(x)$ , т.к.  $|x|' = sign(x)$

**Лемма §1.3.** Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке

**Лемма §1.4** (об обобщенной первообразной). Если  $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  обобщенные первообразные функции  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $F_1(x) = F_2(x) + C$

*Доказательство.* Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  - точки, в которых нет  $F_1'(x)$  или нет  $F_2'(x)$

На любом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  по предыдущей лемме  $F_1$  и  $F_2$  - точные первообразные ф-ции  $f$  (по лемме 3)

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}] \\ F_1(x) &= F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i] \\ | \Rightarrow F_1(x_i) &= F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1} \end{aligned}$$

■

**Обозначение.** Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции  $f$  называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

**Обозначение.**  $f(x)dx$  -подынтегральное выражение

**Обозначение.** Иногда удобно ввести обозначение:  $F'(x)dx = dF(x)$

**Замечание.** У  $dx$  приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

## П.2 Приемы отыскания первообразных

### 1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
$k$	$kx+c$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x +c$
$\sin x$	$-\cos x +c$
$\cos x$	$\sin x +c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x +c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+c$
$e^x$	$e^x+c$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} +c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x +c$

**Замечание.**

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -\ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

### 2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

**Пример.**

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

**Пример.**

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctg(X) + C$$

### 3. интегрирование по частям

**Замечание.**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) + C$$

**Замечание.** Когда использовать:  $\int x^n f(x) dx$ ,  $\int \dots \ln \dots dx$ ,  $\int \dots \arctg \dots dx$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x (-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= x(-\cos x) + \int \cos(x) dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\int \ln x dx = \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

### 4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если  $\phi(x)$  - дифференцируемая функция, то  $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y)) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

**Пример.**

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} 2x dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} (x^2)' dx$$

Обозначим  $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$F_1(x)$ - Первообразна на  $[a, b]$

$F_2(x)$ - Первообразна на  $[b, c]$

Тогда:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

### П.3 Первообразная от рациональной функции

**Определение.** Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ где } P(x), Q(x) - \text{многочлены}$$

**Обозначение.**  $\deg P$  - степень многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

**Замечание.** В комплексных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где  $z_1 \dots z_n$  - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:

либо корень вещественный,  $z_k \in \mathbb{R}$

либо есть комплексно сопряженные  $z_k, \bar{z}_k : (z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k$

**Лемма §1.5.** Если  $P(x)$  - многочлен над  $\mathbb{R}$ , то его можно разбить на  $P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_n x + q_n)^{l_n}$   
Это представление единственно (с точностью до перестановки множителей)

**Лемма §1.6** (о делении с остатком). Если  $P(x), Q(x), \deg(P) \geq \deg(Q), Q \neq 0$ , тогда  $\exists!$  многочлены  $q(x), r(x), \deg(q) = \deg(P) - \deg(Q), \deg(r) < \deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$

**Лемма §1.7.** Если  $\deg(P), \deg(Q) > 0$ , и  $d(x) = \text{NOD}(P(x), Q(x))$ , тогда  $\exists u(x), v(x) : \deg(u) < \deg(Q), \deg(v) < \deg(P), d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

**Теорема §1.1** (о разложении в простые дроби). Пусть  $P(x), Q(x)$  - многочлены,  $0 < \deg(P) < \deg(Q), \text{NOD}(P(x), Q(x)) = 1$  и  $P(x)$  как в лемме 5, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

**Пример.**

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя  $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$
2. теорема о разложении в простые дроби:  $R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ .  
Найдем коэффициенты  $A, B, C$

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-5}{x-1} dx + \int \frac{8}{x-2} dx + \int \frac{-9}{(x-2)^2} dx$$

## П.4 Первообразные простых дробей

**Замечание.**

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x - x_i| + C$$

$$\int \frac{1}{(x - x_i)^k} dx = \frac{-1}{(k-1)(x - x_i)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x - \frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q - \frac{p^2}{4})}_{>0}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2 + 1)} dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2 + 1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x}{a} + \frac{p}{2a}) + C \\
&\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \\
&\int \frac{x}{1+x^2} dx = \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2} dy}{y+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \\
&\int \frac{x}{(1+x)^k} dx = \int \frac{\frac{1}{2} dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy = \frac{y}{1+y^2} - \int y (\frac{1}{(1+y^2)^k})' dy = \frac{y}{1+y^2} - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1} 2y)}{(1+y^2)^{2k}} dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy = \frac{y}{1+y^2} - 2k \int (\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}}) dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} - 2k I_k(y) + 2k I_{k+1}(y) \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy \\
I_1(y) &= \operatorname{arctg} y + C \\
I_{k+1}(y) &= \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(y)
\end{aligned}$$

## П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

$R$  - рациональная функция

1.  $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$  замена  $y = \sqrt[n]{ax+b}$  сводит к рациональной функции

**Замечание.**

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R(\frac{y^n-b}{a}, y) \frac{y^{n-1}}{a} dy$$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1}+x-5} dx \ominus \\
&y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1, dx = 2y dy \\
&\ominus \int \frac{\sqrt{2}y 2y}{y+y^2-6} dy = 2\sqrt{2} \int \frac{y^2}{y^2+y-6} dy = 2\sqrt{2} \int (1 - \frac{y-6}{y^2+y-6}) dy = \dots
\end{aligned}$$



2.  $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ ,  $ad \neq bc$  замена  $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ,  $x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y)dy$$

**Пример.**

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

3.  $R(\sin X, \cos X)$  универсальная тригонометрическая замена  $y = tg(\frac{x}{2})$   
 $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2tg(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y^2}$

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

Если  $R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = \cos X$

Если  $R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = \sin X$

Если  $R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin X, \cos X)$ ,  $t = tg X$

4.  $R(\sin X, \cos X)$  по аналогии с пунктом (3) + работает замена  $y = e^x$

## П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций
  - Разложение на простые дроби
  - Метод Остроградского(\*)
- Интегрирование тригонометрических функций
  - $\int R(\sin X; \cos X)dx$ ,  $t = tg(\frac{x}{2})$  - универсальная подстановка
  - Четность/нечетность функции  $\rightarrow$  специальная замена
  - Частные случаи(\*\*)
- Интегрирование иррациональных функций

$$- \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots)dx$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, N = NOK(m, n, \dots)$$

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$  - выделение полного квадрата или замена Эйлера (\*\*\*)
- Биномиальный интеграл (\*\*\*\*)

**Замечание.** Все методы сводятся к интегрированию рациональных функций

## П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.

$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) dx$  используя формулы понижения степени получим

$$\int \frac{1 - \cos(2x)}{2}^m \frac{1 + \cos(2x)}{2}^n dx$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m+1}(x) \cos^{2n}(x) dx &= \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n+1}(x) dx = \\ &= - \int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x) \underbrace{d \cos(x)}_t = - \int (1 - t^2)^m t^{2n} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \sin(ax) \cos(bx) dx &= (1) \\ \int \sin(ax) \sin(bx) dx &= (2) \\ \int \cos(ax) \cos(bx) dx &= (3) \end{aligned}$$

$$(1) = \int \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) dx$$

$$(2) = \int \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx$$

$$(3) = \int \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) dx$$

## П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_u + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака  $a$  сводится к:

- $\int R(u; \sqrt{a^2 - u^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{u^2 - a^2}) du$
- $\int R(u; \sqrt{a^2 + u^2}) du$

случай	подстановка (замена)	$du$	корень
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \sin(t)$ $u = a \cos(t)$	$du = a \cos(t) dt$ $du = -a \sin(t) dt$	$a \cos(t)$ $a \sin(t)$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{\sin(t)}$ $u = \frac{a}{\cos(t)}$	$du = -\frac{a \cos(t)}{\sin^2(t)} dt$ $du = -\frac{a \sin(t)}{\cos^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\sin(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{ctg}(t)$ $\sqrt{(\frac{a}{\cos(t)})^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(t)$
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$u = \frac{a}{\operatorname{tg}(t)}$ $u = \frac{a}{\operatorname{ctg}(t)}$	$du = \frac{a}{\cos^2(t)} dt$ $du = -\frac{a}{\sin^2(t)} dt$	$\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{tg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\cos(t)}$ $\sqrt{(\frac{a}{\operatorname{ctg}(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{\sin(t)}$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ dx = \frac{dt}{\cos^2(t)} \\ x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^2(t) - \operatorname{tg}(t) + 1}{\frac{1}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\
&= \int (\operatorname{tg}^2(t) + 1) \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \cos(t) dt - \int \operatorname{tg}(t) \cos(t) dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}(\frac{t}{2}) \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos(t) = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} du + \cos(t) = \ln|u| + \cos(t) + C = \\
&= \ln|\operatorname{tg}(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2})| + \cos(\operatorname{arctg}(x)) + C
\end{aligned}$$

## П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$1. a > 0 \quad \underbrace{\sqrt{ax^2 + bx + c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{ax}$$

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{ax} + ax^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

Получаем рациональную функцию под интегралом

$$2. 2 \text{ различных корня } ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_0}, \quad t^2(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c$$

$$t^2(x - x_0) = a(x - x_1)$$

$$x = \frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) = \\ = t\left(\frac{-ax_1 + t^2x_0}{t^2 - a} - x_0\right)$$

## П.10 Биномиальные интегралы

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}$$

а)  $p$  - целое, тогда по биному Ньютона

б)  $p$  - дробное

Выполнить замену  $z = x^n$ , тогда  $x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$

$$\Rightarrow \int z^{\frac{m}{n}}(az + b)^p \frac{1}{n}z^{n(\frac{1}{n}-1)}dz =$$

Вариант 1

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1}(az + b)^p dz, \text{ если } \frac{m+1}{n} - \text{целое, то}$$

$p = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow t^\nu = az + b = ax^n + b \Rightarrow$  получим рациональную функцию

Вариант 2

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left( \frac{az+b}{z} \right)^p dz$$

Если  $\frac{m+1}{n} + p - 1$  - целое, то  $t^\nu = \frac{az+b}{z} = \frac{ax^n+b}{x^n}$

**Теорема §1.2** (Чебышева).

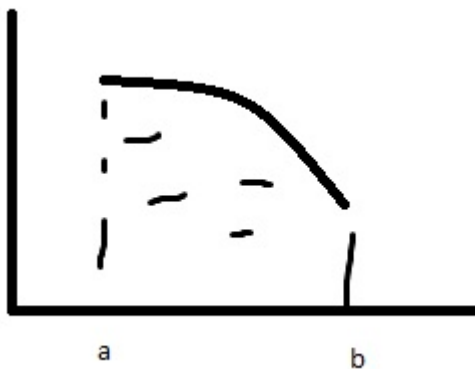
$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

вычисляется в элементарных функциях только, если

1.  $p$ -целое

2.  $p$ -дробное,  $\frac{\mu}{\nu}$   $\left[ \begin{array}{l} \frac{m+1}{n} - \text{целое} \\ \frac{m+1}{n} + p - \text{целое} \end{array} \right], t^\nu = ax^n + b$   
 $t^\nu = \frac{ax^n + b}{x^n}$

## П.11 Определенные интегралы



$$f : [a, b] \rightarrow R, f(x) \geq 0$$

**Формула** (Ньютона-Лейбница).

$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \text{ где } F - \text{ первообразная } f$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

**Определение.** Кольцо множеств - набор множеств замкнутый относительно  $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

**Пример.** Подмножество  $\mathbb{R}^2$  :

- Все подмножества пл-ти  $P(\mathbb{R}^2)$
- $\{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$
- Все ограниченные множества
- Все многоугольники  $(+\emptyset)$

**Определение.** Площадь на кольце  $R$  подмножеств  $\mathbb{R}^2$  это функция  $S : R \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что:

1.  $\forall A \subset R, S(A) \geq 0$
2.  $\forall A, B \subset R, A \cap B = \emptyset \rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. не меняется при сдвигах, поворотах, отражениях. Т.е  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(L(A)) = S(A)$
4.  $S([0, 1]^2) = 1$

**Замечание.** Аналогично  $V : R(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  - объем

**Замечание.** Аналогично  $l : R(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  - длина

**Замечание.** 1. Из определения  $S(\subset) = 0$   
 $S(A \cup \emptyset) = S(\emptyset) + S(A)$

2.  $S([0, a] \times [0, b]) = ab$

**Замечание.** Площадь однозначно определяется на кольце многоугольников

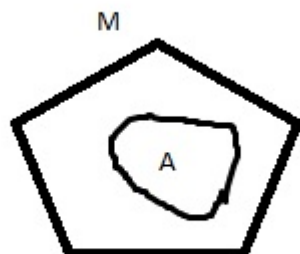
**Следствие §1.1.**  $A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$

*Доказательство.*

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

■

**Определение.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^2$  - ограниченное множество.

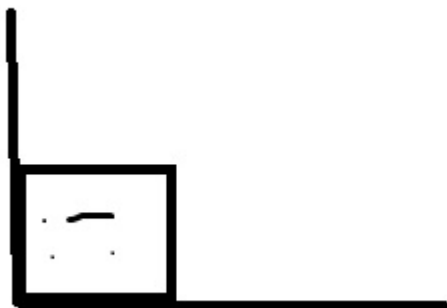


$S^*(A) = \inf(S(M), M - \text{многоугольник}, A \subset M)$  - Внешняя площадь

$S_*(A) = \sup(S(M), M - \text{многоугольник}, M \subset A)$  - Внутренняя площадь

Причем  $S^*(A) \geq S_*(A)$

**Пример.** Когда не совпадают:



$E = (Q \cap [0, 1]^2)$  - точки единичного квадрата с рациональными координатами  $\Rightarrow$

$$S^*(E) = 1$$

$$S_*(E) = 0$$