

МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

Содержание

1	Ряды	2
§1	Определение ряда. Основные свойства	2
П.0	Конечные суммы	2
П.1	Числовые ряды	2
П.2	Основные свойства	3
П.3	Неотрицательные числовые ряды	4
П.4	Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.	6
П.5	Признак Коши. Признак Даламбера	7
П.6	Число e , как сумма ряда	10
§2	Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля . . .	11
П.1	11
§3	Абсолютно и условно сходящиеся ряды	14
2	Интеграл	18
§1	Неопределенный интеграл	18
П.1	Первообразные	18
П.2	Приемы отыскания первообразных	20
П.3	Первообразная от рациональной функции	22
П.4	Первообразные простых дробей	23
П.5	первообразные сводящиеся к рациональным	24

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$
- $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)$

П.1 Числовые ряды

Определение §1.1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,

а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - частичные суммы ряда

Определение §1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ - сумма ряда, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$ - ряд сходится

Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ - ряд расходится

Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема §1.1 (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{сходится} &\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k - \text{сходится} \\ &\xLeftrightarrow{\text{По кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n-1 > N |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N+1 \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема §1.2 (Необходимый признак сходимости ряда). Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

Теорема §1.3 (Арифметические свойства). Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходятся, тогда

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \text{сходится}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda S_n^A + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема §1.4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами). *Ряд, члены которого неотрицательны, сходится \Leftrightarrow посл-ть частичных сумм ограничена*

Доказательство.

\Rightarrow Ряд сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится $\xrightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}}$ $\{S_n\}$ - ограничена
 $\Leftarrow \{S_n\}$ - ограничена и $S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ $\{S_n\}$ - сходится $\xrightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится

■

Теорема §1.5 (Признак сравнения). *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. Из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. Из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Доказательство. Конечное число членов ряда не влияет на сходимость \Rightarrow будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 a_k \leq b_k \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \forall n, \text{ если сходится } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

то $S_n^B \nearrow$ и сходится к S^B при $n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$

ограничена сверху $S^B \xrightarrow{\text{по th 4}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}$

2. (от противного) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

■

Теорема §1.6 (Признак сравнения в предельной форме). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0, b_k > 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 - \text{конечное}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th 3}}$
 $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2}b_n$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится
 $\xrightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2}b_n$ - расходится $\xrightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - расходится $\xrightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}}$
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится

■

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Теорема §1.7 (Телескопический признак). Пусть $a_n \searrow, a_n \geq 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится \Leftrightarrow сходится $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

$$\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S_{2^{n+1}}^A - a_1 \leq S_n^B$ Если ряд S_n^B - сходится $\Rightarrow S_{2^{n+1}}^A - a_1$ - сходится
 $\Rightarrow S_n^A \leq S_n^B$ и $\{S_n^A\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. $\frac{1}{2}(S_{n+1}^B - a_1) \leq S_{2^{n+1}}^A - a_1$

$$S_{n+1}^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S_n^B \leq 2S_{2^{n+1}}^A - a_1$ и $\{S_n^B\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$
 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения



Теорема §1.8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } p \leq 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится
- Пусть $p \leq 1$
 $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ т.к $\frac{1}{n}$ - расходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p}$ - расходится

■

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема §1.9 (признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$ и $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$
 Возьмем $\varepsilon : \tilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

$$a_{n+1} < a_n \tilde{q}$$

$$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \tilde{q}$$

$$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \tilde{q} < a_{n+1} \tilde{q}^2$$

...

$$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \tilde{q} < \dots < a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$$

Т.к $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\tilde{q} < 1$) \Rightarrow сходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$

Возьмем $\varepsilon : \tilde{q} = q - \varepsilon > 1$

Тогда $\forall n > N \ a_n \tilde{q} < a_{n+1} \xrightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1} \tilde{q}^{k-1}$

$a_{n+1} \tilde{q}^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{\text{по необходимому признаку}} \text{ряд расходится}$

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.10 (радикальный признак Коши).

Пусть $a_n \geq 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, тогда

1. Если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \ | \sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists \tilde{q} = \frac{q+1}{2} | q < \tilde{q} < 1 \exists N > 0 : \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \tilde{q} \Leftrightarrow a_n < \tilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^n - \text{геометрическая прогрессия} (\tilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ряд сходится} \xrightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$
ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.11 (Признак Раабе). Пусть $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$, тогда

1. Если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится
2. Если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится
3. Если $q = 1$, то признак не работает

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

П.6 Число е, как сумма ряда

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

1.

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n \end{aligned}$$

2. Пусть $m < n$

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m} \\ &\Rightarrow e_n > A_{n,m} \text{ Зафиксируем } m. \text{ Тогда при } n \rightarrow \infty e \geq S_m \end{aligned}$$

3. $e_n < S_n \leq e$ и $\{S_n\} \nearrow \xrightarrow{\text{По th Вейерштрасса}} \text{Ряд сходится}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Оценка погрешности при приближении числа е частичными суммами:

$$\begin{aligned} 0 < e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

Упражнение. Доказать, что е - иррационально

Упражнение. Доказать, что $2 < e < 3$

§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

П.1

Определение §2.1. Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ называется знакопеременным, где $\forall n \ a_n > 0$

Теорема §2.1 (Признак сходимости Лейбница знакопеременных рядов). Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ a_n > 0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\{a_n\} \searrow$, то ряд сходится

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху} \\ S_{2m+2} &= S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow \mid \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \\ S_{2m+1} &= S_m + a_{2m+1} \xrightarrow{S_m \rightarrow S, a_{2m+1} \rightarrow 0 \text{ При } n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S \end{aligned}$$

■

Замечание. Признак достаточный, но не необходимый!

Следствие (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница).

$$\begin{aligned} S &= S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots \\ |R_n| &= |(-1)^n| |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1} \\ &\mid \Rightarrow |R_n| \leq a_{n+1} \end{aligned}$$

Лемма (Абеля). Дано a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . При этом:

1. $\{a_i\}$ монотонно
2. $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^m b_i| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, также перепишем (2) условие, как $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\
&= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\
\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &= |B_1| |a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}| |a_{n-1} - a_n| + |B_n| |a_n| \leq \\
&\leq B \left(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с +, либо все с -}} + |a_n| \right) = \\
&= B (|a_1 - a_n| + |a_n|) \stackrel{\text{Используя неравенство треугольника}}{\leq} B (|a_1| + 2|a_n|)
\end{aligned}$$

■

Теорема §2.2 (Признак Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно стремится к 0
2. $\exists C \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия a_n - монотонно $\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{По определению предела}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$
Из (2) условия $\forall n \forall p \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \right| \leq 2C$
Рассмотрим a_n, \dots, a_{n+p} и $b_n, \dots, b_{n+p} \xrightarrow{\text{По лемме Абеля } (B=2C)} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C \frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xrightarrow{\text{По критерию Коши}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$ ■

Теорема §2.3 (Признак Абеля). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тогда, если:

1. a_n монотонно и ограничена
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Доказательство. Из (1) условия $\Rightarrow |a_n| \leq A \forall n$

Из (2) условия $\xrightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \mid \sum_{k=n}^{n+p} b_k \mid < \frac{\varepsilon}{3A}$

Рассмотрим $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xrightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} - \text{монот. из усл. } B = \frac{\varepsilon}{3A}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A} (\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2 \overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится ■

Доказательство. Теоремы 1. Вариант 2. Из условия, что $\{a_n\} \searrow 0$ и того факта, что $|\sum_{n=1}^m (-1)^n| \leq 1$, по теореме Дирихле следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ - сходится ■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем m . Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0, b_n = \sin(nx)$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(mx) = \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} (\sin(x)\sin(x/2) + \sin(2x)\sin(x/2) + \dots + \sin(mx)\sin(x/2)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \dots + \cos(\frac{2m-1}{2}x) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) = \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} (\cos(x/2) - \cos(\frac{2m+1}{2}x)) \end{aligned}$$

Если $\sin(x/2) = 0 \Rightarrow \sin(nx) = 0 \Rightarrow$ ряд сходится

Если $\sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq \frac{2}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} = C$

$\mid \xrightarrow{\text{по признаку Дирихле}} \text{ряд сходится}$

Упражнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема §3.1. Абсолютный ряд сходится

Доказательство. Дано $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится. Докажем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится $\xrightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N \forall p |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится ■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ - расходится \Rightarrow ряд сходится не абсолютно

Определение. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

Теорема §3.2 (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов). 1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ абсолютно сходится

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, тогда ряд $\begin{cases} \text{абсолютно сходится,} & q < 1 \\ \text{расходится,} & q > 1 \\ \text{не работает,} & q = 1 \end{cases}$

Доказательство.

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника
2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

Теорема §3.3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен путем произвольной перестановки членов a_n
 Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$ В самом деле это биекция так, как $\forall k \exists i b_k = a_{f(i)}$ и $\forall n \exists i a_n = b_{f^{-1}(i)}$

$$1. \forall m \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$$

$$2. \forall l \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$$

$$\bullet A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^m |b_n| \leq \sum_{n=1}^l |a_n| \text{ и } \{S_n^B\} \searrow \xrightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \text{ряд}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\bullet \text{ Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \text{ Тогда:}$$

$$\forall \varepsilon \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

$$\text{Возьмем } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\text{Пусть } m \geq N | \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b | < \varepsilon \xrightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xrightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^l a_n = \sum_{n=1}^m b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_C$$

Те которые не вошли в первую сумму. Обозначис ее за C

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$| \sum_{n=1}^l a_k - a | < \varepsilon$$

$$| \Rightarrow |a - b| = | \sum_{n=1}^m b_n - b - \sum_{n=1}^l a_n + a + c | < 3\varepsilon \xrightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} a = b$$

■

Теорема §3.4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходятся, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений $a_m b_n$, расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$, то сумма полученного ряда равна $S = S^A S^B$

Доказательство. Расположим $a_m b_n$ в удобном порядке:

$$\begin{aligned}
 & a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n, \dots \\
 & a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n, \dots \\
 & \dots \\
 & a_m b_1, a_m b_2, \dots, a_m b_n, \dots \\
 & \dots \\
 & a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| + \dots$$

Введем обозначения: $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S^B$

Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху

$S_n \nearrow$, т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1 b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \leq S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_2| + |a_2 b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \leq S^A S^B$$

...

$$S_{n^2} = |a_1 b_1| + \dots + |a_1 b_n| + \dots + |a_n b_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \leq S^A S^B$$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \leq \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. сходим.}}$$

Конечное число в силу абс. сходим.

$$\Rightarrow S_n \leq S^A S^B, S_n \nearrow \xrightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

\Rightarrow ряд (1) сходится абсолютно $\xrightarrow{\text{th 3}}$ исходный ряд сходится

Докажем, что $S = S^A S^B$

По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S}_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S}_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S}_{n^2}}_{\rightarrow \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S}_n^A}_{\rightarrow \tilde{S}^A} \cdot \underbrace{\widetilde{S}_n^B}_{\rightarrow \tilde{S}^B} \Rightarrow S = S^A S^B$$

■

Замечание. Пусть есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится \Leftrightarrow сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Теорема §3.5 (Римана). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall A$ можно так переставить члены ряда, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$

Доказательство.

Пусть $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$ - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку

Пусть $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$ - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится \Rightarrow

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет ни того ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходиться (противоречие).

Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится

Пусть $A \geq 0$:

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < \max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$, то

$$|S_n - A| < \max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$, то

$$|S_n - A| < \max\{a_{2k+1}^+, |a_{2k+2}^-|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.

Докажем, что $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{Необходимый признак сходимости}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

■

Упражнение. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходиться

Упражнение. Докажите, что если при любой перестановке его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

Глава 2 Интеграл

§1 Неопределенный интеграл

П.1 Первообразные

Определение. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ (точная) первообразная функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall x \in I F'(x) = f(x)$

Воспоминание 1.1

Теорема Лагранжа о среднем.

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) .

Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Лемма §1.1 (о точных первообразных). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, F_1, F_2 - первообразные на $[a, b]$, тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G'(\xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

Лемма §1.2 (из будущего). У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке

Пример. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

Определение. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной первообразной ф-ции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ всюду за исключением конечного числа точек и F - непрерывная

Пример. $|x|$ - обобщенная первообразная $sign(x)$, т.к. $|x|' = sign(x)$

Лемма §1.3. Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке

Лемма §1.4 (об обобщенной первообразной). Если $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ обобщенные первообразные функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ - точки, в которых нет $F_1'(x)$ или нет $F_2'(x)$

На любом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ по предыдущей лемме F_1 и F_2 - точные первообразные ф-ции f (по лемме 3)

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}] \\ F_1(x) &= F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i] \\ | \Rightarrow F_1(x_i) &= F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1} \end{aligned}$$

■

Обозначение. Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции f называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

Обозначение. $f(x)dx$ -подынтегральное выражение

Обозначение. Иногда удобно ввести обозначение: $F'(x)dx = dF(x)$

Замечание. У dx приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

П.2 Приемы отыскания первообразных

1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x +c$
$\sin x$	$-\cos x +c$
$\cos x$	$\sin x +c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x +c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} +c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x +c$

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -\ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример.

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Пример.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

Замечание.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) + C$$

Замечание. Когда использовать: $\int x^n f(x) dx$, $\int \dots \ln \dots dx$, $\int \dots \arctg \dots dx$

Пример.

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x (-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= x(-\cos x) + \int \cos(x) dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \ln x dx = \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

Если $\phi(x)$ - дифференцируемая функция, то $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y)) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} 2x dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} (x^2)' dx$$

Обозначим $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$F_1(x)$ - Первообразна на $[a, b]$

$F_2(x)$ - Первообразна на $[b, c]$

Тогда:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

П.3 Первообразная от рациональной функции

Определение. Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ где } P(x), Q(x) - \text{многочлены}$$

Обозначение. $\deg P$ - степень многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

Замечание. В комплексных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где $z_1 \dots z_n$ - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:

либо корень вещественный, $z_k \in \mathbb{R}$

либо есть комплексно сопряженные $z_k, \bar{z}_k : (z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k$

Лемма §1.5. Если $P(x)$ - многочлен над \mathbb{R} , то его можно разбить на $P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_n x + q_n)^{l_n}$
Это представление единственно (с точностью до перестановки множителей)

Лемма §1.6 (о делении с остатком). Если $P(x), Q(x), \deg(P) \geq \deg(Q), Q \neq 0$, тогда $\exists!$ мн

Лемма §1.7. Если $\deg(P), \deg(Q) > 0$, и $d(x) = \text{NOD}(P(x), Q(x))$, тогда $\exists u(x), v(x) : \deg(u) < \deg(Q), \deg(v) < \deg(P)$,
 $d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

Теорема §1.1 (о разложении в простые дроби). Пусть $P(x), Q(x)$ - многочлены, $0 < \deg(P) < \deg(Q), \text{NOD}(P(x), Q(x)) = 1$ и $P(x)$ как в лемме 5, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Пример.

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$
2. теорема о разложении в простые дроби: $R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$.
Найдем коэффициенты A, B, C

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-5}{x-1} dx + \int \frac{8}{x-2} dx + \int \frac{-9}{(x-2)^2} dx$$

П.4 Первообразные простых дробей

Замечание.

$$\int \frac{1}{x - x_i} dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x - x_i| + C$$

$$\int \frac{1}{(x - x_i)^k} dx = \frac{-1}{(k-1)(x - x_i)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x - \frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q - \frac{p^2}{4})}_{>0}} dx =$$

$$= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2 + 1)} dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2 + 1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{a} \arctg(\frac{x}{a} + \frac{p}{2a}) + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2} dy}{y+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\
\int \frac{x}{(1+x)^k} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy = \frac{y}{1+y^2} - \int y \left(\frac{1}{(1+y^2)^k} \right)' dy = \frac{y}{1+y^2} - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1} 2y)}{(1+y^2)^{2k}} dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} + 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy = \frac{y}{1+y^2} + 2k \int \left(\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}} \right) dy = \\
&= \frac{y}{1+y^2} + 2k I_k(y) - 2k I_{k+1}(y) \\
I_k(y) &= \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy \\
I_1(y) &= \operatorname{arctg} y + C \\
I_{k+1}(y) &= \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(y)
\end{aligned}$$

П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

R - рациональная функция

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ замена $y = \sqrt[n]{ax+b}$ сводит к рациональной функции

Замечание.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{y^n-b}{a}, y\right) \frac{y^{n-1}}{a} dy$$

Пример.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1}+x-5} dx \ominus \\
&y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1, dx = 2y dy \\
&\ominus \int \frac{\sqrt{2}y 2y}{y+y^2-6} dy = 2\sqrt{2} \int \frac{y^2}{y^2+y-6} dy = 2\sqrt{2} \int \left(1 - \frac{y-6}{y^2+y-6}\right) dy = \dots
\end{aligned}$$

2. $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $ad \neq bc$ замена $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y) dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

3. $R(\sin X, \cos X)$ универсальная тригонометрическая замена $y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$$

$$\cos x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$dx = \frac{2}{1+y} dy$$

$$\text{Если } R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X), t = \cos X$$

$$\text{Если } R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos X), t = \sin X$$

$$\text{Если } R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin X, \cos X), t = \operatorname{tg} X$$

4. $R(\operatorname{sh} X, \operatorname{ch} X)$ по аналогии с пунктом (3) + работает замена $y = e^x$