МАТАН 2 Семестр

Носорев Константин

2019

Содержание

Глава 1 Ряды

§1 Определение ряда. Основные свойства

П.0 Конечные суммы

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- $\sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{k=1}^{n} (a_n + b_n)$
- $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_n)$

П.1 Числовые ряды

Определение §1.1. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ - общий член последовательности,
а $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - частичные суммы ряда

Определение §1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ - сумма ряда}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$$

Если предел бесконечен или не существует, то ряд *расходится*

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ - геометрическая прогрессия

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + q, S_2 = 1 + q + q^2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Если $|q| < 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ - ряд сходится
Если $|q| > 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = 1$, то $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ - ряд расходится
Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{n=2k} \\ 1, & \text{n=2k+1} \end{cases}$ - ряд расходится

П.2 Основные свойства

Теорема §1.1 (Критерий Коши).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \text{ - } \textit{сходится} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall m \geq n > N \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

Доказательство. Используя критерий Коши для посл-ти частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - сходится } \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ - сходится}$$

$$\overset{\text{По кр. Коши}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n-1 > N \ |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ : \forall m \geq n \geq N+1 \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$$

■

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - расходится } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходится}$$

Следствие. Если в ряду изменить произвольным образом конечное число слагаемых, то новый ряд сходится, когда сходится исходный, и новый ряд расходится, если исходный расходится

Замечание. Сходимость ряда независит от поведения конечного числа слагаемых

Теорема §1.2 (Необходимый признак сходимости ряда). *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *- сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

■

Теорема §1.3 (Арифметические свойства). *Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходятся, тогда*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ - } \textit{сходится}$$

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \to S^A$ $S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \to S^B$
Рассмотрим $\sum_{k=1}^\infty (\lambda a_k + \mu b_k)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S_n^A + \mu S_n^B \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n^a + \mu S_n^B) = \lambda S^A + \mu S^B$$

■

Замечание. В частности $\sum_{k=1}^\infty \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^\infty a_k$

П.3 Неотрицательные числовые ряды

Рассмотрим $\sum_{k=1}^\infty a_k, a_k \geq 0, S_n \nearrow$

Теорема §1.4 (Критерий сходимости ряда с неотрицательными числами)**.** *Ряд, члены коροторого неотрицательны, сходится* $\Leftrightarrow$ *посл-ть частичных сумм ограничена*

Доказательство. $\Rightarrow$ Ряд сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ последовательность частичных сумм сходится
$\xRightarrow{\text{По свойству сходящейся посл-ти}} \{S_n\}$ - ограничена
$\Leftarrow \{S_n\}$ - ограничена
$S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \{S_n\}$ - сходится $\xRightarrow{\text{По определению}}$ ряд сходится ■

Теорема §1.5 (Признак сравнения)**.** *Пусть*

$$\exists N > 0 : \forall n > N \sum_{k=n}^\infty a_k, \sum_{k=n}^\infty b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0 \text{ и } a_k \leq b_k$$

1. *Из сходимости* $\sum_{k=1}^\infty b_k \Rightarrow$ *сходимость ряда* $\sum_{k=1}^\infty a_k$
2. *Из расходимости* $\sum_{k=1}^\infty a_k \Rightarrow$ *расходимость ряда* $\sum_{k=1}^\infty b_k$

Доказательство. Конченое число членов ряда не влияет на сходимость $\Rightarrow$ будем считать, что $a_k \leq b_k \forall k \geq 1$

1. Пусть $S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k$

$$\forall k \geq 1 \ a_k \leq b_k \ \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \ \forall n \text{ , если сходится } \sum_{k=1}^\infty b_k$$

$$\text{то } S_n^B \nearrow \text{ и сходится к } S^B \text{ при } n \to \infty \Rightarrow S_n^A \leq S_n^B \leq S^B \Rightarrow S_n^A \nearrow$$

$$\text{ограничена сверху } S^B \xRightarrow{\text{по th 4}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ сходится}$$

2. (от противного)Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится, тогда по пункту 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \perp$

$\blacksquare$

Теорема §1.6 (Признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, a_k \geq 0\ b_k > 0 \quad \textit{и}\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ - \textit{конечное}}$$

тогда ряды сходятся и расходятся одновременно

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ |\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + c < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + c$$

$$(-\varepsilon + c)b_n < a_n < (\varepsilon + c)b_n$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\exists N_0 > 0 :\ \forall n > N_0$$

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{3c}{2} b_n$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - сходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по th 3}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по th 5}} \sum_{k=N_0}^{\infty} a_n$ - расходится
   $\xRightarrow{\text{по сл-вию из th. Коши}} \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - расходится

$\blacksquare$

П.4 Телескопический признак. Эталонный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

Теорема §1.7 (Телескопический признак). *Пусть* $a_n \searrow, a_n \geq 0$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
$\Leftrightarrow$ *сходится* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

Доказательство. Правый ряд $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

$$\text{Рассмотрим } a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$$

$$\dots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

Сложим выражения в левой и правой частях

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$$

$$\frac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство

1. $S^A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S^B_n$ Если ряд S^B_n - сходится $\Rightarrow S^A_{2^{n+1}} - a_1$ - сходится $\Rightarrow S^A_n \leq S^B$ и $\{S^A_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. $\frac{1}{2}(S^B_{n+1} - a_1) \leq S^A_{2^{n+1}} - a_1$

$$S^B_{n+1} \leq 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$$

   Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow S^B_n \leq 2S^A_{2^{n+1}} - a_1$ и $\{S^B_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится

Примечание: Расхождение доказывается по признаку сравнения

■

Теорема §1.8. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} p > 1 \\ \textit{расходится}, & \textit{если} p \leq 1 \end{cases}$

Доказательство.

- Пусть $p > 1 \Rightarrow 0 < \{\frac{1}{n^p}\} \searrow_0$ Рассмотрим ряд из th 7 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - геометрическая прогрессия $q = 2^{1-p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th 7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сходится

- Пусть $p \leq 1$

  $$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ т.к } \frac{1}{n} \text{ - расходится } \xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \frac{1}{n^p} \text{ - расходится}$$

■

П.5 Признак Коши. Признак Даламбера

Теорема §1.9 (признак Даламбера). *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\exists \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*
3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n!, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 : \, \forall n > N \, |\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)a_n < \frac{a_{n+1}}{a_n} < (q + \varepsilon)a_n \quad \forall n = N + 1, N + 2, \dots$$

1. Пусть $q < 1$
   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q + \varepsilon < 1$ (Например $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$) Тогда $\forall n > N$

   $$a_{n+1} < a_n \widetilde{q}$$

   $$N + 1 : a_{n+2} < a_{n+1} \widetilde{q}$$

   $$N + 2 : a_{n+3} < a_{n+2} \widetilde{q} < a_{n+1} \widetilde{q}$$

   $$\dots$$

   $$N + k - 1 : a_{n+k} < a_{n+k-1} \widetilde{q} < \dots < a_{n+1} \widetilde{q}^{k-1}$$

   Т.к $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{q}^k$ - геометрическая прогрессия ($\widetilde{q} < 1$)$\Rightarrow$ сходится $\xRightarrow{\text{по признаку сравнения}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ - сходится $\xRightarrow{\text{Следствие критерия Коши}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2. Пусть $q > 1$
   Возьмем $\varepsilon : \widetilde{q} = q - \varepsilon > 1$
   Тогда $\forall n > N$ $a_n\widetilde{q} < a_{n+1} \xRightarrow{\text{по 1 пункту}} a_{n+k} > a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1}$

$$a_{n+1}\widetilde{q}^{k-1} \cancel{\xrightarrow{n\to\infty}} 0 \Rightarrow a_{n+k} \cancel{\xrightarrow{n\to\infty}} 0 \xRightarrow{\text{по необходимому признаку}} \text{ряд расходится}$$

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.10 (радикальный признак Коши).
Пусть $a_n \geq 0$ *и* $\exists \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *тогда*

1. *Если* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*
2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*
3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Замечание. Признак удобно применять, если в a_n есть $2^n, n^k$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (q + \varepsilon) \quad \forall n = N+1, N+2, \dots$$

1. Пусть $q < 1 \Rightarrow \exists \widetilde{q} = \frac{q+1}{2} | q < \widetilde{q} < 1 \exists N > 0 : \ \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < \widetilde{q} \Leftrightarrow a_n < \widetilde{q}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{q}^n \text{ - геометрическая прогрессия} (\widetilde{q} < 1)$$

$$\Rightarrow \text{ ряд сходится} \xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \text{сходится исходный ряд}$$

2. Пусть $q > 1 \Rightarrow \exists \{a_{n_k}\} : \sqrt[n]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится

3. Пусть $q = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \text{ ряд сходится}$$

■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^{n^2}, \lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})^n = e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Теорема §1.11 (Признак Раабе). *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\exists \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q$, *тогда*

1. *Если* $q < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- расходится*

2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *- сходится*

3. *Если* $q = 1$, *то признак не работает*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Доломбер:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1))2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} = 1$$

Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ ряд расходится}$$

П.6 Число e, как сумма ряда

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

1.
$$e_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_k^n \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n \Rightarrow e_n < S_n$$

2. Пусть $m < n$
$$e_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{1}{n^k} =$$
$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!n^m} = A_{n,m}$$
$\Rightarrow e_n > A_{n,m}$ Зафиксируем m. Тогда при $n\to\infty$ $e \geq S_m$

3. $| \Rightarrow e_n < S_n \leq e$ и $\{S_n\} \nearrow \xRightarrow{\text{По th Вейерштрасса}}$ Ряд сходится
$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$$

4. Оценка погрешности при приблежении числа e частичными суммами:
$$0 < e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\dots =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots] <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}[1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots] = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\cdot n!}$$

Упражнение. Доказать, что e - иррационально

Упражнение. Доказать, что 2<e<3

§2 Признак Лейбница. Признак Дирихле. Признак Абеля

П.1

Определение §2.1. Ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ называется знакочередующимся, где $\forall n$ $a_n > 0$

Теорема §2.1 (Признак сходимости Лейбница знакочередующихся рядов)**.** *Пусть дан знакочередующийся ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $a_n > 0$
Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *и* $\{a_n\} \searrow$*, то ряд сходится*

Доказательство.

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \le a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{S_{2m}\} \text{ - ограничена сверху}$$

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \ge S_{2m} \Rightarrow \{S_{2m}\} \nearrow | \xRightarrow{\text{по th Вейерштрасса}} \exists \lim_{n\to\infty} S_{2m} = S$$

$$S_{2m+1} = S_m + a_{2m+1} \xRightarrow{S_m \to S, a_{2m+1}\to 0 \text{ При } n\to\infty} \lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = S$$

■

Замечание. Признак достаточный, но не необходимый!

Следствие (Оценка для остаточного члена ряда Лейбница)**.**

$$S = S_n + R_n = S_n + (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + \dots$$

$$|R_n| = |(-1)^n||(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| =$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \le a_{n+1}$$

$$| \Rightarrow |R_n| \le a_{n+1}$$

Лемма (Абеля)**.** *Дано* $a_1, \dots, a_n$ *и* $b_1, \dots, b_n$*. При этом:*

1. $\{a_i\}$ *монотонно*
2. $\exists B > 0 : |\sum_{i=1}^{m} b_i| \le B$*, где* $m = 1, 2, 3, \dots, n$

Тогда выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$

. Обозначим $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, также перепишем (2) условие, как $\exists B > 0 : |B_m| \leq B$, где $m = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n$$

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = |B_1||a_1 - a_2| + \dots + |B_{n-1}||a_{n-1} - a_n| + |B_n||a_n| \leq$$

$$\leq B(\underbrace{|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|}_{\text{По монотонности, либо все модули раскроются с } +\text{, либо все с -}} +|a_n|) =$$

$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \overset{\text{Использую неравенство треугольника}}{\leq} B(|a_1| + 2|a_n|)$$

■

Теорема §2.2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *тогда, если:*

1. a_n *монотонно стремится к 0*
2. $\exists C\ \forall n\ |\sum_{k=1}^{m} b_k| \leq C$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится*

Доказательство. Из (1) условия a_n - монотонно $\to 0 \xRightarrow{\text{По определению предела}}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \ \forall n > N\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}$
Из (2) условия $\forall n\ \forall p\ |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| = |\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k| \leq 2C$
Рассмотрим $a_n, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, \dots, b_{n+p} \xRightarrow{\text{По лемме Абеля } (B = 2C)} |\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leq 6C\frac{\varepsilon}{6C} = \varepsilon \xRightarrow{\text{По критерию Коши}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится ■

Теорема §2.3 (Признак Абеля)**.** *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *тогда, если:*

1. a_n *монотонно и ограничена*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- сходится*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится*

Доказательство. Из (1) условия $\Rightarrow |a_n| \leq A\ \forall n$
Из (2) условия $\xRightarrow{\text{По пр. Коши}} \forall\varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ |\sum_{k=n}^{n+p} b_k| < \frac{\varepsilon}{3A}$
Рассмотрим $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ и $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}$

$$\xRightarrow{\text{По лемме Абеля. } \{a_i\} \text{ - монот. из усл, } B = \frac{\varepsilon}{3A}} |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| \leq B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3A}(\overbrace{|a_n|}^{\leq A} + 2\overbrace{|a_{n+p}|}^{\leq A}) \leq \varepsilon$$

Тогда по кр. Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится ■

Докозательство. Теоремы 1. Вариант 2. Из условия, что $\{a_n\} \searrow 0$ и того факта, что $|\sum_{n=1}^{m} (-1)^n| \leq 1$,
по теореме Дирихле следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ - сходится ■

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Зафиксируем m. Тогда

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow \text{ к } 0, b_n = sin(nx)$$

$$S_m = sin(x) + sin(2x) + sin(3x) + \dots + sin(mx) =$$

$$= \frac{1}{sin(x/2)}(sin(x)sin(x/2) + sin(2x)sin(x/2) + \dots + sin(mx)sin(x/2)) =$$

$$= \frac{1}{2sin(x/2)}(cos(x/2) - cos(3x/2) + \dots + cos(\frac{2m-1}{2}x) - cos(\frac{2m+1}{2}x) =$$

$$= \frac{1}{2sin(x/2)}(cos(x/2) - cos(\frac{2m+1}{2}x))$$

Если $sin(x/2) = 0 \Rightarrow sin(nx) = 0 \Rightarrow$ ряд сходится
Если $sin(x/2) \neq 0 \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} sin(nx)| \leq \frac{2}{2sin(x/2)} = \frac{1}{sin(x/2)} = C$
$| \xRightarrow{\text{по признаку Дирихле}}$ ряд сходится

Упражнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)cos(\frac{\pi}{4})}{2}$$

§3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема §3.1. *Абсолютный ряд сходится*

Доказательство. Дано $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится. Докажем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится $\xRightarrow{\text{по th. Коши}} \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall n > N\ \forall p\ |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xRightarrow{\text{th. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 :\ \forall n > N\ \forall p\ |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится ■

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}|$ - расходитя $\Rightarrow$ ряд сходится не абсолютно

Определение. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится не абсолютно

Теорема §3.2 (Общие свойства абсолютно сходящихся рядов)**.** *1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходящиеся ряды, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_k$ абсолютно сходится*

2. Если $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ или $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, тогда ряд $\begin{cases} \textit{абсолютно сходитя}, & q < 1 \\ \textit{расходитя}, & q > 1 \\ \textit{не работает}, & q = 1 \end{cases}$

Доказательство.

1. Критерий Коши для 1 и 2 и неравенство треугольника

2. По аналогии с признаками для положительных рядов

■

Теорема §3.3. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен путем произвольной перестановки членов a_n*
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$ В самом деле это биекция так, как $\forall k\ \exists i\ b_k = a_{f(i)}$ и $\forall n\ \exists i\ a_n = b_{f^{-1}(i)}$

1. $\forall m\ \exists l : \{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow (l \geq m)$

2. $\forall l\ \exists m' : \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\} \Rightarrow (m' \geq l)$

- $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{m} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{l} |a_n|$ и $\{S_n^B\} \searrow \xRightarrow{\text{по th Вейерштрасса}}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ Тогда:

$$\forall \varepsilon\ \exists N_1 : \sum_{n \geq N_1} |a_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon\ \exists N_2 : \sum_{n \geq N_2} |b_n| < \varepsilon$$

Возьмем $N = max\{N_1, N_2\}$
Пусть $m \geq N |\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b| < \varepsilon \xRightarrow{\text{Из (1) пункта}} \exists l(m) \xRightarrow{\text{Из (2) пункта}} \exists m'(l)$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \subset \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{b_1, \dots, b_{m'}\}$$

$$\sum_{n=1}^{l} a_n = \sum_{n=1}^{m} b_n + \underbrace{\sum_{j>m} b_j}_{\text{Те которые не вошли в первую сумму. Обозначис ее за } C}$$

$$|C| \leq \sum_{j>m}^{m'} |b_j| < \varepsilon$$

$$|\sum_{n=1}^{l} a_k - a| < \varepsilon$$

$| \Rightarrow |a-b| = |\sum_{n=1}^{m} b_n - b - \sum_{n=1}^{l} a_n + a + c| < 3\varepsilon \xRightarrow{\text{Т.к } \varepsilon \text{ произвольное}} a = b$

$\blacksquare$

Теорема §3.4. *Есди ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходится, то ряд, составленный из все возможных попарных произведений $a_m b_n$, расположенных в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^A$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^B$, то сумма полученного ряда равна $S = S^A S^B$*

Доказательство. Расположем $a_m b_n$ в удобном порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_1b_n, \dots$$

$$a_2b_1, a_2b_2, \dots, a_2b_n, \dots$$

$$\dots$$

$$a_mb_1, a_mb_2, \dots, a_mb_n, \dots$$

$$\dots$$

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + \dots \tag{1}$$

Рассмотрим ряд:

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + \dots$$

Введем обозначения:$S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \to S^A, S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k \to S^B$
Для того, чтобы доказать, что ряд сходится абсолютно, достаточно доказать, что существует хотябы одна подпоследовательность частичных сумм ограниченных сверху
$S_n \nearrow$, т.к числа положительные

$$S_1 = |a_1b_1| = S_1^A \cdot S_1^B \le S^A S^B$$

$$S_4 = |a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| = (|a_1| + |a_2|)(|b_1| + |b_2|) = S_2^A \cdot S_2^B \le S^A S^B$$

$$\dots$$

$$S_{n^2} = |a_1b_1| + \dots + |a_1b_n| + \dots + |a_nb_1| = (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = S_n^A \cdot S_n^B \le S^A S^B$$

$$| \Rightarrow S_{n^2} \le \underbrace{S^A S^B}_{\text{Конечное число в силу абс. схожд.}}$$

$$\Rightarrow S_n \le S^A S^B, S_n \nearrow \xRightarrow{\text{По th. Вейерштрасса}} \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$\Rightarrow$ ряд (1) сходится абсолютно $\xRightarrow{\text{th 3}}$ исходный ряд сходится
Докажем, что $S = S^A S^B$
По th3 вновь переставим ряд "удобно"

$$\widetilde{S_n^A} = \sum_{k=1}^n a_k, \widetilde{S_n^B} = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\underbrace{\widetilde{S_{n^2}}}_{\to \tilde{S}} = \underbrace{\widetilde{S_n^A}}_{\to \tilde{S^A}} \cdot \underbrace{\widetilde{S_n^B}}_{\to \tilde{S^B}} \Rightarrow S = S^A S^B$$

$\blacksquare$

Замечание. Пусть есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow$ сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Теорема §3.5 (Римана). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall A$ можно так переставить члены ряда, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*

Доказательство.
Пусть $a_1^+, \dots, a_n^+, \dots$ - неотрицательные члены последовательности, взятые по порядку
Пусть $a_1^-, \dots, a_n^-, \dots$ - отрицательные члены последовательности, взятые по порядку
По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится $\Rightarrow$

$$a_1^+ + \dots + a_n^+ + \dots \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

$$a_1^- + \dots + a_n^- + \dots \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

В каждой этой сумме бесконечное число слагаемых, иначе н.н.н все члены одного знака, и сходимость эквивалентна абсолютной. Если нет нитого ни другого (оба конечны), тогда ряд будет абсолютно сходится(противоречие). Если одно есть, но нет другого, тогда ряд расходится
Пусть $A \geq 0$:

$$n_1 : \begin{cases} n_1 = 1, & a_1^+ \geq A \\ a_1^+ + \dots + a_{n_1-1}^+ \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n-1}^+ + a_{n_1}^+, & a_1^+ < A \end{cases}$$

$$S_{n_1} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+, |S_{n_1} - A| < a_{n_1}^+$$

$$n_2 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ a_1^- + \dots + a_{n_2-1}^- \leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-$$

$$S_{n_1+n_2} = a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^-, |S_{n_1+n_2} - A| < |a_{n_2}^-|$$

$$n_3 : a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3-1}^+ \leq$$
$$\leq A < a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \dots + a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+$$

$$|S_{n_1+n_2+n_3} - A| < a_{n_3}^+$$

$$n_1 + n_2 < n < n_1 + n_2 + n_3, S_n \nearrow$$

$$|S_n - A| < max\{|a_{n_2}^-|, a_{n_3}^+\}$$

Применив метод математической индукции легко показать, что:
Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} < n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1}$, то

$$|S_n - A| < max\{|a_{2k}^-|, a_{2k+1}^+\}$$

Если $n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} < n \le n_1 + n_2 + \dots + n_{2k-1} + n_{2k} + n_{2k+1} + n_{2k+2}$, то

$$|S_n - A| < max\{a^+_{2k+1}, |a^-_{2k+2}|\}$$

Итак, сформирован новый ряд.
Докажем, что $S_n \xrightarrow{n\to\infty} A$
Пусть $\forall\varepsilon > 0$ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xRightarrow{\text{Необходимы признак сход-ти}} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists N > 0 : \ \forall n > N \ |a_n| < \varepsilon$

$$| \Rightarrow |S_n - A| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} A$$

■

Упражнение. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условно сходится, то его члены можно переставить так, чтобы он стал расходится

Упражнение. Докажите, что если при любой перестановки его членов ряд остаётся сходящимся, то ряд сходится абсолютно

Глава 2 Интеграл

§1 Неопределенный интеграл

П.1 Первообразные

Определение. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$

Определение. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ (точная) первообразная ф-ции $f : I \to \mathbb{R}$, если $\forall x \in I \ F'(x) = f(x)$

Воспоминания. *Теорема Лагранджа о среднем.* Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Лемма §1.1 (о точных первообразных). *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, F_1, F_2 - первообразные на $[a, b]$, тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$*

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$\forall x, y \in [a, b] G(x) - G(y) = G`(\Xi)(x - y) = 0$$

Тогда

$$G(x) = G(a) = C$$

■

Лемма §1.2 (из будущего). *У всякой непрерывной на промежутке функции есть точная первообразная на этом промежутке*

Пример. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{x|x|}{2})' = |x|$

Определение. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ называется обобщенной первообразной ф-ции $f : I \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ всюду за исключением конечного числа точек и F - непрерывная

Пример. $|x|$ - обобщенная первообразная $sign(x)$, т.к $|x|' = sign(x)$

Лемма §1.3. *Если функция кусочно непрерывна на промежутке и ограничена, тогда всегда у нее есть обобщенная первообразная на этом промежутке*

Лемма §1.4 (об обобщенной первообразной). *Если $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ обобщенные первообразные функции $f : I \to \mathbb{R}$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ - точки, в которых нет $F_1'(x)$ или нет $F_2'(x)$
На любом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ по предыдущей лемме F_1 и F_2 - точные первообразные ф-ции f (по лемме 3)

$$F_1(x) = F_2(x) + C_i \text{ На } [x_i; x_{i+1}]$$
$$F_1(x) = F_2(x) + C_{i-1} \text{ На } [x_{i-1}; x_i]$$
$$| \Rightarrow F_1(x_i) = F_2(x_i) + C_i = F_2(x_i) + C_{i-1} \Rightarrow C_i = C_{i-1}$$

■

Обозначение. Неопределенным интегралом(антипроизводной) ф-ции f называется символ

$$\int f(x)dx$$

который обозначает либо некоторую первообразную, либо совокупность первообразных

Обозначение. $f(x)dx$ -подынтегральное выражение

Обозначение. Иногда удобно ввести обозначение: $F'(x)dx = dF(x)$

Замечание. У dx приоритет больше, чем у сложения

$$\int (f(x) + g(x))dx \neq \int f(x) + g(x)dx$$

Но меньше, чем умножение

$$\int f(x)g(x)dx$$

П.2 Приемы отыскания первообразных

1. Таблица первообразных

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

Замечание.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} ln(x) + C_1, & x > 0 \\ -ln(x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C_1, \int ch(x)dx = sh(x) + C_2$$

2. линейность

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример.

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Пример.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = x - arctg(X) + C$$

3. интегрирование по частям

   Замечание.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) + C$$

   Замечание. Когда использовать: $\int x^n f(x)dx, \int \dots ln \dots dx, \int \dots arctg \dots dx$

   Пример.

$$\int xsin(x)dx = \int x(-cosx)'dx = x(-cosx) - \int (-cosx)dx =$$

$$= x(-cosx) + \int cos(x)dx = -xcosx + sinx + C$$

   Пример.

$$\int lnxdx = \int x'ln(x)dx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + C$$

4. Замена переменной

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$$

   Если $\phi(x)$ - дифференцируемая функция, то $y = \phi(x)$

$$\int f(\phi(y))dy = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}2xdx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}(x^2)'dx$$

Обозначим $y = x^2 + 1$

$$y = x^2 + 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{y}dy = \frac{1}{2}ln(y) + C = \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C$$

5. "Стыковка"

$$f : [a, c] \Rightarrow \mathbb{R}, a < b < c$$

$$F_1(x)\text{- Первообразна на } [a, b]$$

$$F_2(x)\text{- Первообразна на } [b, c]$$

Тогда:

$$\int f(x)dx = \begin{cases} F_1(x) + C, & x \in [a, b] \\ F_2(x) + F_2(b) - F_1(b) + C, & x \in [b, c] \end{cases}$$

П.3 Первообразная от рациональной функции

Определение. Рациональная функция - это отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\text{Где } P(x), Q(x) \text{ - многочлены}$$

Обозначение. $degP$ - степень многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots +$ $+ a_1x + a_0, a_n \neq 0$

Замечание. В комплесных числах

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Где $z_1 \dots z_n$ - корни многочлена Если коэффициенты вещественные:
либо корень вещественный,$z_k \in \mathbb{R}$
либо есть комплесно сопряженные $z_k, \overline{z_k} : (z - z_k)(z - \overline{z_k}) = z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + z_k\overline{z_k}$

Лемма §1.5. *Если $P(x)$ - многочлен над $\mathbb{R}$, то его можно разбить на $P(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$ Это представление едиственно (с точностью до перестановки множителей)*

Лемма §1.6 (о делении с отсатком). *Если* $P(x), Q(x), deg(P) \geq deg(Q), Q \neq 0$, *тогда* $\exists!$ *многочлены* $q(x), r(x), deg(q) = deg(P) - deg(Q)$, $deg(r) < deg(Q) : P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$

Лемма §1.7. *Еслм* $deg(P), deg(Q) > 0$, *и* $d(x) = NOD(P(x), Q(x))$, *тогда* $\exists u(x), v(x) : deg(u) < deg(Q), deg(v) < deg(P)$,
$d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$

Теорема §1.1 (о разложении в простые дроби). *Пусть* $P(x), Q(x)$ *- многочлены,* $0 < deg(P) < deg(Q), NOD(P(x), Q(x)) = 1$ *и* $P(x)$ *как в лемме 5, тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_m} \frac{C_{ij}}{(x-x_j)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

Пример.

$$\frac{3x^2-13x+5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$$

1. Найти корни знаменателя $Q(x) = (x-1)(x-2)^2$
2. теорема о разложении в простые дроби: $R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$. Найдем коэффициенты A, B, C

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

$$A = -5, B = 8, C = -9$$

$$\int \frac{3x^2-13x+5}{x^3-5x^2+8x-4}dx = \int \frac{-5}{x-1}dx + \int \frac{8}{x-2}dx + \int \frac{-9}{(x-2)^2}dx$$

П.4 Первообразные простых дробей

Замечание.

$$\int \frac{1}{x-x_i}dx = \{y = x - x_i\} = \int \frac{dy}{y} = ln|y| + C = ln|x-x_i| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_i)^k}dx = \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \{\text{Выделим полный квадрат}\} = \int \frac{1}{(x-\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q - \frac{p^2}{4})}_{>0}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{a^2((\frac{x+\frac{p}{2}}{a})^2+1)}dx = \{y = \frac{x+\frac{p}{2}}{a}\} = \int \frac{a}{a^2(y^2+1)}dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{x}+\frac{p}{2a})+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \{y = x^2\} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y+1} = \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{x}{(1+x)^k}dx = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{(1+y)^k} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(k-1)(1+x^2)^{k-1}} + C$$

$$I_k(y) = \int \frac{1}{(1+y^2)^k}dy = \frac{y}{1+y^2}^{k} - \int y(\frac{1}{(1+y^2)^k})'dy = \frac{y}{1+y^2}^{k} - \int \frac{y(-k(1+y^2)^{k-1}2y)}{(1+y^2)^{2k}}dy =$$

$$= \frac{y}{1+y^2}^{k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}dy = \frac{y}{1+y^2}^{k} + 2k\int (\frac{y^2+1}{(1+y^2)^{k+1}} - \frac{1}{(1+y^2)^{k+1}})dy =$$

$$= \frac{y}{1+y^2}^{k} + 2kI_k(y) - 2kI_{k+1}(y)$$

$$I_k(y) = \int \frac{1}{(1+y^2)^k}dy$$

$$I_1(y) = arctg\ y + C$$

$$I_{k+1}(y) = \frac{1}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k(y)$$

П.5 первообразные сводящиеся к рациональным

R - рациональная функция

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ замена $y = \sqrt[n]{ax+b}$ сводит к рациональной функции

Замечание.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R(\frac{y^n - b}{a}, y)\frac{y^{n-1}}{a}dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+1}+x-5}dx =$$

$$y = \sqrt{x=1}, x = y^2 - 1, dx = 2ydy$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}y2y}{y+y^2-6}dy = 2\sqrt{2}\int \frac{y^2}{y^2+y-6}dy = 2\sqrt{2}\int (1 - \frac{y-6}{y^2+y-6})dy = \dots$$

2. $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}), ad \neq bc$ замена $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} = z(y)$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(z(y), y) \cdot z'(y)dy$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}dx$$

3. $R(sinX, cosX)$ универсальная тригонометрическая замена $y = tg(\frac{x}{2})$
$sinx = 2sin(x/2)cos(x/2) = 2tg(x/2)cos^2(x/2) = \frac{2y}{1+y}$
$cosx = \frac{1-y}{1+y}$
$dx = \frac{2}{1+y}dy$
Если $R(-sinX, cosX) = -R(sinX, cosX), t = cosX$
Если $R(sinX, -cosX) = -R(sinX, cosX), t = sinX$
Если $R(-sinX, -cosX) = R(sinX, cosX), t = tgX$

4. $R(shX, chX)$ по аналогии с пунктом (3) + работает замена $y = e^x$

П.6 План изучения

- Формула замены переменной, формула интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных функций
  - Разложение на простые дроби
  - Метод Остроградского(*)
- Интегрирование тригонометрических функций
  - $\int R(sinX; cosX)dx \quad , t = tg(\frac{x}{2})$ - универсальная подстановка
  - Четность/нечетность функции $\rightarrow$ специальная замена
  - Частные случаи(**)
- Интегрирование иррациональных функций
  - $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots)dx$$

$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}, N = NOK(m, n, \dots)$

– $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ - выделение полного квадрата или замена Эйлера(***)

– Биноминальный интеграл (****)

Замечание. Все методы сводятся к интегрированию рациональных функции

П.7 Частные случаи интегрирования тригонометрических функций

1.
$$\int sin^{2m}(x)cos^{2n}(x)dx \quad \textit{используя формулы понижения степени получим}$$
$$\int \frac{1-cos(2x)}{2}^m \frac{1+cos(2x)}{2}^n dx$$

2.
$$\int sin^{2m+1}(x)cos^{2n}(x)dx = \int sin^{2m}(x)cos^{2n+1}(x)dx =$$
$$= -\int sin^{2m}(x)cos^{2n}(x)d\underbrace{cos(x)}_{t} = -\int (1-t^2)^m t^{2n}dt$$

3. $\int sin(ax)cos(bx)dx = (1)$
$\int sin(ax)sin(bx)dx = (2)$
$\int cos(ax)cos(bx)dx = (3)$
$$(1) = \int \frac{1}{2}(sin(a+b)x + sin(a-b)x)dx$$
$$(2) = \int \frac{1}{2}(cos(a-b)x - cos(a+b)x)dx$$
$$(3) = \int \frac{1}{2}(cos(a+b)x + cos(a-b)x)dx$$

П.8 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$$ax^2+bx+c = a\underbrace{(x+\frac{b}{2a})}_{u}^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

В зависимости от дискриминанта и знака a сводится к:

- $\int R(u;\sqrt{a^2-u^2})du$
- $\int R(u;\sqrt{u^2-a^2})du$
- $\int R(u;\sqrt{a^2+u^2})du$

случай	подстановка (замена)	du	корень
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = asin(t)$ $u = acos(t)$	$du = acos(t)dt$ $du = -asin(t)dt$	$acos(t)$ $asin(t)$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = \frac{a}{sin(t)}$ $u = \frac{a}{cos(t)}$	$du = -\frac{acos(t)}{sin^2(t)}dt$ $du = -\frac{asin(t)}{cos^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{sin(t)})^2 - a^2} = a\ ctg(t)$ $\sqrt{(\frac{a}{cos(t)})^2 - a^2} = a\ tg(t)$
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = \frac{a}{tg(t)}$ $u = \frac{a}{ctg(t)}$	$du = \frac{a}{cos^2(t)}dt$ $du = -\frac{a}{sin^2(t)}dt$	$\sqrt{(\frac{a}{tg(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{cos(t)}$ $\sqrt{(\frac{a}{ctg(t)})^2 - a^2} = \frac{a}{sin(t)}$

Пример.

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \left\{\begin{aligned} x &= tg(t) \\ dx &= \frac{dt}{cos^2(t)} \\ x^2+1 &= \frac{1}{cos^2(t)} \end{aligned}\right\} = \int \frac{tg^2(t)-tg(t)+1}{\frac{1}{cos^2(t)}\cdot\frac{1}{cos(t)}}\cdot\frac{dt}{cos^2(t)} =$$

$$= \int (tg^2(t)+1)cos(t)\ dt - \int tg(t)cos(t)\ dt = \int \frac{1}{cos^2 t}cos(t)\ dt - \int tg(t)cos(t)\ dt =$$

$$= \left\{\begin{aligned} u &= tg(\frac{t}{2}) \\ dt &= \frac{2du}{1+u^2} \\ cos(t) &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2}du + cos(t) = ln|u| + cos(t) + C =$$

$$= ln|tg(\frac{arctg(x)}{2})| + cos(arctg(x)) + C$$

П.9 Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

1. $a > 0$ $\underbrace{\sqrt{ax^2+bx+c}}_{\text{Корней нет}} = t \pm \sqrt{a}x$

$$ax^2+bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}x + ax^2$$

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b \mp 2t\sqrt{a}}$$

Получаем рациональную функцию под интегралом

2. 2 различных корня $ax^2+bx+c = a(x-x_0)(x-x_1)$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_0},\ t^2(x-x_0)^2 = ax^2+bx+c$$

$$t^2(x-x_0) = a(x-x_1)$$

$$x = \frac{-ax_1+t^2x_0}{t^2-a} \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0) =$$

$$= t(\frac{-ax_1+t^2x_0}{t^2-a} - x_0)$$