Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos

Aula 04: Modelagem de sistemas mecânicos translacionais

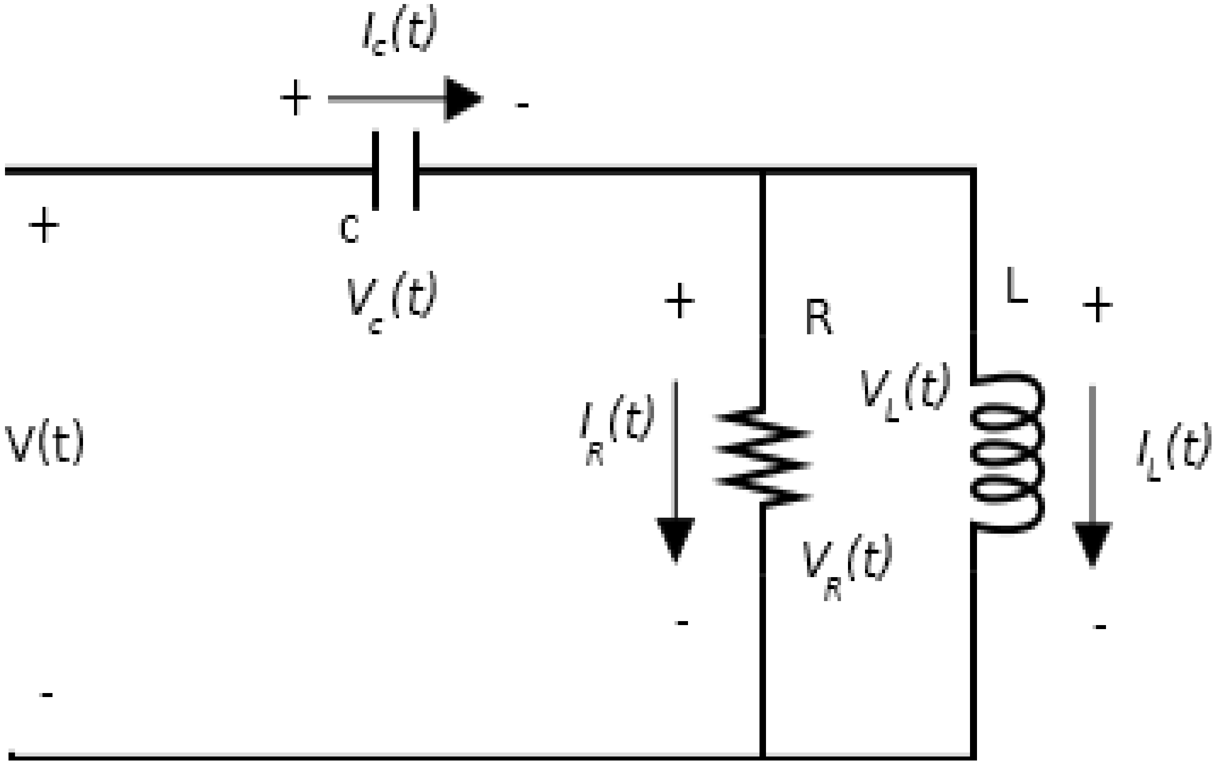
Professor Me. Renato Kazuo Miyamoto

Conceitos

Recapitulando

Atividade

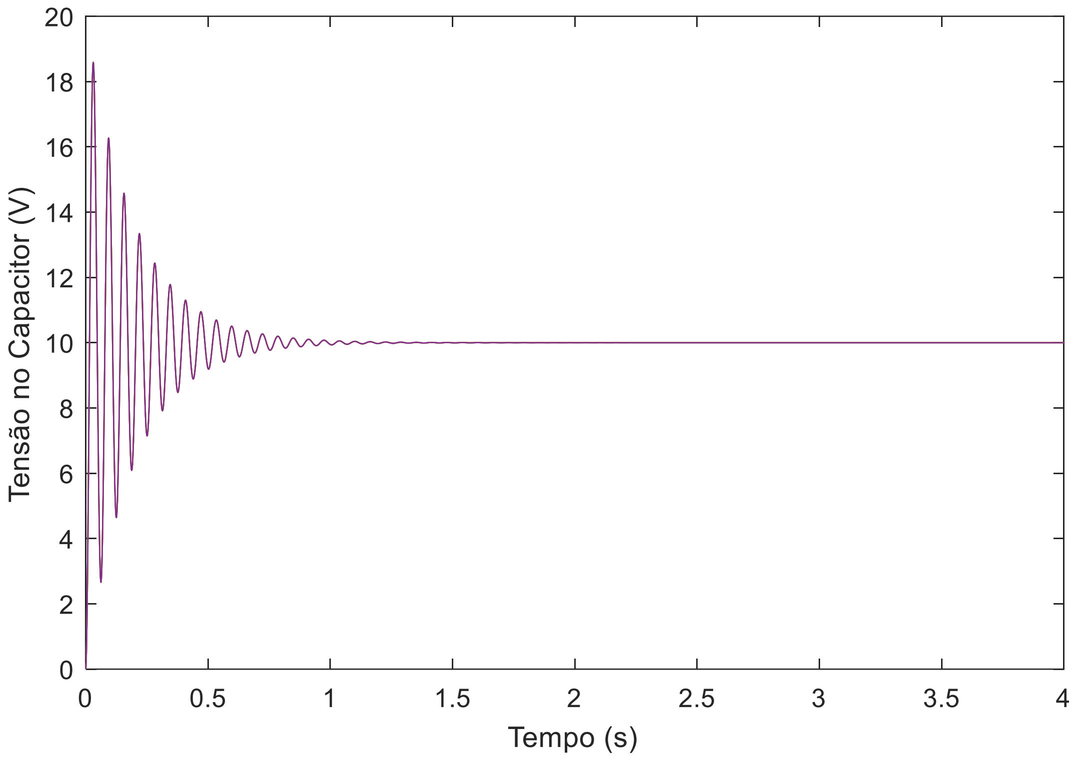
- Modelar por EDO, Espaço de estados e FT.
- Implementar em Simulink.
- Realizar a análise do filtro e determinar a frequência de corte.

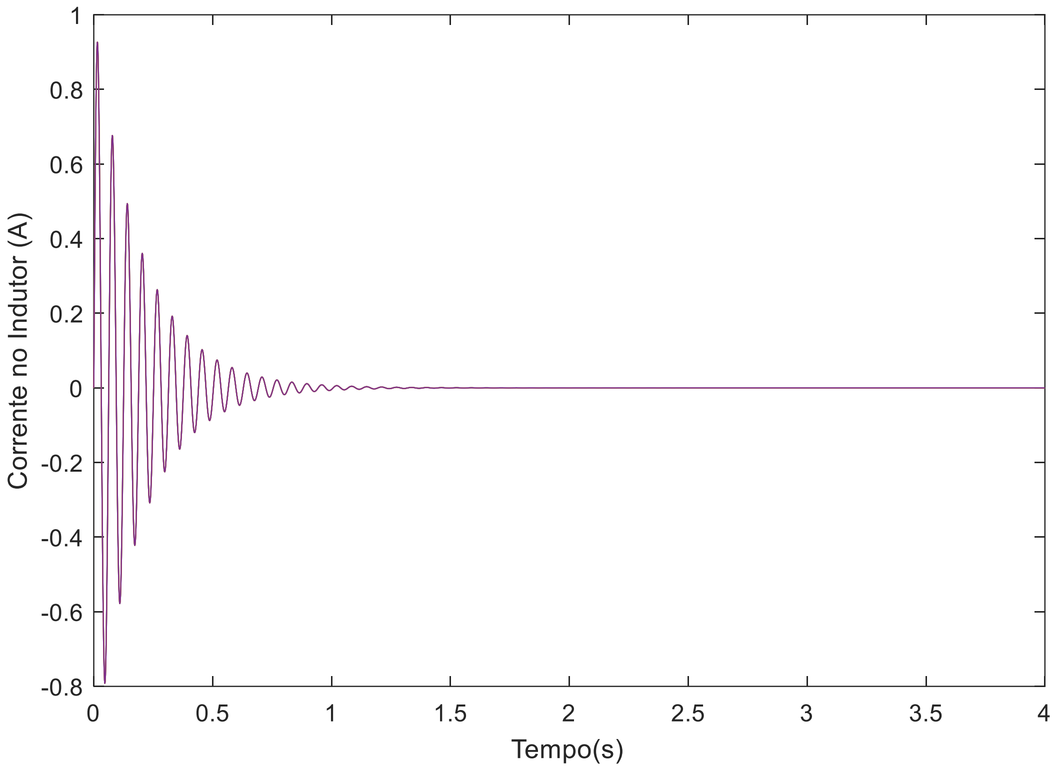


R	100 Ω
L	100 mH
C	1 mF

Análise de V_C e I_L

- Vin=10V





Resposta em frequência

- $(\lambda I - A)\ onde\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1000 & -10 \end{bmatrix}$$

R	100 Ω
L	100 mH
C	1 mF

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 10 \\ -1000 & \lambda + 10 \end{bmatrix}$$

$$s_{1,2} = \lambda^2 + 10\lambda + 10000$$

$$s_1 = -5 - j99{,}8749$$

$$s_2 = -5 + j99{,}8749$$

Resposta em frequência

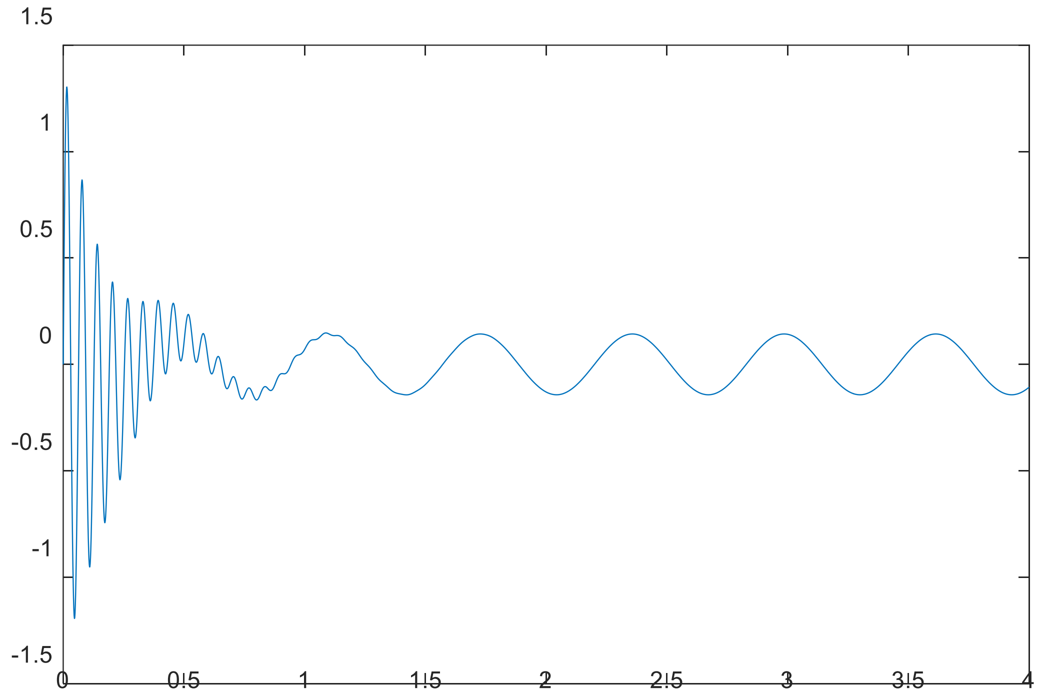
$$s_{1,2} = -\varepsilon\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\varepsilon^2} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon = \frac{-R}{\sqrt{R^2 + j^2}}$$

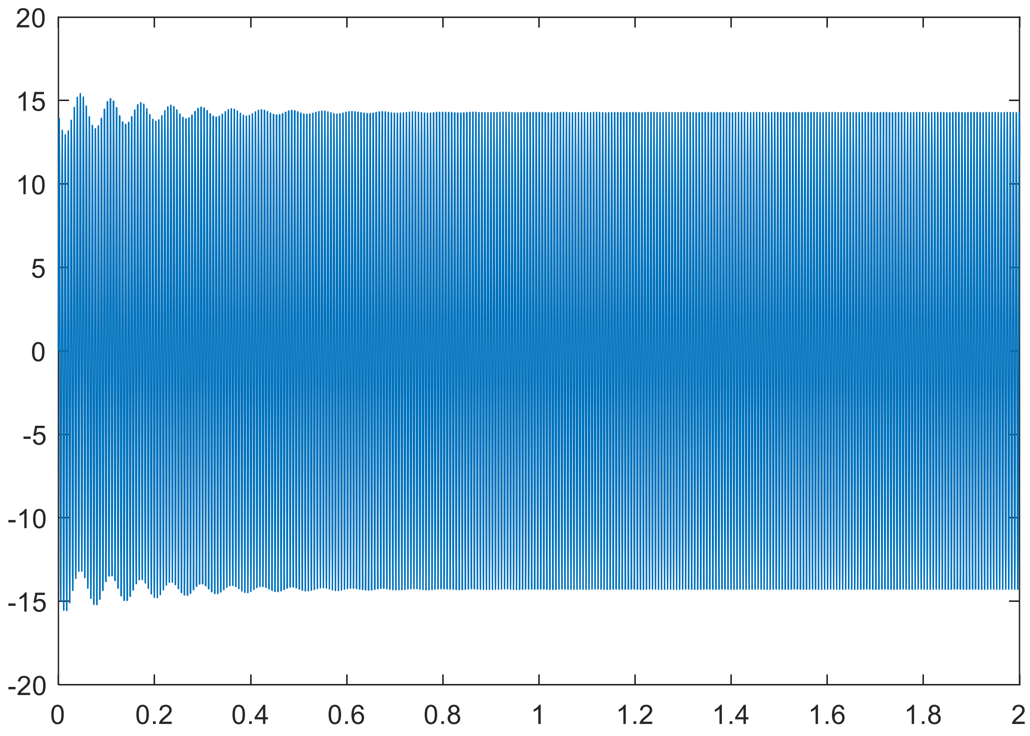
$$\varepsilon = \frac{-5}{\sqrt{5^2 + 99{,}8749^2}} = -0{,}05$$

$$-0{,}05\omega_m = -5$$

$$\omega_m = 99{,}99\ rad/s$$

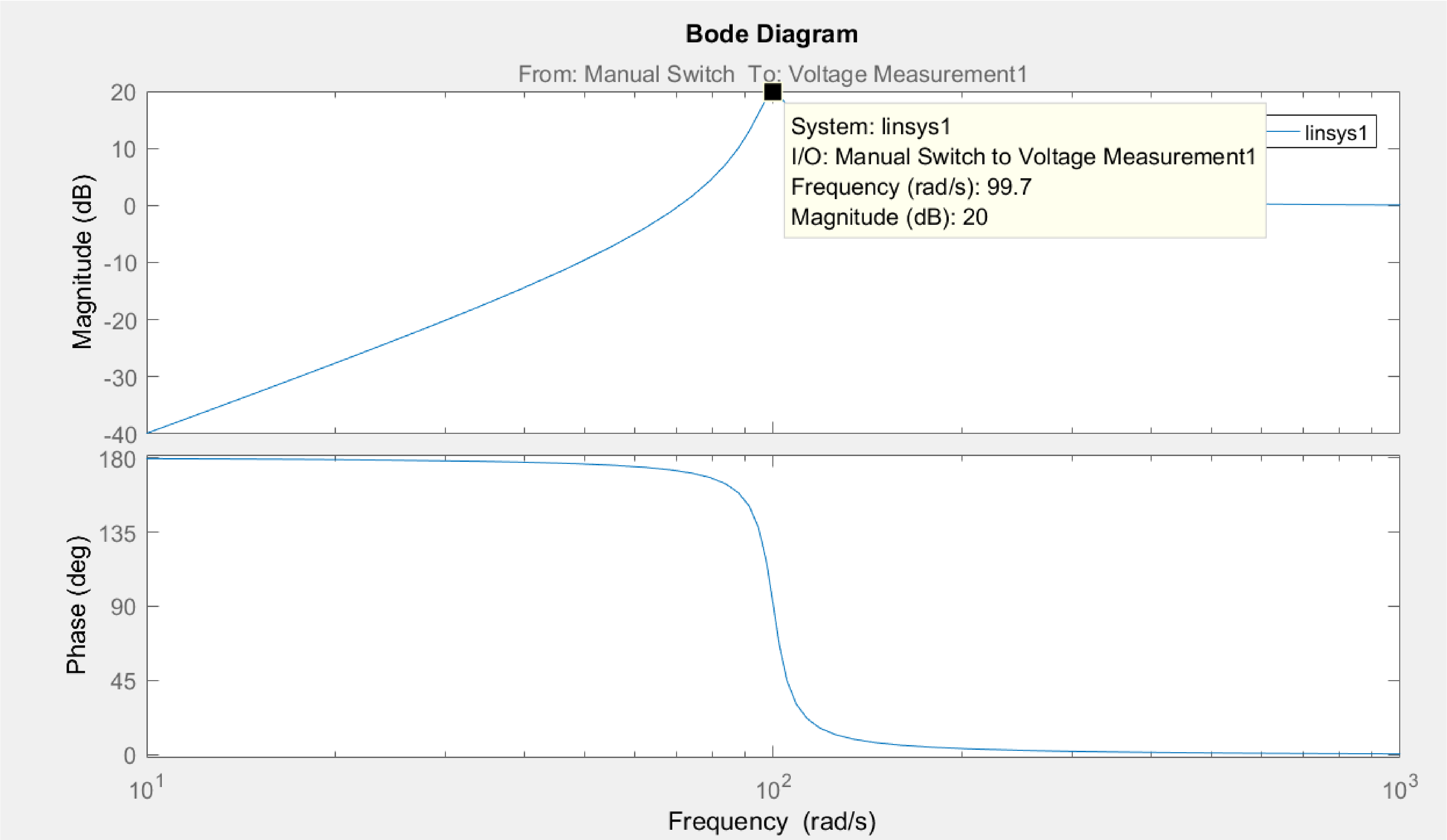
Teste do filtro uma década acima e abaixo da frequência ressonante.

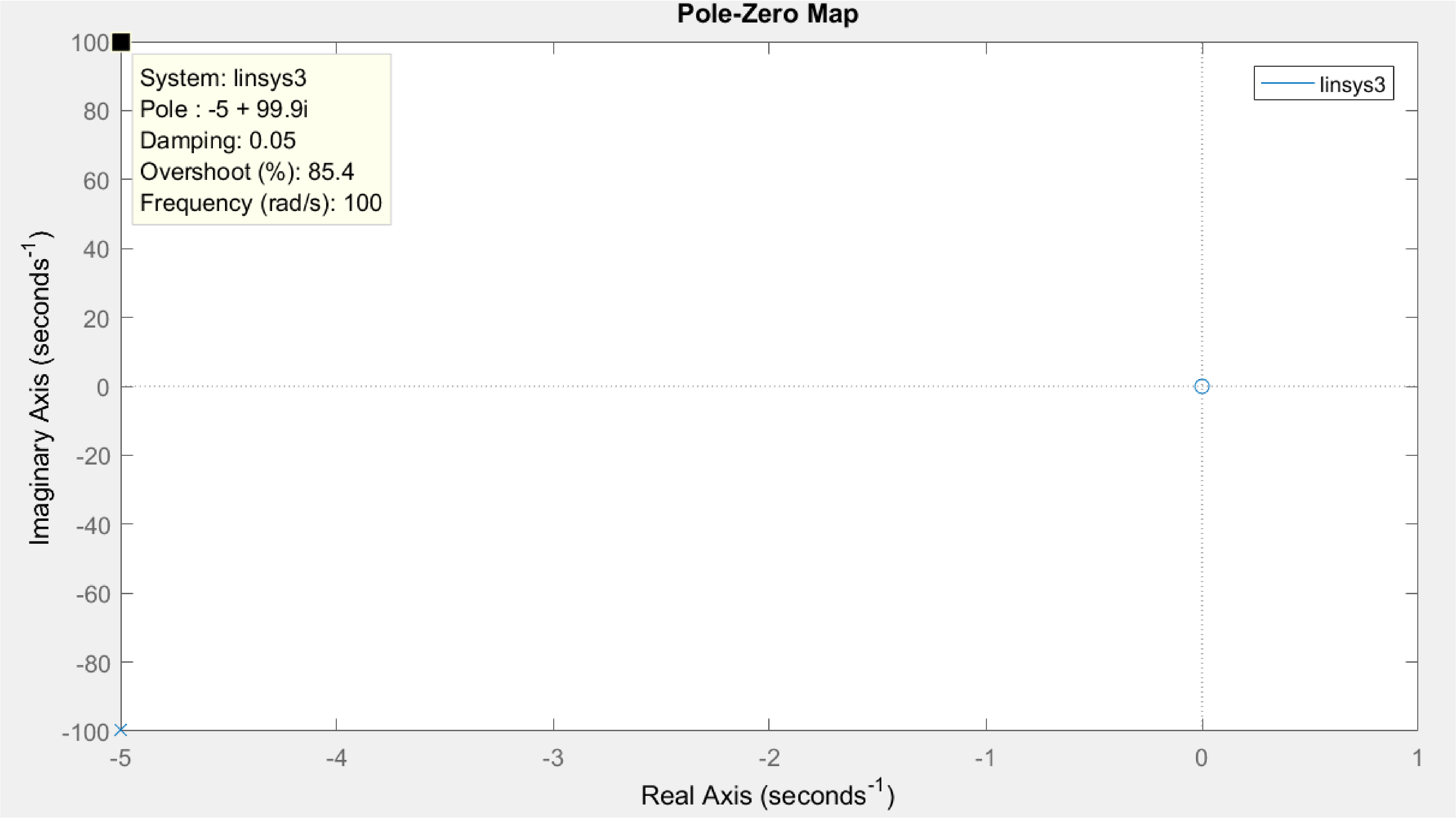




- f=10 rad/s

f=1000 rad/s


Bode Diagram
From: Manual Switch To: Voltage Measurement1
System: linsys1
I/O: Manual Switch to Voltage Measurement1
Frequency (rad/s): 99.7
Magnitude (dB): 20
linsys1
Magnitude (dB)
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Phase (deg)
180
135
90
45
0
10^1
10^2
10^3
Frequency (rad/s)



Pole-Zero Map
System: linsys3
Pole : -5 + 99.9i
Damping: 0.05
Overshoot (%): 85.4
Frequency (rad/s): 100
linsys3
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)

Conceitos

Modelagem matemática de sistemas mecânicos translacionais

Segunda Lei de Newton

- Conhecida como o Princípio Fundamental da Dinâmica.

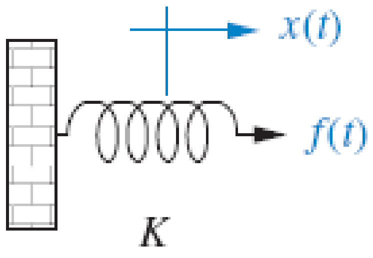
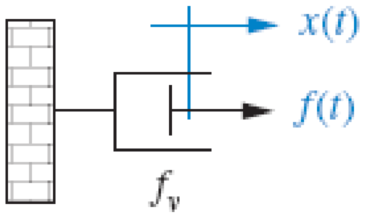
CUTNELL (1996)

- A força resultante aplicada em um corpo de massa m produz uma aceleração com uma certa direção e sentido.

$$F_{RES} = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

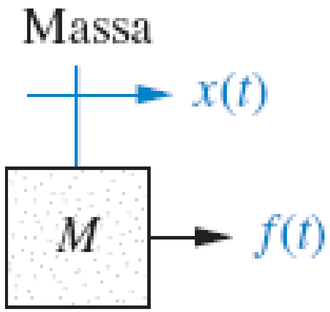
Sistemas mecânicos translacionais

- Composto por:

Elemento	Força-velocidade	Força-deslocamento
Mola 	$-$	$F = K \cdot X(s)$
Amortecedor viscoso 	$F = f_V \cdot V(s)$	$F = f_V \cdot sX(s)$

NISE (2013)

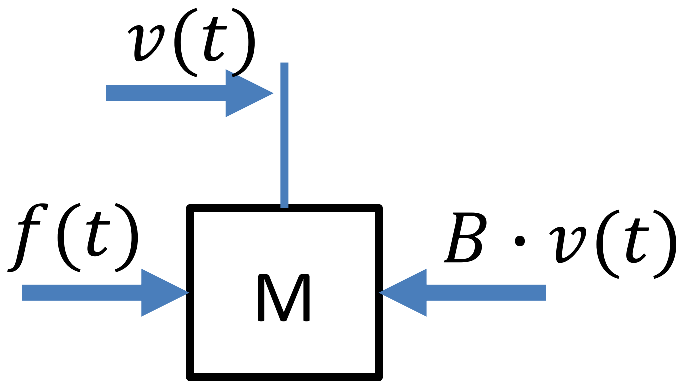
- Composto por:

Elemento	Força-velocidade	Força-deslocamento
	$F = M \cdot sV(s)$	$F = M \cdot s^2X(s)$

NISE (2013)

Modelagem de sistema mecânico de 1ª ordem

- Exemplo: obter a velocidade de um sistema pela força aplicada:



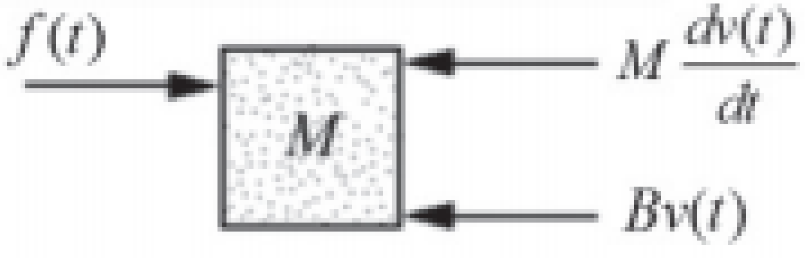
Autoria própria

https://cdn.pixabay.com/photo/2018/09/26/09/43/car-3704137_960_720.png

- Em que: M é a massa do carro e B é o coeficiente de atrito;

- Modelando:

$$f(t) - B \cdot v(t) = M \cdot {}^{dv(t)}/_{dt}$$
$$F(s) - M \cdot V(s) \cdot s - B \cdot V(s) = 0$$



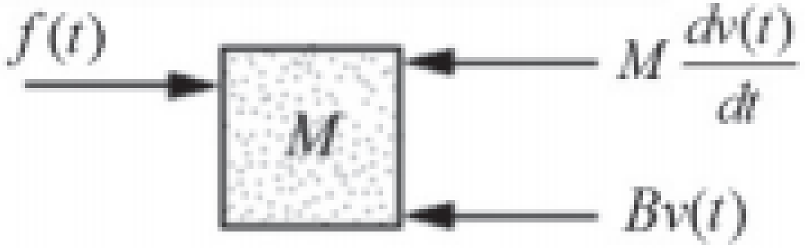
TAVARES (2017)

- Colocando a velocidade em evidência:

$$F(s) - V(s) \cdot (M \cdot s + B) = 0$$
$$F(s) = V(s) \cdot (M \cdot s + B)$$

- Obtendo a FT $= {}^{V(s)}/_{F(s)}$

$$FT(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s + B}$$



TAVARES (2017)

- Rearranjando:

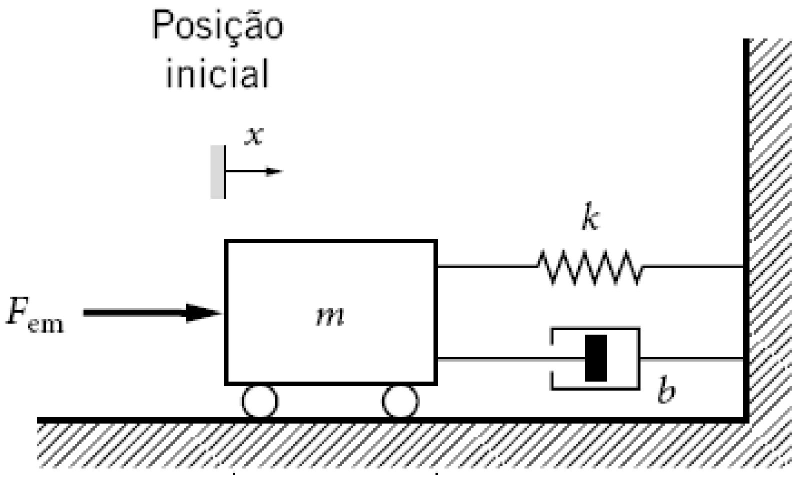
$$FT(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{{}^{1}/_{M}}{s + \frac{B}{M}}$$

Conceitos

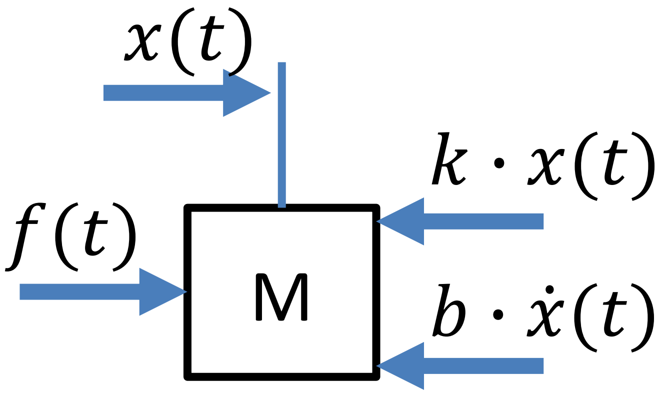
Modelagem matemática de sistemas mecânicos de 2ª ordem

Modelagem de sistema mecânico de 2ª ordem

- Obter o deslocamento de um sistema pela força aplicada:



KLUEVER (2018)

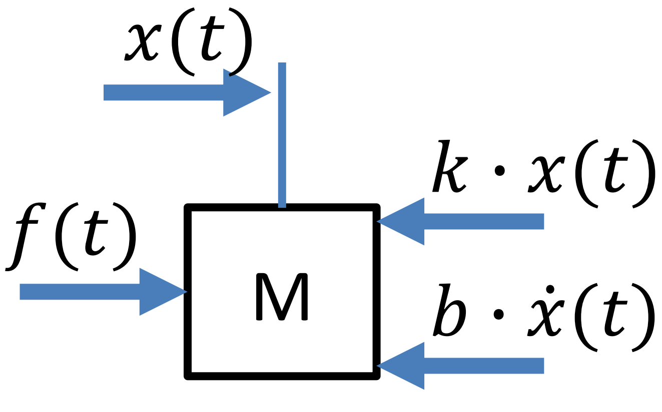


Autoria própria

- Em que M é a massa do carro e b é o coeficiente de atrito e o k é o coeficiente da mola.

- Modelando:

$$f - b \cdot \dot{x} - k \cdot x = M \cdot \ddot{x}$$
$$F(s) - b \cdot X \cdot s(s) - k \cdot X(s) - M \cdot X \cdot s^2(s) = 0$$
$$F(s) - X(s) \cdot (b \cdot s + k + M \cdot s^2) = 0$$
$$F(s) = X(s) \cdot (b \cdot s + k + M \cdot s^2)$$



Autoria própria

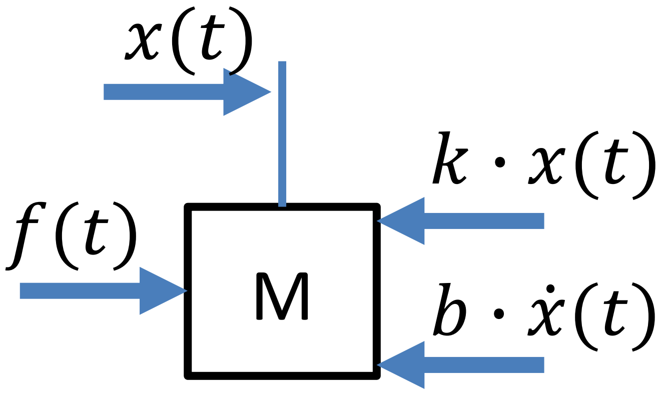
- Obtendo a FT:

$$FT(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

- Rearranjando:

$$FT(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{b}{M} \cdot s + \frac{k}{M}}$$

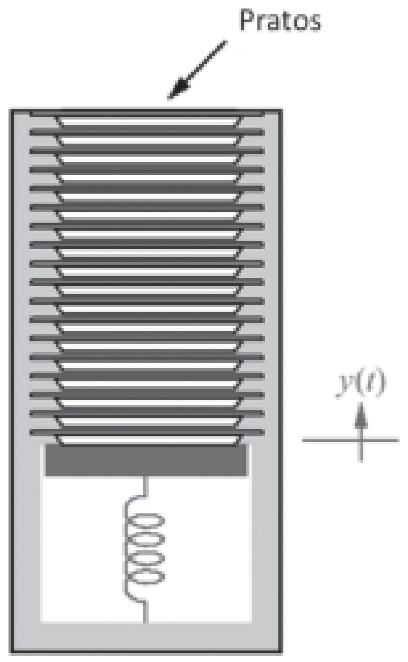


Autoria própria

Conceitos

Sistema de transporte de pratos

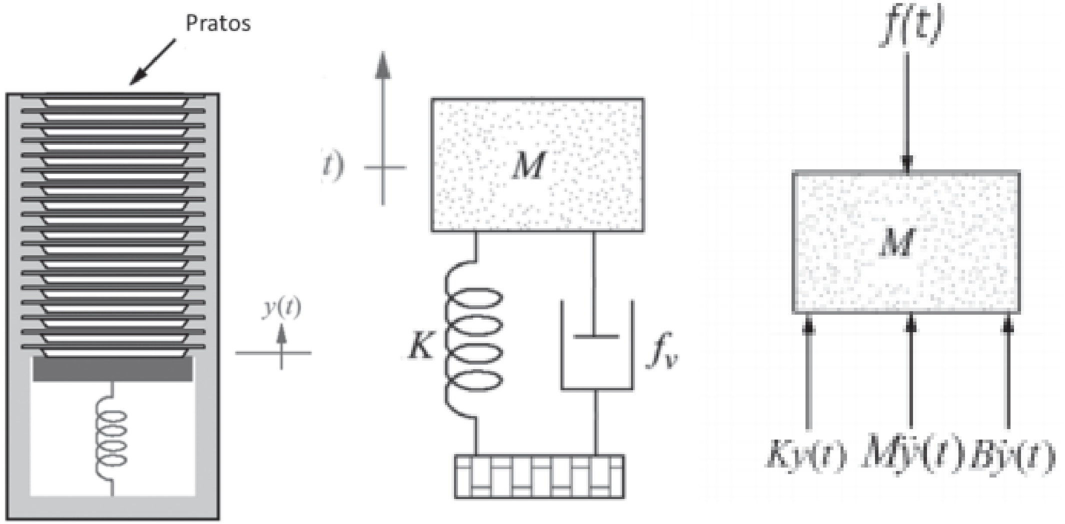
- Você é o engenheiro responsável de uma empresa de desenvolvimento tecnológico;
- Sua empresa foi contratada por um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte de pratos entre dois andares;
- Esse elevador deve ser capaz de armazenar 20 pratos em um dispensador;
- Como projetar o dispensador? Quais partes mecânicas serão usadas? Quais parte irão compor esse sistema?



TAVARES (2017)

Resolvendo a situação problema

- Montar um sistema que acumule os pratos em forma de uma pilha vertical;
- O modelo do sistema apresenta uma mola, uma massa e um amortecedor, que representa o atrito do embolo com as laterais;



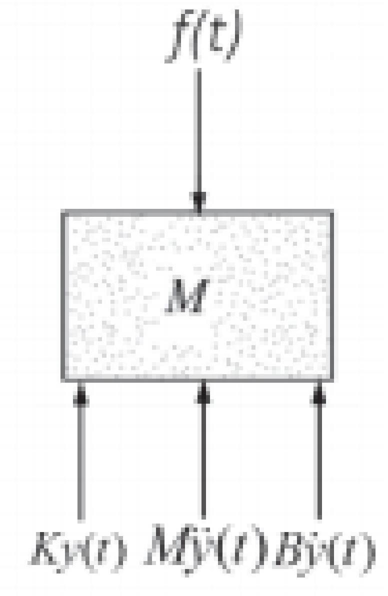
TAVARES (2017)

- Realizando a modelagem a partir das leis de Newton:

$$f(t) - K \cdot y - B \cdot \dot{y} - M \cdot \ddot{y} = 0$$
$$F(s) - K \cdot Y(s) - B \cdot sY(s) - M \cdot s^2Y(s) = 0$$
$$F(s) = Y(s) \cdot (K + B \cdot s + M \cdot s^2)$$

- Obtendo a FT:

$$FT(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

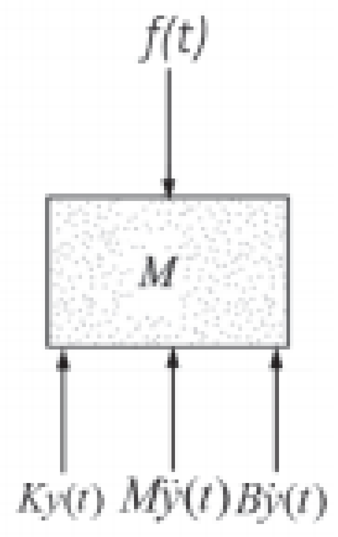


TAVARES (2017)

- Rearranjando:

$$FT(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

$$FT(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/_{M}}{s^2 + \frac{B}{M} \cdot s + \frac{K}{M}}$$

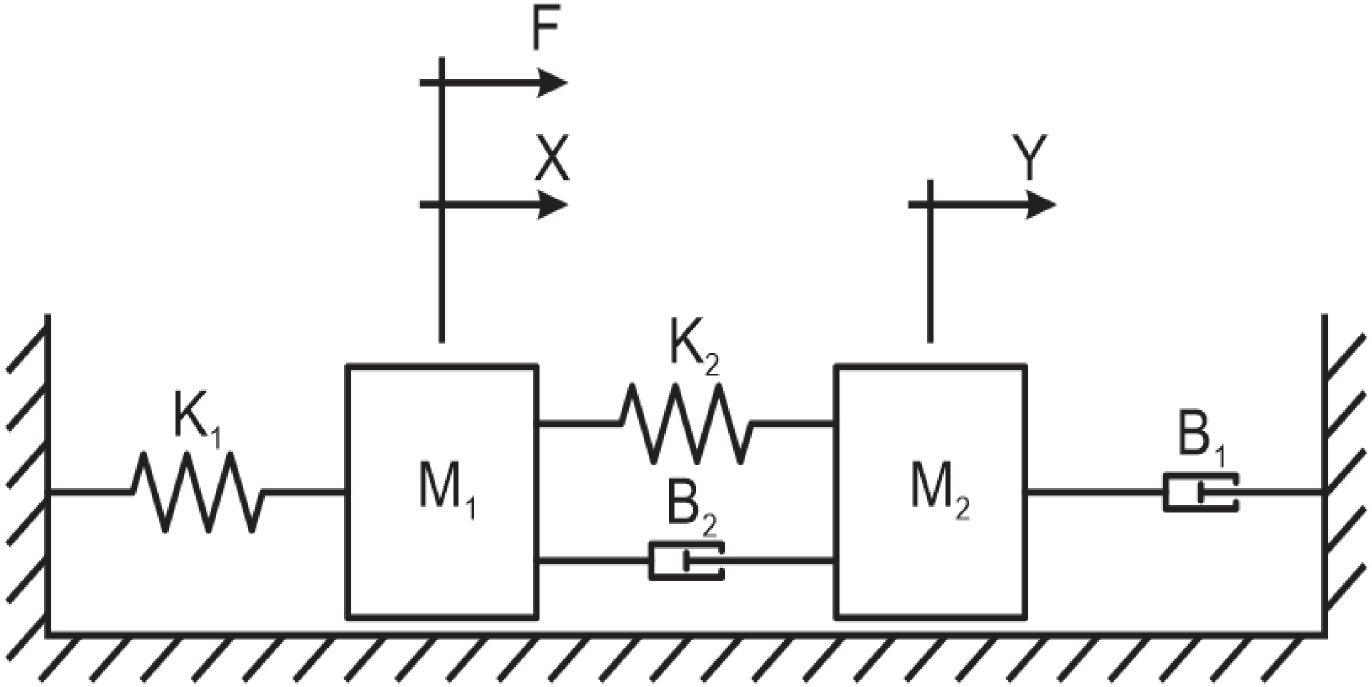


TAVARES (2017)

Conceitos

Modelagem de sistema massa-mola-amortecedor

Obter o diagrama de blocos de um sistema e estudar a sua resposta.

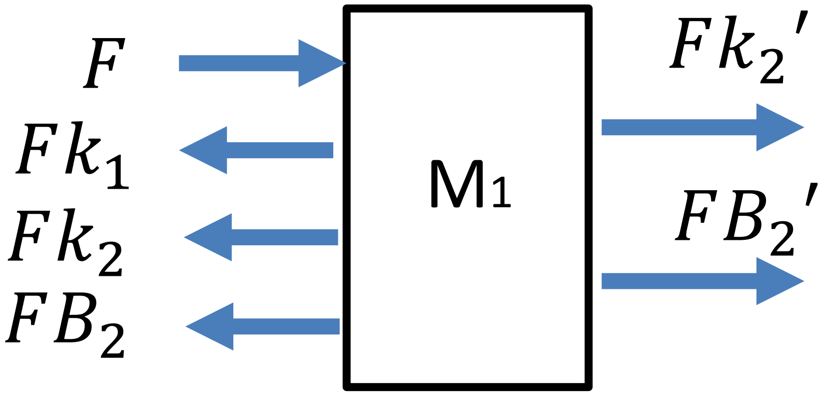


$M_1 = 2\ \mathrm{kg}$	$B_1 = 10\ \mathrm{Ns/m}$	$K_1 = 60\ \mathrm{N/m}$
$M_2 = 3\ \mathrm{kg}$	$B_2 = 15\ \mathrm{Ns/m}$	$K_2 = 60\ \mathrm{N/m}$

$$F = FM_1 + Fk_1 + Fk_2 + FB_2 - Fk_2' - FB_2'$$

$$F = M_1 \ddot{X}_1 + k_1 X_1 + k_2 X_1 + B_2 \dot{X}_1 - k_2 X_2 - B_2 \dot{X}_2$$

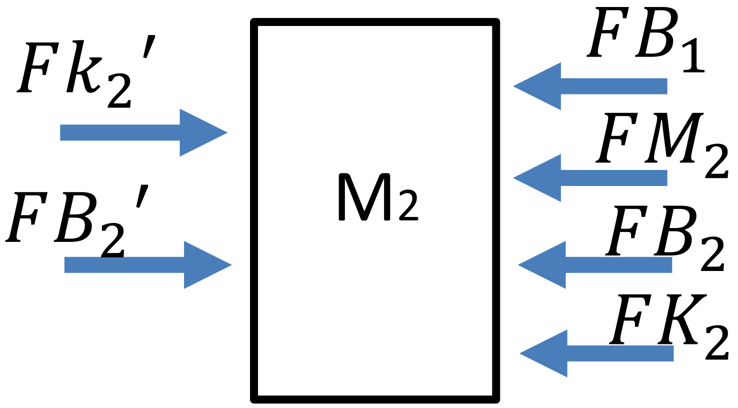
$$F = M_1 \ddot{X}_1 + k_1 X_1 + k_2 (X_1 - X_2) + B_2 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) \quad (eq.1)$$



$$0 = FM_2 + FB_2 + FB_1 + Fk_2 - Fk_2' - FB_2'$$

$$0 = M_2 \ddot{X}_2 + B_2 \dot{X}_2 + B_1 \dot{X}_2 + k_2 X_2 - k_2 X_1 - B_2 \dot{X}_1$$

$$0 = M_2 \ddot{X}_2 + B_1 \dot{X}_2 + k_2 (X_2 - X_1) + B_2 (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) \quad (eq.2)$$



- Aplicando Laplace (obs: **.s** a frente do termo indica domínio de Laplace)

$$F = M_1 \ddot{X}_1 + k_1 X_1 + k_2 (X_1 - X_2) + B_2 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) \;\; (eq.1)$$

$$F.s = M_1.s^2 X_1.s + k_1 X_1.s + k_2 X_1.s - k_2 X_2.s + B_2.sX_1.s - B_2.sX_2.s$$

evidência:

$$F.s = [M_1.s^2 + B_2.s + k_1 + k_2] X_1.s + [-B_2.s - k_2] X_2.s$$

$$0 = M_2 \ddot{X}_2 + B_1 \dot{X}_2 + k_2 (X_2 - X_1) + B_2 (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) \;\; (eq.2)$$

$$0 = M_2.s^2 X_2.s + B_1.sX_2.s + k_2 X_2.s - k_2 X_1.s + B_2.sX_2.s - B_2.sX_1.s$$

$$0 = [-B_2.s - k_2] X_1.s + [M_2.s^2 + B_1.s + B_2.s + k_2] X_2.s$$

- Equacionando em EE:

$$\begin{bmatrix} M_1.s^2 + B_2.s + k_1 + k_2 & -B_2.s - k_2 \\ -B_2.s - k_2 & M_2.s^2 + B_1.s + B_2.s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \Delta = (M_1.s^2 + B_2.s + k_1 + k_2)(M_2.s^2 + B_1.s + B_2.s + k_2) - (B_2.s + k_2)^2$$

$$M_1M_2.s^4 + M_1B_1.s^3 + M_1B_2.s^3 + M_1k_2.s^2 + M_2B_2.s^3 + B_1B_2.s^2 + B_2{}^2.s^2 + \ldots$$

$$\ldots + B_2k_2 + M_2k_1.s^2 + B_1k_1.s + B_2k_1.s + k_1k_2 + M_2k_2.s^2 + B_1k_2.s + B_2k_2.s + k_2{}^2 + \ldots.$$

$$\ldots - \left[B_2{}^2.s^2 + 2B_2k_2.s + k_2{}^2 \right]$$

- Em evidência e simplificando termos:

$$(M_1M_2)s^4+(M_1B_1+M_1B_2+M_2B_2)s^3+(M_1k_2+B_1B_2+B_2^2+M_2k_1+M_2k_2-B_2^2)s^2+....$$

$$...+(B_1k_1+B_2k_1+B_1k_2+B_2k_2-2B_2k_2+B_2k_2)s+(k_1k_2+k_2^2-k_2^2)$$

Substituindo

$$6s^4+95s^3+630s^2+1200s+3600$$

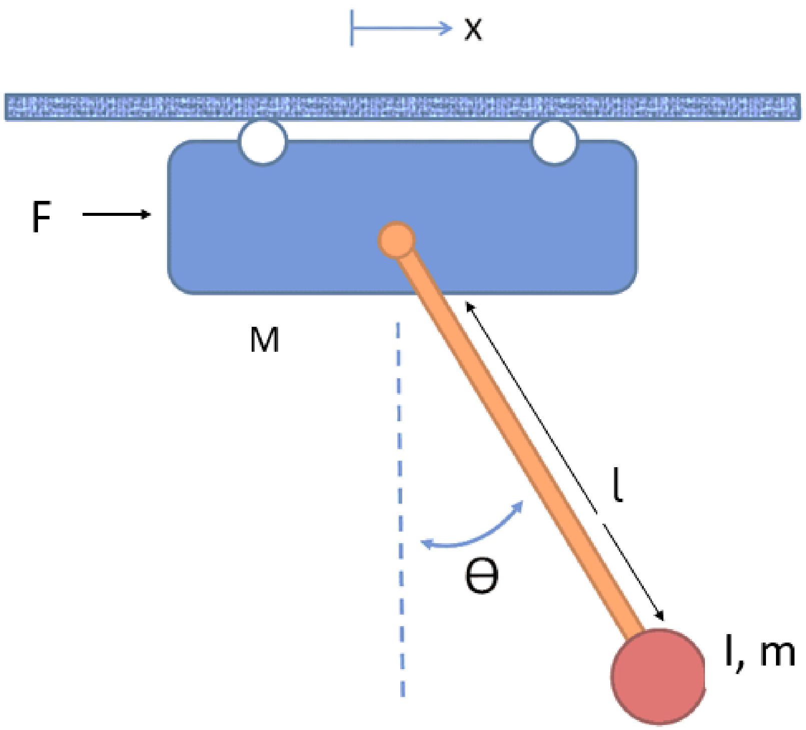
$M_1 = 2$ kg	$B_1 = 10$ Ns/m	$K_1 = 60$ N/m
$M_2 = 3$ kg	$B_2 = 15$ Ns/m	$K_2 = 60$ N/m

$$G_1(s)=\frac{\begin{bmatrix}1 & -B_2.s-k_2\\ 0 & M_2.s^2+B_1.s+B_2.s+k_2\end{bmatrix}}{\det\Delta}=\frac{3s^2+25s+60}{6s^4+95s^3+630s^2+1200s+3600}$$

$$G_2(s)=\frac{\begin{bmatrix}M_1.s^2+B_2.s+k_1+k_2 & 1\\ -B_2.s-k_2 & 0\end{bmatrix}}{\det\Delta}=\frac{15s+60}{6s^4+95s^3+630s^2+1200s+3600}$$

Modelagem pêndulo invertido ponte rolante

- Para este sistema, a entrada de controle é a força F que move o carrinho horizontalmente e as saídas são a posição angular do pêndulo θ e a posição horizontal do carrinho x.



$$\ddot{\theta}(I+ml^2)+mgl\theta=-ml\ddot{x}$$ Eq pêndulo

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}=F$$ Eq carrinho

Atividade

- Considerar:

M – massa do carrinho 0,5kg

m – massa do pêndulo 0,2kg

b – coeficiente de atrito para carrinho 0,1 N/m/s

l – comprimento do centro de massa do pêndulo 0,3m

I – momento de inércia do pêndulo 0,006kgm²

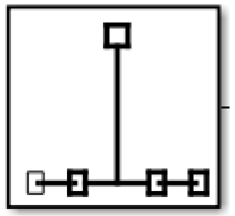
F – força aplicada ao carrinho

θ – ângulo do pêndulo

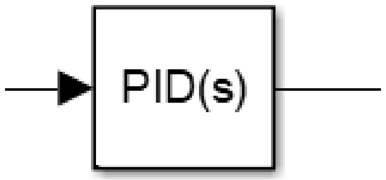
g – aceleração gravitacional 9,81 m/s²

Atividade

- Modelar o sistema em diagrama de blocos para uma entrada de degrau unitário e analisar a resposta de saída de θ e x.
- Altere o coeficiente de atrito b=0,001 e analise a resposta de saída de θ e x.
- Altere o momento de inércia I=0,06kgm² e analise a resposta de saída de θ e x.
- Pretende-se implementar um controle anti-sway para a planta. Elabore um controlador da família PID para manter o ângulo de Setpoint (θ) no valor desejado.



Discrete Impulse



PID Controller

Referências

- OGATA, K. – **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice-Hall. Rio de Janeiro, 1982.
- COUGHANOWR e KOPPEL - **Process Systems Analysis and Control**. McGraw Hill, 1991.
- COUGHANOWR e KOPPEL - **Análise e Controle de Processos**. Editora Guanabara, 1987.
- KLUEVER, C. A. **Sistemas dinâmicos**: modelagem, simulação e controle. Rio de Janeiro: LTC, 2017.