

**Lista de Exercícios 1: Modelagem de sistemas dinâmicos**  
**Entrega: 28/10**

1) O circuito RLC em série ressonante fornece um filtro passa-faixa quando a saída é extraída do resistor, como mostra a Figura 1(a). Um filtro passa-faixa é projetado para deixar passar todas as frequências dentro de uma faixa de frequências,  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  conforme ilustra a Figura 1(b).

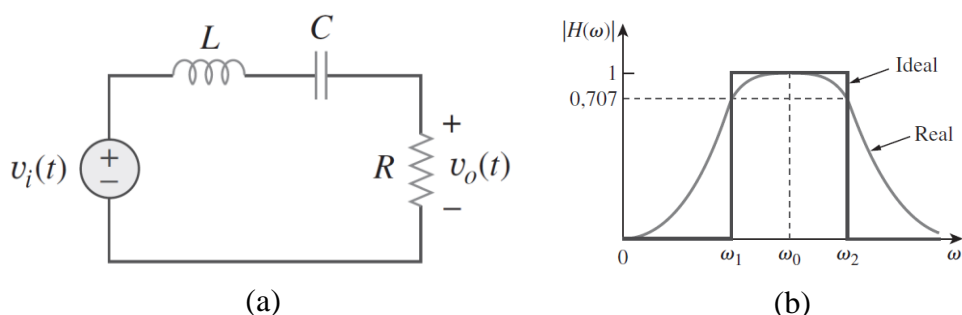


Figura 1: Circuito ressonante RLC. (a) Topologia; (b) resposta do filtro

- Modele o filtro pelas equações diferenciais ordinárias (tensão no capacitor e corrente no indutor) e implemente em blocos no ambiente Simulink. Simule a resposta da tensão no resistor ( $v_o(t)$ ). Insira um valor constante de tensão ( $v_i$ ) e discuta os resultados.
- Realize o mesmo procedimento solicitado em (a), porém implemente no bloco espaço de estados no ambiente Simulink.
- Realize o mesmo procedimento solicitado em (a), porém implemente em função de transferência no ambiente Simulink.
- Realize o cálculo da frequência ressonante do filtro através da análise dos autovalores da matriz  $A$  ( $\lambda I - A$ ). Comprove a frequência ressonante através de ensaios no ambiente Simulink.

2) Determine que tipo de filtro é mostrado na Figura 2

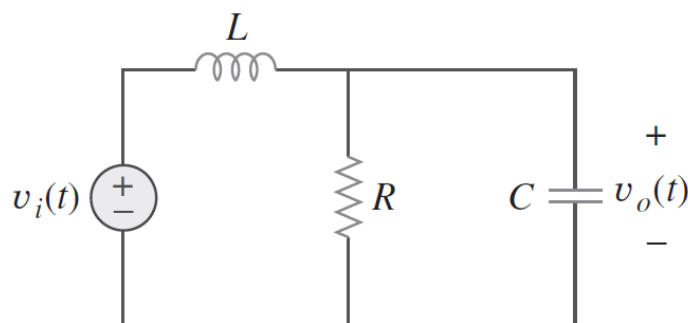
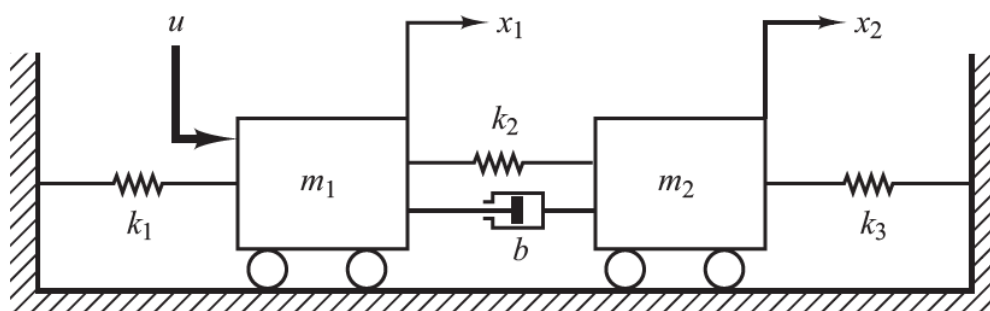


Figura 2: Circuito para análise.

- Modele o filtro pelas equações diferenciais ordinárias (tensão no capacitor e corrente no indutor) e implemente em blocos no ambiente Simulink. Insira um valor constante de tensão ( $v_i$ ) e discuta os resultados.

- Realize o mesmo procedimento solicitado em (a), porém implemente no bloco espaço de estados no ambiente Simulink.
- Realize o mesmo procedimento solicitado em (a), porém implemente em função de transferência no ambiente Simulink.
- Realize o cálculo da frequência ressonante do filtro através da análise dos autovalores da matriz  $A$  ( $\lambda I - A$ ). Comprove a frequência ressonante através de ensaios no ambiente Simulink. Determine o tipo do filtro da Figura 2.

3) (OGATA, 2010) Obtenha as funções de transferência  $X_1(s)/U(s)$  e  $X_2(s)/U(s)$  do sistema mecânico mostrado na Figura 3.

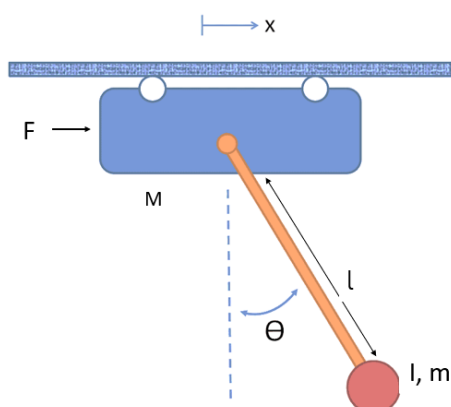


$m_1 = 1\text{ kg}$	$b = 10\text{ Ns/m}$	$k_2 = 50\text{ N/m}$
$m_2 = 1,5\text{ kg}$	$k_1 = 50\text{ N/m}$	$k_3 = 50\text{ N/m}$

Figura 3: Circuito para análise.

Modele o sistema em ambiente Simulink e discuta os resultados. Apresente a resposta de velocidade dos blocos.

4) Para o sistema da Figura 4, a entrada de controle é a força  $F$  que move o carrinho horizontalmente e as saídas são a posição angular do pêndulo  $\theta$  e a posição horizontal do carrinho  $x$ .



$$\ddot{\theta}(I + ml^2) + mgl\theta = -ml\ddot{x} \quad \text{Eq pêndulo}$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = F \quad \text{Eq carrinho}$$

Figura 4: Circuito para análise.

Considerar:

$M$  – massa do carrinho 0,5kg

$m$  – massa do pêndulo 0,2kg

$b$  – coeficiente de atrito para carrinho 0,1 N/m/s

$l$  – comprimento do centro de massa do pêndulo 0,3m

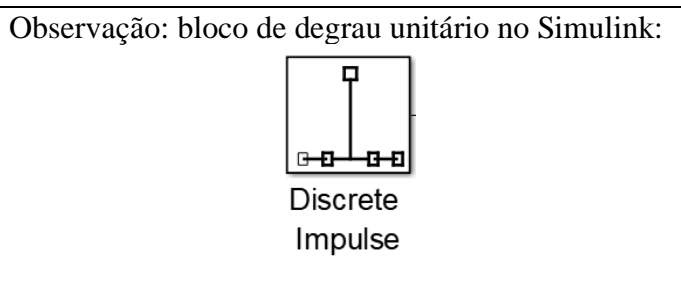
$I$  – momento de inércia do pêndulo 0,006kgm<sup>2</sup>

$F$  – força aplicada ao carrinho

$\theta$  – ângulo do pêndulo

$g$  – aceleração gravitacional 9,81 m/s<sup>2</sup>

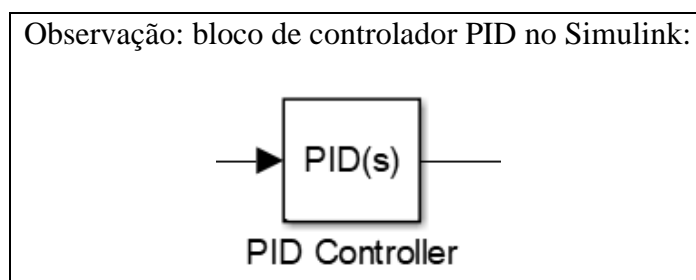
a) Modelar o sistema em diagrama de blocos para uma entrada de degrau unitário e analisar a resposta de saída de  $\theta$  e  $x$ .



b) Altere o coeficiente de atrito  $b=0,001$  e analise a resposta de saída de  $\theta$  e  $x$ .

c) Altere o momento de inércia  $I=0,06\text{kgm}^2$  e analise a resposta de saída de  $\theta$  e  $x$ .

d) Pretende-se implementar um controle anti-sway para a planta. Elabore um controlador da família PID para manter o ângulo de Setpoint ( $\theta$ ) no valor desejado.

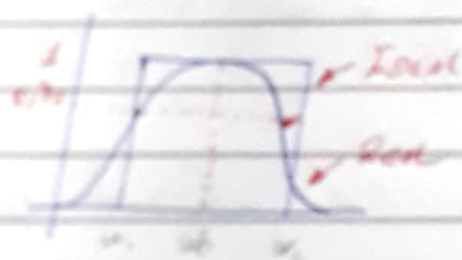
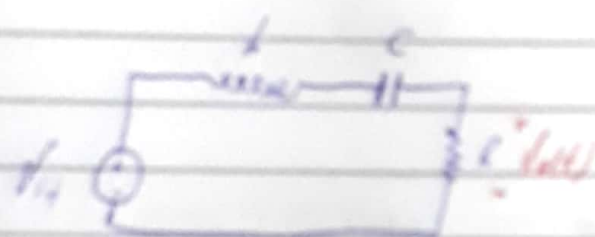


09.10.21

# Lista de Exercícios: 01

## Modelagem de Sistema Dinâmicos

1) Um circuito RLC em série representado abaixo  
um filtro passa-baixa



$$R = 50$$

$$L = 100 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$C = 10^{-5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_R = I_L = I_C \\ I_R = L \frac{di}{dt} \end{array} \right\}$$

a)

$$v_s = v_R + v_L + v_C = v_o$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_R = C \frac{dv_o}{dt} \end{array} \right\}$$

$$I R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} = v_s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [H(s)] \cdot F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{array} \right\}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{L} di + \frac{R}{L} = \frac{v_s}{L}$$

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = \frac{1}{(sL + R) + \frac{1}{sC}} \quad \text{or} \quad \frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

RLC

$$-V + R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0$$

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$I(R + Ls) = V_0 - \frac{1}{Cs}$$

$$I = \frac{V_0 - \frac{1}{Cs}}{R + Ls}$$

$$\int \frac{di}{dt} = I$$

2) Por E.G. Espaço Estado

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V(t)$$

3) Por Função de Transferência

$$V_{out} = I_0 \cdot \frac{X_C}{(X_L + R) + X_C} = V_0 \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{(sL + R) + \frac{1}{sC}}$$

$$V_{out} = V_0 \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{1 + sRC + s^2LC} \quad R + \frac{1}{sC} = \frac{1 + RsC}{sC}$$

$$\frac{V_{out}}{V_0} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$



ES0

$$V_{i(t)} = V_r(t) + V_{c(t)} + V_{L(t)} = 0$$

$$V_{i(t)} + L \frac{di}{dt} + V_c = 0 \quad \text{Eq. 1}$$

$$\frac{V_{i(t)}}{L} + \frac{1}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

Equation 1 written as  $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dV_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{i(t)}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} V_c + \frac{1}{L} V_{i(t)} \quad \text{Eq. 1}$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i \quad \text{Eq. 2}$$

San Carlos de Bariloche

di:  $\frac{1}{2}$

$$-d\psi = E(\theta) + \frac{1}{2} d\theta^2 + h \cdot c \quad G_1$$

$$-V = K_2 + 147 - 16 = 0$$

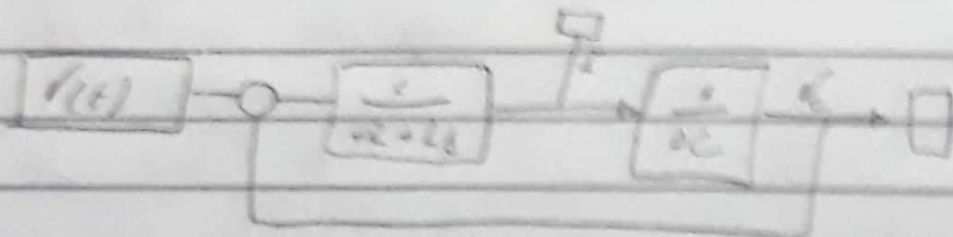
Isolar 5

$$I(R + L_1) = (I - L_2)$$

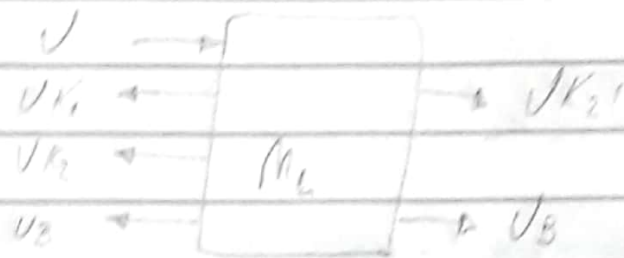
$$T = (V - V_c)$$

$$(2 - 2)$$

✓	2	5
		40



3) Obtenha as funções de transferência  $\frac{x_1}{U_s}$  e  $\frac{x_2}{U_s}$  do sistema mecânico



$$U = U_{m_1} + U_{K_1} + U_{K_2} + U_B - U_{K_2'} - U_B$$

$$U = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K_1 x_1 + K_2 x_1 + B \frac{dx_1}{dt} - K_2 x_2 - B \frac{dx_2}{dt}$$

$$U = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + K_2 (x_1 - x_2) + K_1 x_1$$

→ Aplicando LAPLACE

$$U(s) = m_1 s^2 x_1(s) + B(s x_1(s) - s x_2(s)) + K_2 (x_1(s) - x_2(s)) + K_1 x_1(s)$$

$$U(s) = x_1(s) \cdot (m_1 s^2 + B s + K_2 + K_1) + x_2(s) \cdot (-B s - K_2)$$



Control System 2



$$Q = \sqrt{M_2 + \bar{K}_2 + K_2 + M_2 - M_2 s^2 - \bar{K}_2}$$

$$Q = M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \bar{K}_2 \frac{dx_2}{dt} + K_2 x_2 + K_f x_2 - K_f x_1 - \bar{K}_2 \frac{dx_1}{dt}$$

→ Laplace transform

$$Q = M_2 s^2 x_2(s) + \bar{K}_2 s x_2(s) + K_2 x_2(s) + K_f x_2(s) - K_f x_1(s) - \bar{K}_2 s x_1(s)$$

$$Q = x_2(s) (M_2 s^2 + \bar{K}_2 s + K_2 + K_f) - x_1(s) (-K_f - \bar{K}_2 s)$$

→ Compare F.E

$$\begin{bmatrix} M_2 s^2 + \bar{K}_2 s + K_2 + K_f & -\bar{K}_2 s - K_f \\ -K_f - \bar{K}_2 s & M_2 s^2 + \bar{K}_2 s + K_2 + K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \Delta = [(M_2 s^2 + \bar{K}_2 s + K_2 + K_f)(M_2 s^2 + \bar{K}_2 s + K_2 + K_f) - (-\bar{K}_2 s - K_f)(-K_f - \bar{K}_2 s)]$$

$$\det \Delta = (M_2 M_2 s^4 + M_2 \bar{K}_2 s^3 + M_2 K_2 s^2 + M_2 K_f s + M_2 \bar{K}_2^2 s^3 + M_2 \bar{K}_2 K_f s^2 + \bar{K}_2^2 s^2 + \bar{K}_2 K_f s + K_f^2 + K_f \bar{K}_2 s + K_f^2)$$

$$M_2 K_2 s^2 + \bar{K}_2 K_f s + K_f^2 + K_f \bar{K}_2 s + M_2 K_f s^2 + \bar{K}_2 K_f s + K_f K_f + K_f K_f)$$

$$= (+ \bar{K}_2 K_f s + \bar{K}_2^2 s^2 + K_f^2 + \bar{K}_2 K_f s)$$

Cont. exercícios

Calculando em evidência o  $\det A$

$$\det A (M_1 M_2) s^4 + (M_1 B + M_2 B) s^3 + (M_1 K_2 + M_1 K_3 + M_2 K_2 + M_2 K_3 - B^2) s^2$$

$$+ (3K_1 - B K_3 + B K_1 + 3K_1 - B K_1 - B K_1) s + (K_1^2 + K_2 K_3 + K_1 K_1 + K_1 K_3 - K_1^2)$$

$$\det L = (M_1 M_2) s^4 + (M_1 B + M_2 B) s^3 + (M_1 K_2 + M_1 K_3 + M_2 K_2 + M_2 K_3) s^2$$

$$+ (3K_1 + B K_3) s + (K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_1 K_3)$$

F. Transf.

$$\begin{bmatrix} 1 & -B s & -K_2 \\ 0 & M_2 s^2 + B s + K_2 + K_3 \end{bmatrix} = M_2 s^2 + B s + K_2 + K_3 - 0$$

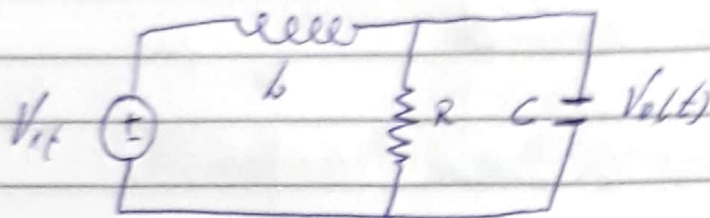
$$G_1(s) = \frac{M_2 s^2 + B s + K_2 + K_3}{\det A} \Rightarrow \frac{1,5 s^2 + 10 s + 100}{\det A}$$

$$\begin{bmatrix} M_2 s^2 + B s + K_2 + K_1 & 1 \\ -K_2 - B s & 0 \end{bmatrix} = 0 - (-K_2 - B s) = K_2 + B s$$

$$G_2(s) = \frac{K_2 + B s}{\det A} \Rightarrow \frac{10 s + 50}{\det A}$$

$$\boxed{\det A = 1,5 s^4 + 2,5 s^3 + 2,5 s^2 + 100 s + 7500}$$

02) Determine que tipo de filtro é mostrado



$$G(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$R // C = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$R // C = \frac{\frac{R}{sC}}{\frac{R sC + 1}{sC}}$$

$$R // C = \frac{\frac{R}{sC}}{\frac{R sC + 1}{sC}}$$

$$R // C = \frac{R}{sRC + 1}$$

$$V_o = V_i \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$V_o = V_i \cdot \frac{\frac{R}{sRC + 1}}{sL + \frac{R}{sRC + 1}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{R}{sRC + 1}}{\frac{sL(sRC + 1) + R}{sRC + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{s^2 LRC + sL + R}$$

$$F(s) = \frac{R}{LRCs^2 + Ls + R}$$

As a result, the number of parallel, elementary

operations is reduced.

The number of operations is a function of the number of

operations. It is composed of the number of

operations in the system.

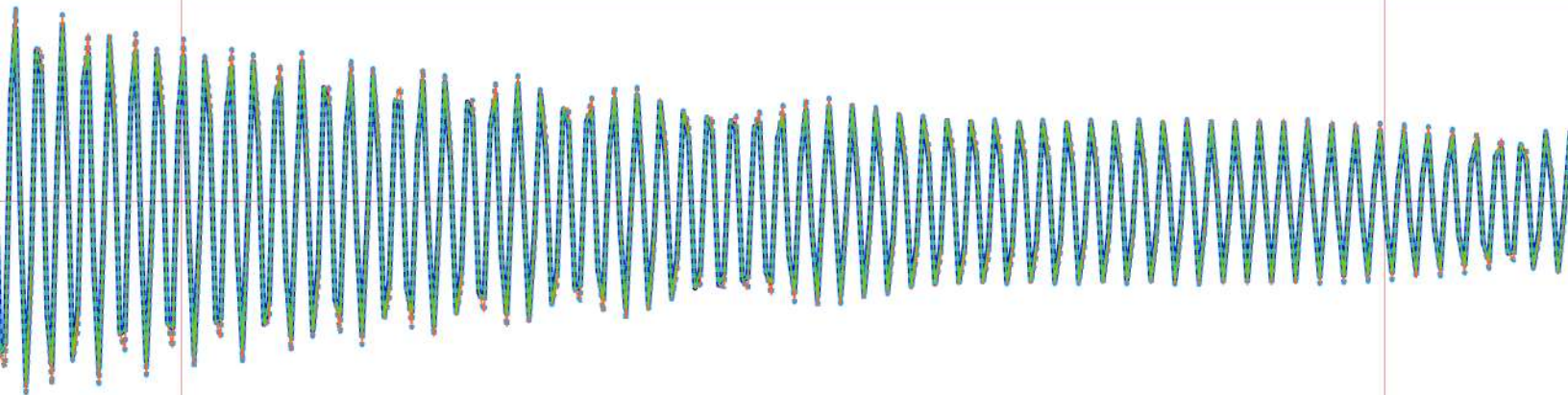
The number of operations is a function of the number of

operations. It is composed of the number of

operations in the system.



Position 2, Position 1



50

100



Bode Diagram

