Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos

Aula 05: Modelagem de sistemas mecânicos rotacionais

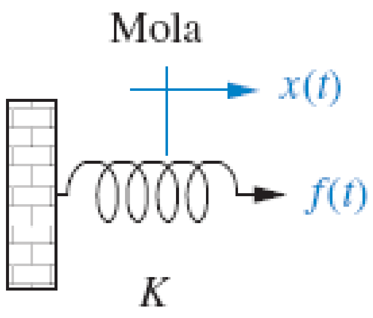
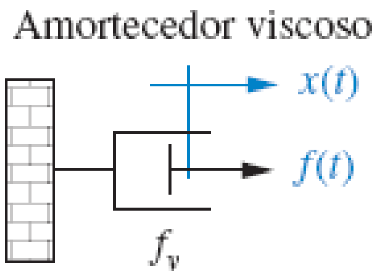
Professor Me. Renato Kazuo Miyamoto

Conceitos

Recapitulando

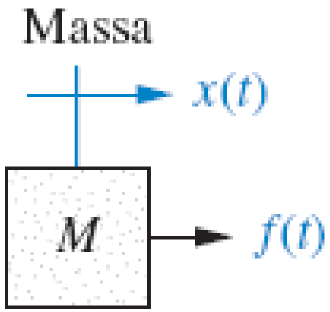
Sistemas mecânicos translacionais

- Composto por:

Elemento	Força-velocidade	Força-deslocamento
	–	$F = K \cdot X(s)$
	$F = f_V \cdot V(s)$	$F = f_V \cdot sX(s)$

NISE (2013)

- Composto por:

Elemento	Força-velocidade	Força-deslocamento
	$F = M \cdot sV(s)$	$F = M \cdot s^2X(s)$

NISE (2013)

Conceitos

Modelagem matemática de sistemas mecânicos rotacional

Sistema mecânico rotacional

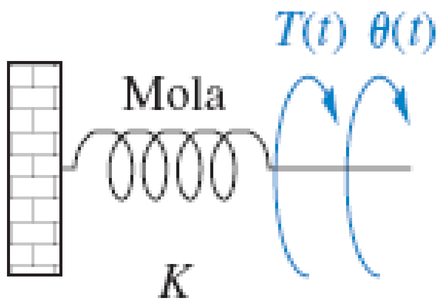
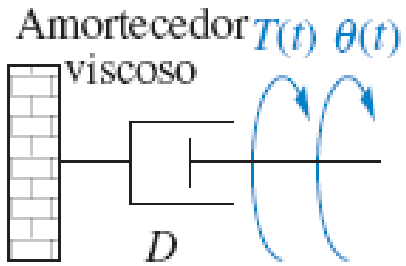
- Descrito pela segunda lei de Newton, mas com movimentos rotacionais

$$\sum T = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- Em que T é o torque, J é o momento de inércia, α é a aceleração angular, ω é a velocidade angular e θ é o deslocamento angular.

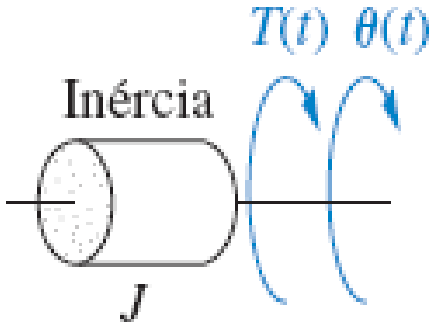
Sistemas mecânicos rotacionais

- Composto por:

Elemento	Torque-vel. angular	Torque-desl. angular
	$-$	$T = K \cdot \theta(s)$
	$T = D \cdot \omega(s)$	$T = D \cdot s\theta(s)$

NISE (2013)

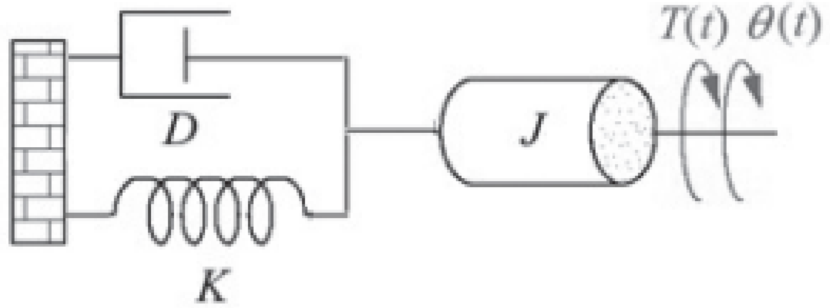
- Composto por:

Elemento	Força-velocidade	Força-deslocamento
	$T = J \cdot s\omega(s)$	$T = M \cdot s^2\theta(s)$

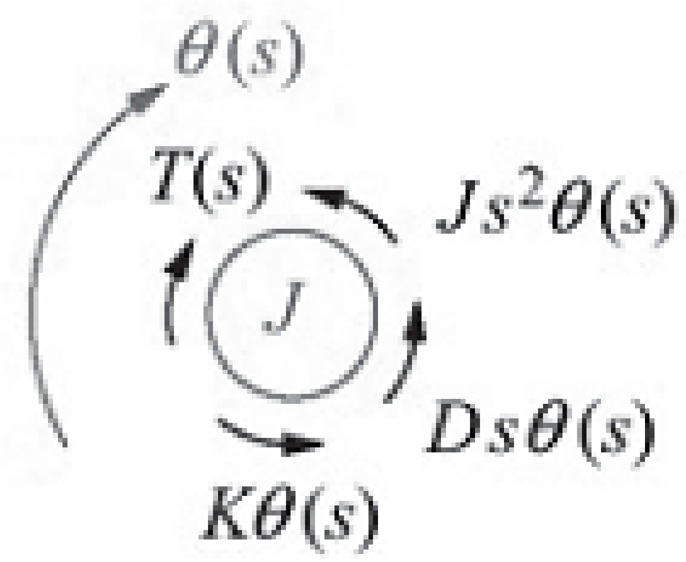
NISE (2013)

Exemplo de um sistema mecânico rotacional

- Dado um sistema rotacional: Qual o torque em relação ao deslocamento angular?



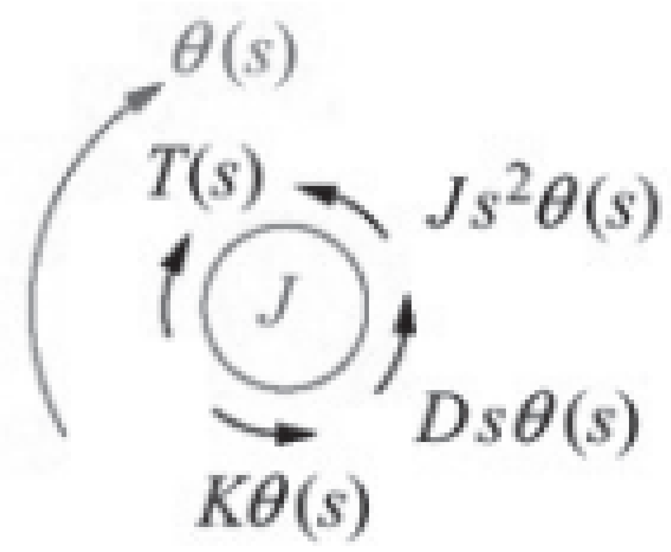
TAVARES (2017)



TAVARES (2017)

- Modelando:

$$T(s) - J \cdot \theta \cdot s^2(s) - D \cdot s\theta(s) - K \cdot \theta(s) = 0$$



TAVARES (2017)

- Colocando o deslocamento em evidência:

$$T(s) - \theta(s) \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s + K) = 0$$
$$T(s) = \theta(s) \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s + K)$$

- Obtendo a FT:

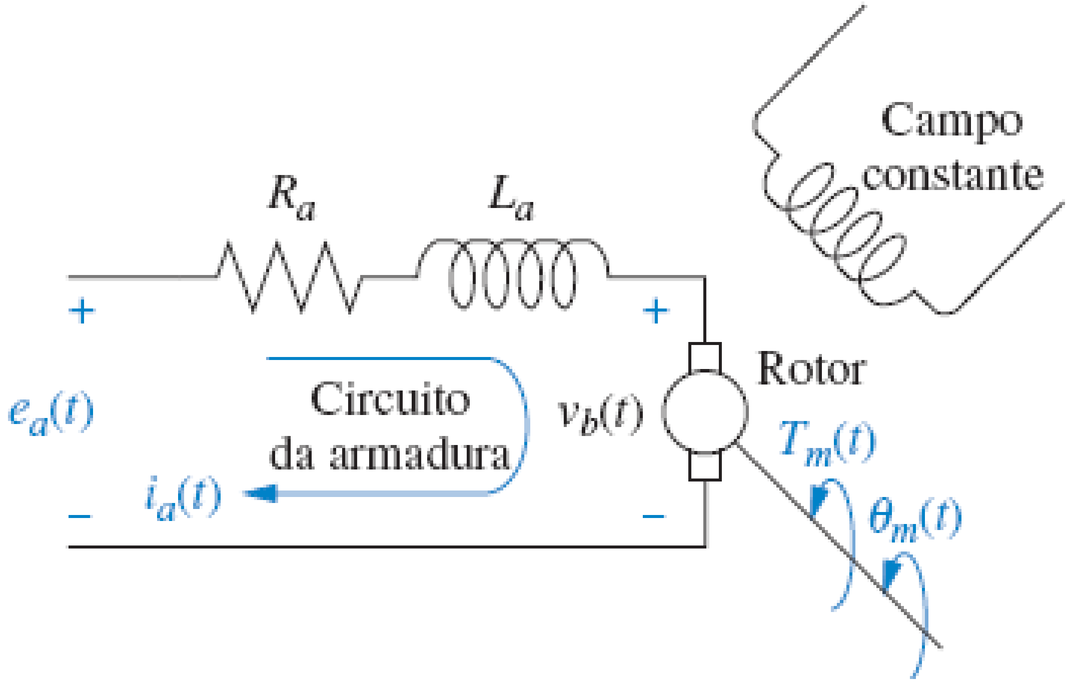
$$FT(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2 + D \cdot s + K}$$

Conceitos

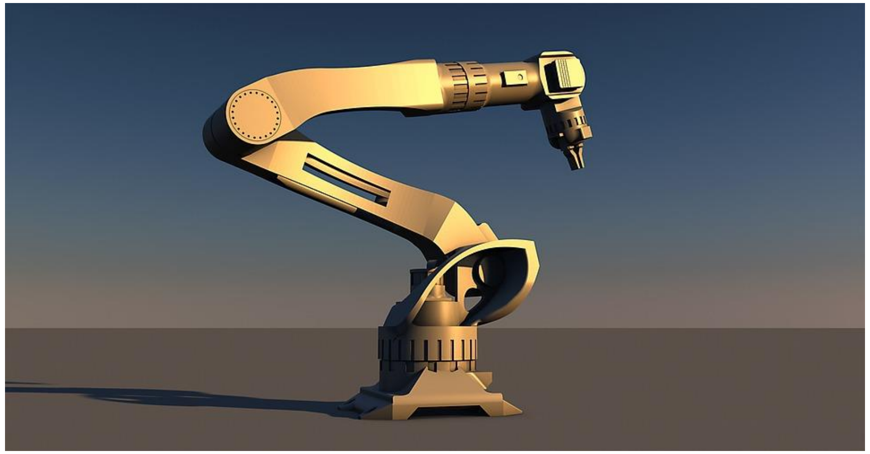
Modelagem matemática de motor de corrente contínua

Sistema Eletromecânico – motor CC

- Saída: Deslocamento angular θ;
- Entrada: Tensão de armadura E_a;



NISE (2013)



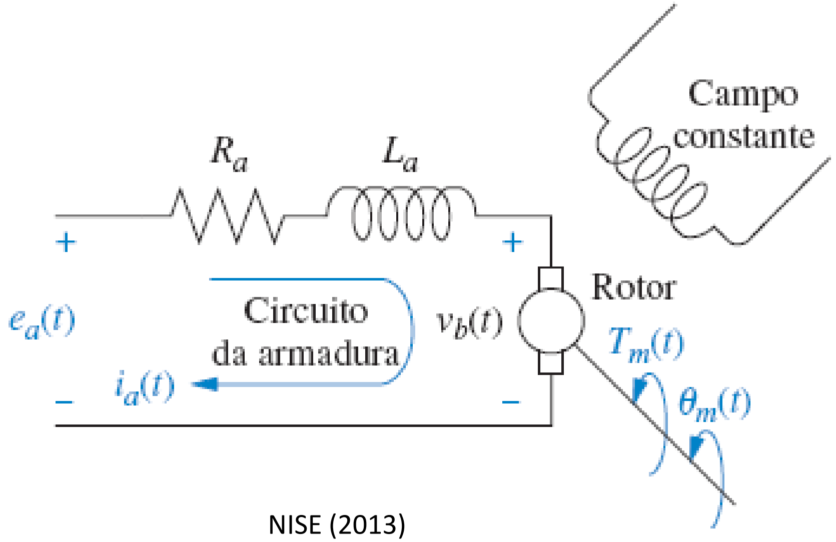
https://cdn.pixabay.com/photo/2016/11/29/11/31/cybernetics-1869205_960_720.jpg

- Resolvendo o circuito da armadura:

$$e_a - R_a \cdot i_a - L_a \cdot \frac{di_a}{dt} - v_b = 0$$

$$E_a - R_a \cdot I_a - L_a \cdot I_a \cdot s - V_b = 0$$

$$E_a - (R_a + L \cdot s) \cdot I_a - V_b = 0$$



NISE (2013)

- Força contra eletromotriz (no rotor):

$$v_b = K_{ce} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_b = K_{ce} \cdot \theta \cdot s$$

- Comportamento do motor:

$$T_m = \theta \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s)$$

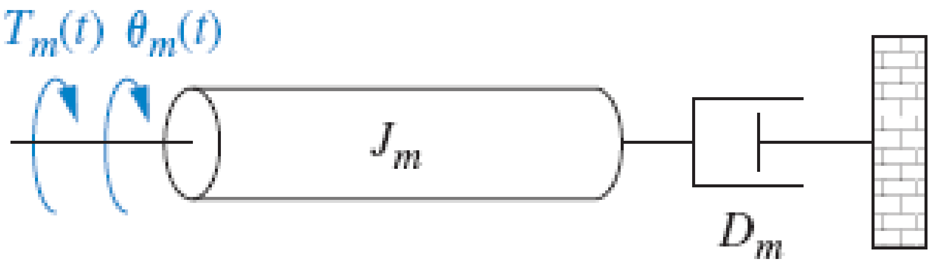
- Torque do Motor CC:

$$T_m = K_t \cdot I_a$$

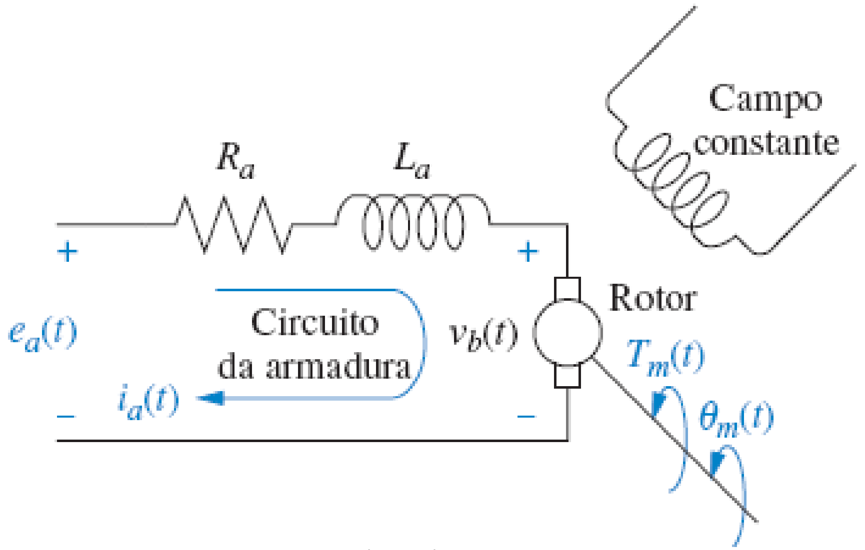
$$I_a = \frac{T_m}{K_t}$$

- Substituindo:

$$I_a = \frac{\theta \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s)}{K_t}$$



NISE (2013)



NISE (2013)

- Utilizando as equações encontradas:

$$I_a = \frac{\theta \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s)}{K_t}$$

$$V_b = K_{ce} \cdot \theta \cdot s$$

$$E_a - (R_a + L \cdot s) \cdot I_a - V_b = 0$$

$$\boxed{E_a - \frac{(R_a + L \cdot s) \cdot (J \cdot s^2 + D \cdot s) \cdot \theta}{K_t} - K_{ce} \cdot \theta \cdot s = 0}$$

- Admitindo que L é pequeno quando comparado a resistência, é possível simplificar a equação;

$$E_a = \frac{R_a}{K_t} \cdot (J \cdot s + D) \cdot s \cdot \theta + K_{ce} \cdot \theta \cdot s$$

$$E_a = \left[\frac{R_a}{K_t} \cdot (J \cdot s + D) + K_{ce}\right] \cdot \theta \cdot s$$

$$\frac{\theta}{E_a} = \frac{1}{s \cdot \left[\frac{R_a}{K_t} \cdot (J \cdot s + D) + K_{ce}\right]}$$

$$\frac{\theta}{E_a} = \frac{1}{s \cdot \left[\frac{R_a}{K_t} \cdot J \cdot s + \frac{R_a}{K_t} D + K_{ce}\right]}$$

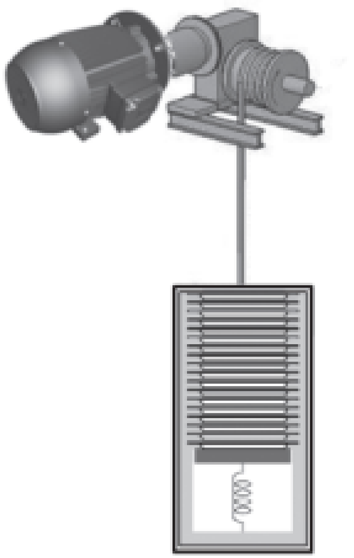
$$\frac{\theta}{E_a} = \frac{1}{s \cdot \left[\frac{R_a}{K_t} \cdot J \cdot s + \frac{R_a}{K_t} D + K_{ce}\right]} \cdot \frac{K_t / (J \cdot R_a)}{K_t / (J \cdot R_a)}$$

$$\frac{\theta}{E_a} = \frac{K_t / (J \cdot R_a)}{s \cdot \left[s + \frac{1}{J}\left(D + \frac{K_t \cdot K_{ce}}{R_a}\right)\right]}$$

$$\boxed{\frac{\theta}{E_a} = \frac{1}{s \cdot [s + \alpha]}}$$

Exemplo

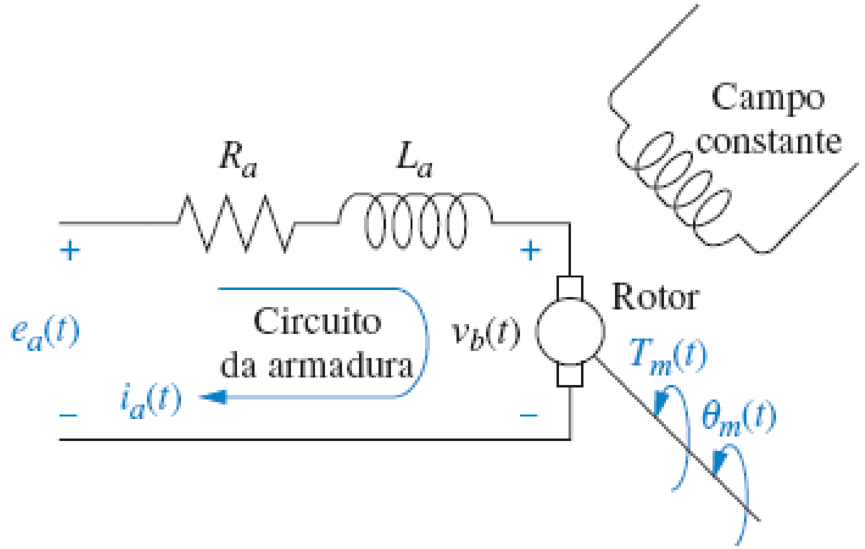
- Você é o engenheiro responsável de uma empresa de desenvolvimento tecnológico;
- Sua empresa foi contratada por um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte de pratos entre dois andares;
- Esse elevador deve ser capaz de armazenar 20 pratos em um dispensador;
- Se for usado um motor CC para mover o elevador qual seria o diagrama de blocos para representar o sistema?



NISE (2012)

Resolvendo o Exemplo

- Usando as equações do modelo do motor, vamos montar o diagrama de blocos;
- Analisar as equações do modelo para o circuito da armadura e para parte mecânica do motor;

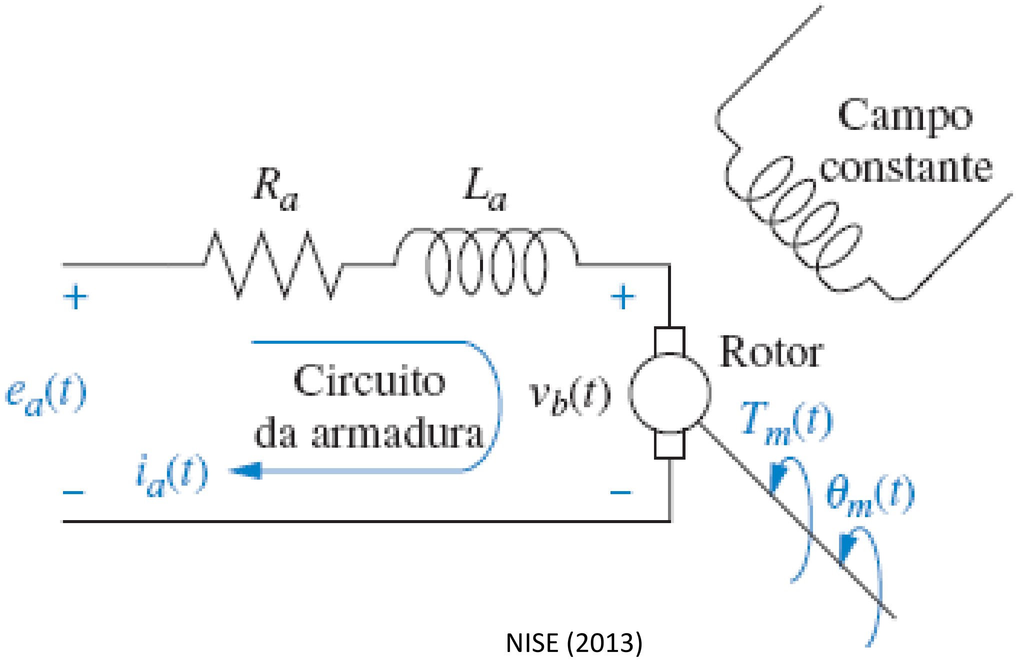


NISE (2013)

- Para facilitar, vamos modelar o diagrama de blocos em função da velocidade angular ω;

- Da análise do circuito da armadura:

$$E_a - (R_a + L_a \cdot s) \cdot I_a - V_b = 0$$



NISE (2013)

- A força contra eletromotriz:

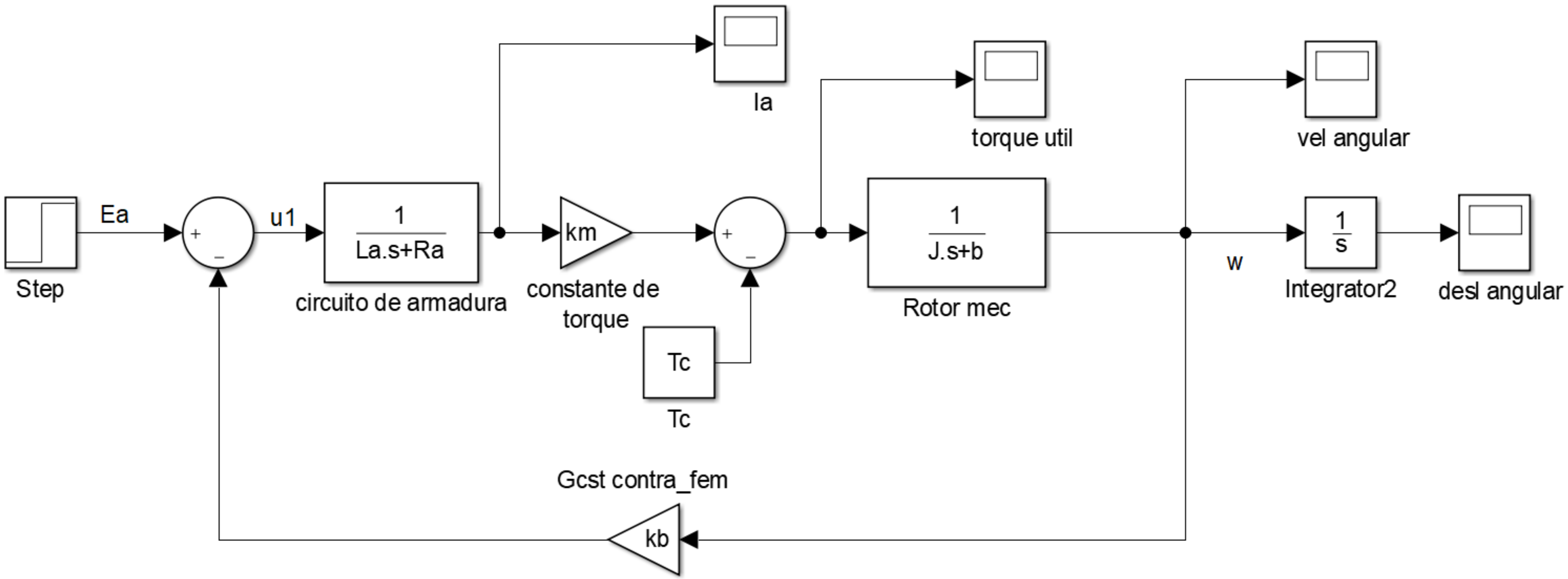
$$v_b = K_{ce} \cdot \frac{d\theta}{dt} = K_{ce} \cdot \omega$$

$$V_b = K_{ce} \cdot \omega$$

- O torque do motor é dado por:

$$T_m = K_t \cdot I_a \qquad I_a = \frac{T_m}{K_t}$$

- Montando o diagrama de blocos completo do motor CC:

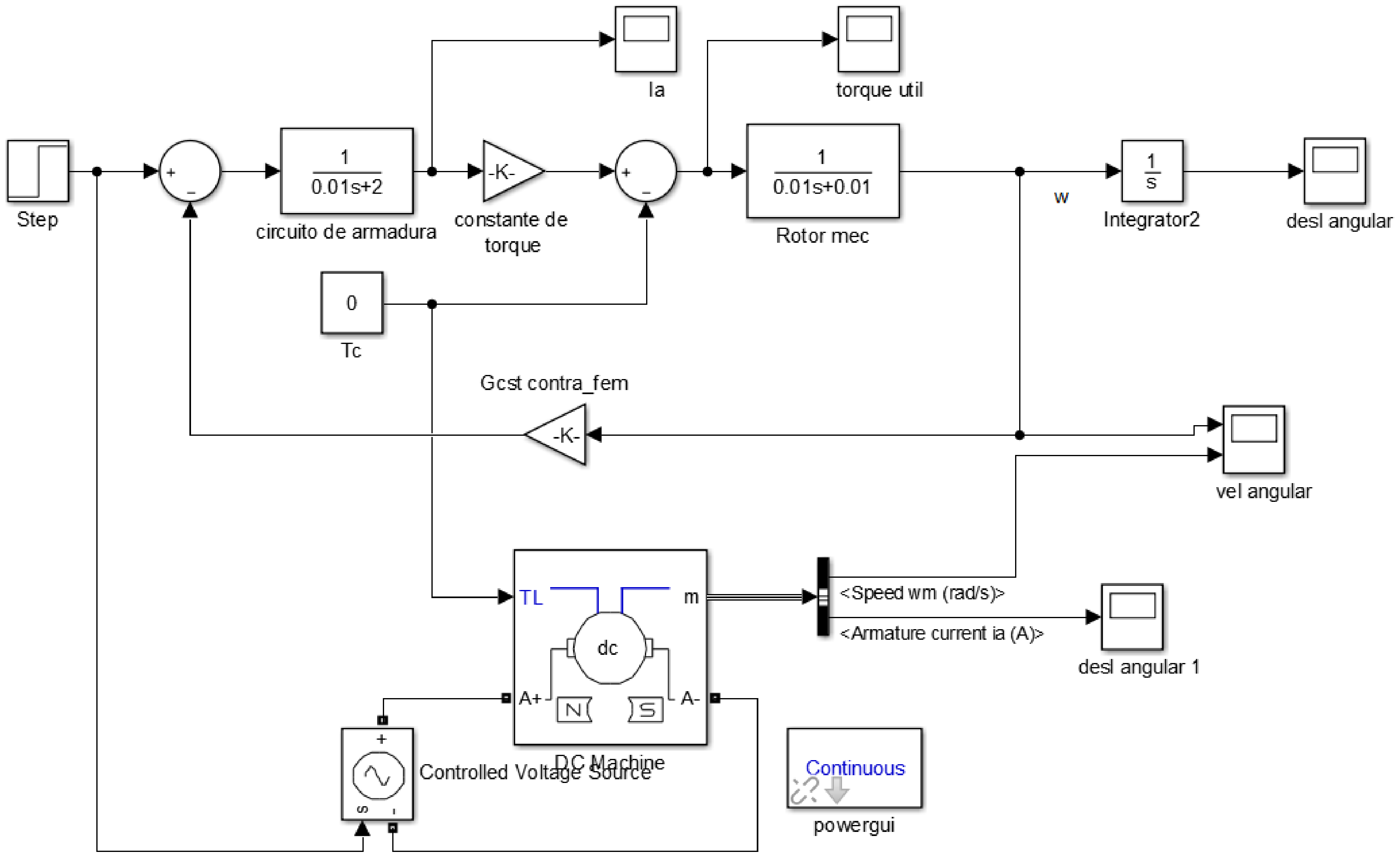


O autor (2021)

Resolvendo o Exemplo

- Especificações do sistema de transporte de pratos:
- Tensão: 220V;
- Torque dos pratos: 30 N.m;
- Resistência de armadura Ra: 2 Ω;
- Indutância de armadura La: 0,01 H
- Constantes K: Km = Kb = 0,32;
- Torque para deslocamento: 20 N.m
- Momento de inércia J=0,01
- Coeficiente de atrito b=0,01 N.m/rad/s

Estudo comparativo



Referências

- OGATA, K. – **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice-Hall. Rio de Janeiro, 1982.
- COUGHANOWR e KOPPEL - **Process Systems Analysis and Control**. McGraw Hill, 1991.
- COUGHANOWR e KOPPEL - **Análise e Controle de Processos**. Editora Guanabara, 1987.
- KLUEVER, C. A. **Sistemas dinâmicos**: modelagem, simulação e controle. Rio de Janeiro: LTC, 2017.