Analiza periodičkih struktura s naglaskom na fotoničke kristale i izračun disperzijskog dijagrama

Darko Janeković

23. listopada 2018.

Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

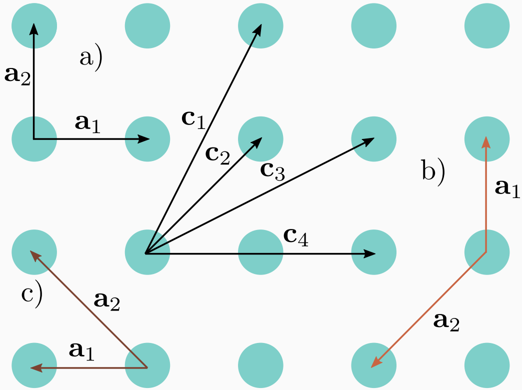
Periodičke strukture i fotonički kristali

Periodičke strukture i fotonički kristali

- Periodička struktura je pravilna rešetkasta struktura u kojoj se elementi periodički ponavljaju.
- Fotonički kristali su periodički strukturirani elektromagnetski mediji koji generalno posjeduju svojstvo da određeno polarizirana svjetlost na određenim frekvencijama ne propagira kroz strukturu.
  - periodički na način da zadovoljavaju diskretnu translacijsku simetriju.

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{R}),\ \text{gdje je } \mathbf{R} = n\mathbf{a}, n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Primjer kristalne rešetke



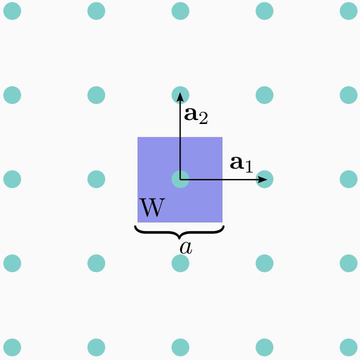
Slika 1: Kvadratna kristalna rešetka s ucrtane 3 opcije za odabir baznih vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1 = a\,\mathbf{i}$ i $\mathbf{a}_2 = a\,\mathbf{j}$ (opcija pod a) tvori sve ostale vektore odnosno sva ostala čvorišta kristala. Konkretno, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 + 2\,\mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_3 = 2\,\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_4 = 2\,\mathbf{a}_1$

Wigner-Seitzova ćelija, inverzna rešetka i Brillouinova zona

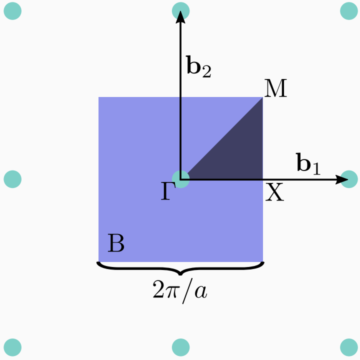
- Wigner-Seitzova ćelija primjer je primitivne ćelije koja sadrži samo jedno čvorište i predstavlja skup točaka u prostoru koji je bliži jednom čvorištu od bilo kojeg drugog čvorišta.
- Inverzna rešetka uvodi se za prikaz valnih vektora u Fourierovom razvoju periodičnih funkcija.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\cdot\mathbf{G} =&(n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3)\cdot(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3) = 2\pi\mathbb{N},\\ &\text{gdje je } n_i, m_i \in \mathbb{Z}\end{aligned} \tag{2}$$

Primjer primitivne i inverzne rešetke



(a) Kvadratna rešetka u realnom prostoru s ucrtanim baznim vektorima i označenom Wigner-Seitzovom ćelijom.

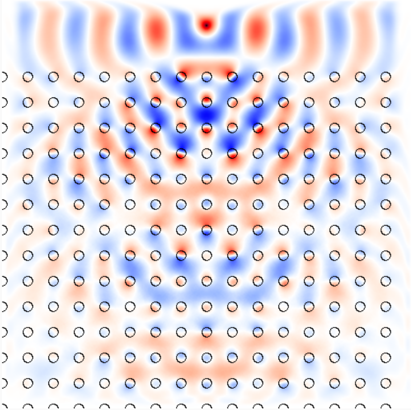


(b) Kvadratna rešetka u inverznom prostoru s označenom prvom Brillouinovom zonom.

Blochov teorem

Polje u periodičkoj strukturi poprimit će isti period kao i period te strukture.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \cdot e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}} \tag{3}$$

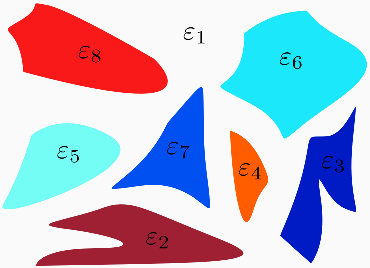


Slika 2: Vizualizacija Blochovog teorema metodom konačnih diferencija u vremenskoj domeni (FDTD)

Izvod valne jednadžbe za propagaciju u sredstvu s nehomogenim dielektrikom

Opis problema

- Zadatak je izvesti valnu jednadžbu za materijal prikazan na slici 3.
- Struktura ne mijenja konfiguraciju u vremenu i nema slobodnih naboja.
- Pretpostavlja se linearni režim, izotropnost materijala i $\mu_r = 1$.



Slika 3: Model strukture u kojoj propagira val.

Maxwellove jednadžbe

Nakon uvrštavanja ranije raspravljanih pretpostavki, Maxwellove jednadžbe poprimaju sljedeći oblik:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

Rastav polja na prostornu i vremensku komponentu

- Budući da je pretpostavljen linearni režim moguće je razdvojiti prostornu i vremensku komponentu koristeći sljedeći zapis:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{4}$$

Nakon uvršavanja 4, Maxwellove jednadžbe poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) &= 0 \qquad & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= 0 \qquad & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Valna jednadžba za propagaciju vala u nehomogenom dielektriku

- Djelujući operatorom rotora na Ampere-Maxwellov zakon dobiva se valna jednadžba u sljedećem obliku:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{5}$$

- Ako se operator $\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times$ zamijeni s $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ dobiva se uobičajena forma svojstvenog problema.

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{6}$$

Svojstva operatora $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$

- operator $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ je hermitski
  - vrijedi $\left(\mathbf{F}, \hat{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{G}\right) = \left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{F}, \mathbf{G}\right)$.
  - moguće je analizirati njegov Rayleighov kvocijent $R\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \mathbf{H}(\mathbf{r})\right)$.

$$R\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \mathbf{H}(\mathbf{r})\right) = \frac{\omega^2/c^2\,(\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r}))}{\omega^2/c^2\left(\mathbf{H}(\mathbf{r}), \hat{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{H}(\mathbf{r})\right)} = \frac{\iiint |\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\iiint \varepsilon_r(\mathbf{r})|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}} \tag{7}$$

Valna jednadžba za propagaciju vala unutar periodičke strukture

- Koristeći valnu jednadžbu izvedenu ranije i uvrštavajući Blochov val umjesto $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ dobiva se:

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \cdot e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}} = \left(\frac{\omega(\boldsymbol{\beta})}{c}\right)^2 \mathbf{H}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \cdot e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}}$$

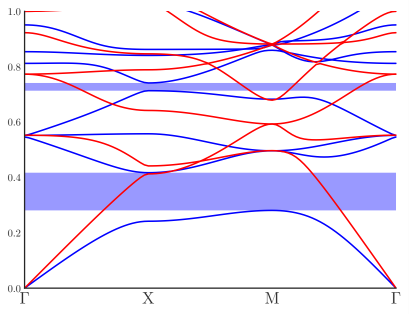
$$(\nabla + j\boldsymbol{\beta}) \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} (\nabla + j\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{H}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega(\boldsymbol{\beta})}{c}\right)^2 \mathbf{H}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

- Jednadžba 8 predstavlja jednadžbu koja služi za proračun disperzijskog dijagrama, odnosno nalaženje svojstvene vrijednosti $\omega(\boldsymbol{\beta})$.

Proračun disperzijskog dijagrama fotoničkih kristala

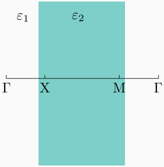
Disperzijski dijagrami općenito

- Na osi x nalazi se iznos valnog vektora β.
- Na osi y nalazi se frekvencija izraženu kao $\omega a/2\pi c$.
- Na slikama su označene TE i TM komponenta.
- Dielektrični kontrast će u svim primerima iznositi 12.

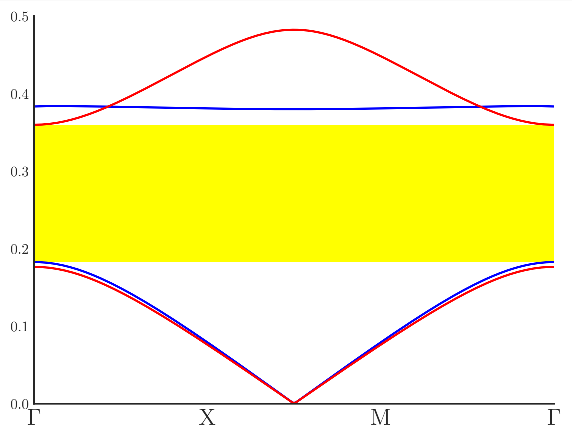


Slika 4: Primjer disperzijskog dijagrama.

Jednodimenzionalni fotonički kristal



(a) Primitivna jedinična ćelija.



(b) Disperzijski dijagram za kristal prikazan lijevo.

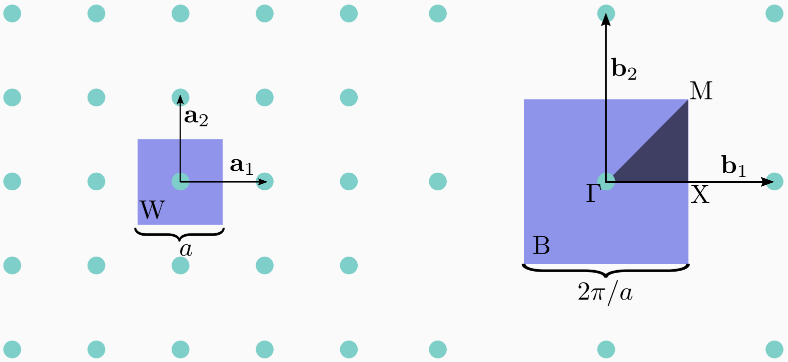
Slika 5: Fotonički zabranjeni pojas u jednodimenzionalnoj strukturi.

Evanescentni val

- Val čija se frekvencija nalazi unutar fotoničkog zabranjenog pojasa i čija amplituda eksponencijalno teži u 0.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\boldsymbol{\beta}+i\kappa)\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}} e^{-\kappa\cdot\mathbf{r}} \tag{9}$$

Kvadratna rešetka dielektričnih stupića

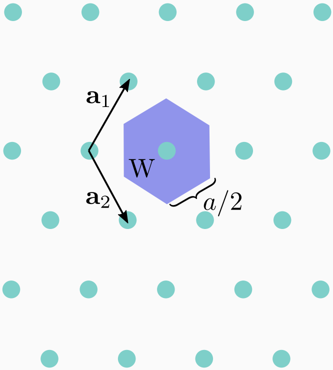


(a) Kvadratna rešetka u realnom prostoru s ucrtanim baznim vektorima i označenom Wigner-Seitzovom ćelijom

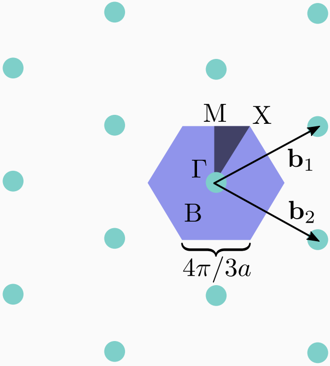
(b) Kvadratna rešetka u inverznom prostoru s označenom prvom Brillouinovom zonom.

Slika 6: Polumjer stupića u ovom modelu kristala iznosi 0.2 a

Heksagonalna rešetka za fotonički zabranjeni pojas



(a) Heksagonalna rešetka u realnom prostoru s ucrtanim baznim vektorima i označenom Wigner-Seitzovom ćelijom



(b) Heksagonalna rešetka u inverznom prostoru s označenom prvom Brillouinovom zonom.

Demonstracija izračuna disperzijskog dijagrama ranije opisanih fotoničkih kristala.

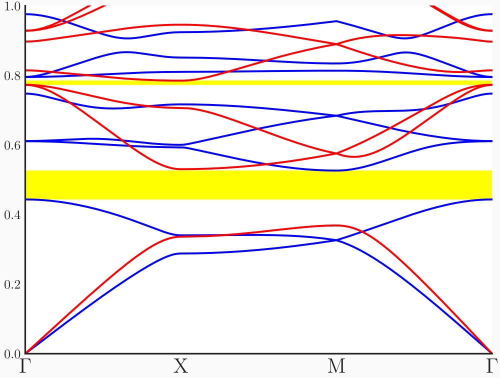
"Heuristike" za ciljane zabranjene pojaseve

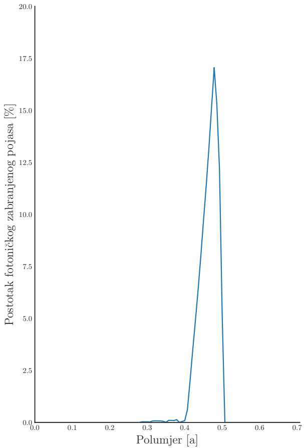
- Više simetrična rešetka ima za posljedicu manju prvu Brillouinovu zonu kao i veće zabranjene pojaseve.
- Dielektrični stupići uzrokuju frekvencijski zabranjeni pojas za TE mod.
- Međusobno povezana rešetka uzrokuje frekvencijski zabranjeni pojas za TM mod.
    - U trenutku kad su oba uvjeta ispunjena dolazi do preklapanja zabranjenih pojaseva, odnosno pojave *fotoničkog zabranjenog pojasa* (engl. *photonic band-gap*).

Optimizacija širine zabranjenog pojasa

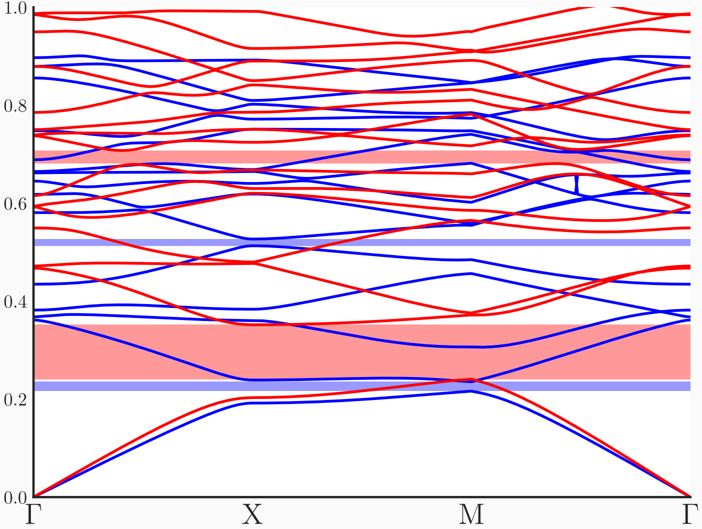
Heksagonalna rešetka sa zračnim cilindrima

- Maksimum se poprima za polumjer 0.478547 *a* i iznosi 17.05456%



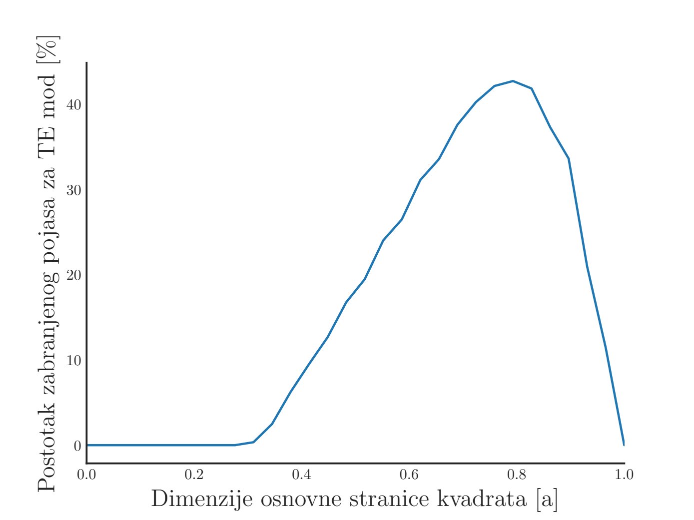


Heksagonalna rešetka kvadratnih zračnih rupa



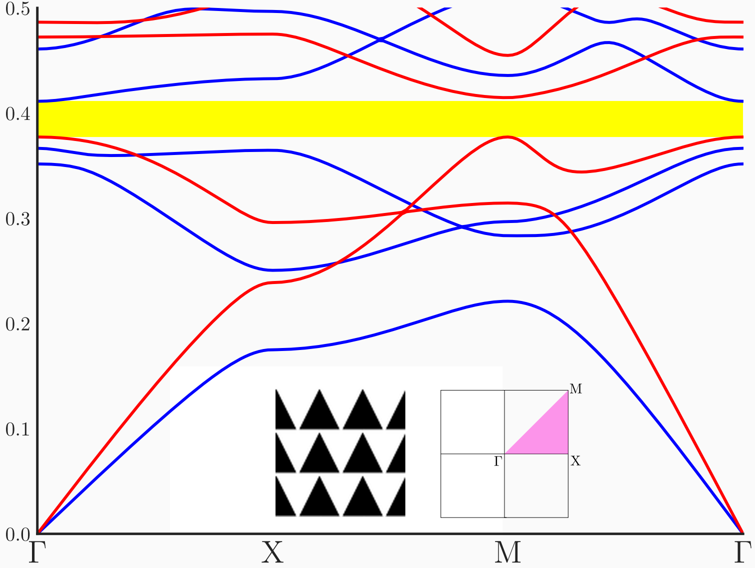
Slika 7: Disperzijski dijagram s optimalnom konfiguracijom za fotonički zabranjeni pojas. Postotak zabranjenog pojasa iznosi 0.692784%.

Heksagonalna rešetka kvadratnih zračnih rupa (2)



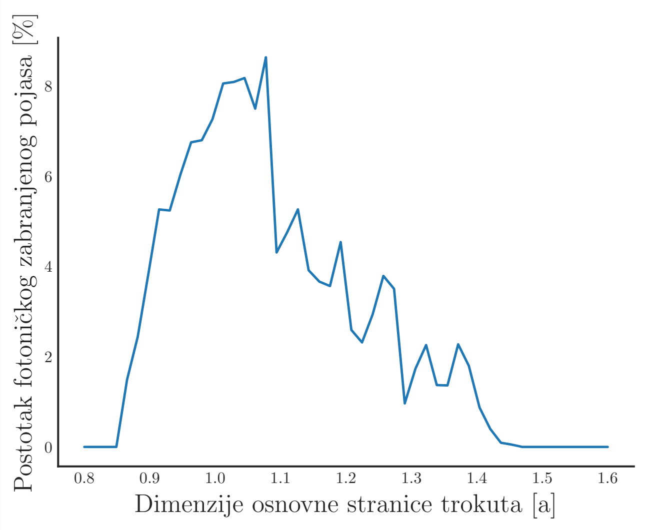
Slika 8: Optimizacija zabranjenog pojasa za TM mod i heksagonalnu rešetku sa zračnim kvadratnim blokovima. Maksimum iznosi 42.735761%.

Kvadratna rešetka trokutastih zračnih rupa



Kvadratna rešetka trokutastih zračnih rupa

- Maksimum se poprima za dimenzije stranice 1.07755 a i iznosi 8.6301%.



Hvala na pažnji! :-)

Pitanja?