

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

**Analiza periodičkih struktura s
naglaskom na fotoničke kristale i
izračun disperzijskog dijagrama**

Darko Janeković

Voditelj: *dr.sc. Dario Bojanjac*

Zagreb, rujan 2018.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Matematičko modeliranje propagacije vala u periodičkoj strukturi	2
2.1. Periodičke strukture i kristalna rešetka	2
2.2. Blochov teorem	4
2.3. Izvod valne jednačbe za propagaciju u sredstvu s nehomogenim dielek- trikom	4
2.4. Propagacija vala unutar periodičke strukture	7
3. Proračun disperzijskog dijagrama fotoničkih kristala	8
3.1. Jednodimenzionalni fotonički kristal	8
3.2. Kvadratna rešetka dielektričnih stupića	10
3.3. Kvadratna rešetka zračnih rupa	12
3.4. Heksagonalna rešetka za fotonički zabranjeni pojas	12
4. Optimizacija širine zabranjenog pojasa u okviru heksagonalne rešetke	15
4.1. Heksagonalna rešetka sa zračnim cilindrima	15
4.2. Heksagonalna rešetka sa zračnim kvadratnim blokovima	17
4.3. Heksagonalna rešetka s elipsoidnim stupićima	18
5. Zaključak	20
6. Literatura	21

1. Uvod

U ovom seminaru bit će analizirane periodičke strukture s naglaskom na fotoničke kristale primjenom numeričkih metoda za izračun disperzijskog dijagrama. Programska biblioteka koja će se koristiti za numeričko modeliranje je MPB¹ (MIT Photonic-Bands) [1]. Prije svega, bit će iznesena matematička podloga potrebna za efikasno modeliranje propagacije vala u periodičkoj strukturi. U poglavljima nakon uvoda bit će opisana pojava fotoničkog zabranjenog pojasa (engl. *photonic band-gap*) kao i intuicija iza njegovog nastanka. Za kraj će na nekoliko primjera biti izvršena optimizacija u svrhu maksimizacije širine zabranjenog pojasa.

¹<https://github.com/stevengj/mpb>

2. Matematičko modeliranje propagacije vala u periodičkoj strukturi

U ovom poglavlju nešto će detaljnije biti iznesena teorija periodičkih struktura kao i matematički formalizam koji ih opisuje. Analiza propagacije vala unutar periodičke rešetke prirodno navodi na Blochov teorem koji kaže da će polje u periodičkoj strukturi poprimiti isti period i simetriju kao i period te strukture. Kao polazišna točka, bit će izvedena valna jednačina za propagaciju vala unutar nehomogenog dielektrika. Svojstveni problem i njegova interpretacija bit će razmatrani baš u okvirima te jednačine. Konačno će jednačina pomoću Blochovog teorema biti specijalizirana za slučaj fotoničkog kristala.

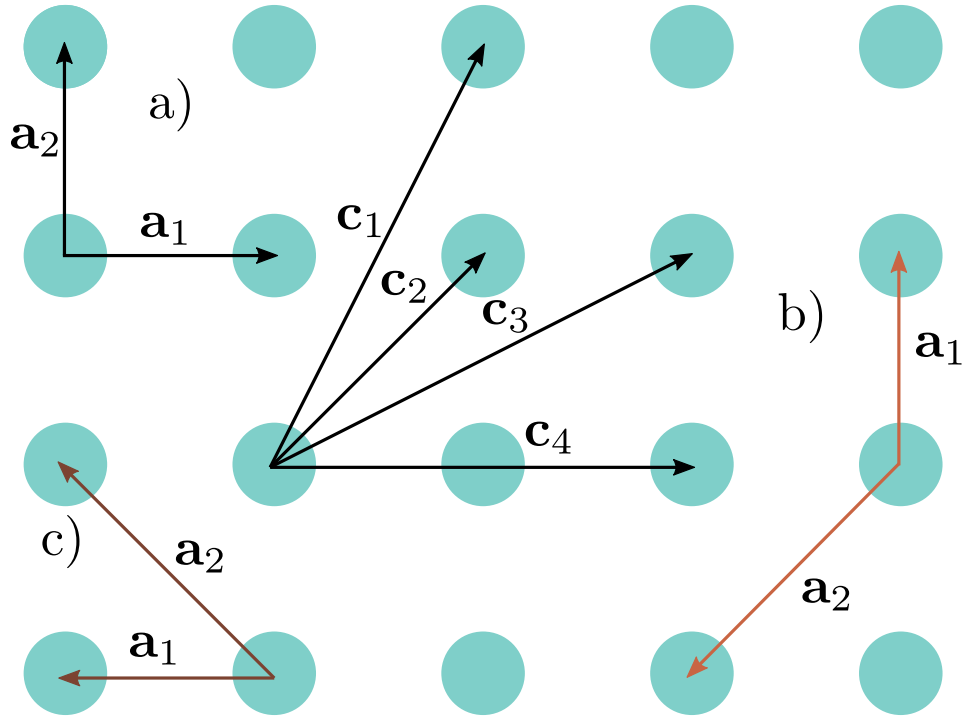
2.1. Periodičke strukture i kristalna rešetka

Periodička struktura je pravilna rešetkasta struktura u kojoj se elementi periodički ponavljaju. Fotonički kristali su periodički strukturirani elektromagnetski mediji koji generalno posjeduju svojstvo da svjetlost na određenim frekvencijama ne propagira kroz strukturu. To svojstvo nazivat će se fotonički zabranjeni pojas (engl. *photonic band-gap*), a u nastavku samo zabranjeni pojas. Fotonički kristali periodički su na način da zadovoljavaju diskretnu translacijsku simetriju, a ona je definirana kao $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} \pm \mathbf{a})$, odnosno

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \text{ gdje je } \mathbf{R} = n\mathbf{a}, n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Vektor \mathbf{a} naziva se primitivni vektor rešetke, a njegova duljina naziva se konstanta rešetke, u nastavku samo a . Čelija za koju se tvrdi da svojim ponavljanjem tvori kristalnu rešetku naziva se primitivna jedinična čelija. Primitivna jedinična čelija je najmanja jedinica kristalne rešetke koja svojim ponavljanjem može tvoriti potpunu rešetku. Pored toga, ne postoji čelija manjeg volumena od $|\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3|$, odnosno

volumena kojeg zatvaraju primitivni vektori rešetke.



Slika 2.1: Kvadratna kristalna rešetka s ucrtane 3 opcije za odabir baznih vektora \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 . Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1 = a \mathbf{i}$ i $\mathbf{a}_2 = a \mathbf{j}$ (opcija pod a) tvori sve ostale vektore odnosno sva ostala čvorišta kristala. Konkretno, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_4 = 2\mathbf{a}_1$

Ovisno o dimenzionalnosti problema moguće je odabrati različite primitivne vektore rešetke i sve ostale translacije prikazati kao linearnu kombinaciju primitivnih vektora.

Wigner-Seintzova ćelija primjer je primitivne ćelije koja sadrži samo jedno čvorište i predstavlja skup točaka u prostoru koji je bliži jednom čvorištu od bilo kojeg drugog čvorišta. Čvorišta kristalne rešetke nalaze se u središtu Wigner-Seintzove ćelije. Iako kristal ima beskonačno puno jediničnih ćelija, on ima samo jednu Wigner-Seintzovu ćeliju.

Inverzna rešetka uvodi se za prikaz valnih vektora u Fourierovom razvoju periodičnih funkcija. Vektori inverzne rešetke bit će označavani s \mathbf{b} . Za vektore inverzne rešetke vrijedi:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} = (n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3) \cdot (m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3) = 2\pi \mathbb{N}, \text{ gdje je } n_i, m_i \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Wigner-Seintzova ćelija recipročne rešetke zove se Brillouinova zona. Analiza disperzijskog dijagrama obavlja se u k prostoru, prostoru recipročne rešetke, odnosno u prvoj Brillouinovoj zoni. Ona označava najmanji prostor unutar Brillouinove zone koji

u potpunosti karakterizira polje unutar periodičke strukture. Svaku točku unutar Brillouinove zone moguće je preslikati u prvu Brillouinovu zonu. Drugim riječima, analiza propagacije vala unutar Brillouinove zone, bit će ekvivalentna analizi unutar prve Brillouinove zone uz određenu redundantnost u računu. Što je rešetka više simetrična, to će biti isplativije analizu obavljati unutar prve Brillouinove zone.

2.2. Blochov teorem

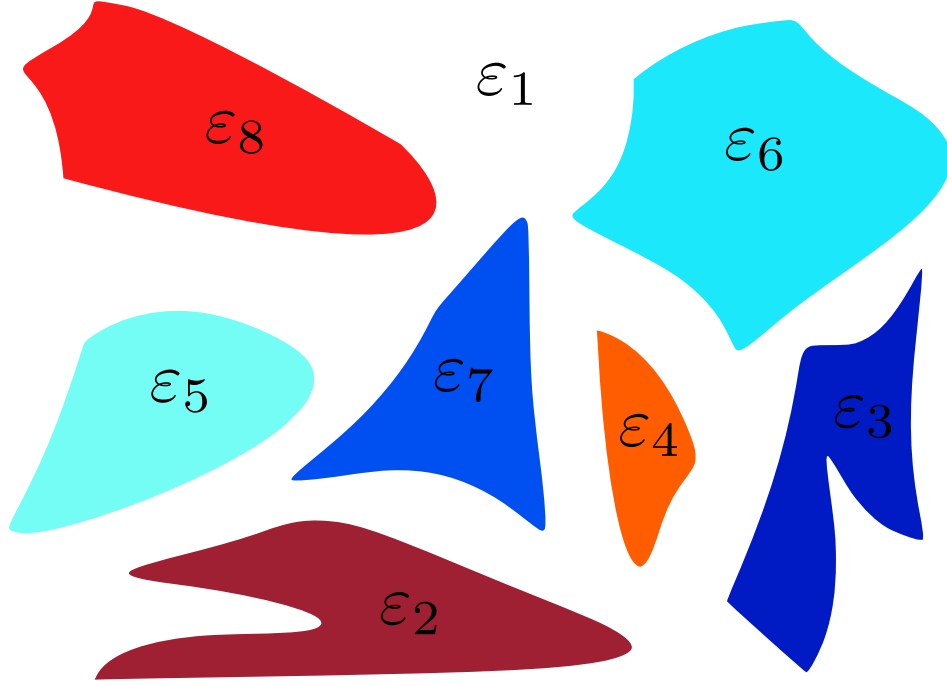
Razmišljanjem unutar okvira klasičnog elektromagnetizma jasno je da će val koji je u jednom trenutku prolazio kroz dielektrični objekt kasniti. Lako je onda generalizirati ideju na periodičku strukturu i iz tog razmišljanja izvući zaključak da će polje unutar periodičke strukture poprimiti isti period i simetriju kao i ta struktura. Teorem koji je upravo intuitivno izveden naziva se Blochov teorem i matematički formaliziran glasi ovako:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_\beta(\mathbf{r}) \cdot e^{j\beta \cdot \mathbf{r}} \quad (2.3)$$

U jednadžbi 2.3, vektorsko polje \mathbf{E} označava ukupno polje u periodičkoj strukturi i ono se sastoji od dvije komponente. Vektorsko polje \mathbf{A} označava amplitudu s istim periodom i simetrijom kao i rešetka. Ono diktira amplitudu ukupnog polja \mathbf{E} . Komponenta $e^{j\beta \cdot \mathbf{r}}$ označava ravni val i diktira smjer propagacije vala.

2.3. Izvod valne jednadžbe za propagaciju u sredstvu s nehomogenim dielektrikom

U ovom potpoglavlju bit će izvedena valna jednadžba koja opisuje propagaciju vala u nehomogenom dielektriku. Sredstvo u kojem val propagira nalikuje sredstvu na slici 2.2.



Slika 2.2: Model strukture u kojoj propagira val. Sredstvo je sastavljeno od neperiodičnih, homogenih poddomena različitih dielektričnih materijala. Poddomene se nalaze u materijalu permitivnosti ε_1 .

Izvod valne jednadžbe, kao i za slučaj propagacije u homogenom sredstvu započinje Maxwellovim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Permitivnost ε u sredstvu postaje funkcija koja ovisi o položaju, odnosno $\varepsilon(\mathbf{r})$. Pored toga, pretpostavlja se da struktura ne mijenja konfiguraciju u vremenu te da u njoj nema izvora svjetlosti. Između ostalog, pretpostavlja se da su snage dovoljno male kako bi sustav imalo smisla promatrati u linearnom režimu. Materijali koji će se analizirati bit će izotropni, odnosno ε_r će biti skalarna funkcija. Kod anizotropnih materijala \mathbf{D} i \mathbf{E} nisu vezani s $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, već s dielektričnim tenzorom $\varepsilon_0 \varepsilon_{ij}$. S obzirom na frekvencije na kojima će se obavljati analiza, ima smisla pretpostaviti $\mu_r = 1$. Konačno, nakon svih pretpostavki jednadžbe 2.4 poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Budući da su Maxwellove jednađbe linearne[2], moguće je pretpostaviti da će odziv titrati istom frekvencijom kao i pobuda, odnosno moguće je pretpostaviti vremensku ovisnost istu kao i vremensku ovisnost pobude. To svojstvo omogućava rastav polja na prostornu i vremensku komponentu:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (2.6)$$

Nakon uvrštavanja 2.6 Maxwellove jednađbe poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Djelujući operatorom rotora na Faradayev zakon dobije se valna jednađba u sljedećem obliku:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

Jednađba 2.8 predstavljat će jednađbu koja će biti korištena za računanje disperzijskog dijagrama u nehomogenom dielektriku. Ako se operator $\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times$ zamijeni s $\hat{\Theta}$ dobiva se uobičajena forma svojstvenog problema.

$$\hat{\Theta}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

Budući da je operator $\hat{\Theta}$ hermitski¹, moguće je analizirati njegov Rayleighov kvocijent $R(\hat{\Theta}, \mathbf{H}(\mathbf{r}))$.

Nadalje, može se pokazati da će najmanja svojstvena vrijednost ω_0^2/c^2 , odnosno prvo nađeno rješenje svojstvenog problema minimizirati Rayleighov kvocijent.

¹ Potrebno je dokazati da je $(\mathbf{F}, \hat{\Theta}\mathbf{G}) = (\hat{\Theta}\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

$$(\mathbf{F}, \hat{\Theta}\mathbf{G}) = \iiint \mathbf{F}^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \right) d^3\mathbf{r}$$

Koristeći formulu za parcijalnu integraciju operacije rotora [2] i Gaussov teorem izraz se svodi na

$$(\mathbf{F}, \hat{\Theta}\mathbf{G}) = \iiint \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}))^* d^3\mathbf{r} - \oint \left(\mathbf{F}^*(\mathbf{r}) \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \right) \hat{n} dS$$

Drugi član izraza zanemaruje se ili zbog periodičnosti na području integracije ili zato što polja teže u 0. Parcijalna integracija provodi se još jednom uz zanemarivanje istog člana kao i ranije.

$$(\mathbf{F}, \hat{\Theta}\mathbf{G}) = \iiint \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \right) \right]^* d^3\mathbf{r} - \oint \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \right)^* \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \right] \hat{n} dS = (\hat{\Theta}\mathbf{F}, \mathbf{G})$$

$$R(\hat{\mathbf{\Theta}}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \frac{\omega^2/c^2 (\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r}))}{\omega^2/c^2 (\mathbf{H}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{\Theta}}\mathbf{H}(\mathbf{r}))} = \frac{\iiint |\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}}{\iiint \varepsilon_r(\mathbf{r}) |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

Budući da se kvocijent može minimizirati tako da se maksimizira nazivnik, iz izraza 2.10 može se zaključiti da će električno polje “preferirati” područja veće permitivnosti. Drugim riječima, najsnažnija električna polja mogu se očekivati u područjima veće permitivnosti.

2.4. Propagacija vala unutar periodičke strukture

Koristeći rezultat 2.8 i uvrštavajući 2.3 umjesto $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ dobiva se diferencijalna jednadžba koja predstavlja svojstveni problem propagacije vala unutar fotoničkog kristala odnosno periodičke strukture.

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \cdot e^{j\beta \cdot \mathbf{r}} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \cdot e^{j\beta \cdot \mathbf{r}} \\ (\nabla + j\beta) \times \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} (\nabla + j\beta) \times \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\omega(\beta)}{c}\right)^2 \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jednadžba 2.11 predstavlja završnu jednadžbu koja služi za proračun disperzijskog dijagrama u fotoničkom kristalu. Svojstvena vrijednost $\omega(\beta)$ je kontinuirana funkcija. Ovaj oblik svojstvenog problema rješava programska biblioteka MPB spomenuta ranije.

3. Proračun disperzijskog dijagrama fotoničkih kristala

Imenovanje komponenata polja u kristalu bit će u skladu s imenovanjem u literaturi [3]. Kratica **TE**, *transverse-electric* označavat će mod kod kojeg ne postoji komponenta električnog polja u smjeru širenja vala. Slično, kratica **TM**, *transverse-magnetic* označavat će mod kod kojeg ne postoji komponenta magnetskog polja u smjeru širenja vala.

U poglavljima koja slijede bit će proračunati i prikazani disperzijski dijagrami osnovnih dvodimenzionalnih fotoničkih kristala. Za početak će na primjeru jednodimenzionalnog kristala biti objašnjeno nastajanje zabranjenog pojasa, a zatim će biti opisane konfiguracije koje osiguravaju nastanak zabranjenog pojasa za TM, potom za TE, a onda i za oboje, odnosno potpuni zabranjeni pojas.

Što se tiče disperzijskih dijagrama u nastavku, vrijedit će određeni skup pravila koji će biti primjenjiv na sve dijagrame. TE komponenta uvijek će biti prikazana crvenom bojom, a TM plavom. Zabranjeni pojas uvijek će biti prikazivani kao plavi, odnosno crveni pravokutnici. Os x označavat će iznos valnog vektora β , a y , normaliziranu frekvenciju izraženu kao $\omega a/2\pi c$. Što se tiče prikaza modela fotoničkih kristala, dielektrično sredstvo uvijek će biti obojano, dok će zrak biti označen bijelom bojom. U opisu grafa bit će naznačeno s kojim je dimenzijama modeliran objekt koji će tvoriti kristalnu rešetku. Dielektrični kontrast uvijek će iznositi 12, a označavat će omjer između permitivnosti dielektrika¹ i zraka.

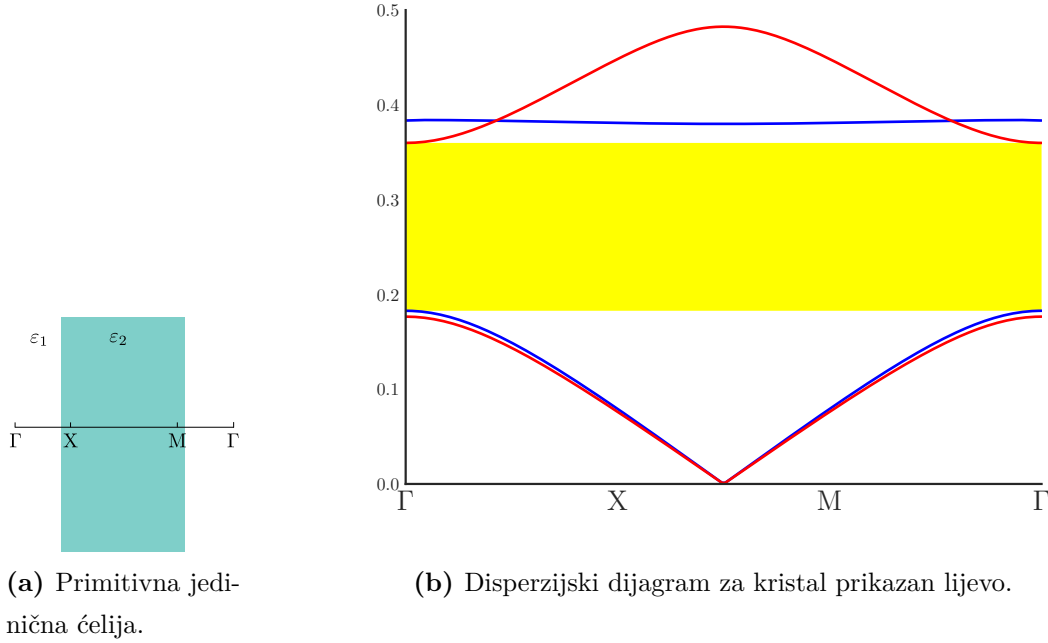
3.1. Jednodimenzionalni fotonički kristal

Diskusija o Rayleighovom kvocijentu i rezultat 2.10 u praksi se najbolje može pokazati na primjeru jednodimenzionalnog fotoničkog kristala. U okvirima ovog primjera najlakše je shvatiti nastajanje zabranjenog pojasa.

Struktura koja se promatra može se zamisliti kao peridički nanizani listovi 2 različita

¹ ϵ_r za Si iznosi 11.68.

materijala različitih permitivnosti i jednakih debljina. Budući da struktura posjeduje diskretnu translacijsku simetriju samo u smjeru jedne osi ² na x osi grafa će valni vektor β varirati samo između $-0.5\mathbf{i}$ i $+0.5\mathbf{i}$. Disperzijski dijagram za strukturu opisanu ranije prikazan je na slici 3.1.



Slika 3.1: Fotonički zabranjeni pojas u jednodimenzionalnoj strukturi. Važno je napomenuti da su točke X i M jednake, te da bi valni vektor bilo dovoljno varirati od 0 do 0.5 u bilo kojem smjeru.

Rezultat 2.10 kaže da će prvi pojas većinu svoje energije pohraniti unutar sredstva veće permitivnosti. U slučaju modela koji se promatra, to je sredstvo čija je relativna permitivnosti 12. Taj pojas u nastavku će se nazivati *dielektrični pojas*. Pojas iznad mora osigurati jednaku simetriju kao i struktura, ali pored toga, mora osigurati i ortogonalnost u odnosu na dielektrični pojas. Drugim riječima, pojas iznad mora imati jednak period jer njega diktira struktura, ali ne smije svoju energiju pohraniti unutar istog sredstva. Rješenje koje se nameće je da pojas iznad energiju pohrani u sredstvu manje permitivnosti i k tome zadrži isti period. Pojas iznad dielektričnog, u nastavku će se nazivati *zračni pojas* jer će njegova energija biti pohranjena u sredstvu manje

² Ona posjeduje kontinuiranu translacijsku simetriju u preostale dvije osi. Kontinuirana translacijska simetrija definira se slično kao i diskretna translacijska simetrija i u ovom slučaju zapisuje se kao:

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{d}), \text{ gdje je } \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$$

permitivnosti, a ono je najčešće zrak.

U kristalu su u ovom trenutku 2 vala s istim periodom, energija jednog je većinom pohranjena u dielektriku, a energija drugog je većinom pohranjena u zraku. Ovi valovi moraju “vidjeti” različite prosječne indekse loma. Dielektrični pojas propagira s većim indeksom loma budući da većinu svoje energije pohranjuje upravo u sredstvu veće permitivnosti, a zračni pojas propagira s manjim prosječnim indeksom loma budući da svoju energiju većinom pohranjuje u sredstvu manje permitivnosti. Sve to, navodi na zaključak da pojasevi moraju imati različite frekvencije. Zabranjeni pojas u ovom slučaju je upravo ta razlika frekvencija koja nastaje zbog različitog prosječnog indeksa loma.

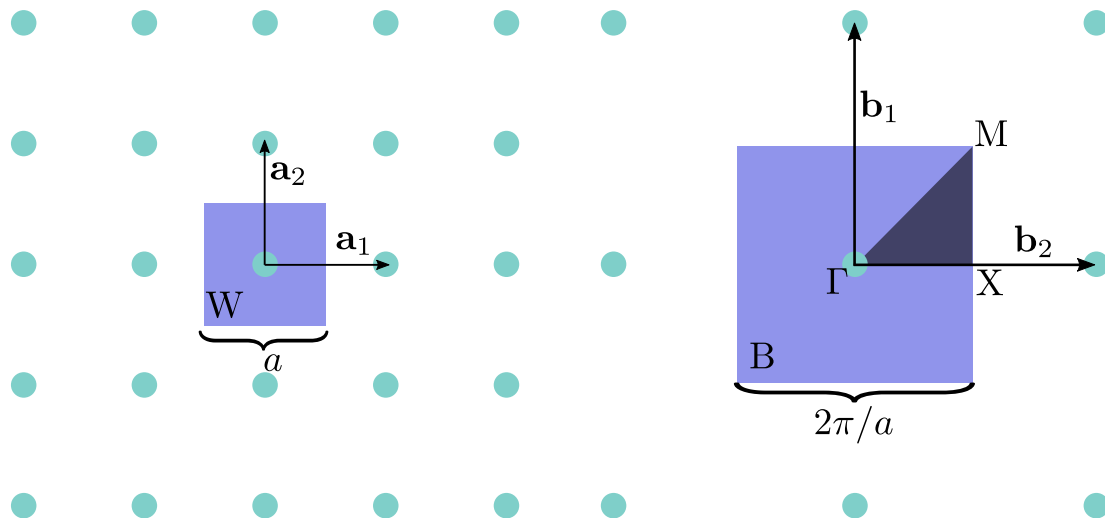
Unutar fotoničkog zabranjenog pojasa nema propagacije vala. Val čija se frekvencija nalazi unutar zabranjenog pojasa naziva je evanescentni val i njegova amplituda eksponencijalno teži u 0. Evanescentni val ima kompleksni valni vektor $\beta + j\kappa$ gdje je κ faktor prigušenja.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_\beta(\mathbf{r}) \cdot e^{j(\beta+j\kappa)\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{A}_\beta(\mathbf{r}) \cdot e^{j\beta\cdot\mathbf{r}} e^{-\kappa\cdot\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

3.2. Kvadratna rešetka dielektričnih stupića

U ovom primjeru, fotonički kristal građen je od dielektričnih stupića postavljenih tako da gledano iz smjera z osi izgledaju kao slika 3.2

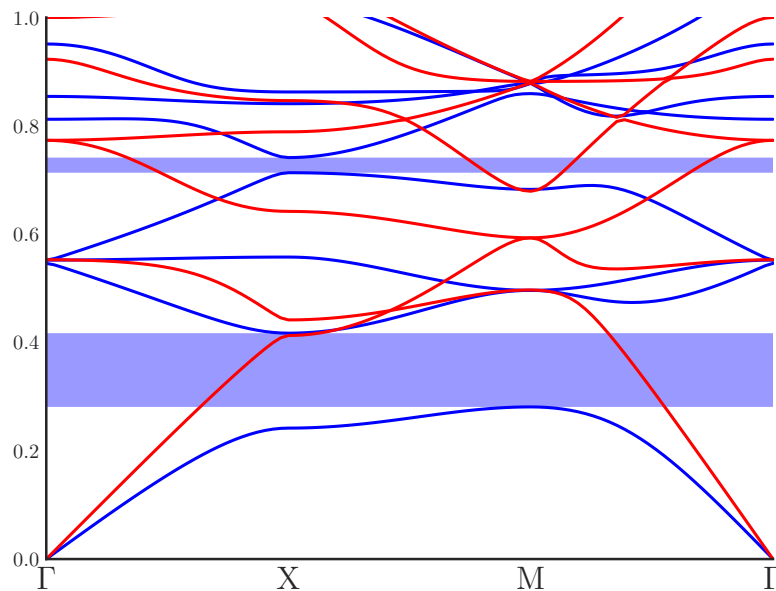
Bazni vektori rešetke su vektori $\mathbf{a}_1 = a \mathbf{i}$ i $\mathbf{a}_2 = a \mathbf{j}$, a Wigner-Seintzova ćelija označena je desno žutom bojom. Bazni vektori recipročne rešetke su $\mathbf{b}_1 = 2\pi/a \mathbf{i}$ i $\mathbf{b}_2 = 2\pi/a \mathbf{j}$, a prva Brillouinova zona prikazana je na disperzijskom dijagramu 3.3.



(a) Kvadratna rešetka u realnom prostoru s ucrtanim baznim vektorima i označenom Wigner-Seitzovom ćelijom

(b) Kvadratna rešetka u inverznom prostoru s označenom Brillouinovom i prvom Brillouinovom zonom.

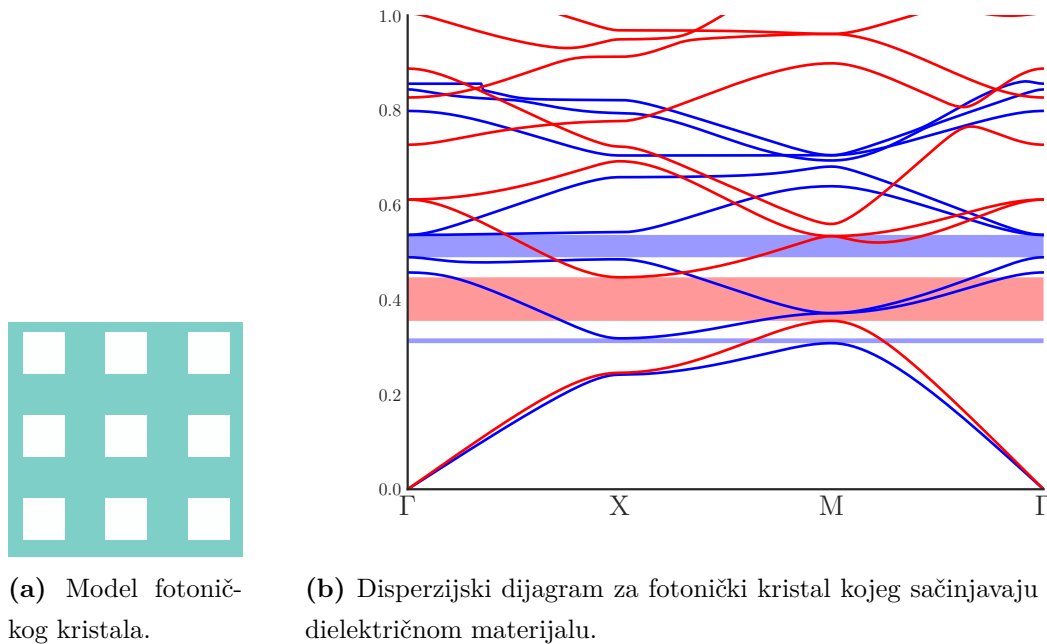
Slika 3.2: Poluprjer stupića u ovom modelu kristala iznosi $0.2a$, odnosno promjer stupića zauzima 40% duljine jedinične ćelije.



Slika 3.3: Disperzijski dijagram za kvadratnu rešetku koju sačinjavaju dielektrični stupići. Zabranjeni pojas prisutan je samo za TM mod.

3.3. Kvadratna rešetka zračnih rupa

U ovom primjeru, fotonički kristal građen je od zračnih rupa postavljenih tako da gledano iz smjera z osi izgledaju kao slika 3.5



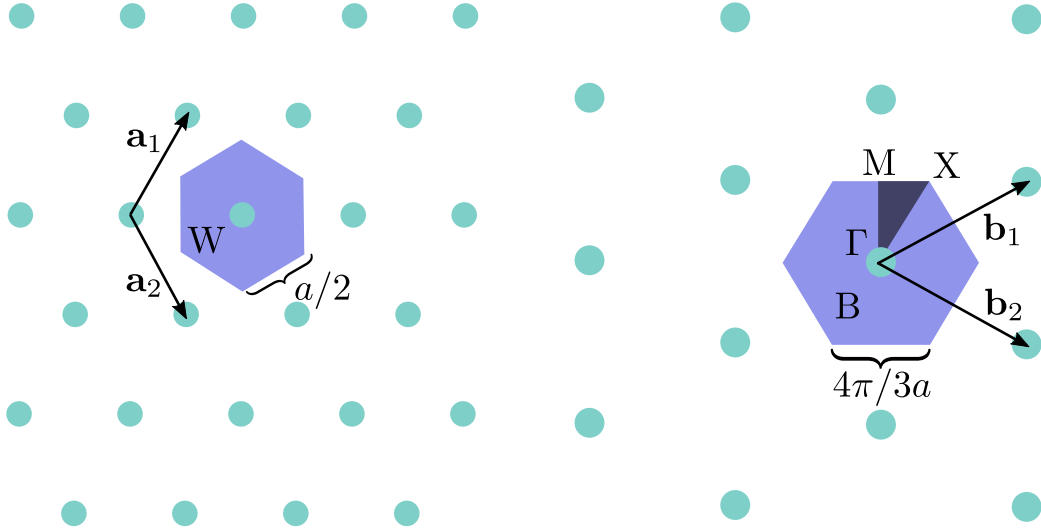
Slika 3.4: Konfiguracija fotoničkog kristala koja osigurava zabranjeni pojas za TE, ali ne i za TM mod.

Na slici nisu ucrtane Brillouinova zona i primitivni vektori rešetke jer su u odnosu na sliku 3.2 samo drugačijeg iznosa. Duljina stranice kvadrata u ovom modelu iznosi $0.88a$ gdje je a konstanta rešetke.

3.4. Heksagonalna rešetka za fotonički zabranjeni pojas

Iz prethodna dva primjera, mogao se donijeti zaključak da su izolirani dielektrični grumeni zaslužni za osiguravanje zabranjenog pojasa za TM, a međusobno povezana rešetka za TE mod. Budući da je fotonički zabranjeni pojas situacija u kojoj se zabranjeni pojasevi za TE i za TM mod preklapaju može se pretpostaviti da će konfiguracija koja osigurava fotonički zabranjeni pojas zadovoljavati oba kriterija.

U ovom primjeru kristal će opet biti građen od zračnih rupa, ali ovaj put kružnog oblika. Također, rešetka više neće biti kvadratna već heksagonalna zbog veće simetrije.



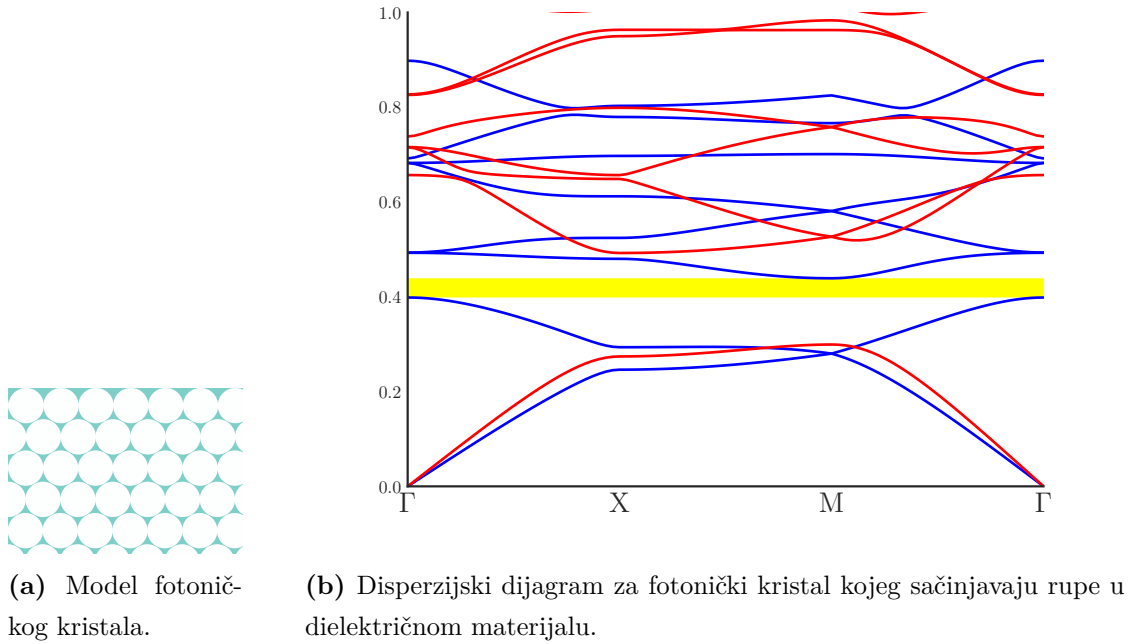
(a) Heksagonalna rešetka u realnom prostoru s ucrtanim baznim vektorima i označenom Wigner-Seintzovom ćelijom

(b) Heksagonalna rešetka u inverznom prostoru s označenom Brillouinovom i prvom Brillouinovom zonom.

Slika 3.5: Wigner-Seintzova ćelija heksagonalne rešetke s ucrtanim baznim vektorima i Brillouinova zona u inverznom prostoru.

Bazni vektori rešetke su vektori $\mathbf{a}_1 = a/2(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$ i $\mathbf{a}_2 = a/2(\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j})$. Bazni vektori recipročne rešetke su $\mathbf{b}_1 = 2\pi/a(\mathbf{i} + 1/\sqrt{3}\mathbf{j})$ i $\mathbf{b}_2 = 2\pi/a(\mathbf{i} - 1/\sqrt{3}\mathbf{j})$. Gledano iz smjera z osi, kristal izgleda kao na slici 3.6.

Na slici nisu ucrtane Brillouinova zona i primitivni vektori rešetke jer su u odnosu na sliku 3.5 samo drugačijeg iznosa. Polumjer stupića u ovoj rešetci iznosi $0.45a$



Slika 3.6: Na mjestima gdje se pojasevi za TE i za TM modove preklapaju dolazi do pojave fotoničkog zabranjenog pojasa.

Val čija je frekvencija unutar fotoničkog zabranjenog pojasa naziva se evanescentan val. Njegova amplituda trnut će eksponencijalno. U ovu strukturu je uz unošenje defekata moguće lokalizirati harmonik. Defekt je strogo gledano nepravilnost koja će na ovaj ili onaj način narušiti simetriju kristala. Situacija gdje ova pojava dobiva primjenu je valovod. Oko valovoda je periodička struktura koja ne dopušta širenje vala u svim smjerovima već samo u smjerovima koje diktira defekt.

Iz primjera do sada može se zaključiti da će više simetrična rešetka poput heksagonalne uzrokovati veći zabranjeni pojas. Također, intuitivno bi se dalo zaključiti da dielektrični stupići izazivaju nastanak zabranjenog pojasa za TE, ali ne i za TM mod. Zabranjeni pojas za TM mod po svemu sudeći uzrokuje međusobno povezana rešetka. U sljedećem poglavlju će do sada navedeni primjeri fotoničkih kristala biti optimizirani u svrhu maksimiziranja zabranjenog pojasa.

4. Optimizacija širine zabranjenog pojasa u okviru heksagonalne rešetke

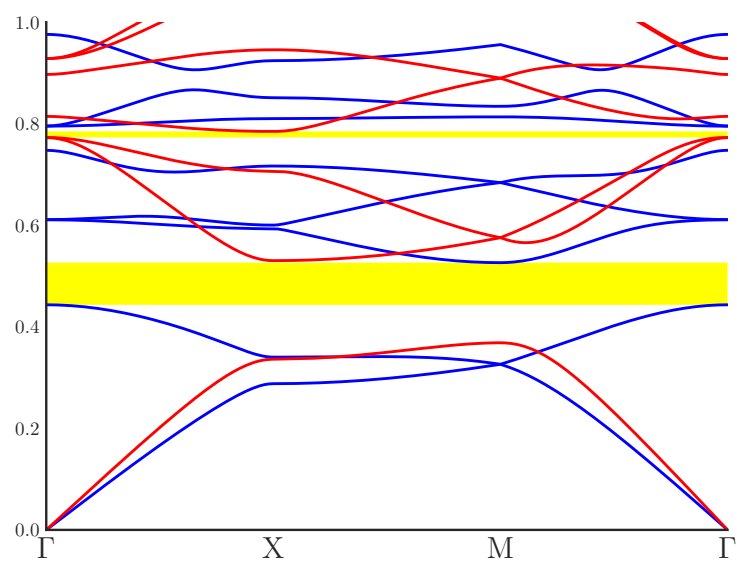
U ovom poglavlju bit će opisani rezultati optimizacije konfiguracija različitih ftoničkih kristale. Kao i ranije, dielektrični kontrast u svim primjerima iznositi će 11, plavo će biti označen TM, crveno TE mod, a žuto potpuni zabranjeni pojas, odnosno mjesto gdje se pojas za TE i za TM mod preklapaju.

Budući da je od najveće važnosti baš ftonički zabranjeni pojas, optimizacija će ići na njihovu ruku.

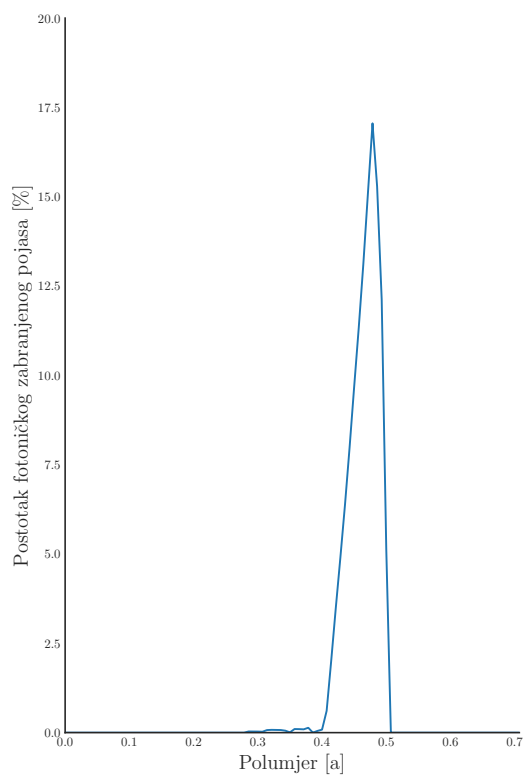
4.1. Heksagonalna rešetka sa zračnim cilindrima

Prva konfiguracija podložena optimizaciji će biti upravo konfiguracija iz poglavlja 3.4. Jedini faktor koji se u ovom slučaju optimizira je polumjer cilindra.

Rezultat prikazan u nastavku u skladu je s očekivanjima i rezultatima u literaturi [3]. Graf dimenzije zabranjenog pojasa u ovisnosti o polumjeru jasno prikazuje vrhunac netom prije nego što se dva cilindra dotaknu. Nakon doticaja dva cilindra, vrijednost je 0 jer dielektrični materijal više nije međusobno povezan.



(a) Disperzijski dijagram s optimalnim fotoničkim zabranjenim pojasom.

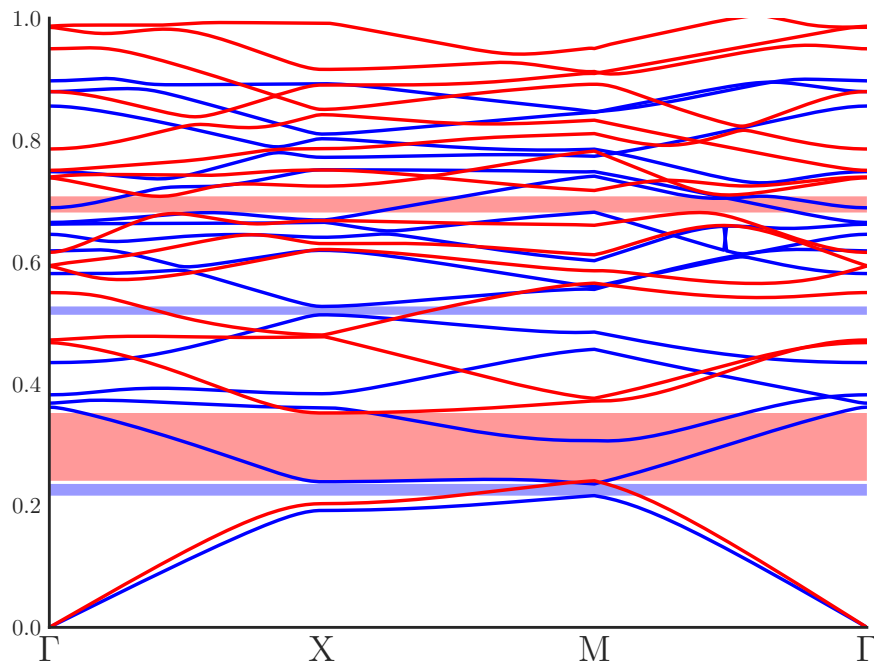


(b) Graf ovisnosti postotka fotoničkog zabranjenog pojasa i polumjera stupića. Maksimum se poprima za polumjer $0.478547 a$ i iznosi 17.05456%

Slika 4.1: Optimizacija fotoničkog zabranog pojasa za heksagonalnu rešetku sa zračnim cilindrima.

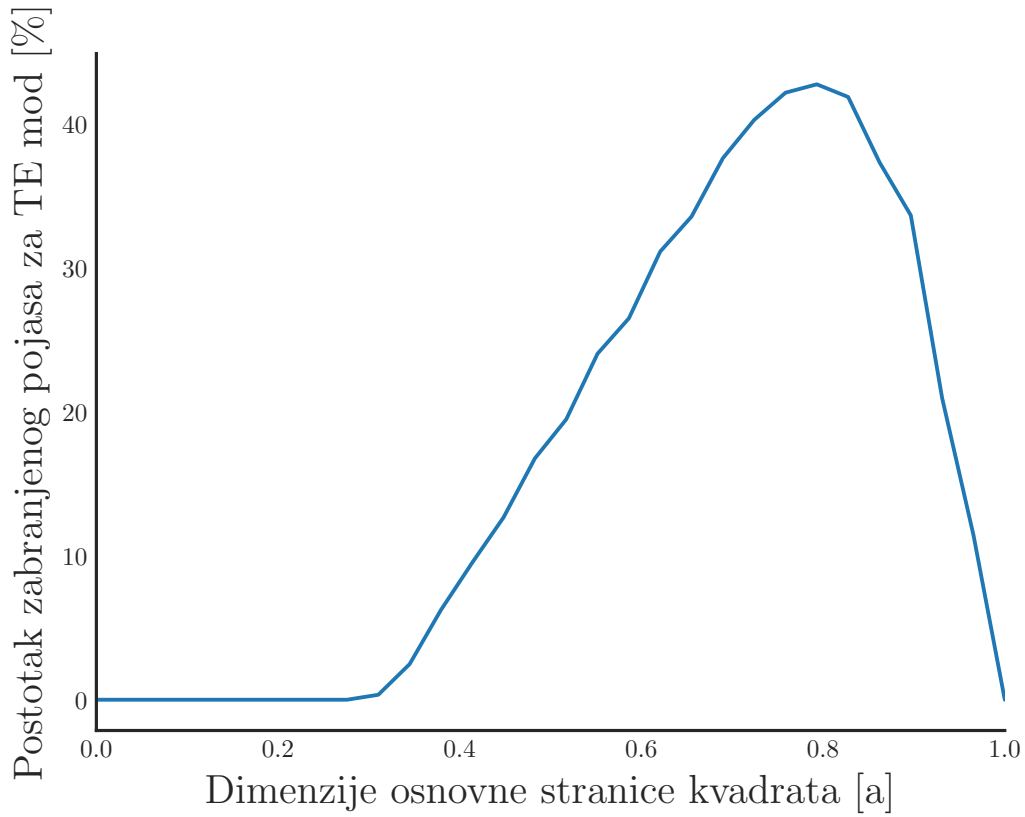
4.2. Heksagonalna rešetka sa zračnim kvadratnim blokovima

U nastavku je prikazan postupak pokušaja optimizacije fotoničkog zabranjenog pojasa za slučaj kristala sastavljenog od kvadratnih stupića. Kristal je sličan kristalu u poglavlju 3.3 s jednom razlikom, a to je oblik kristalne rešetke. Konfiguracija optimizirana za fotonički zabranjeni pojas prikazan je na slici 4.2.



Slika 4.2: Disperzijski dijagram s optimalnom konfiguracijom za fotonički zabranjeni pojas. Postotak zabranjenog pojasa iznosi 0.692784%.

Vidljivo da je fotonički zabranjeni pojas zanemariv. Dokumentacija programske biblioteke MPB kaže da se svaki postotak manje od 1 % može zanemariti i pripisati numeričkoj pogrešci. S druge strane, optimalno rješenje ima zamjetan zabranjeni pojas za TE mod. Graf ovisnosti postotka zabranjenog pojasa i duljine osnovne strane kvadrata prikazan je na slici 4.3.

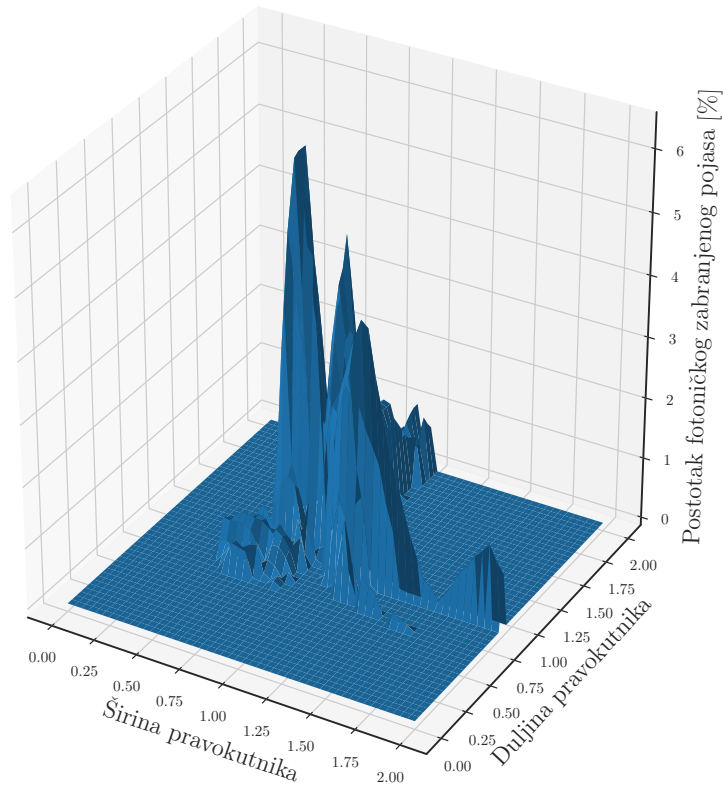


Slika 4.3: Optimizacija zabranjenog pojasa za TM mod i heksagonalnu rešetku sa zračnim kvadratnim blokovima.

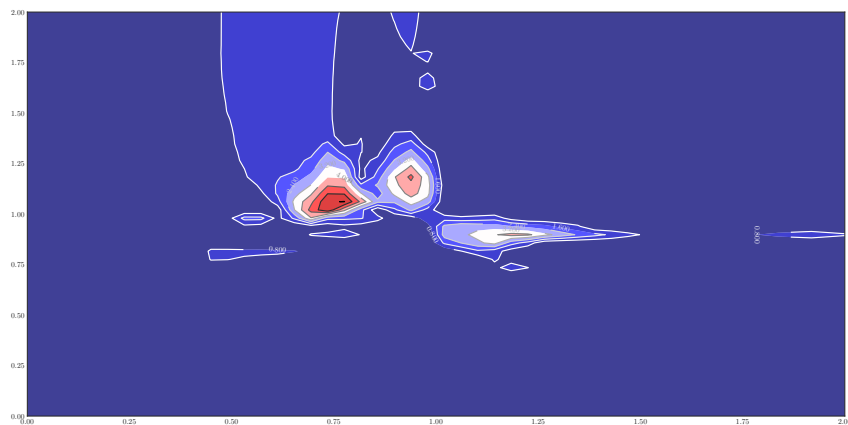
4.3. Heksagonalna rešetka s elipsoidnim stupićima

Konačno, optimizaciji je podložen fotonički kristal s elipsoidnim stupićima. Optimizacija ove konfiguracije obavljana je za razliku od primjera ranije na dvije varijable. Jedna varijabla je predstavljala širinu pravokutnika u kojem se nalazi elipsa, a druga varijabla je predstavljala dužinu pravokutnika. Rezultat koji bi bilo za očekivati je da se vrhunac nalazi na mjestu koje je najbližije konfiguraciji u slučaju 4.1

Maksimum nije jednak maksimumu koji je ranije postignut jer je količina uzoraka niža.



(a) Trodimenzionalni prikaz postotka zabranjenog pojasa i parametara elipse.



(b) Dvodimenzionalni graf vrijednosti postotka zabranjenog pojasa i parametara elipse.

Slika 4.4: Optimizacija zabranjenog pojasa za heksagonalnu rešetku s elipsoidnim stupićima.

5. Zaključak

U ovom seminaru ukratko je prikazan svijet fotoničkih kristala. Iskazan je osnovni matematički aparat potreban za opis problema u periodičkom okruženju poput kristala i izvedena je valna jednačina čija osnova leži kako u Maxwellovim jednačinama tako i u Blochovom teoremu. U nastavku je svijet fotoničkih kristala čitatelju približen kroz slike i stjecanje intuicije za složene pojave unutar kristala poput zabranjenih pojaseva frekvencija. Disperzijski dijagrami su uveli pojam evanescentnog vala, odnosno vala koji ne prodire u kristalnu strukturu. Pojava pojasa koji dopušta propagaciju vala samo nekim valovima pokazala se iznimno važna za industriju. Mnogi proizvodi poput primjerice valovoda, sada mogu biti izvedeni na nezamislivo malim dimenzijama baš zbog tehnologije fotoničkih kristala.

Iako je ovo relativno nova grana znanosti, industrija teško može pratiti razvoj, pa dostupnost uređaja s fotoničkim kristalima zbog cijene izrade kaska. S druge strane, računalna moć nikad nije bila pristupačnija, a uz pomoću programskih alata, moguće je simulirati i rješavati gotovo sve probleme relativno jeftino, odnosno bez potrebe za fotoničkim laboratorijem. Pored upoznavanja s matematičkim formalizmom koji opisuje fotoničke kristale, cilj ovog seminara bio je upoznati čitatelja i s računalnim metodama simuliranja i modeliranja problema. Svaki disperzijski dijagram i svaki graf u ovom seminaru bili su programirani u programskom jeziku Python i pokrenuti na osobnom računaru¹.

¹ Izvorni kod nalazi se na poveznici https://github.com/djanekovic/mpb_utils/tree/master/seminar/python

6. Literatura

- [1] Steven G. Johnson and J. D. Joannopoulos. Block-iterative frequency-domain methods for maxwell's equations in a planewave basis. *Opt. Express*, 8(3):173–190, 2001.
- [2] Frank Hettlich (auth.) Andreas Kirsch. *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations: Expansion-, Integral-, and Variational Methods*. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.
- [3] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Meade. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light - Second Edition*. Princeton University Press, 2011.
- [4] Steven G. Johnson and J.D. Joannopoulos. Introduction to photonic crystals: Bloch's theorem, band diagrams, and gaps (but no defects). 2003.
- [5] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, Inc., 2005.
- [6] Ivo Batistić. Predavanja iz fizike čvrstog stanja, Listopad 2016.
- [7] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing In Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.