Øvelser Lek 1- sekundære (primære er i java)

Øvelser - sekundære

Induktionsbeviser:

1. Summen af de første n ulige naturlige tal er n^2
2. Summen af de første n kubiktal er $n^2(\frac{n+1)^2}{4}$
3. $\sum_1^n \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
4. $n = x * 4 + y * 5 \ (n \geq 12; x, y \geq 0)$
5. $7^n \ - 1$ er dividerbar med 6 for n > 0

De to sidste er lidt drilagtige. ☺

1.

Påstand: Summen af de første n ulige naturlige tal er n2, d.v.s.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

Kan også skrives:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k \ - \ 1) = n^2$$

A.) Vis at Base case: k = 1 er sand:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k \ - \ 1) \ = \ 2 * 1 \ - \ 1 = 1^2$$

B.) Hvis teorien er sand for n, så er den også sand for n + 1:

Venstre side

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + 2(n + 1) - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + \ 2n \ + \ 1$$

Indsæt induktions-antagelse:

$$n^2 + (2n + 1)$$

Højre side:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

De to sider passer med at $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)$ er = n^2 (eop)

2.

Påstand:

Summen af de første n kubiktal er $\boldsymbol{n^2 \frac{(n+1)^2}{4}}$

som kan omformuleres til $\left(\frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}$

da $\frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}} * \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{(n)^2}}{2} * \frac{\boldsymbol{(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$

så derved bliver påstanden:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3) = \left(\frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}$$

A.) Base case:

$$\boldsymbol{1^3} = \left(\frac{\boldsymbol{1 * (1+1)}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1^2}$$

B.) For N + 1:

Ventre side:

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n+1}}(\boldsymbol{k^3}) + (\boldsymbol{n+1})^{\boldsymbol{3}}$$

Indsæt induktions-antagelse:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)(n+1)}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$\frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4}$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Højre side:

$$\left(\frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Højre og venstre side er ens (eop)

3.

Påstand:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

A.) Base case:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2-1)(2+1)}=\frac{1}{2+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(1)(3)}=\frac{1}{3}$$

B.) For n+1:

Venstre side:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{k}-\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} + \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) - \mathbf{1})(\mathbf{2}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{1})}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Indsæt induktions-antagelse:

$$\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3})}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3})+\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3})}$$

$$= \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3})}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3})}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3}}$$

Højre side:

$$\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3}$$

Højre og ventre side er altså ens og det er hermed bevist. (eop)

4. Påstand:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{n} \geq \mathbf{12};\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0})$$

Hvis n er større eller lig med 12 skulle $4x + 5y$ have en løsning hvor x og y er positive.

A.) Base case er så $n = 12$:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y}$$

Første 4 ligninger, for hhv 12, 13, 14, og 15 kan produceres på følgende måde:

$$\mathrm{n} = 12, \mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = 0$$

$$12 = 4 * 3 + 5 * 0$$
$$13 = 4 * 2 + 5 * 1$$
$$14 = 1 * 4 + 2 + 5$$
$$15 = 0 * 4 + 3 * 5$$

Denne sekvens á 4 kan fortsættes på en af følgende måder:

a) Tre y kan efterfølges af 4 x: $3 * 5 \ + 1 \ = \ 4 * 4$

b) x kan efterfølges af y: $4 + 1 = 5$

5.

Påstand:

$7^n - 1$ er dividerbar med 6 for n>0

A.) Base case:

$$7^1 - 1 = 6$$

B.) For n+1:

Idé:

Hvis $(7^n - 1)\%6 = 0$ så er $(7^{(n+1)}$-1$)\%6 - (7^n - 1)\%6 = 0$

Fordi hvis man træker et tal der er deleligt med 6 fra et andet tal er det jo en faktor af 6 man trækker fra.

Vi tester det:

$$7^{(n+1)} - 1 \ - (7^n - 1) = 7^{(n+1)} - 7^n$$

$$7 * 7^n - 7^n = 7^n(7 - 1) = 7^n(6)$$

Og da ethvert tal gange med 6 er delelig med 6, er det hermed bevist. (eop)