UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ — UTFPR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL — PROFMAT

DJONES ALDIVO BONI

ENSINANDO PROBABILIDADE COM O JOGO DE DADOS DE MOZART

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TOLEDO
2021

RESUMO

BONI, Djones Aldivo. **Ensinando Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart**. 143 f. Dissertação de mestrado: PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

O objetivo do presente trabalho é elaborar uma proposta de ensino do conteúdo de probabilidade, baseada no Jogo de Dados de Mozart. A pesquisa apresenta-se com caráter exploratório-descritivo, desenvolvendo uma proposta que faz uso de atividades em grupo e discussões direcionadas, de forma que os alunos realizem o levantamento de hipóteses, discutem métodos para testá-las e, a partir disso, cheguem à resolução dos problemas sugeridos. Nela, são abordados conceitos de combinatória, de probabilidade, de distribuição de probabilidades e o uso da experimentação para testar hipóteses probabilísticas. Como suplemento à proposta foram elaborados: um produto educacional (em formato de *website*), materiais de ensino e uma seleção de recursos tecnológicos disponíveis na *internet*. Além disso, foi realizada uma pesquisa de campo, aplicando a proposta de ensino com alunos de Ensino Médio e de primeiro período de cursos de Graduação, seguida por um questionário de avaliação. Para tanto, a proposta foi adaptada para o formato de uma videoconferência e foi aplicada com alunos de Ensino Médio, além de uma aplicação suplementar em modelo de videoaula com alunos de Ensino Médio e de primeiro período de cursos de Graduação. O questionário aplicado aos alunos buscou identificar o público alvo, averiguar aspectos de interesse e identificar atributos de aprendizado dos alunos. Na avaliação das respostas ao questionário foram identificadas as seguintes impressões: reação positiva dos alunos, interesse no assunto e aprendizado do conteúdo, o que pode ter sido influenciado positivamente por motivações pessoais dos alunos, como gostar de música, tocar instrumentos musicais ou apreciar a matemática.

Palavras-chave: Matemática e música. Probabilidade. Jogos didáticos. Didática de ensino.

6 O JOGO DE DADOS DE MOZART

O Jogo de Dados de Mozart, muito conhecido como *Musikalisches Würfelspiel* (alemão para jogo de dados musical), atribuído ao grande compositor clássico Wolfgang Amadeus Mozart, é um método probabilístico de composição musical que utiliza a aleatoriedade do lançamento de dois dados (MOZART, 1793). Nesta seção será apresentada a história de Mozart e a história do Jogo de Dados de Mozart. Em seguida serão explicadas as instruções para criar uma composição com o jogo.

6.1 WOLFGANG AMADEUS MOZART

Wolfgang Amadeus Mozart (1756 – 1791) foi um compositor austríaco do período clássico. A música sempre esteve ao seu lado: Leopold Mozart, seu pai, era músico e regente substituto na corte de Salzburgo. O pai assumiu o papel de mestre e ensinou-lhe as "artes do ofício", como na tradição dos ofícios artesanais, "talvez até mesmo desejando que algum dia o filho excedesse sua própria perícia" (ELIAS, 1994, p. 26).

Ensinando música aos seus filhos, Leopold percebeu desde muito cedo que Wolfgang demonstrava o dom para tal arte e levou o menino prodígio, ainda em sua infância, em diversas turnês pela Europa (CAVINI, 2012, p. 28).

O pai Mozart era bastante rígido com respeito à educação de seus filhos, especialmente no que tangia à música, como expõe Elias (1994):

> A estrita disciplina imposta por seu pai deu frutos. Converteu-se em autodisciplina, capacitando o jovem a trabalhar, depurando e transformando em música as fantasias que nele fervilhavam, sem que perdessem a espontaneidade ou a inventividade (ELIAS, 1994, p. 13).

Assim se criou Mozart, considerado um dos maiores compositores de todos os tempos. Entre as mais de 600 obras que compôs, existem "missas; obras sacras; oratórios; 23 óperas; várias obras vocais seculares; mais de 45 sinfonias; 25 concertos para piano; 6 concertos para violino; 24 quartetos e 6 quintetos de cordas; várias obras de câmara; [e] várias obras para piano (CAVINI, 2012, p. 28-29)."

6.2 A HISTÓRIA DO JOGO

Com seu talento para a música, Mozart acabou por criar não apenas uma obra, mas um método para compor uma grande quantidade de minuetos chamado de Jogo de Dados de Mozart (LLUIS-PUEBLA, 2002).

De acordo com Uro (2017), o jogo é baseado no manuscrito K. 516f, datado do ano 1787. Este, comumente referido por "*Musikalisches Würfelspiel* K. 516f (1787)", consiste em diversos fragmentos melódicos, semelhante a um tipo de jogo musical popular na Europa Ocidental no século XVIII, contudo sem instruções ou menção ao uso de dados.

Noguchi (1990) confirma que foi encontrado um jogo musical com um autógrafo genuíno de Mozart, designado K. Anh. 294d/516f, entretanto este não aparece em sua "lista de todos os meus trabalhos".

No entanto, Lluis-Puebla (2002) escreve que Mozart criou o jogo em 1777, aos 21 anos de idade. Noguchi (1990) manifesta que vários tipos de jogos musicais foram publicados em nome de Mozart. Todavia, a autoria do jogo não foi autenticada por Mozart, mas atribuída a ele pelo seu editor Nikolaus Simrock.

O jogo permite compor mais de 750 trilhões ($750 \cdot 10^{12}$) de minuetos, um número tão grande que, se for considerado 50 segundos para executar cada minueto, demoraria cerca de 1,2 bilhões de anos para se executar todos eles sem parar.

Para ser exato, o Jogo de Dados de Mozart permite criar $2 \cdot 11^{14}$ minuetos. O compasso VIII tem sempre a mesma melodia (inclusive na variação). O compasso XVI pode ter duas melodias diferentes. Os outros 14 compassos podem ter 11 melodias diferentes.

6.3 INSTRUÇÕES DO JOGO

Para compor um minueto com o Jogo de Dados de Mozart, deve-se fazer uso de dois dados comuns, a Tabela 1, que relaciona o valor da soma dos dados com o fragmento melódico sorteado, e a partitura da Figura A.3, com os 176 fragmentos melódicos. Para criar uma composição se utilizam as seguintes instruções:

1. Os dois dados comuns são lançados 16 vezes, registrando as somas dos dois dados. Dessa forma são sorteados 16 números de 2 a 12, um para cada compasso do minueto. Exemplo de sorteio da soma dos dados:
   2 – 2 – 5 – 4 – 10 – 12 – 11 – 9 – 2 – 10 – 9 – 5 – 10 – 11 – 3 – 11.

2. Cada um dos 16 compassos do minueto possui uma coluna na Tabela 1. Localizando a célula cuja coluna é o compasso (de I a XVI) e cuja linha é a soma dos dados (de 2 a 12), determinam-se os fragmentos melódicos sorteados para a composição. Por exemplo, com as somas dos dados acima são sorteados os fragmentos melódicos a seguir:
   96 – 22 – 113 – 13 – 75 – 37 – 147 – 94 – 70 – 77 – 48 – 34 – 137 – 59 – 116 – 78.

   Isso se deve ao compasso I ter na linha 2 o número 96, ao compasso II ter na linha 2 o número 22, ao compasso III ter na linha 5 o número 113, e assim por diante, até o compasso XVI ter na linha 11 o número 78.

   A Tabela 2 mostra os fragmentos melódicos para cada um dos lançamentos.

3. Os 16 fragmentos melódicos sorteados para os compassos da composição são copiados para a pauta em branco, mostrada na Figura 17. Leva-se em conta que o compasso VIII possui duas variações, copiando cada uma delas separadamente, nos espaços denotados por 1 e 2, os números das variações.

   A Figura 18 mostra um exemplo de minueto gerado pelo Jogo de Dados de Mozart, com os lançamentos supracitados.

Tabela 1: Tabela de compassos do Jogo de Dados de Mozart.

Soma dos Dados	**Compassos**							
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Soma dos Dados	**Compassos**							
	IX	**X**	**XI**	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**XVI**
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: Adaptado de Mozart (1793).

Tabela 2: Soma dos dados e fragmentos melódicos que geram o minueto da Figura 18.

Compasso	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Soma dos dados	2	2	5	4	10	12	11	9
Fragmento melódico	96	22	113	13	75	37	147	94

Compasso	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
Soma dos dados	2	10	9	5	10	11	3	11
Fragmento melódico	70	77	48	34	137	59	116	78

Fonte: Autoria própria (2021).

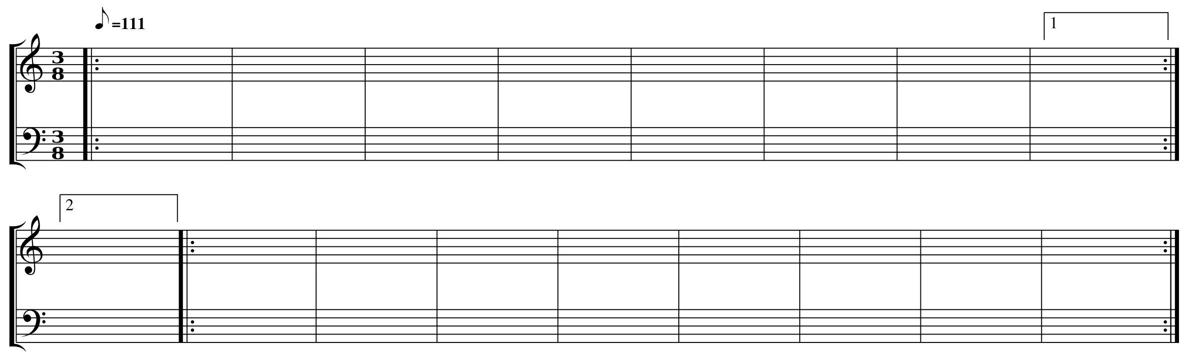


Figura 17: Partitura em branco do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Autoria própria (2021).

2-2-5-4-10-12-11-9-2-10-9-5-10-11-3-11

Figura 18: Minueto gerado usando o Jogo de Dados de Mozart, composto a partir das somas dos dados e fragmentos melódicos mostrados na Tabela 2.
Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* ⟨https://youtu.be/4M4meYjkCKM⟩.

8 PROPOSTA DE ENSINO: ENSINANDO PROBABILIDADE COM O JOGO DE DADOS DE MOZART

A partir da pesquisa bibliográfica, elaborou-se esta proposta didática para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, incluindo diversos exemplos e atividades.

Em posse das competências e dos conteúdos selecionados, uma série de atividades foram criadas e organizadas, incluindo atividades contextualizadas no Jogo de Dados de Mozart, na aleatoriedade de dados comuns (de seis lados), de outros tipos de dados (de 12 e de 20 lados) e de moedas.

As atividades foram explicadas, resolvidas e, para embasar as resoluções, foram apontados os conteúdos de probabilidade necessários.

O produto educacional, os materiais educativos e os recursos tecnológicos foram incorporados à proposta, de forma que sejam utilizados no desenvolvimento das atividades.

Dessa forma, apoiado no currículo, na literatura e metodologia supracitados, foi elaborada a proposta didática presente neste capítulo, complementada pelos produtos educacionais presentes no Capítulo 9, pelos materiais auxiliares dispostos no Apêndice A e pelos recursos tecnológicos expostos no Apêndice B.

8.1 ORGANIZAÇÃO DA AULA

Recomenda-se que os alunos se organizem em grupos pequenos, de até quatro indivíduos. Trabalhar em grupo tem o objetivo de tornar a sala um ambiente mais agradável às discussões entre os alunos. O limite de quatro pessoas no grupo se dá pela distribuição dos fragmentos melódicos, de forma que cada aluno possa sempre ter em mãos alguma das quatro partituras.

No desenvolvimento da proposta, o professor resolve os exemplos, deixa os alunos resolverem as perguntas e então as corrige. Ao resolver os exemplos e ao corrigir as perguntas, recomenda-se usar apenas as ideias expressas pelos alunos, ou seja, o professor os conduz à solução.

8.1.1 Materiais para os alunos

- Cada aluno recebe:
  - Um dado planificado (Figura A.1);
  - Uma tabela de compassos (Tabela A.1);
  - Uma partitura em branco (Figura A.2); e

- Cada grupo recebe uma cópia das quatro folhas com os fragmentos melódicos (Figura A.3, partes 1 a 4).

8.2 EXPLICANDO O JOGO DE DADOS DE MOZART

O professor pede que os alunos se organizem em grupos de até quatro pessoas e lhes entrega os materiais.

Explica para os alunos como funciona o Jogo de Dados de Mozart.

> **Recomendação de discurso:**
> Este é o Jogo de Dados de Mozart.
> Com ele é possível compor músicas usando dados.
> As músicas criadas têm 16 compassos, ou seja, 16 partes, que são sorteadas com o lançamento de dois dados.
> Cada compasso é escolhido em uma coluna da tabela, de acordo com a soma dos dois dados.
> O número sorteado indica o fragmento melódico que compõe a música.
> Por exemplo, no primeiro compasso, lançando os valores 5 e 1 nos dados, a soma é 6. Na tabela, localiza-se o número na primeira coluna e na linha 6, de forma a se obter o número 148. Então é localizado o compasso com esse número nos trechos melódicos.
> O mesmo é feito para os outros 15 compassos.

Atividade 1: Com o auxílio de dois dados, o professor sorteia dois números para cada grupo, para que identifiquem os compassos na tabela e escrevam os trechos melódicos na partitura em branco. Os outros compassos serão preenchidos no decorrer das atividades.

Pergunta 2: No Jogo de Dados de Mozart, qual é o motivo de terem sido consideradas 11 possibilidades para cada compasso?

Resposta: Foram consideradas 11 possibilidades para cada compasso de forma que exista um trecho melódico para cada resultado da soma dos dados.

Pergunta 3: Por que o Jogo de Dados de Mozart possui um total de 176 trechos melódicos?

Resposta: Porque o jogo é formado por 16 compassos, cada um com 11 possibilidades, estas referentes às somas dos dados. Dessa forma, para se escolher 16 vezes (compassos) entre 11 possibilidades dos dados (somas), são necessários $16 \times 11 = 176$ trechos melódicos.

8.3 EXPLICAÇÃO SOBRE AS PARTITURAS

O professor pode explicar brevemente os conceitos básicos de como ler as partituras. Com um instrumento musical disponível, é possível fazer pequenas demonstrações para os alunos.

Recomendação de discurso:
As notas são compostas por duas partes: a altura e o valor.
A altura, ou seja, a altura do círculo na partitura, diz qual é a nota que deve ser tocada.
Na clave de Sol (primeiro pentagrama, mão direita no piano) as cinco linhas identificam as notas Mi, Sol, Si, Ré e Fá. Os quatro espaços entre essas linhas identificam as notas Fá, Lá, Dó e Mi.
Seguindo as linhas e os espaços em sequência, de baixo para cima, estão as notas musicais na ordem normal: Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi e Fá.
Na clave de Fá (segundo pentagrama, mão esquerda no piano) as linhas e os espaços em sequência, de baixo para cima, estão as notas: Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Fá, Sol e Lá.
Linhas podem ser adicionadas se a nota não couber no pentagrama. Por exemplo, nos trechos melódicos 7, 45, 116 e 139 foram necessárias linhas adicionais.
O valor, ou seja, o tempo que a nota é tocada é identificado pelo desenho que a nota tem.
Uma nota semínima (círculo com haste), por exemplo a primeira nota (clave de Sol) nos compassos 8, 79, 93 e 131, tem duração de dois tempos.
Uma nota colcheia (círculo com haste e uma bandeirola), por exemplo a primeira nota (clave de Fá) nos compassos 9, 44, 90 e 141, tem duração de um tempo.
Colcheias podem ser ligadas por uma barra, por exemplo as notas nos compassos 1, 54, 114 e 130 são colcheias.
Uma nota semicolcheia (círculo com haste e duas bandeirolas) tem duração de meio tempo, ou seja, duas semicolcheias duram o mesmo tempo que uma colcheia. Semicolcheias também podem ser ligadas por barras, por exemplo nos compassos 7, 45, 90 e 136.
Os silêncios são denotados por símbolos específicos definindo seu valor, ou seja, seu tempo de duração. No Jogo de Dados de Mozart só são utilizados os silêncios com valor de uma colcheia, por exemplo na clave de Fá dos compassos 2, 41, 95 e 131.
O compasso define o ritmo da música. As músicas do Jogo de Dados de Mozart tem compasso três por oito, como pode-se ver no início da partitura. Isso significa que cada compasso dura o tempo de três colcheias.

8.4 CONTAGEM DO NÚMERO DE COMPOSIÇÕES

O número de composições possíveis é um tópico que os próprios alunos podem levantar. Nesses casos, recomenda-se ao professor explicar e discutir o assunto com os alunos, aproveitando a sua curiosidade.

Atividade 4: O professor pede aos alunos para estimarem o número de composições.

"Quantas composições diferentes vocês pensam que é possível se obter com o Jogo de Dados de Mozart? O que significa ser diferente?"

Alguns alunos podem se sentir apreensivos em expor suas estimativas. O professor pode aliviar a tensão desses alunos falando "Pessoal, é só uma estimativa. É para vermos as respostas."

A partir de exemplos, o professor revisa os conceitos de combinatória necessários para calcular o número de composições.

Pergunta 5: No Jogo de Dados de Mozart, quantas composições se pode criar?

Resposta: Cada um dos 16 compassos pode ser sorteado com 11 resultados diferentes. Assim, há cerca de 46 quatrilhões de composições possíveis no Jogo de Dados de Mozart, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11}_{\text{16 compassos}}$$

$$= 11^{16} = 45.949.729.863.572.161$$

$$\approx 46 \times 10^{15} \quad \text{(46 quatrilhões).}$$

Para dar uma noção do tamanho do número: há aproximadamente 5,9 milhões de composições para cada uma das 7,8 bilhões de pessoas no mundo.

Atividade 6: O professor retoma a atividade anterior, onde os alunos estimaram o número de composições e pede que estimem o tempo necessário para executá-las.

"Mais uma estimativa: Quem acha que é possível uma pessoa tocar todas as composições durante sua vida. Quem acha que é impossível? Por que?"

Pergunta 7: Quanto tempo demora para tocar todas as composições do Jogo de Dados de Mozart, uma por vez?

Resposta: Uma composição demora cerca de 50 segundos para ser executada[5]. Então basta multiplicar o número de composições pelo tempo de execução e converter segundos para anos:

$$46 \times 10^{15} \text{ composições} \times \frac{50 \text{ segundos}}{1 \text{ composição}} \times \frac{1 \text{ minuto}}{60 \text{ segundos}} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} \times \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ horas}} \times \frac{1 \text{ ano}}{365 \text{ dias}}$$
$$\approx 73 \times 10^9 \text{ anos} \quad (73 \text{ bilhões de anos}).$$

Assim, são necessários cerca de 73 bilhões de anos para se executarem todas as composições, uma por vez, quando são tomados 50 segundos para cada. Isso demora mais do que uma vida humana. De fato é um tempo maior que a idade estimada do universo, que é de 13,8 bilhões de anos.

8.5 INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE PROBABILIDADE

Prosseguindo com as atividades, o professor expõe conceitos básicos de probabilidade para os alunos.

> **Recomendação de discurso:**
> **Experimento aleatório:** é um experimento cujo resultado não pode ser determinado antes de sua realização.
> **Espaço amostral:** é o conjunto que possui **todos** os possíveis resultados do experimento aleatório. Para ser o espaço amostral é preciso conter todos os resultados possíveis.
> A seguir seguem alguns exemplos de experimentos aleatórios e seus espaços amostrais:
>
> - O lançamento de uma moeda, que pode cair cara ou coroa, $S = \{K, C\}$;
> - O lançamento de um dado, que pode cair cada uma das seis faces $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
> - Os sorteios, como o bingo $S = \{1, 2, \ldots, 75\}$ e a mega-sena $S = \{1, 2, \ldots, 60\}$;
> - A distância do salto de um atleta, que pode ser representado por um número positivo, $S = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$;
> - A temperatura mais alta do dia, que pode ser representada por um número real, $S = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; e
> - O lugar no alvo onde um atirador acerta, que pode ser representado por um ponto no plano, $S = \mathbb{R}^2$.
> - Continuar com os exemplos que os alunos dão.

[5]A execução é realizada a 111 bpm (batimentos por minuto ou colcheias por minuto), como é denotado nas partituras do jogo. Há 16 compassos com o tempo de 3 colcheias cada, os quais são executados duas vezes. São $16 \times 2 \times 3 = 96$ colcheias por composição, o que dá $96/111 \approx 0,865$ minutos, ou seja, aproximadamente 51,9 segundos por composição.

Pergunta 8: O Jogo de Dados de Mozart utiliza a soma de dois dados. Qual é o espaço amostral utilizado? Justifique.

Resposta: Um dado, quando lançado, pode resultar em valores de 1 a 6. Somando um segundo dado, o valor mínimo que se obtém é 1+1 = 2 e o valor máximo é 6+6 = 12, abrangendo todos os números inteiros entre eles. Dessa forma, o espaço amostral da soma de dois dados é:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Recomendação de discurso:
Evento: é um subconjunto do espaço amostral. Portanto, também contém resultados do experimento aleatório, porém não é necessário conter todos os resultados possíveis.

Outros conceitos, como o evento elementar, o complementar, a união, a intersecção, diferença de eventos e eventos mutuamente exclusivos, podem ser explicados a medida que são necessários.

É importante não sobrecarregar os alunos com muitos conceitos ou com muitas informações. Recomenda-se dar tempo e oportunidade (atividades e, possivelmente, exercícios adicionais) para concretizá-los e apenas então prosseguir.

Recomendação de discurso:
As probabilidades dos eventos: alguns eventos têm mais chances de ocorrer do que outros. Por exemplo, ao lançar um dado há mais chances de cair um número par (evento $E = \{2, 4, 6\}$) do que há chances de cair o número dois (evento $F = \{2\}$). As probabilidades dos eventos são utilizadas para representar estas chances, denotando a probabilidade do evento E como $\mathrm{P}(E)$. Quanto aos eventos E e F, correspondentes ao lançamento de um dado, considere as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ \mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6}, \\ \mathrm{P}(F) &= \mathrm{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

De onde vêm os valores dessas probabilidades?
Propriedade 1 das probabilidades: a probabilidade de um evento é um número real (decimal) entre zero e um:

$$0 \leq \mathrm{P}(E) \leq 1.$$

Algumas vezes as probabilidades são dadas em porcentagem, com valores de 0 % a 100 %.
Propriedade 2 das probabilidades: a probabilidade do espaço amostral é igual a unidade:

$$\mathrm{P}(S) = 1.$$

> Um evento cuja probabilidade é zero não tem chance alguma de ocorrer. Já um evento cuja probabilidade é unitária, ou seja, igual a um (100 %), é obrigatório que ocorra.

Outras propriedades, como a probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, da união, da intersecção, da diferença, do complementar, da probabilidade condicional e eventos independentes, podem ser explicados a medida que são necessários.

Pergunta 9: No Jogo de Dados de Mozart se faz uso de dois dados. No entanto, qual é a probabilidade de cada uma das faces de um dado? Justifique.

Resposta: Considerando que o dado é justo, ele deve ser equiprovável e cada uma das seis faces tem probabilidade 1/6, de forma que a soma das probabilidades dos resultados produza a unidade, que é a probabilidade do espaço amostral.

8.6 MONTANDO OS DADOS COM OS ALUNOS

O professor pode fornecer um dado planificado para cada aluno, para que sejam montados e utilizados para criar composições com o Jogo de Dados de Mozart. A Figura A.1 mostra um dado planificado, que os alunos podem utilizar para montar um dado. Eis os materiais e as instruções para a montagem:

- Material necessário: Impressão dos dados planificados, tesoura, e cola;
- Material opcional: Preenchimento para o dado, como isopor ou algodão;
- Crie uma cópia dos dados planificados na escala que desejar. Os dados da Figura A.1 têm lados de aproximadamente 3,75 cm, quando impressos em tamanho real (folha A4);
- Recorte o contorno;
- Faça as dobras das abas e faces, para obter arestas bem definidas;
- Em cada uma das abas passe uma fina camada de cola no lado destacado e cole no lado interno da face adjacente;
- Recomenda-se iniciar colando as abas das faces 2 e 5 na face 4, em seguida as abas da face 6 nas faces 2 e 5;
- Neste momento é possível preencher o dado com algum material, como isopor ou algodão, antes de fechá-lo;

- Então, feche o dado. Cole as abas dos lados 2 e 5 na face 3, ao mesmo tempo que cola a aba da face 3 no lado 6. Neste passo não há acesso dentro do dado para grudar a aba na face interna. Então, para facilitar o contato delas, deixe as abas levemente mais abertas que um ângulo reto; e
- Por fim, aguarde a cola secar.

Atividade 10: Cada aluno monta seu dado. Este será utilizado para criar composições com o Jogo de Dados de Mozart.

Ao montarem os dados, os alunos estão naturalmente abertos para uma discussão interessante, relacionada ao trabalho manual que estão realizando. Então o professor direciona a conversa para esse tópico. Enquanto conversam, ensinam uns aos outros o que já conhecem sobre o conteúdo. O professor pode usar isso para identificar o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto de probabilidade.

Assim que começarem com o recorte, o professor pergunta:

Pergunta 11: Enquanto vocês montam os dados: com base na sua construção, quais são as faces que vocês imaginam serem as mais prováveis?

Resposta: As faces com maior peso, ou seja, aquelas com mais material (abas e cola), tendem a cair viradas para baixo. Exemplos de raciocínio:

a) As faces terão frequências aproximadamente uniformes, com pouco desvio devido à construção.

b) Contando o número de abas em cada aresta das faces 1 a 6 obtém-se 0, 3, 3, 2, 3 e 3, respectivamente. Com isso, pode-se pensar que a face 1 caia para cima com maior frequência, seguido pela face 4, com frequência intermediária, e então as faces 2, 3, 5 e 6, com frequências menores e semelhantes.

c) O dado não está colado de maneira uniforme, ou seja, está deformado. Não se pode dizer qual é o lado que cairá com maior frequência.

Enquanto os alunos trabalham na construção dos dados, o professor anota no quadro as hipóteses levantadas pelos alunos, ou seja, as suas opiniões, mesmo que incorretas. Quando essas estão registradas, o professor pode pedir para cada um votar na que pensa ser a melhor.

Quando estiverem exaustas as hipóteses dos alunos, outra discussão que o professor pode encaminhar é a seguinte, relacionada ao método que se pode usar para testar tais hipóteses:

Pergunta 12: Como vocês fariam para testar quais são as faces mais prováveis?
Resposta: Lançar o dado diversas vezes e verificar as frequências das faces.

8.7 UM DADO E A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Neste ponto, o professor já levantou duas questões importantes:

- Qual é a distribuição do lançamento de um dado?
- Como testar qual é a distribuição?

Agora, com os dados finalizados, é possível realizar o teste para verificar as hipóteses.

O professor pode recapitular sobre o espaço amostral do lançamento de um dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e iniciar a atividade:

Atividade 13: Por um tempo determinado (por exemplo, de 3 a 5 minutos), cada aluno lança o seu dado e registra os resultados. O aluno deve contar a frequência dos resultados.

O professor pode criar uma pequena disputa entre os grupos: "Qual será o grupo que consegue mais lançamentos?"

A Figura 19 mostra a distribuição de quatro dados, obtidos por 50 lançamentos de cada um. Enquanto mais lançamentos mais próxima a frequência se torna da distribuição real.

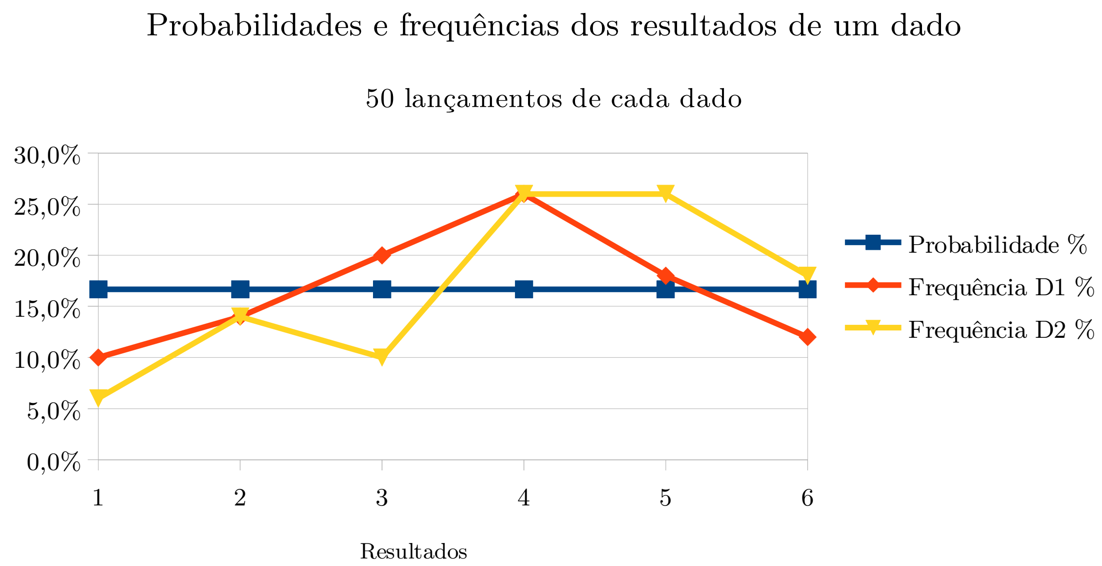
Atividade 14: O grupo faz a soma dos resultados: a contagem das frequências de cada uma das faces. O professor coleta os dados dos grupos, formando uma tabela (Resultados, Grupo 1, Grupo 2, . . . , Total).

O professor pode criar outra pequena disputa, agora entre os alunos do próprio grupo: "E quem foi o campeão de cada grupo?"

Então o professor cria um histograma com os resultados coletivos, como mostra a Figura 20a e, a seguir, discute com os alunos sobre qual das hipóteses levantadas é a mais adequada.

O professor então multiplica as probabilidades pelo número de amostras realizadas e cria as barras para a situação com dados ideais ao lado dos valores experimentais, como mostra a Figura 20a.

a)



b)

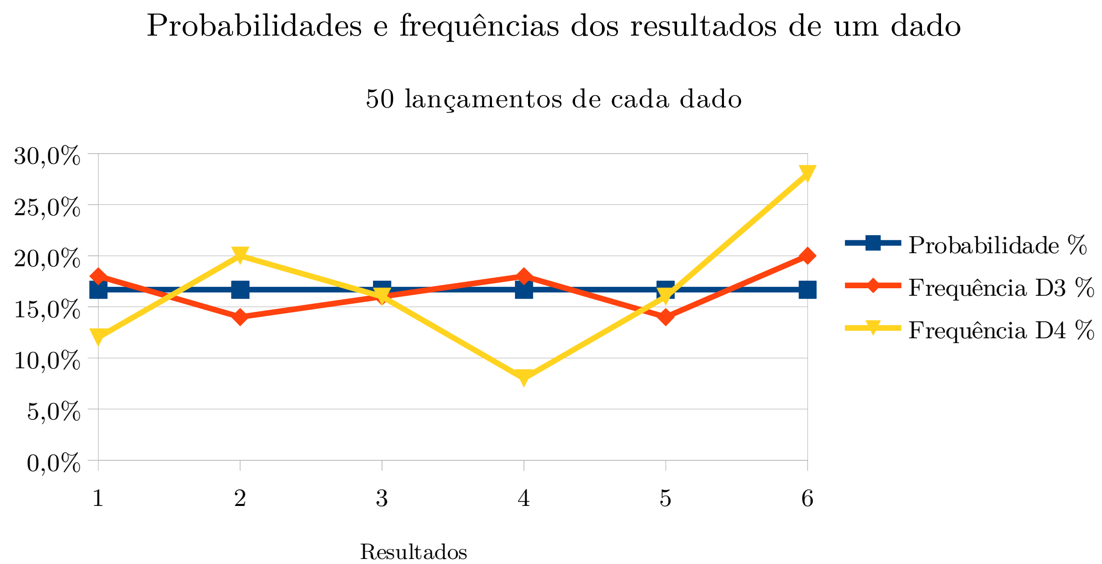
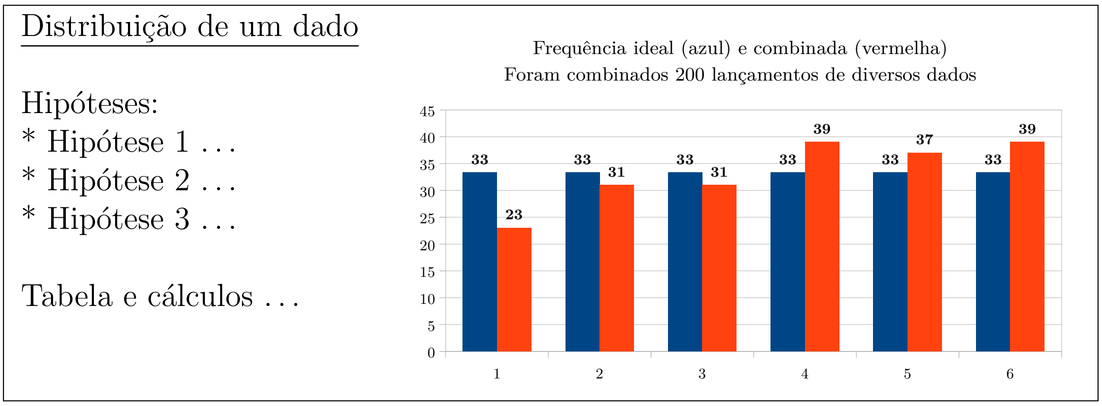


Figura 19: Distribuição de probabilidades (teórico) e frequência (experimental) do lançamento de um dado. a) Dados 1 e 2. b) Dados 3 e 4.
Fonte: Boni et al. (2021a).

a)



b)

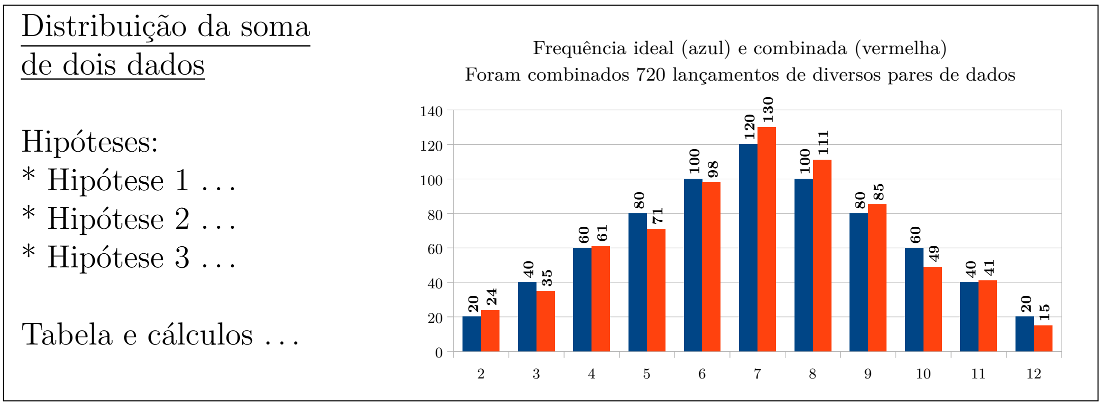


Figura 20: Exemplos de desenvolvimento das distribuições no quadro: a) distribuição uniforme e b) distribuição triangular.
Fonte: Boni et al. (2021a).

É importante lembrar aos alunos que todos os dados da turma estão sendo "misturados" nessa estatística. Dessa forma, os resultados não são específicos de um dado, mas uma média ou combinação deles.

8.8 EVENTOS INDEPENDENTES

O professor então lembra aos alunos sobre o Jogo de Dados de Mozart e que este usa a soma de dois dados para sortear os compassos.

Pergunta 15: Você só tem um dado. Como é possível criar uma composição com o Jogo de Dados de Mozart com apenas esse dado? Justifique a resposta.

Resposta: Ao invés de jogar dois dados para sortear um número de 2 a 12, pode-se jogar o mesmo dado duas vezes e somar os valores dos dois lançamentos. Ao lançar dois dados de uma vez, ambos os dados são eventos independentes. Ao lançar um único dado duas vezes, também se dispõem dois eventos independentes.

Depois de deixar os alunos responderem, o professor discute com eles as possibilidades que levantaram. Os alunos podem dar diversas respostas, por exemplo:

- Jogar duas vezes o mesmo dado e somar os valores (resposta esperada);
- Usar apenas seis linhas da tabela;
- Emprestar um dado do colega; e
- Fazer mais um dado (demorado).

A resposta esperada, permite a discussão sobre eventos independentes, pois o lançamento de cada dado é um evento independente com probabilidades aproximadamente uniformes. Tendo apenas um dado, é possível lançá-lo duas vezes, também resultando em dois eventos independentes de características semelhantes.

8.9 FINALIZANDO A COMPOSIÇÃO

Então os alunos finalizam a composição que iniciaram. Podem utilizar o método que desejarem, exceto algum que exija muito tempo. Novamente o professor utiliza a atividade para direcionar a conversa dos grupos para uma discussão relacionada ao tema da aula.

Atividade 16: Os alunos finalizam a composição do Jogo de Dados de Mozart, lançando os dados e copiando os trechos melódicos.

Pergunta 17: Enquanto vocês escrevem a partitura: vocês acham que existe algum valor das somas que cai mais do que os outros?

Resposta: Levantamento de hipóteses. Exemplos de hipótese:

a) Mesma chance para todos.

b) Chances diferentes para cada um.

Pergunta 18: Como vocês fariam para testar se as probabilidades das somas são iguais ou quais são as mais prováveis?

Resposta: Lançar os dados diversas vezes e verificar as frequências de cada soma, comparando com o valor esperado, o qual é igual ao produto da probabilidade pelo número de lançamentos.

8.10 SOMA DE DOIS DADOS E A DISTRIBUIÇÃO TRIANGULAR

O professor recapitula com os alunos sobre o espaço amostral da soma de dois dados:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

e inicia a atividade:

Atividade 19: Por um tempo determinado (por exemplo, de 3 a 5 minutos), cada aluno lança o seu dado duas vezes, somando os valores e registrando os resultados. O aluno deve contar a frequência dos resultados.

Novamente o professor pode criar pequenas disputas entre os grupos e dentro destes.

A Figura 21 mostra a distribuição de dois pares de dados, obtidos por 360 lançamentos de cada par. Novamente, quanto mais lançamentos, mais próxima a frequência se torna da distribuição real da soma dos dados.

Atividade 20: O grupo faz a soma dos resultados: a contagem das frequências de cada uma das faces. O professor coleta os dados dos grupos, formando uma tabela (Resultados, Grupo 1, Grupo 2, . . . , Total).

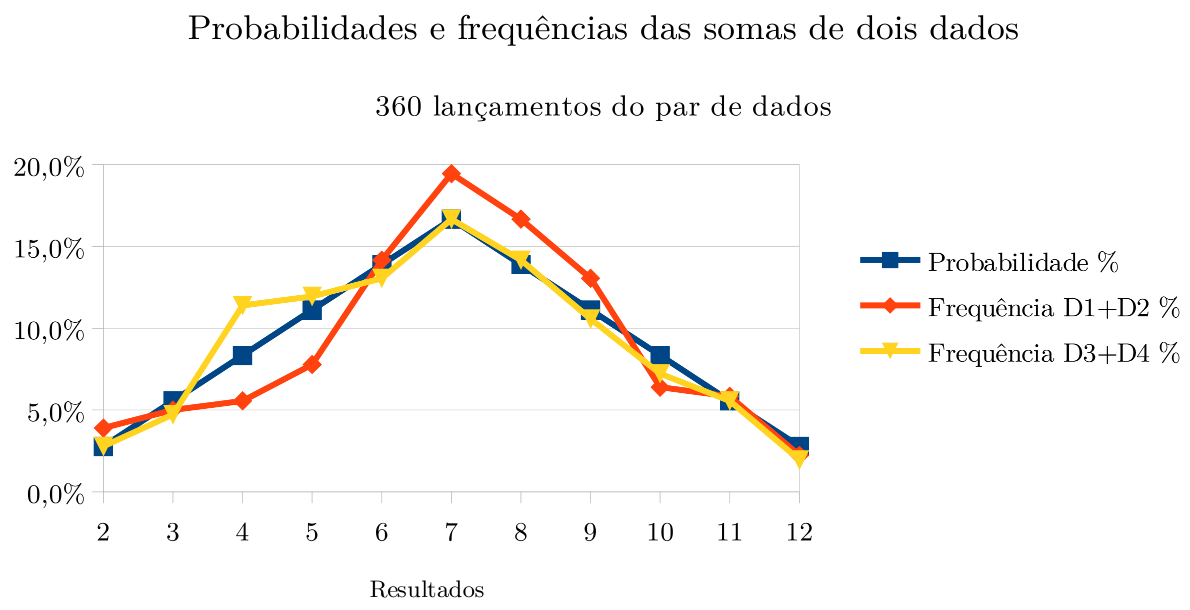


Figura 21: Distribuição de probabilidades e frequência da soma de dois dados. Fonte: Boni et al. (2021a).

Então o professor cria um histograma com os resultados coletivos, como mostra a Figura 20b e, a seguir, discute com os alunos sobre qual das hipóteses levantadas é a mais adequada. Além disso, discute a impossibilidade do uso da distribuição uniforme para modelar a soma de dois dados. A distribuição uniforme não modela bem este experimento aleatório.

Pergunta 21: Por que a distribuição uniforme não modela bem a soma de dois dados? Qual é o formato da distribuição de probabilidades?

Resposta: Porque os resultados não têm probabilidades iguais. O formato da distribuição de probabilidades é triangular.

Pergunta 22: Qual é a explicação probabilística para a distribuição não ser uniforme?

Resposta: Explicar porque os resultados não têm probabilidades iguais: Determinar o espaço amostral do lançamento de dois dados distinguíveis [pares ordenados (D_1, D_2)]:

$$
\begin{aligned}
S_1 = \{ \; & (1,1), && (1,2), && (1,3), && (1,4), && (1,5), && (1,6), \\
& (2,1), && (2,2), && (2,3), && (2,4), && (2,5), && (2,6), \\
& (3,1), && (3,2), && (3,3), && (3,4), && (3,5), && (3,6), \\
& (4,1), && (4,2), && (4,3), && (4,4), && (4,5), && (4,6), \\
& (5,1), && (5,2), && (5,3), && (5,4), && (5,5), && (5,6), \\
& (6,1), && (6,2), && (6,3), && (6,4), && (6,5), && (6,6) \; \}.
\end{aligned}
$$

Explicar como cada uma dessas 36 opções são equiprováveis (probabilidade 1/36). Somando os valores dos dados, há uma forma de se obter 2 ou 12, duas formas de se obter 3 ou 11, assim por diante, e seis formas de se obter 7:

$$\begin{aligned} S &= \{ \begin{array}{llllll} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \end{array} \} \\ &= \{ \; 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \; \}. \end{aligned}$$

Assim, para os resultados 2 a 12, as probabilidades são 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36 e 1/36, respectivamente, como é mostrado na Figura 21.

O professor então multiplica as probabilidades pelo número de amostras realizadas e cria as barras para a situação com dados ideais ao lado dos valores experimentais, como mostra a Figura 20b.

Novamente, lembrar aos alunos que todos os dados da turma estão sendo "misturados" nesta estatística.

8.11 ATIVIDADES

Nesta seção serão enunciadas e resolvidas atividades para os alunos.

Pergunta 23: Quando se cria uma música com o Jogo de Dados de Mozart, qual é a probabilidade de se escolher o trecho melódico 3 para o compasso I?

Resposta: O trecho melódico 3, compasso I, está associado à soma 11 nos dados. Essa soma pode ser gerada de duas formas diferentes: 5+6 e 6+5. Assim, das 36 possibilidades, duas dão a soma desejada, resultando na probabilidade de 2/36.

Pergunta 24: Considerando a composição musical do Jogo de Dados de Mozart, qual é a probabilidade de se escolher o trecho melódico 60 para o compasso II? E o trecho melódico 42 para o compasso III?

Resposta: Seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado na questão anterior, o trecho melódico 60, compasso II, está associado com a soma 8 nos dados, que pode ser produzida de cinco formas diferentes: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3 e 6+2, resultando na probabilidade 5/36. Analogamente, para o trecho melódico 42, compasso III, associado à soma 10, a probabilidade é 3/36.

Pergunta 25: Ao sortear uma melodia com o Jogo de Dados de Mozart, qual é a chance do primeiro compasso ter número maior que 100?

Resposta: Esta questão exige conhecer a soma da união de eventos mutuamente exclusivos.

A chance do primeiro compasso ser maior que 100 é 5/9. No primeiro compasso os números maiores que 100 são: 148, 104, 152 e 119, correspondentes às somas dos dados 6, 7, 8 e 9. $\mathrm{P}\,(c > 100) = \mathrm{P}\,(c = 148) + \mathrm{P}\,(c = 104) + \mathrm{P}\,(c = 152) + \mathrm{P}\,(c = 119) = \mathrm{P}\,(d = 6) + \mathrm{P}\,(d = 7) + \mathrm{P}\,(d = 8) + \mathrm{P}\,(d = 9) = 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 = 20/36 = 5/9 = 0,555\ldots$

Pergunta 26: Foi deixado como tarefa para um aluno de música que ele componha uma peça com o Jogo de Dados de Mozart. No entanto, ele perdeu a terceira folha das partituras (que inclui os trechos melódicos de 89 a 128 [deixar os alunos consultarem]). Qual é a chance dele conseguir compor o compasso II sem usar a folha que falta?

Resposta: Conhecer a probabilidade do evento complementar simplifica a resolução.

No compasso II, o único trecho melódico dentro do intervalo que não está disponível é o de número 95. A probabilidade dele ocorrer é $\mathrm{P}\,(c = 95) = \mathrm{P}\,(d = 4) = 3/36 = 1/12 = 0,08333\ldots$ Assim, a probabilidade de não ser necessária a folha faltante ao ser sorteado o compasso II, é igual a $\mathrm{P}\,(c \neq 95) = 1 - \mathrm{P}\,(c = 95) = 0,91666\ldots$

Pergunta 27: Qual é a probabilidade da linha 2 não ser sorteada em uma composição do Jogo de Dados de Mozart? E da linha 7?

Resposta: A probabilidade da linha 2 não ser sorteada uma vez é $1 - 1/36 = 35/36 \approx 97$ %. Portanto, para ela não ser sorteada 16 vezes em sequência, a probabilidade é $(1 - 1/36)^{16} = (35/36)^{16} \approx 64$ %.

A probabilidade da linha 7 não ser sorteada uma vez é $1 - 6/36 = 30/36 \approx 83$ %. Portanto, para ela não ser sorteada 16 vezes em sequência, a probabilidade é $(1 - 6/36)^{16} = (30/36)^{16} \approx 5,4$ %.

Pergunta 28: Qual é a chance de uma certa música ser sorteada no Jogo de Dados de Mozart? Considere os compassos a seguir:

$$40 - 157 - 42 - 53 - 99 - 55 - 36 - 107 - 25 - 71 - 64 - 34 - 67 - 115 - 52 - 93.$$

Resposta: Esta questão exige que se conheça a probabilidade de eventos independentes.

A chance destes compassos serem sorteados é de aproximadamente $3,26 \times 10^{-15}$.

Estes compassos correspondem às somas:

$$5 - 7 - 10 - 8 - 8 - 4 - 6 - 6 - 6 - 7 - 6 - 5 - 5 - 9 - 5 - 6.$$

Como o sorteio de cada um dos compassos (cada uma das somas) é independente, é possível multiplicá-las:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(compassos\right) &= \mathrm{P}\left(d=5\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=7\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=10\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=8\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=8\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=4\right) \cdot \\ &\quad \mathrm{P}\left(d=6\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=6\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=6\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=7\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=6\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=5\right) \cdot \\ &\quad \mathrm{P}\left(d=5\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=9\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=5\right) \cdot \mathrm{P}\left(d=6\right) \\ &= \frac{4}{36}\frac{6}{36}\frac{3}{36}\frac{5}{36}\;\frac{5}{36}\frac{3}{36}\frac{5}{36}\frac{5}{36}\;\frac{5}{36}\frac{6}{36}\frac{5}{36}\frac{4}{36}\;\frac{4}{36}\frac{4}{36}\frac{4}{36}\frac{5}{36} \\ &= \frac{3^2 \cdot 4^5 \cdot 5^7 \cdot 6^2}{36^{16}} \\ &\approx 3,26 \times 10^{-15}. \end{aligned}$$

Pergunta 29: Quais são as composições de **menor** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: São $2^{16} = 65536$ as combinações de menor probabilidade: 2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2, 12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12 e qualquer combinação formadas pelas somas 2 e 12. A probabilidade de cada uma delas é $1/36^{16}$. As somas dos dados 2 e 12 possuem a menor probabilidade de ocorrer, sendo o valor destas probabilidades igual a $1/36$. Assim, a probabilidade de cada uma destas composições é $1/36^{16} \approx 1,3 \cdot 10^{-25}$.

Pergunta 30: Quais são as composições de **maior** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: Apenas uma combinação tem a maior probabilidade: 7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7. A probabilidade é $(6/36)^{16} = 1/6^{16}$. A soma dos dados 7 possui a maior probabilidade de ocorrer, sendo o valor desta probabilidade igual a $6/36 = 1/6$. Assim, a probabilidade dessa composição é $1/6^{16} \approx 3,5 \cdot 10^{-13}$.

8.11.1 Trechos melódicos iguais

O Jogo de Dados de Mozart apresenta algumas peculiaridades quanto a melodias repetidas em um mesmo compasso:

- O compasso VIII tem sempre a mesma melodia; e
- O compasso XVI tem duas melodias. Uma delas está associada apenas com a

soma 11 e a outra está associada com as outras 10 somas.

Os alunos podem grifar a coluna do compasso VIII toda e a coluna do compasso XVI, exceto a linha 11, para indicar os trechos melódicos idênticos.

A informação acima foi omitida até este momento com o objetivo de simplificar o raciocínio nas atividades anteriores. Agora, conhecendo esta particularidade do Jogo de Dados de Mozart, os alunos podem rever algumas das questões anteriores, o que pode ser deixado como tarefa de casa. As questões abaixo são idênticas a questões anteriores, porém a seguir consideram-se os fragmentos melódicos repetidos em um mesmo compasso.

Pergunta 31: No Jogo de Dados de Mozart, quantas composições se pode criar?

Resposta: Dos compassos, 14 deles têm 11 resultados com melodias diferentes, um tem apenas uma melodia, independente do resultado do dado, e o último tem duas melodias diferentes. Assim, há cerca de 759 trilhões de possibilidades de composições no Jogo de Dados de Mozart, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 1 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 2}_{\text{16 compassos}}$$
$$= 2 \times 11^{14} = 759.499.667.166.482$$
$$\approx 759 \times 10^{12} \quad \text{(759 trilhões).}$$

Para dar uma noção do tamanho do número: há aproximadamente 97.400 composições para cada uma das 7,8 bilhões de pessoas no mundo.

Pergunta 32: Quanto tempo demora para tocar todas as composições do Jogo de Dados de Mozart, uma por vez?

Resposta: Uma composição demora cerca de 50 segundos para ser executada. Então, basta multiplicar o número de composições pelo tempo de execução e converter segundos para anos:

$$759 \times 10^{12} \text{ composições} \times \tfrac{\text{50 segundos}}{\text{1 composição}} \times \tfrac{\text{1 minuto}}{\text{60 segundos}} \times \tfrac{\text{1 hora}}{\text{60 minutos}} \times \tfrac{\text{1 dia}}{\text{24 horas}} \times \tfrac{\text{1 ano}}{\text{365 dias}}$$
$$\approx 1,2 \times 10^9 \text{ anos} \quad \text{(1,2 bilhões de anos).}$$

Assim, são necessários cerca de 1,2 bilhões de anos para se executarem todas as composições, uma por vez, quando são tomados 50 segundos para cada.

Pergunta 33: Quais são as composições de **menor** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: São $2^{14} = 16384$ as composições de menor probabilidade: 2-2-2-2-2-2-2-x-2-2-2-2-2-2-2-11, 12-12-12-12-12-12-12-x-12-12-12-12-12-12-12-11, onde x varia de 2 a 12, e qualquer combinação das somas 2 e 12 nos compassos I a VII e IX a XV. Cada uma dessas composições pode ser sorteada de 11 formas diferentes, devido às possibilidades equivalentes do compasso VIII. A probabilidade de cada uma das composições é $1/36^{14} \cdot 1/1 \cdot 2/36 = 2/36^{15} \approx 9,0 \cdot 10^{-24}$. Duas dessas composições são mostradas na Figura 22 e na Figura 23.

Figura 22: Primeiro minueto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* ⟨https://youtu.be/pDRBpPjWmr0⟩.

Figura 23: Segundo minueto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* ⟨https://youtu.be/zVCrVBj4Iz4⟩.

Pergunta 34: Quais são as composições de **maior** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: Existe apenas uma composição de maior probabilidade: 7-7-7-7-7-7-7-x-7-7-7-7-7-7-7-y, onde x varia de 2 a 12 e y varia de 2 a 12 exceto 11, podendo ser sorteada de 110 formas diferentes. A probabilidade é $(6/36)^{14} \cdot 1/1 \cdot 34/36 = 34/6^{16} \approx 1,2 \cdot 10^{-11}$. Esta composição é mostrada na Figura 24.

Figura 24: Minueto com maior probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart. Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* ⟨https://youtu.be/AhqM99P_kKs⟩.

8.11.2 Distribuições de outras fontes de aleatoriedade

Pergunta 35: Existem dados de 12 e de 20 lados, os quais também possuem números iniciando em um. Como você faria para usar um desses dados para sortear os compassos do Jogo de Dados de Mozart?

Resposta: No Jogo de Dados de Mozart se utilizam os números de 2 a 12. Basta lançar um desses dados até ser sorteado um número nesse intervalo, descartando outros valores.

Pergunta 36: Ao usar um dado de 12 ou de 20 lados no Jogo de Dados de Mozart, podemos desconsiderar os lançamentos que estão fora dos valores utilizados na tabela. Com dados de 12 ou de 20 lados, qual é a probabilidade de sair um lançamento no intervalo utilizado pelo jogo?

Resposta: O intervalo utilizado pelo Jogo de Dados de Mozart são os números de 2 a 12. Para o dado de 12 lados, a probabilidade de sucesso é de $11/12 \approx 92$ %. Para o dado de 20 lados, a probabilidade de sucesso é $11/20 = 55$ %. Estas distribuições são mostradas na Figura 25a.

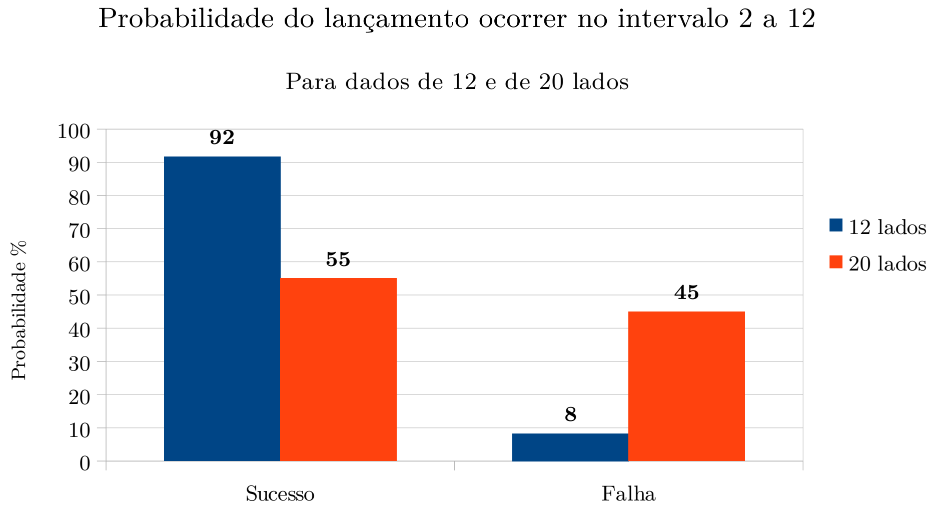
O professor complementa com uma curiosidade: "Existem diversas distribuições de probabilidades. Por exemplo, a uniforme e a triangular, as quais já vimos. A distribuição que possui dois resultados (0 ou 1, falha ou sucesso, evento ocorre ou não) é chamada de distribuição de Bernoulli. Se a probabilidade de sucesso é p ($0 \leq p \leq 1$) a probabilidade de falha é $1 - p$."

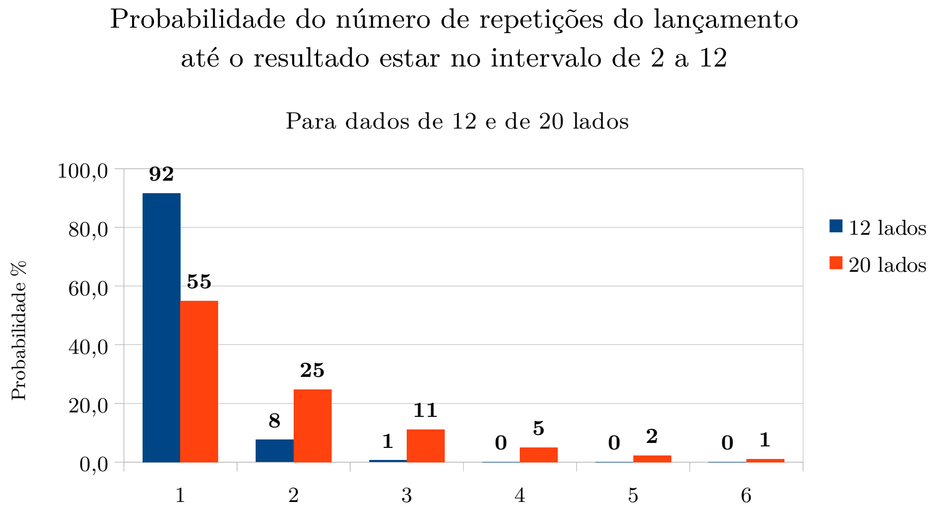
Pergunta 37: Quando se usa um dado de 12 ou de 20 lados no Jogo de Dados de Mozart, descartando os resultados fora do intervalo de 2 a 12, quantas vezes é preciso jogar o dado até sair um resultado dentro desse intervalo? Qual é a probabilidade do resultado estar nesse intervalo já no primeiro lançamento? Qual é a probabilidade disso ocorrer no segundo lançamento? E no terceiro? E no lançamento número n?

Resposta: Os lançamentos são eventos independentes e sempre há possibilidade de, no próximo lançamento, cair um valor fora do intervalo desejado. Dessa forma, não se sabe quantos lançamentos serão necessários.

Para o dado de 12 lados, a probabilidade de sucesso já na primeira tentativa é de 92 %, sucesso apenas na segunda é de 7 %, sucesso apenas na terceira é de 1 % e sucesso apenas na tentativa número n é de $(11/12) \cdot (1/12)^{n-1}$. Para o dado de 20 lados, a probabilidade de sucesso já na primeira tentativa é de 55 %, sucesso apenas na segunda é de 25 %, sucesso apenas na terceira é de 11 % e sucesso apenas na tentativa número n é de $(11/20) \cdot (9/20)^{n-1}$. Estas distribuições são mostradas na Figura 25b.

O professor complementa com uma curiosidade: "Estas são distribuições geométricas. São chamadas assim pelas probabilidades seguirem uma PG (progressão geométrica). Quando se repete um experimento até se obter sucesso, o número de tentativas até o sucesso segue uma distribuição geométrica. Para um experimento com probabilidade p de sucesso, a probabilidade de se repetir n vezes até se obter sucesso é $\mathrm{P}\,(\text{repetições} = n) = p(1-p)^{n-1}$."

a) 

b) 

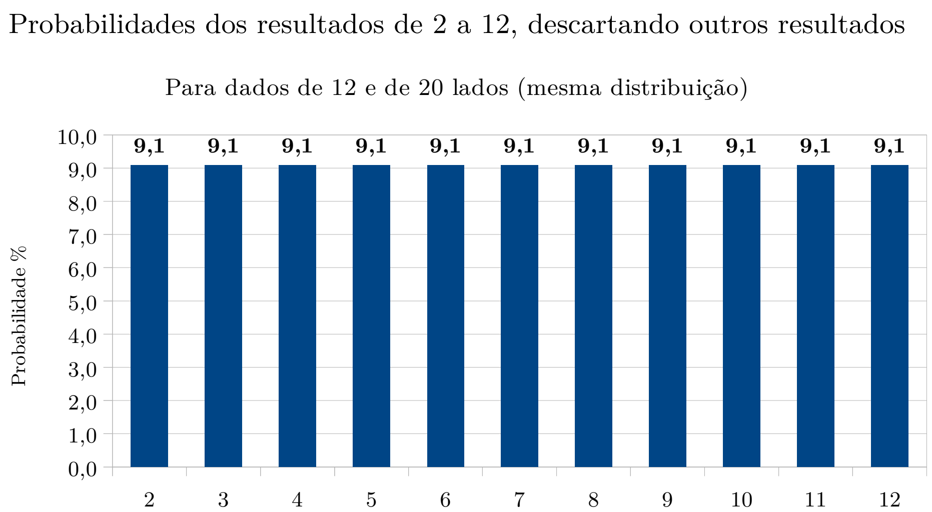
c) 

Figura 25: Distribuições de probabilidades para dados de 12 e de 20 lados.
Fonte: Autoria própria (2021).

Pergunta 38: No Jogo de Dados de Mozart, ao usar um dado de 12 ou de 20 lados, descartando valores fora do intervalo de 2 a 12, qual é a distribuição que seguem os valores aceitos?

Resposta: Considerando dados ideais de 12 ou de 20 lados, estes têm um total de 12 ou 20 resultados equiprováveis, respectivamente, sendo que os resultados fora do intervalo de 2 a 12 são descartados. Dessa forma, os resultados de 2 a 12 continuam sendo equiprováveis, porém não se permite que ocorram os outros valores. Assim, independentemente de ser um dado de 12 ou de 20 lados, há 11 resultados equiprováveis, cada um com probabilidade $1/11 \approx 9$ %, seguindo uma distribuição uniforme, como mostra a Figura 25c.

Pode-se demonstrar isso utilizando a probabilidade condicional: Sendo A o evento onde o resultado se encontra no intervalo de 2 a 12 e B o evento onde o resultado é um valor específico nesse intervalo, por exemplo o número 3. Deseja-se calcular a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu, ou seja, é necessário calcular $\mathrm{P}(B|A)$:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{11}{N}} = \frac{1}{11},$$

onde N é o número de lados do dado.

Pergunta 39: Para mudar um pouco o Jogo de Dados de Mozart, decidiu-se ignorar o lançamento dos dados quando cai algum par, por exemplo, quando ambos os dados lançados têm resultados iguais a 1. a) Qual é a probabilidade de cair um par? b) Qual é a probabilidade de precisar repetir o lançamento n vezes até cair um par? c) Seguindo esta lógica para criar uma composição, qual é a distribuição de probabilidades dos resultados de 2 a 12 serem sorteados no jogo?

Resposta: a) Ao lançar dois dados, a probabilidade de cair um par é de 6/36 = 1/6, ou seja, ela segue a distribuição de Bernoulli com $p = 1/6$. Essa distribuição pode ser vista na Figura 26a.

b) A probabilidade de ser necessário repetir o lançamento n vezes até cair um par é de $\mathrm{P}(\text{repetições} = n) = p(1-p)^{n-1}$, ou seja, esta segue uma distribuição geométrica com $p = 1/6$. Essa distribuição pode ser vista na Figura 26b.

c) Dos 36 pares ordenados equiprováveis, os seis correspondentes aos pares são descartados, restando 30 resultados equiprováveis, cada um com probabilidade 1/30. Assim, considerando as somas de cada um destes resultados, obtêm-se os seguintes valores para as probabilidades:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{2\}) &= 0/30, & \mathrm{P}(\{8\}) &= 4/30,\\ \mathrm{P}(\{3\}) &= 2/30, & \mathrm{P}(\{9\}) &= 4/30,\\ \mathrm{P}(\{4\}) &= 2/30, & \mathrm{P}(\{10\}) &= 2/30,\\ \mathrm{P}(\{5\}) &= 4/30, & \mathrm{P}(\{11\}) &= 2/30,\\ \mathrm{P}(\{6\}) &= 4/30, & \mathrm{P}(\{12\}) &= 0/30,\\ \mathrm{P}(\{7\}) &= 6/30. \end{aligned}$$

Essa distribuição pode ser vista na Figura 26c.

Pergunta 40: Para criar uma composição musical com o Jogo de Dados de Mozart, o professor te dá dois dados modificados, onde os dois números 4 foram apagados e substituídos pelo número 3. Como fica a distribuição das probabilidades das somas desses dois dados? Ou seja, ambos os dados têm faces 1, 2, 3, 3, 5 e 6. Quais são os valores das probabilidades dos resultados de 2 a 12?

Resposta: A partir dos 36 pares ordenados equiprováveis, basta contar o número destes que correspondem à cada uma das somas de 2 a 12, resultando nos valores a seguir:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{2\}) &= 1/36, & \mathrm{P}(\{8\}) &= 6/36,\\ \mathrm{P}(\{3\}) &= 2/36, & \mathrm{P}(\{9\}) &= 4/36,\\ \mathrm{P}(\{4\}) &= 5/36, & \mathrm{P}(\{10\}) &= 1/36,\\ \mathrm{P}(\{5\}) &= 4/36, & \mathrm{P}(\{11\}) &= 2/36,\\ \mathrm{P}(\{6\}) &= 6/36, & \mathrm{P}(\{12\}) &= 1/36,\\ \mathrm{P}(\{7\}) &= 4/36. \end{aligned}$$

Essa distribuição pode ser vista na Figura 27.

Pergunta 41: Ao criar uma composição do Jogo de Dados de Mozart com uma moeda, escolhendo entre as linhas 2 e 3, quais são as probabilidades de cada uma das linhas? Qual é a distribuição correspondente?

Resposta: As probabilidades do lançamento de uma moeda são: 50 % cara (K) e 50 % coroa (C). Dessa forma, as linhas 2 e 3 têm probabilidades de 50 % de serem escolhidas, enquanto as outras 9 linhas não têm chance alguma. Esta é uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $p = 0,5$, que é mostrada na Figura 28a.

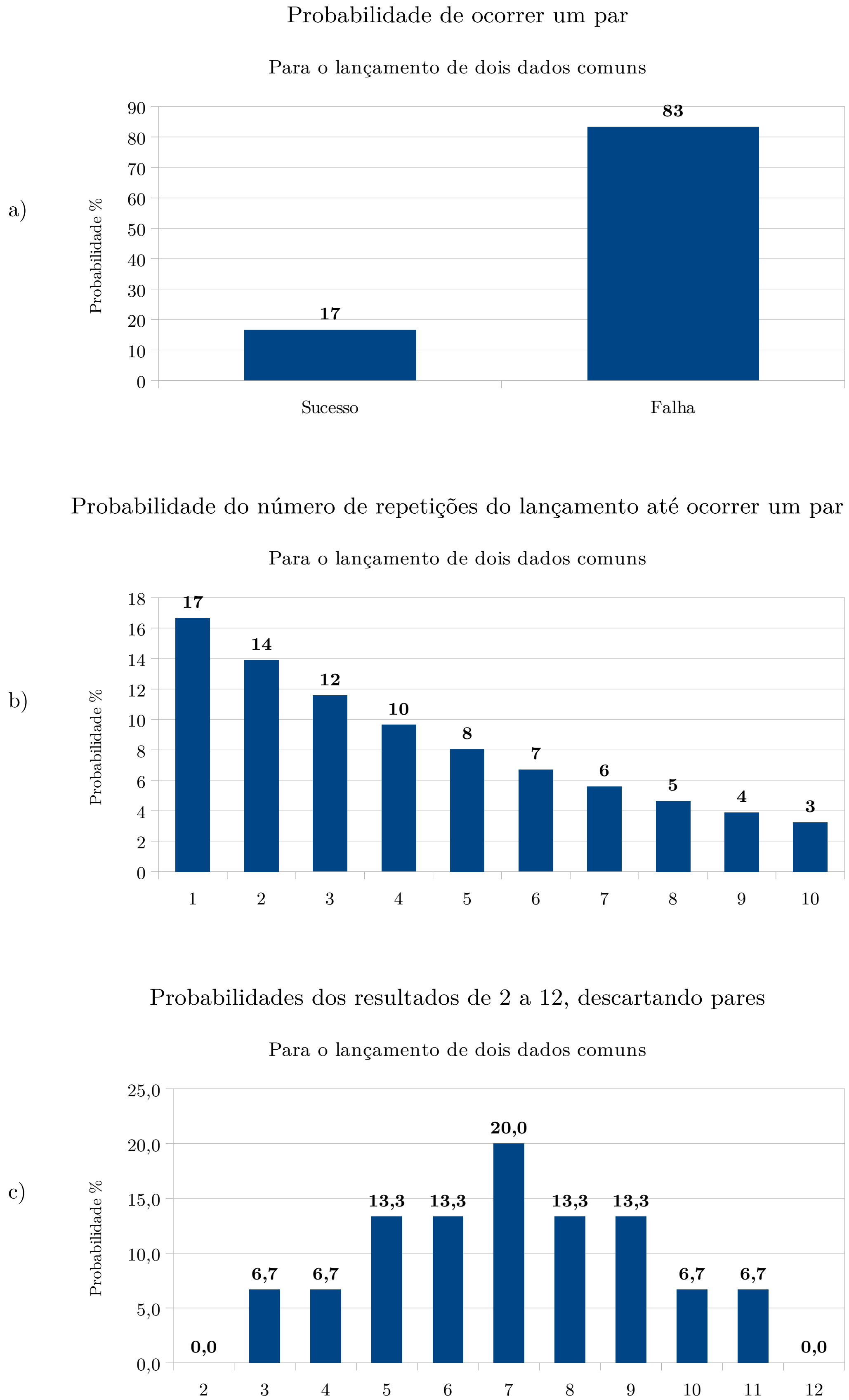


Figura 26: Distribuições de probabilidades para soma de dois dados, descartando pares. Fonte: Autoria própria (2021).

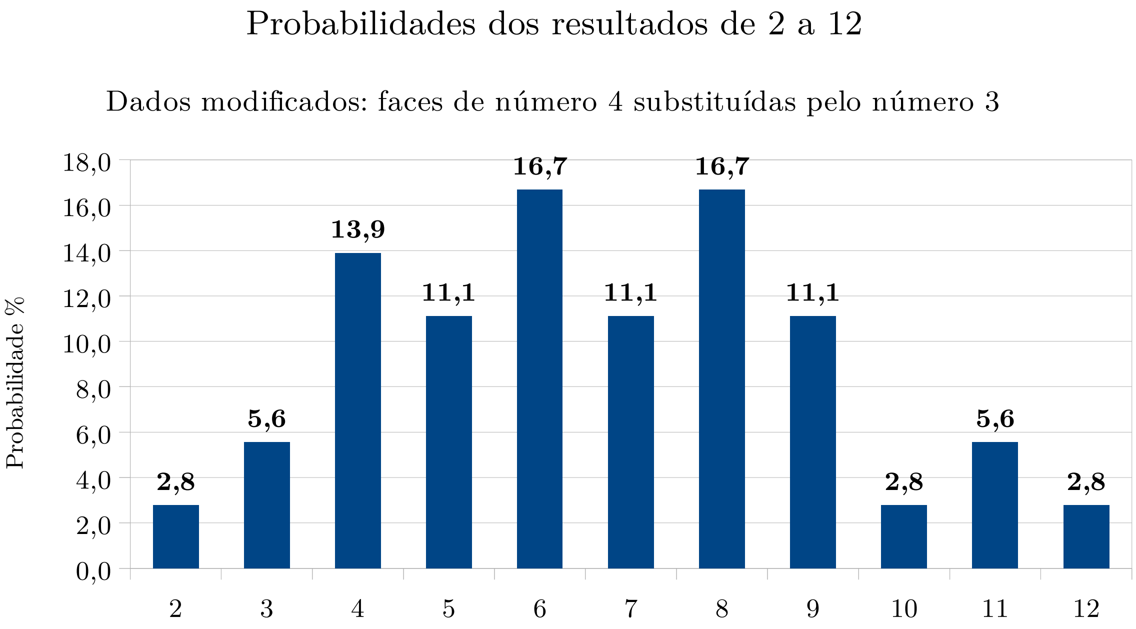


Figura 27: Distribuições de probabilidades para soma de dois dados modificados. Fonte: Autoria própria (2021).

Pergunta 42: Sabe-se que no Jogo de Dados de Mozart, pode-se utilizar um dado em vez de dois. No entanto, na ausência de dados, quantas moedas seriam necessárias para substituir um dado, de forma que todas as faces tenham resultados correspondentes? Quais são as probabilidades dos resultados?

Resposta: São necessárias cinco moedas para substituir um dado, de forma que, quando são lançadas, possam gerar seis resultados diferentes: 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 caras. Para se obterem resultados de 1 a 6, como nos dados, basta somar o número 1 ao número de caras no lançamento das moedas.

Para se determinarem as probabilidades, basta considerar os $2^5 = 32$ quintetos ordenados formados pelo lançamento de moedas, os quais são equiprováveis, e contar quantos têm números de caras de 0 até 5. Há apenas uma forma de haver nenhuma cara, há cinco formas de formar uma cara e assim por diante, realizando combinações. Dessa forma se obtêm as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{0\}) &= C_{5,0}/32 = 1/32, & \mathrm{P}(\{3\}) &= C_{5,3}/32 = 10/32, \\ \mathrm{P}(\{1\}) &= C_{5,1}/32 = 5/32, & \mathrm{P}(\{4\}) &= C_{5,4}/32 = 5/32, \\ \mathrm{P}(\{2\}) &= C_{5,2}/32 = 10/32, & \mathrm{P}(\{5\}) &= C_{5,5}/32 = 1/32, \end{aligned}$$

que são mostradas na Figura 28b. Na figura, no entanto, os resultados das moedas têm o valor 1 somado, como foi explicado acima.

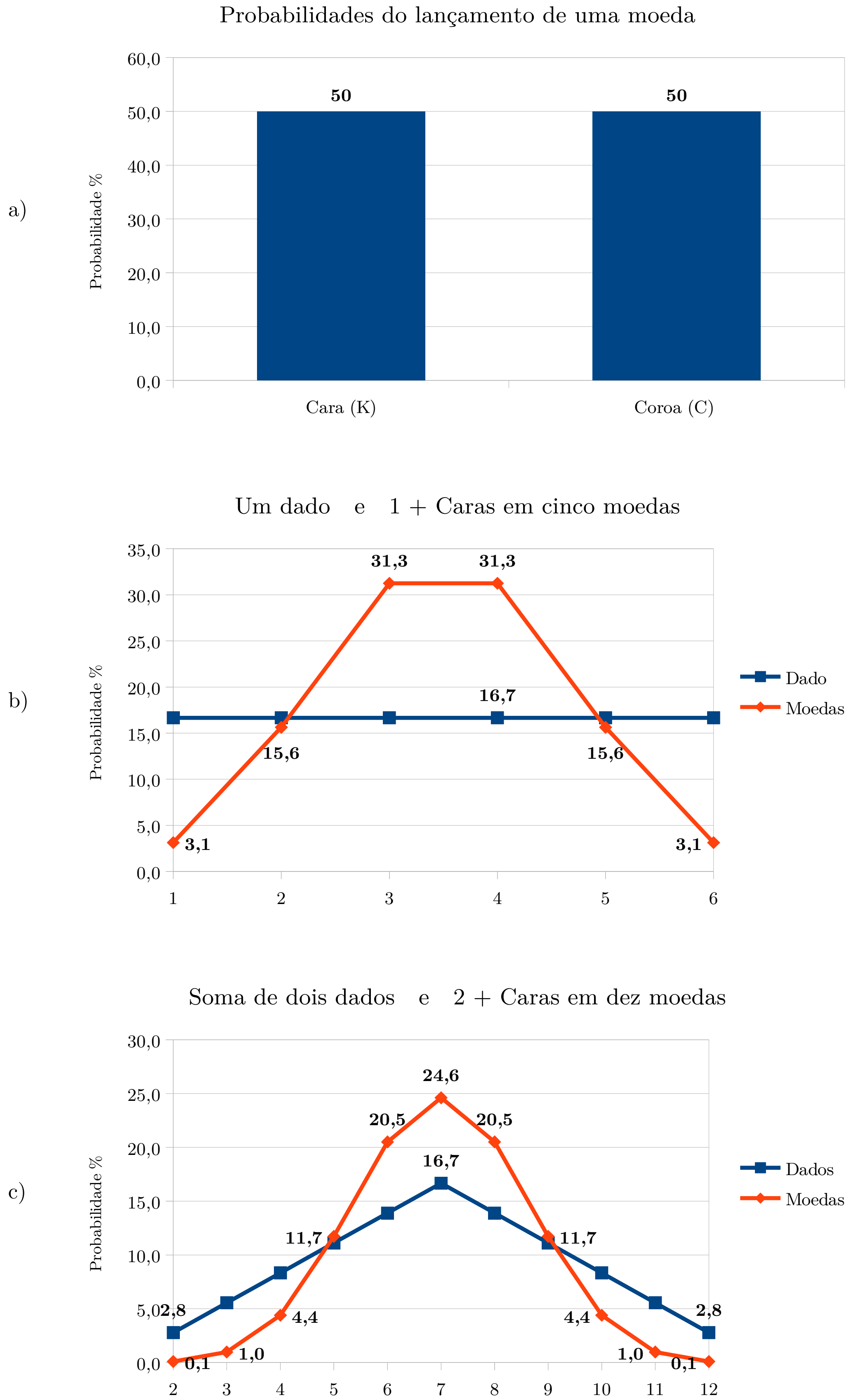


Figura 28: Comparação do lançamento de dados com o lançamento de moedas. Fonte: Autoria própria (2021).

O professor complementa com uma curiosidade: "A distribuição das moedas é chamada de distribuição binomial. Esta distribuição é formada ao somar o número de sucessos em n experimentos com probabilidade p de sucesso. A probabilidade de x sucessos é igual a $\mathrm{P}(\text{sucessos} = x) = \mathrm{C}_{n,x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$."

Pergunta 43: Como você faria para usar moedas, ao invés de dados, para sortear os compassos do Jogo de Dados de Mozart? Ou seja, quantas moedas são necessárias para substituir um par de dados? Como é essa distribuição?

Resposta: Podem ser utilizadas 10 moedas e contar o número de caras, o que dá um número de 0 a 10. Em seguida, é somado o valor 2, para se obter números de 2 a 12. Isso é equivalente a sortear dois valores de 1 a 6, cada um com cinco moedas, como foi feito na pergunta anterior, e somá-los.

Esta é uma distribuição binomial, onde se conta o número de sucessos (cara na moeda) em 10 experimentos. São um total de $2^{10} = 1024$ dezenas ordenadas, onde múltiplas delas podem somar o mesmo número de caras. As probabilidades para o lançamento de 10 moedas são:

$$
\begin{array}{lllll lllll}
\mathrm{P}(\{0\}) & = & \mathrm{C}_{10,0}/1024 & = & 1/1024, & \mathrm{P}(\{6\}) & = & \mathrm{C}_{10,6}/1024 & = & 210/1024, \\
\mathrm{P}(\{1\}) & = & \mathrm{C}_{10,1}/1024 & = & 10/1024, & \mathrm{P}(\{7\}) & = & \mathrm{C}_{10,7}/1024 & = & 120/1024, \\
\mathrm{P}(\{2\}) & = & \mathrm{C}_{10,2}/1024 & = & 45/1024, & \mathrm{P}(\{8\}) & = & \mathrm{C}_{10,8}/1024 & = & 45/1024, \\
\mathrm{P}(\{3\}) & = & \mathrm{C}_{10,3}/1024 & = & 120/1024, & \mathrm{P}(\{9\}) & = & \mathrm{C}_{10,9}/1024 & = & 10/1024, \\
\mathrm{P}(\{4\}) & = & \mathrm{C}_{10,4}/1024 & = & 210/1024, & \mathrm{P}(\{10\}) & = & \mathrm{C}_{10,10}/1024 & = & 1/1024, \\
\mathrm{P}(\{5\}) & = & \mathrm{C}_{10,5}/1024 & = & 252/1024, & & & & &
\end{array}
$$

que são mostradas na Figura 28c. Na figura, no entanto, os resultados das moedas têm o valor 2 somado, como foi explicado acima.

8.11.3 Atividades avançadas

Pergunta 44: Para compor um minueto com o Jogo de Dados de Mozart, um aluno usa 32 dados. Ele os lança, organizando-os em ordem crescente. Então pega os dados, dois a dois, primeiro os menores, para escolher os compassos. Qual é a chance de ser sorteado o trecho número 96 no compasso I?

Resposta: O fragmento musical número 96, está associado à soma dos dados igual a 2 do compasso I. Assim, para os menores valores nos dados sortearem esse compasso, é preciso de no mínimo duas faces iguais a 1. Qual é a chance de cair no máximo uma face igual a 1 em todos os dados lançados? A chance de nenhum dado cair um é $(5/6)^{32}$. A chance de apenas um dado cair um $(1/6) \cdot (5/6)^{31}$. Assim, a chance de cair zero ou uma face igual a 1 nos dados é a soma dessas duas probabilidades, calculando-se o valor $(5/6)^{31}$. Portanto, a probabilidade disso não acontecer é de $1-(5/6)^{31} \approx 99,6$ %.

Pergunta 45: Obtenha uma composição do Jogo de Dados de Mozart cuja probabilidade de ser sorteada é igual a $9.765.625/36^{14}$.

Resposta: As probabilidades das somas dos dados podem ser escritas na forma $a/36$ com $a \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Assim, multiplique o numerador e o denominador pelo número que faz o denominador se tornar 36^{16}. A seguir, reescreva o numerador em potências de números primos e agrupe as potências de números primos em 16 números de 1 a 6:

$$\frac{9.765.625}{36^{14}} = \frac{5^{10}}{36^{14}} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{10}}{36^{16}}.$$

Com os números primos 2, 3 e 5, juntos à unidade, é possível multiplicá-los para compor os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, os quais devem ser divididos em 16 partes, limitadas entre os valores 1 e 6, sem exceder a quantidade de cada numero primo. O número 5 não pode ser multiplicado por nenhum outro, portanto 10 compassos têm probabilidade 5/36. Os seis compassos restantes devem ter valores 1, 2, 3, 4, ou 6 (exceto 5). Por exemplo, quatro dos outros compassos podem ser formados com probabilidade 6/36 e os dois últimos compassos podem ter probabilidades 1/36. Então, cria-se um minueto composto pelas probabilidades:

$$\frac{1}{36}\ \frac{1}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{6}{36}\ \frac{6}{36}\ \frac{6}{36}\ \frac{6}{36},$$

que podem ser obtidas pelos lançamentos

$$2-2-6-6-6-6-6-6-6-6-6-6-7-7-7-7.$$

Pergunta 46: Quantas são as composições do Jogo de Dados de Mozart cuja probabilidade de serem sorteadas é igual a $9.765.625/36^{14}$?

Resposta: Considerando os denominadores das probabilidades das somas dos dados como 36.

As probabilidades com numerador 1, 2 e 3 podem ser multiplicadas por outros números e as probabilidades com numerador 4, 5 e 6=3·2 não podem ser multiplicadas. Os numeradores 4=2·2 e 6=3·2, no entanto, podem ser divididos pelos primos que os compõem.

Consideram-se todos os números agrupados com os de mesmo valor, pois as permutações são consideradas a seguir. Os numeradores iguais a 5 já estão fixos, pois não podem ser multiplicados ou divididos. De quantas formas é possível reorganizar o restante do numerador $2^4 \cdot 3^4$ em seis partes? Estas são mostradas na Tabela 3 na coluna

"Numeradores das Prob.", em conjunto com os cálculos descritos abaixo.

As probabilidades podem ser permutadas entre qualquer um dos 16 compassos. Assim, cada uma dessas organizações dos fatores primos oferece 16! permutações (o fatorial de 16). No entanto, permutações dos numeradores repetidos não devem ser consideradas e, portanto, divide-se pelo fatorial das quantidades dos números repetidos.

As probabilidades com numerador 1, 2, 3, 4 e 5 (exceto 6) podem ser sorteadas por duas somas diferentes. Portanto, cada probabilidade com numerador diferente de 6 implica em dobrar o número de composições possíveis com tal probabilidade. Assim, eleva-se o número dois à potência do número de compassos cujo numerador da probabilidade é diferente de 6.

Somando todas as permutações possíveis para esta probabilidade, obtém-se o número 83.149.946.880 $\approx$ 83 bilhões de composições com tal probabilidade de ser sorteada.

Tabela 3: Tabela com cálculos do número de composições com uma dada probabilidade de ser sorteada.

Forma	Numeradores das Prob.	Permutações	
1.	5 ... 5 3 3 3 3 4 4	$\frac{16! \cdot 2^{16}}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$	7.872.184.320
2.	5 ... 5 6 3 3 3 4 2	$\frac{16! \cdot 2^{15}}{10! \cdot 3!}$	31.488.737.280
3.	5 ... 5 6 6 3 3 4 1	$\frac{16! \cdot 2^{14}}{10! \cdot 2! \cdot 2!}$	23.616.552.960
4.	5 ... 5 6 6 3 3 2 2	$\frac{16! \cdot 2^{14}}{10! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$	11.808.276.480
5.	5 ... 5 6 6 6 3 2 1	$\frac{16! \cdot 2^{13}}{10! \cdot 3!}$	7.872.184.320
6.	5 ... 5 6 6 6 6 1 1	$\frac{16! \cdot 2^{12}}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$	492.011.520
Total			**83.149.946.880**

Fonte: Autoria própria (2021).

9 PRODUTO EDUCACIONAL

Os produtos educacionais são ferramentas dispostas ao professor, de forma ele possa fazer seu uso de imediato, para serem aplicadas em conjunto com o método de ensino.

Isso pode ser percebido na proposta de criação de mestrados profissionais em ensino, onde Moreira (2004) aponta que, em um mestrado profissional, o mestrando deve contemplar a:

> [...] elaboração de um trabalho final de pesquisa profissional, aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais (MOREIRA, 2004, p. 134).

Dessa forma, foi defendido que em um mestrado profissional em ensino é pertinente levantar esforços para a criação de produtos de natureza educacional, ou seja, o professor mestrando deve organizar ferramentas de ensino, possibilitando que seus colegas profissionais façam seu uso.

No entanto, como citam Leodoro e Balkins (2010), com a regulamentação dos mestrados profissionais pela CAPES, o trabalho final de pesquisa exclusivo nesse formato foi abrandado, colocando-o ao lado de outras possibilidades, como pode ser visto no Diário Oficial da União (DOU) do dia 23 de junho de 2009, que considera que:

> O trabalho de conclusão final do curso [de mestrado profissional] poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, composições, concertos, relatórios finais de pesquisa, softwares, estudos de caso, relatório técnico com regras de sigilo, manual de operação técnica, protocolo experimental ou de aplicação em serviços, proposta de intervenção em procedimentos clínicos ou de serviço pertinente, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, produção artística; sem prejuízo de outros formatos, de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, desde que previamente propostos e aprovados pela CAPES (DOU N° 117, 23 de junho de 2009, s. 1, p. 31).

Uma prática que se pode aplicar, portanto, é a criação de um produto educacional alinhado com o conceito de ensino contextualizado ou interdisciplinar da matemática, que faz uso desses materiais de ensino em conjunto com métodos que favorecem o aprendizado, a criatividade e o interesse do aluno.

Com base nisso, criou-se um produto educacional em formato de *website*[6], contemplando diversos recursos tecnológicos, cujo objetivo é auxiliar o professor na aplicação da proposta de ensino. Uma captura de tela desse *website* é mostrada na Figura 29.

Entre os recursos tecnológicos disponíveis no *website*, encontram-se:

- O vídeo da apresentação "O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade", cuja captura de tela é mostrada na Figura 30, o qual fez parte da aplicação da proposta de ensino e será descrito no Capítulo 10;
- Um vídeo explicativo sobre como criar uma composição do Jogo de Dados de Mozart;
- Diversos vídeos contendo animações de minuetos gerados pelo Jogo de Dados de Mozart sendo executados;
- *Links* para baixar vídeos, áudios e partituras de uma seleção de minuetos;
- *Links* para recursos tecnológicos externos, disponíveis na internet;
- Materiais de ensino, em formato PDF, prontos para impressão, para facilitar o uso da proposta pelo professor; e
- Instruções sobre como criar animações, áudios e partituras de minuetos, utilizando o sistema operacional de código aberto Ubuntu Linux[7].

Enquanto os vídeos hospedados no YouTube e o próprio *website* exigem uma conexão com a internet para serem utilizados, existem arquivos presentes no *website* que, por sua vez, podem ser baixados (*download*) e utilizados sem uma conexão com a rede mundial de computadores.

Para complementar a atividade de ensino, o professor pode ainda utilizar outros recursos tecnológicos, como os exemplos sugeridos no Apêndice B.

[6] O produto educacional (*website*) pode ser encontrado através do *link* de acesso: ⟨https://djboni.github.io/mozart/⟩.

[7] O sistema operacional Ubuntu Linux pode ser executado diretamente de uma mídia removível (*flash-drive*) ou de um CD-ROM, sem modificar o sistema presente no computador. Dessa forma, as animações e outros recursos tecnológicos citados podem ser criados e armazenados em mídias removíveis sem interferir nos programas do computador.

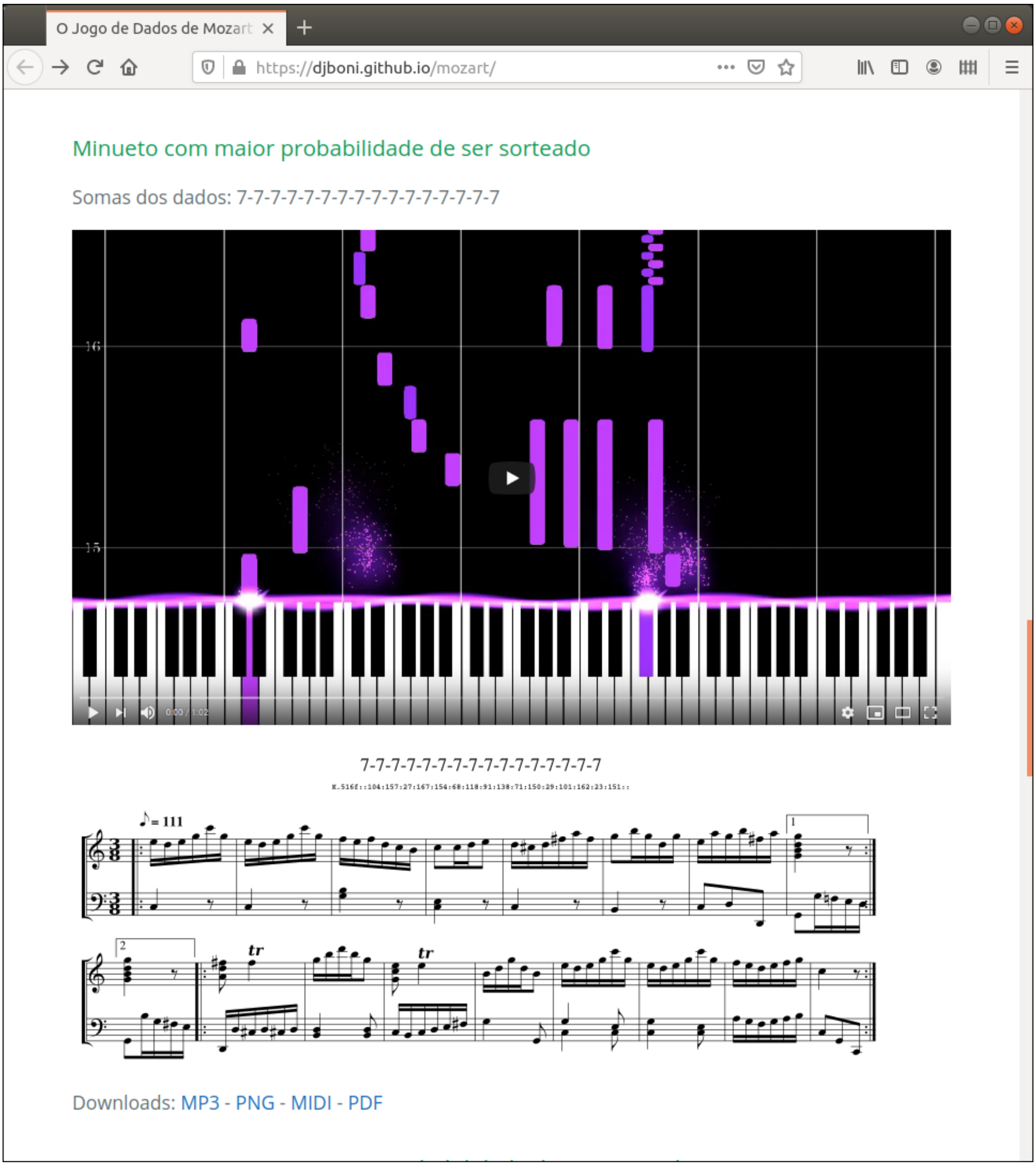


Figura 29: Produto educacional: Captura de tela do *website* com diversos recursos tecnológicos disponíveis para o professor.
Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este *website* pode ser acessado pelo *link* ⟨https://djboni.github.io/mozart/⟩.

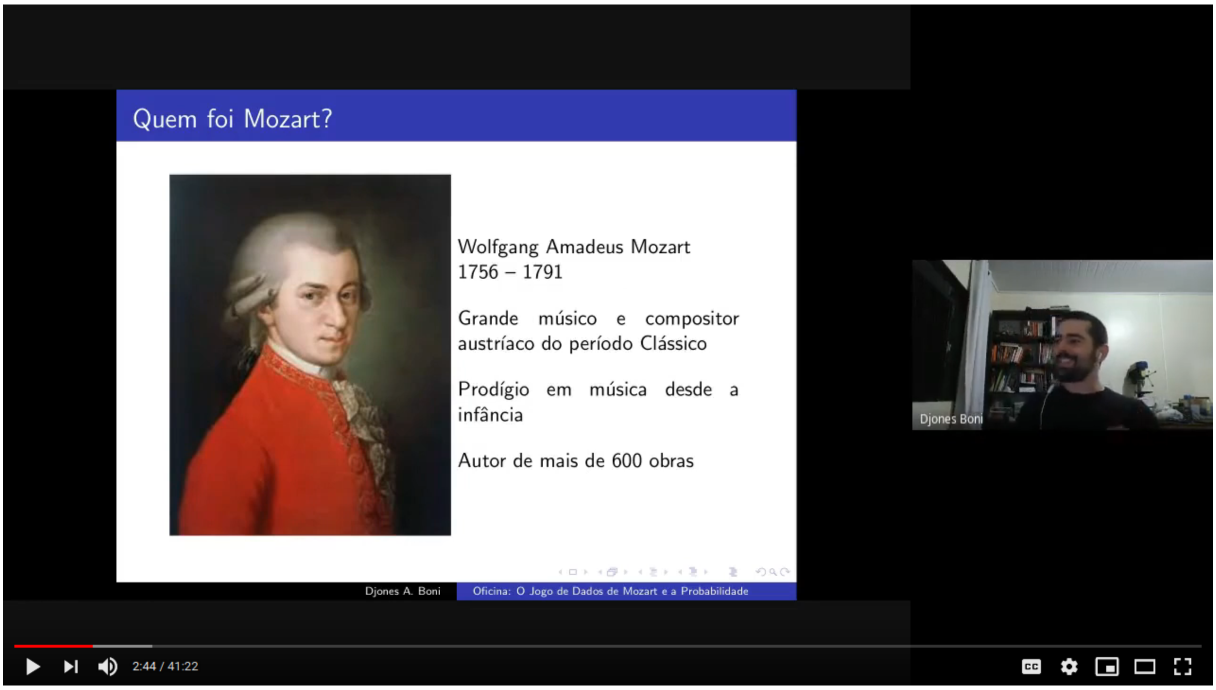


Figura 30: Captura de tela da apresentação "O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade".
Fonte: Autoria própria (2021).
Nota: Este vídeo pode ser assistido acessando o *link* ⟨https://youtu.be/J1G0zlWTWCc⟩.

APÊNDICE A – MATERIAIS PARA OS ALUNOS

Este apêndice contém materiais que o professor pode utilizar com seus alunos no desenvolvimento da proposta de ensino do Capítulo 8.

A Figura A.1 mostra dois dados planificados. Estes podem ser recortados e montados pelos alunos. Materiais e instruções de montagem são descritos na Seção 8.6.

A Tabela A.1 mostra uma folha com duas cópias da tabela de compassos do Jogo de Dados de Mozart. Estas podem ser recortadas e entregues aos alunos, que podem grifar nelas as partes de interesse nas atividades.

A Figura A.2 mostra uma folha com duas cópias de uma partitura em branco. Estas podem ser recortadas e entregues aos alunos, que nelas podem escrever os fragmentos melódicos sorteados.

A Figura A.3 mostra os fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart. Estas podem ser entregues para os grupos, de forma que criem suas composições.

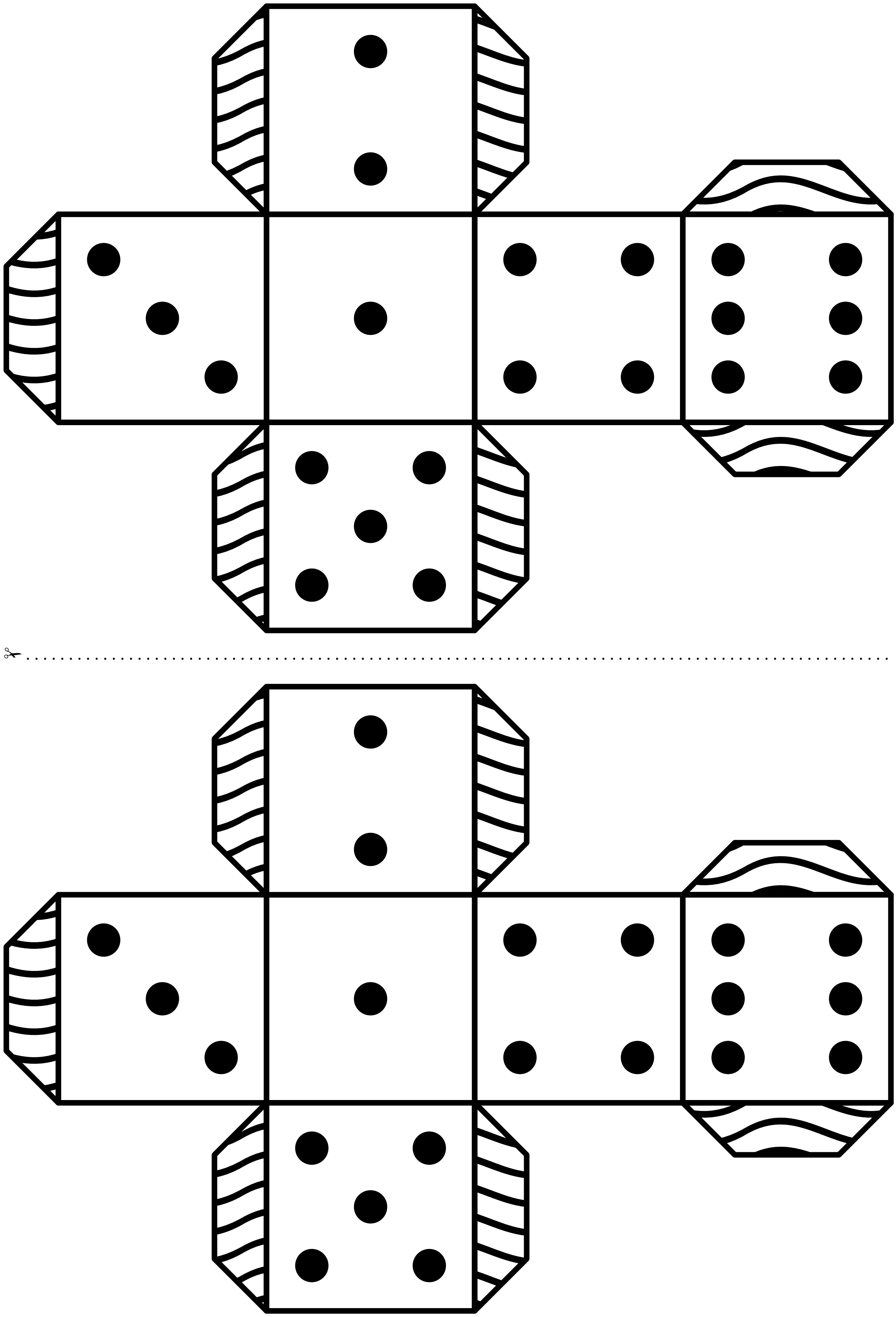


Figura A.1: Dado planificado para recorte e colagem.
Fonte: Autoria própria (2021).

Tabela A.1: Múltiplas tabelas de compassos do Jogo de Dados de Mozart.

Soma dos	**Compassos**															
Dados	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**XI**	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**XVI**
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Soma dos	**Compassos**															
Dados	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**XI**	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**XVI**
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: Adaptado de Mozart (1793).

Figura A.2: Partituras em branco para minuetos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Autoria própria (2021).

O Jogo de Dados de Mozart
Musikalisches Würfelspiel, K.516f

atribuído a W. A. Mozart

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 1/4. Continua na próxima página.

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 2/4. Continua na próxima página.

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 3/4. Continua na próxima página.

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 4/4.

APÊNDICE B – RECURSOS TECNOLÓGICOS EXTERNOS

Ao desenvolver com seus alunos a proposta de ensino disposta no Capítulo 8, além dos produtos educacionais mostrados no Capítulo 9 e dos materiais apresentados no Apêndice A, o professor pode fazer uso de outros recursos tecnológicos, como os exemplos abaixo:

- O Jogo de Dados de Mozart (Português)

  Página: ⟨https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122⟩

  Vídeo: ⟨https://youtu.be/Ubp0MzAhezM⟩

  Esse *website* permite baixar o vídeo acima e um guia do professor, em formato PDF, para utilizar tal vídeo e o Jogo de Dados de Mozart em sala de aula.

  Acesso: dezembro/2020.

- O Jogo de Dados de Mozart — *Musikalisches Würfelspiel* (Português)

  Página: ⟨http://reginaoliveiramusicista.blogspot.com/2018/06/o-jogo-de-dados-de-mozart-musikalisches.html⟩

  Acesso: dezembro/2020.

- *Musikalisches Würfelspiel* (Inglês)

  Página: ⟨https://dice.humdrum.org/⟩

  Neste *website* é possível montar a partitura do Jogo de Dados de Mozart e ouvi-la no navegador.

  Para montar a partitura, clique nos números dos trechos melódicos.

  Para ouvi-la, clique no *link* inferior-direito "*Listen to or print the score*", aguarde carregar e então clique no botão tocar (▷) no canto superior-direito.

  Note que ao ouvir, o programa toca os compassos mostrados em sequência, sem respeitar os símbolos de repetição.

  Acesso: dezembro/2020.

- *W. A. Mozart's Musical Dice Game* (Alemão e Inglês)

  Página em alemão: ⟨https://mozart.qvwx.de/⟩

  Página em inglês: ⟨https://mozart.qvwx.de/index.en.html⟩

  Neste *website* é possível baixar a partitura do minueto composto e o seu áudio.

Para montar a partitura clique em "*Roll!*" e em seguida em "*Compose!*"; então será possível baixar a partitura do minueto composto em formatos PDF ou PNG e baixar o áudio em formatos WAV e MIDI.

Acesso: dezembro/2020.

- *Marian Aldenhövel — Mozart* (Alemão)

  Página: ⟨https://marian-aldenhoevel.de/mozart/⟩

  Este *website* aponta para o recurso supra-citado.

  Acesso: dezembro/2020.

- *Mozart Dice Game Online* (Inglês)

  Página: ⟨http://www.playonlinedicegames.com/mozart⟩

  Neste *website* é possível ouvir composições no navegador.

  Clique nos números dos trechos melódicos para ouvi-los;
  Para tocar uma música, clique em "*Play song...*";
  Para parar a música, clique em "*Stop song*";
  Para tocar indefinidamente, clique em "*Play loop*"; e
  Para gerar uma nova música, clique em "*Generate another song*".

  Acesso: dezembro/2020.

- *Mozart Musical Dice Game* (Inglês)

  Página: ⟨https://play.google.com/store/apps/details?id=com.voody.mmdg⟩

  Neste aplicativo para *smartphones* Android é possível sortear e ouvir composições.

  Para sortear e ouvir, clique em "*ROLL THE DICE!*".

  Acesso: dezembro/2020.

- *Musikalisches Würfelspiel (Musical Dice Game)* (Inglês)

  Página: ⟨http://www.amaranthpublishing.com/MozartDiceGame.htm⟩

  Este *website* contém um programa para o sistema operacional Windows, o qual permite criar minuetos, além de tocar e exportar os arquivos MIDI.

  Basta baixar o arquivo ⟨http://www.amaranthpublishing.com/mozart.zip⟩, extrair os arquivos compactados e executar `Mozart.exe`.

  Acesso: dezembro/2020.