Riesgo de Mercado

Introducción Medida de Riesgo *VaR*

Modelo general de rendimientos

Tomando como base los hechos estilizados de los rendimientos, el modelo individual de los rendimientos de los activos se definirá como:

$$R_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{t+1},$$

$$z_{t+1} \sim \text{i.i.d. } D(0, 1)$$

Por lo tanto, la media y varianza de los rendimientos es:

$$E[R_{t+1}] = \mu_{t+1}$$
$$E[R_{t+1} - \mu_{t+1}]^2 = \sigma_{t+1}$$

Por los hechos estilizados, $\mu_{t+1} = 0$

Value at Risk (VaR)

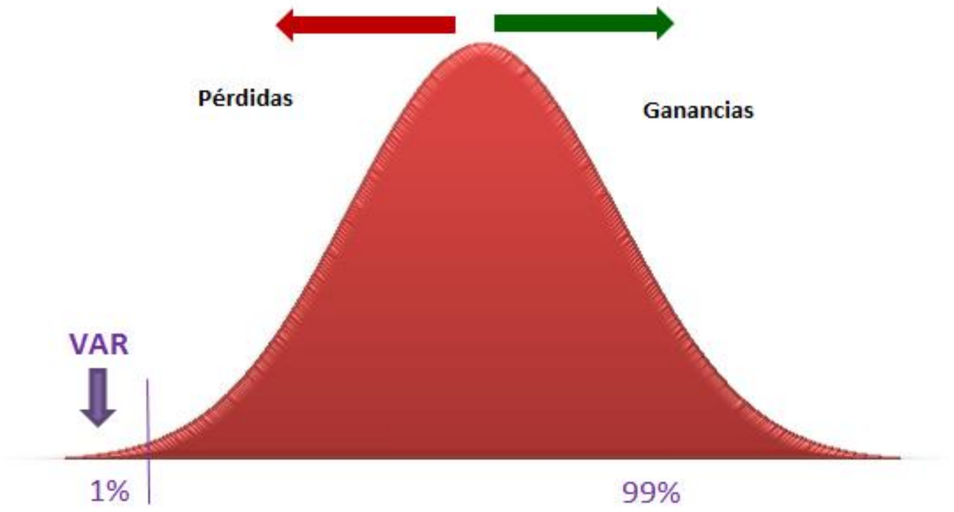
El Valor en Riesgo, VaR por sus siglas en inglés, es un método que utiliza técnicas estadísticas para cuantificar el riesgo de mercado.

Su objetivo es proporcionar una medida resumida de riesgo. En concreto, el VaR estima la pérdida máxima tal que será excedida ante un nivel de confianza o probabilidad dado, en un intervalo de tiempo determinado.

Por tanto, existen dos parámetros fundamentales para el cálculo del VaR: *el nivel de confianza*, el cual está asociado a la aversión al riesgo de los inversionistas, y *el horizonte de tiempo* al que se calculará el VaR. Estos parámetros en empresas o instituciones financieras son definidos por el Consejo de Administración.

Value at Risk

- Ilustrativamente si el nivel de confianza es del 99%, implicaría un VAR al 1%



El VaR es usualmente definido en unidades monetarias, expresado como \$VaR, por lo que la pérdida que excede al \$VaR, \$pérdida, está contenida en la siguiente ecuación:

$$\Pr(\$pérdida > \$VaR) = p \, .$$

Value at Risk

Por ejemplo, si el VaR diario de un portafolio es de $40 millones con un nivel de confianza del 97% significa que en un día se esperan pérdidas mayores a $40 millones con un 3% de probabilidad.

Una pérdida de $40 millones no proporciona suficiente información si no se conoce el valor del portafolio, por lo que es conveniente utilizar el VaR en términos de porcentaje.

Es importante mencionar que el VaR proporciona **posibles resultados basados es estadística y algunos supuestos a los modelos, por lo que no provee certidumbre con respecto a las pérdidas de una inversión.**

Value at Risk

Por lo tanto, la relación entre rendimientos y el *VaR* es:

$$\Pr(-R_{PF} > VaR) = p \;\Leftrightarrow\; \Pr(R_{PF} < -VaR) = p$$

Si dividimos la ecuación anterior entre la desviación estándar:

$$\Pr\left(R_{PF,t+1} < -VaR^{p}_{t+1}\right) = p \;\Leftrightarrow\; \Pr\left(\frac{R_{PF,t+1}}{\sigma_{PF,t+1}} < \frac{-VaR^{p}_{t+1}}{\sigma_{PF,t+1}}\right) = p \,.$$

Ahora, utilizando la definición del modelo de riesgo de los rendimientos se obtiene que:

$$\Pr\left(z_{t+1} < \frac{-VaR^{p}_{t+1}}{\sigma_{PF,t+1}}\right) = p \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\frac{-VaR^{p}_{t+1}}{\sigma_{PF,t+1}}\right) = p \,.$$

- donde $\phi(*)$ representa la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar (por ahora).

Value at Risk

- La función ϕ(x) calcula la probabilidad de que la variable aleatoria *X* se encuentre por debajo del número x, y $\Phi_p^{-1} = \Phi^{-1}\ (p)$ calcula el número *x* (cuantil) tal que p100% de la masa de probabilidad se encuentre por debajo de $\Phi^{-1}(p)$. Aplicando la función $\Phi^{-1}(*)$ a cada uno de los lados de la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

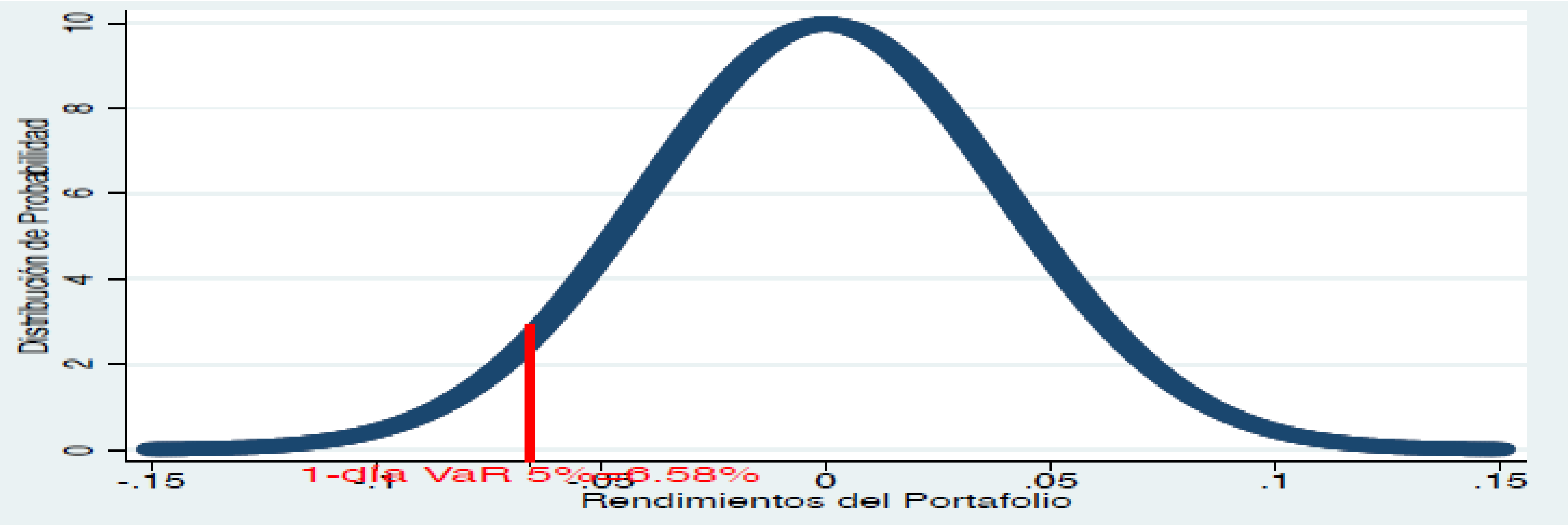
$$\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{-VaR_{t+1}^{p}}{\sigma_{PF,t+1}}\right)\right) = \Phi^{-1}(p)$$

$$-VaR_{t+1}^{p}/\sigma_{PF,t+1} = \Phi^{-1}\,(p) \Leftrightarrow$$

$$VaR_{t+1}^{p} = -\sigma_{PF,t+1}\Phi_p^{-1}$$

Value at Risk

- Si asumimos una distribución normal de los rendimientos, gráficamente tenemos:



Value at Risk

Debido a que se asume que los rendimientos se distribuyen normalmente con una media de cero, el *VaR* puede ser calculado fácilmente, ya que el cuantil se conoce y únicamente haría falta la volatilidad pronosticada.

- Como un simple ejemplo: sea p=.05 ($\Phi_{0.05}^{-1} = -1.645$) y se asume que la volatilidad pronosticada, $\sigma_{PF,t+1}$,es 4%, entonces, sustituyendo se obtiene que:

$$VaR_{t+1}^{.05} = -\sigma_{PF,t+1}\Phi_{.05}^{-1} = -.04\,(-1.645) = 6.58\%,$$

Riesgo de Mercado

Medidas de volatilidad dinámica

Modelo general de rendimientos de activos

- Tomando en cuenta los hechos estilizados, nuestro modelo de rendimientos es:

$$R_{t+1} = \mu_{\mathrm{t+1}} + \sigma_{t+1} z_{t+1} \quad \text{con} \quad z_{t+1} \sim \text{i.i.d. D(0,1)}$$

Donde z_{t+1} es un término de impacto, que se distribuye D

- Media condicional $\quad E[R_{t+1}] = \mu_{t+1}$

- Varianza condicional $\quad E[R_{t+1} - \mu_{t+1}]^2 = \sigma_{t+1}^2$

Modelos de volatilidad dinámica

Objetivos:

- Describiremos brevemente un modelo usado de volatilidad llamado RiskMetrics (RM).

- Introduciremos el modelo GARCH y lo compararemos con el modelo RM.

- Estimaremos los parámetros de GARCH usando máxima verosimilitud.

Todos estos modelos tienen como **objetivo** pronosticar la varianza del portafolio del día de mañana σ_{t+1}.

Modelo RiskMetrics

Antecedentes:

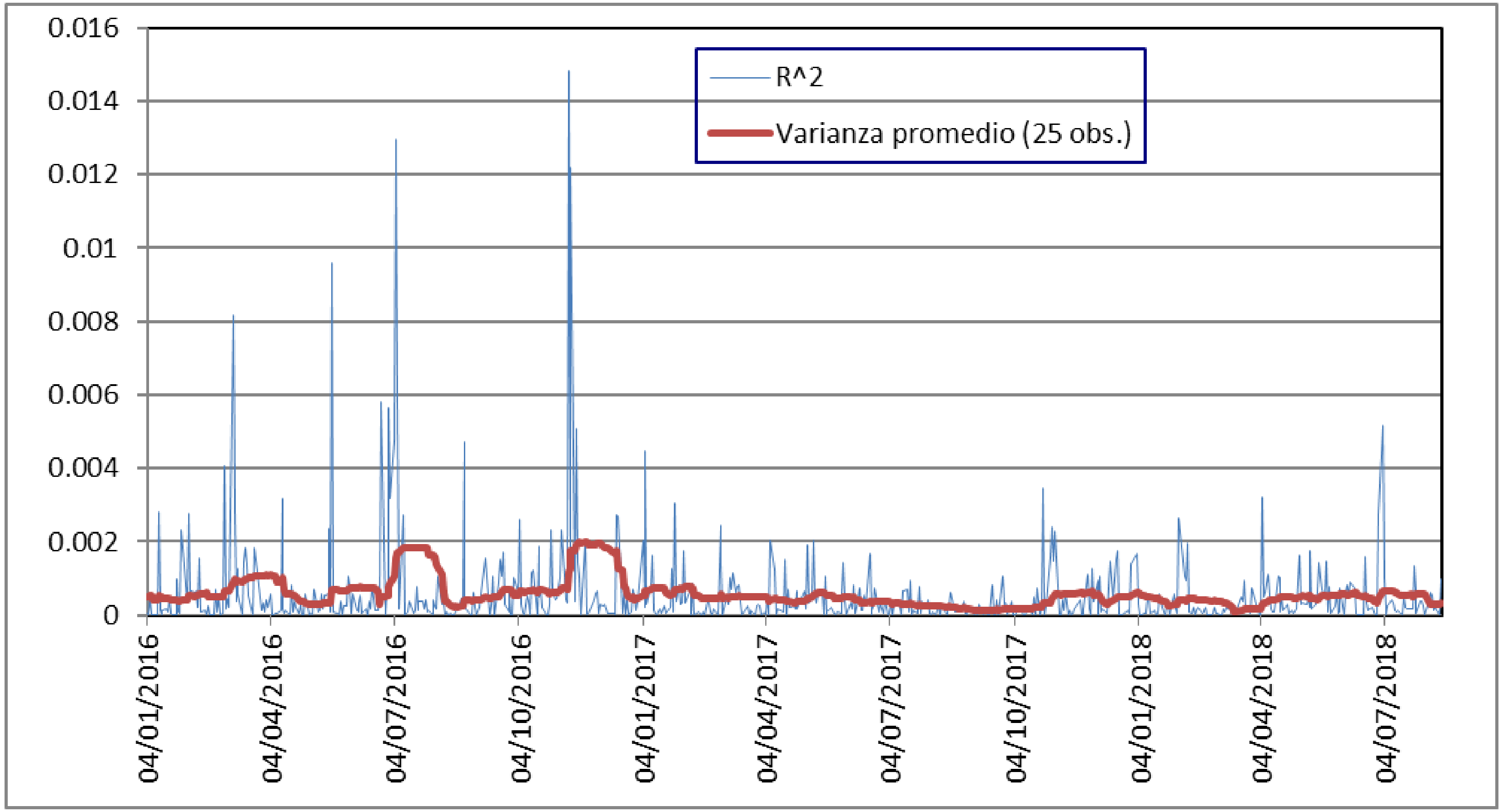
- La varianza, calculada como los rendimientos al cuadrado, como ya vimos, presentan alta autocorrelación.
- Si un periodo reciente tiene alta volatilidad, entonces, la volatilidad del día de mañana también será alta.
- Podemos calcular la varianza del día de mañana como el promedio de las *m* observaciones más recientes:

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1}{m}\sum_{\tau=1}^{m} R_{t+1-\tau}^2$$

- Sin embargo, éste modelo otorga el mismo peso a todas las observaciones.

Modelo RiskMetrics

Rendimientos cuadrados de Peñoles con m = 25 observaciones de enero de 2016 a julio 2018



Modelo RiskMetrics

- Para resolver este inconveniente, JP Morgan desarrolla un sistema de métricas de riesgo llamado RiskMetrics, RM, o de suavización exponencial, el cual toma en consideración que el pasado más reciente de la serie de rendimientos cuadrados debe tener un peso más importante para pronosticar la varianza futura. El modelo *RiskMetrics* o de suavización exponencial (llamada así por el efecto que tiene en los pesos) es:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)\sum_{\tau=1}^{\infty}\lambda^{\tau-1}R_{t+1-\tau}^2 \quad \text{para } \ 0<\lambda<1$$

$(1-\lambda)\lambda^{\tau-1}$ representa el peso que se le da a la observación τ, debido a que $\sum_{\tau=1}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^{\tau-1}=1$.

Modelo RiskMetrics

La ec. de RM se puede simplificar de la siguiente manera, separando de la suma el primer término:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)\sum_{\tau=2}^{\infty}\lambda^{\tau-1}R_{t+1-\tau}^2 + (1-\lambda)R_t^2$$

Realizando la ec de RM para el tiempo t:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{\tau=1}^{\infty}\lambda^{\tau-1}R_{t-\tau}^2$$

Esta ecuación, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\sum_{\tau=2}^{\infty}\lambda^{\tau-1}R_{t+1-\tau}^2$$

Despejando el término que estamos buscando:

$$\lambda\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{\tau=2}^{\infty}\lambda^{\tau-1}R_{t+1-\tau}^2$$

Modelo RiskMetrics

Entonces, sustituyendo éste valor en la ecuación de RM, la varianza del día de mañana se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1-\lambda)R_t^2$$

Éste modelo tiene dos ventajas:

- En cuanto más aumente t, el peso de los rendimientos cuadrados será mas bajo.
- Sólo tiene un parámetro desconocido, λ.
- No se necesita mucha historia de los rendimientos.

Se ha comprobados que, utilizando observaciones de rendimientos diarios, λ= .94, sin embargo también puede calcularse con máxima verosimilitud.

Modelo de varianza GARCH

- Tienen la ventaja de que capturan características de los rendimientos, sin embargo, se requiere estimar parámetros no lineales.

- El más sencillo de los modelos GARCH es donde la volatilidad dinámica únicamente depende de los rendimientos cuadrados y varianza de un periodo anterior. A este modelo se le conoce como GARCH (1,1) y se define:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2 \qquad \text{con } \alpha + \beta < 1$$

RiskMetrics es un caso particular de GARCH

Modelo de varianza GARCH

Una diferencia importante con RM es la varianza sin condicionar promedio de largo plazo σ^2 :

$$\sigma^2 = E[\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha E[R_t^2] + \beta E[\sigma_t^2]$$
$$= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

Despejando σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{(1-\alpha-\beta)}$$

Si bien $\alpha + \beta = 1$, como sí sucede en el modelo de RiskMetrics, la varianza de largo plazo en el modelo de GARCH no está definida. El modelo de RiskMetrics ignora el hecho de que la varianza de largo plazo tiende a ser relativamente estable en el tiempo. En cambio, los modelos GARCH se sustentan en σ^2

Modelo de varianza GARCH

Esto se observa sustituyendo ω en el modelo GARCH:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\alpha-\beta)\sigma^2 + \alpha R_t^2 + \beta\sigma_t^2$$
$$= \sigma^2 + \alpha(R_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma)$$

Si se quisiera pronosticar la varianza de los rendimientos diarios K días después:

$$\begin{aligned} E_t\left[\sigma_{t+k}^2\right] - \sigma^2 &= \alpha E_t\left[R_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right] + \beta E_t\left[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right] \\ &= \alpha E_t\left[\sigma_{t+k-1}^2 z_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right] + \beta E_t\left[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2\right] \\ &= (\alpha+\beta)\left(E_t\left[\sigma_{t+k-1}^2\right] - \sigma^2\right), \end{aligned}$$

Modelo de varianza GARCH

Utilizando un modelo iterativo en el valor de $E_t[\sigma^2_{t+\mathrm{k}-1}]$ se tiene que:

$$E_t\left[\sigma^2_{t+k}\right] - \sigma^2 \quad = \quad (\alpha+\beta)^{k-1}\left(E_t\left[\sigma^2_{t+1}\right] - \sigma^2\right) = (\alpha+\beta)^{k-1}\left(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2\right)$$

al factor de $\alpha + \beta$ se le llamará la persistencia del modelo.

- Si la persistencia aumenta y se encuentre cercana pero no igual a uno, implica que los choques que empujan la varianza fuera de su varianza promedio de largo plazo persistirán por un largo periodo.
- Sin embargo, eventualmente la varianza pronosticada de largo plazo, $E_t[\sigma^2_{t+\mathrm{k}}]$ será la varianza promedio de largo plazo, σ^2.

Modelo de varianza GARCH

Por otro lado, en el modelo de RiskMetrics), como $\alpha + \beta$ = 1, si se quisiera realizar el mismo procedimiento se encontraría que no es posible realizarlo. Esto se debe a que al momento de sustituir $\alpha + \beta = 1$ en el procedimiento iterativo se tiene como resultado que:

$$E_t[\sigma_{t+\mathrm{k}}^2] = \sigma_{t+1}^2, \text{ para toda } k.$$

Lo que quiere decir que en el modelo de RiskMetrics la persistencia es de uno, lo implica que los choques que alejan a la varianza de su varianza promedio de largo plazo persistirán por siempre.

En otras palabras, RiskMetrics ignora la varianza de largo plazo al pronosticar. Cuando $\alpha + \beta$ sean cercanos a uno, entonces, los dos modelos tendrán similares predicciones para horizontes de tiempo k cortos, pero para horizontes de tiempo largos serán muy diferentes.

Modelo de varianza GARCH

En lugar ahora de ver el pronóstico de la varianza *k* días adelante, se mostrará qué sucede si mejor se quiere pronosticar la varianza de los rendimientos acumulados *K*-días,

$$R_{t+1:t+K} \equiv \sum_{k=1}^{K} R_{t+k}$$

Debido a que se asume que los rendimientos tienen cero autocorrelación y media igual a cero, la varianza de los rendimientos *K*-días acumulados se define como,

$$\sigma^2_{t+1:t+K} \equiv E_t \left(\sum_{k=1}^{K} R_{t+k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{K} E_t \left[\sigma^2_{t+k} \right]$$

Modelo de varianza GARCH

En RM tenemos que la esperanza de la varianza pronosticada es la misma para todos los plazos,

$$\sigma^2_{t+1:t+K} = K\sigma^2_{t+1}$$

Pero en el modelo GARCH, tenemos:

$$\sigma^2_{t+1:t+K} = \sum_{k=1}^{K} E_t\left[\sigma^2_{t+k}\right] = \sum_{k=1}^{K} \left(\sigma^2 + (\alpha+\beta)^{k-1}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2)\right)$$

$$= K\sigma^2 + \sum_{k=1}^{K} (\alpha+\beta)^{k-1}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2) \neq K\sigma^2_{t+1}$$

Modelo de varianza GARCH

- El modelo GARCH definido consiste en un rezago de los rendimientos cuadrados y en un rezago de la varianza del periodo anterior. Al ser sólo un rezago de ambos términos (rendimiento y varianza), este modelo es conocido como el GARCH(1,1).

- Sin embargo, este modelo no es el único dentro de la familia GARCH. Los modelos GARCH se pueden generalizar permitiendo una mayor cantidad de rezagos. A estos modelos se les generaliza con la expresión GARCH(p,q).

Modelo de varianza GARCH

- Para estimar los parámetros del modelo utilizaremos máxima verosimilitud.
- Recordando nuestro modelo inicial:

$$R_t = \sigma_t z_t$$

Considerando que z_t se distribuye i.i.d N(0,1), la probabilidad condicional o verosimilitud de R_t, l_t es:

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

La verosimilitud de toda la muestra de rendimientos, L,es:

$$L = \prod_{t=1}^{T} l_t = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

Modelo de varianza GARCH

Una forma de escoger los parámetros es maximizando la función de verosimilitud conjunta es decir, escoger los parámetros que maximicen la función *L*. A este proceso para encontrar los parámetros se le conoce como el método de máxima verosimilitud.

Una manera de facilitar el cálculo es maximizar el logaritmo de la función *L*, en lugar de maximizar directamente *L*, debido a que el logaritmo es una función monótona creciente, lo que implica que maximizar *L* es lo mismo que maximizar su logaritmo (ln *L*).

$$Max \ln L = Max \sum_{t=1}^{T} \ln(l_t) = Max \sum_{t=1}^{T} \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(\sigma_t^2\right) - \frac{1}{2} \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

$$Max \sum_{t=1}^{T} \left[-\frac{1}{2} \ln\left(\sigma_t^2\right) - \frac{1}{2} \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right] = Max \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{t=1}^{T} \ln\left(\sigma_t^2\right) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right]$$

Modelo de varianza GARCH

Ventajas de los EMV:

- Consistencia: si la muestra aumenta (conforme T sea más grande), los EMV convergen a los valores reales.
- Eficiencia: esto significa que los estimadores alcanzan la cota mínima de Cramer-Rao cuando el tamaño de muestro alcanza infinito, lo que implica que no existen estimadores consistentes que tengan un error cuadrático menor, asintóticamente, que los EMV.

Ejercicio

Con el archivo “Clase estimación volatilidad.xls” que está en Comunidad:

1. Calcula el peso acumulado que se le daría al rezago 100 utilizando suavizamiento exponencial.
2. Calcula la volatilidad de los log rendimientos diarios de S&P 500 usando RiskMetric
3. Estima los parámetros del modelo GARCH(1,1) de los log rendimientos diarios de S&P 500 usando máxima verosimilitud.

Considera la varianza de la primera observación igual a la varianza no condicional de los datos, (Var(Rt)). Utiliza los siguientes valores iniciales de los parámetros:

α=0.1

β=0.85

ω=0.000005

Ahora estima los parámetros calculando omega como la varianza de largo plazo, definida como : $\omega = \mathrm{Var}(R_t) * (1 - \alpha - \beta)$, y utiliza Solver para encontrar sólo α y β.

Volatilidad de un portafolio

Para un portafolio con dos instrumentos la volatilidad se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{x^2\sigma_x^2 + y^2\sigma_y^2 + 2xy\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y}$$

Para portafolios con *n* activos recurrimos a representaciones matriciales:

$$\Sigma = \xi P \xi$$

Donde:

Σ= Matriz de varianza-covarianza

ξ= Matriz de volatilidades individuales

P= Matriz de correlaciones entre cada activo

Volatilidad de un portafolio

Una vez que se cuenta con la matriz de varianza-covarianza y con el vector (*W*) de ponderaciones de los activos del portafolio, la volatilidad del portafolio se estima como:

$$\sigma_{PF} = \sqrt{W'\Sigma W}$$

Ejemplo. Volatilidad de un portafolio

Si tenemos un portafolio con tres activos (A, B y C) con la siguiente información:

Varianza: 32%, 18% y 24% respectivamente

Ponderación: 25%, 42% y 33%

Matriz de correlación:

$$P= \begin{matrix} 1 & 0.87 & -0.75 \\ 0.87 & 1 & -0.63 \\ -0.75 & -0.63 & 1 \end{matrix}$$

¿Cuál es la volatilidad del portafolio?

Ejemplo. Volatilidad de un portafolio (2 activos)

Un portafolio de acciones y bonos tiene las siguientes características:

Portafolio	Rendimiento promedio	Volatilidad	Ponderaciones
Bonos	5.60%	8.10%	77%
Acciones	11.20%	19.20%	23%

Correlación: 0.13

¿Cuál es el rendimiento esperado y la volatilidad del portafolio?