Les Expressions Régulières

S. MAZOUZ & B. LAICHI

FEI-USTHB

Département Informatique

2019-2020

campusvirtuel.usthb.dz

Plan

1) Expressions Régulières

(Définitions, Exemples et Propriétés).

2) Expressions régulières et Automates d’états finis.

3) Applications des expressions régulières.

4) Caractérisation des langages réguliers.

Expressions Régulières

Introduction :

Les langages réguliers sont les langages :

- **générés** par des grammaires de type 3 appelées grammaires régulières.
- **reconnus** par des automates d'états finis. On dit aussi que c'est des langages reconnaissables.

Les mots de tels langages possèdent une forme particulière et peuvent être dénotés par des **expressions régulières (ou expressions rationnelles)**.

Une **expression régulière** est une suite de caractères, appelée motif (ou pattern en anglais), qui décrit ou dénote un ensemble de mots.

Expressions Régulières

Définition : Les expressions régulières sur **un alphabet X** sont définies d'une manière inductive comme suit :

Cas de base :

- $\varnothing$ est une expression régulière

  qui **décrit le langage vide**
- **ε** est une expression régulière

  qui **décrit le langage {ε}**
- **a** est une expression régulière $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{X}$

  qui **décrit le langage {a}**

Expressions Régulières

Définition (suite)

Cas d'induction :

Si r et s sont deux expressions régulières sur X décrivant respectivement les langages R et S alors :

- **r+s** est une expression régulière
  qui **décrit le langage $R \cup S$**
- **r.s** est une expression régulière
  qui **décrit le langage R.S**
- **r*** est une expression régulière
  qui **décrit le langage R***
- **(r)** est une expression régulière
  qui **décrit le langage (R)**

Expressions Régulières

Exemples :

- $E_1 = a+b$ **dénote le langage $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$**

- $E_2 = a.b$ **dénote le langage $\{a\}.\{b\} = \{ab\}$**

- $E_3 = E_1.E_2 = (a+b).a.b$ **dénote le langage $\{a, b\}.\{ab\}$**

  $= \{aab, bab\}$

- $E_4 = a^*$ **dénote le langage $\{a\}^* = \{a^n / n \geq 0\}$**

Remarque : Le symbole de concaténation peut être omis. Par exemple, on peut écrire ab au lieu de a.b

Expressions Régulières

Exemples :

- E_5= a*+b* **dénote le langage {a}*∪{b}***

- E_6= (a+b)* **dénote le langage {a, b}***
  qui correspond à tous les mots sur {a, b}

- E_7= (a+b)*aab **dénote tous les mots de {a, b}***
  se terminant par aab

- E_8= (a+b)*aba(a+b)* **dénote tous les mots de {a, b}***
  contenant le facteur aba.

Expressions Régulières

Définition (Equivalence)

Deux expressions régulières E_1 et E_2 sont équivalentes**,** notées $E_1 \equiv E_2$**,** si et seulement si elles dénotent le même langage.

Exemple : On veut décrire le langage $\{a, b\}^+$.

E_1= (a+b)(a+b)* /* une lettre a ou b suivie d'une séquence aléatoire de a et b */

E_2= (a+b)*(a+b) /* une suite aléatoire de a et b suivie par une lettre a ou b */

Dans les deux cas, le langage dénoté est une suite aléatoire de a et b avec au minimum une lettre : a ou b. Donc, $E_1 \equiv E_2$.

Remarque : Pour simplifier les expressions, nous supposons que l'étoile '*' est plus prioritaire que la concaténation '.' qui est plus prioritaire que l'addition '+' : étoile>concaténation>addition : **a+b.a***

Expressions Régulières

Propriétés sur les expressions régulières :

Soient **p** et **q** deux expressions régulières dénotant deux langages **P** et **Q**

1. Commutativité : $p+q \equiv q+p$
2. Associativité : $p+(q+r) \equiv (p+q)+ r$ $\quad$ $p(qr) \equiv (pq)\, r$
3. Distribution : $(p+q)r \equiv pr + qr$ $\quad$ $p(q+r) \equiv pq + pr$
4. Elément neutre : $p.\varepsilon \equiv \varepsilon.p \equiv p$ $\quad$ $p+\varnothing \equiv \varnothing+p \equiv p$
5. Elément absorbant : $p.\varnothing \equiv \varnothing.p \equiv \varnothing$
6. $\varnothing^* \equiv \varepsilon$
7. $(p^*)^* \equiv p^*$
8. $(p^*+q^*)^* \equiv (p^*.q^*)^* \equiv (p+q)^*$
9. $p.\, p^* \equiv p^*.p$
10. $p^* \equiv (p+\varepsilon)^*$

Remarque : $pq \neq qp$ (la concatenation n'est pas commutative)

Expressions Régulières

Exemple :

Soient les expressions régulières suivantes :

$E_1=(a^*b^*)^*$ $E_2=(a^*+b^*)^*$ et $E_3=(a+b)^*$

Or, on a la propriété : $(p^*+q^*)^* \equiv (p^*.q^*)^* \equiv (p+q)^*$

Ces trois expressions sont équivalentes. En effet, elles dénotent le même langage $\{a, b\}^*$.

Définition : Un langage L sur un alphabet X est un langage rationnel si et seulement s'il existe une expression régulière E sur l'alphabet X qui le dénote.

On note **Rat(X*)** la famille des langages rationnels sur X.

Expressions Régulières et Automates d'Etats Finis

Théorème de Kleene :

L'ensemble des langages rationnels (décrits par des expressions régulières) sur un alphabet X est exactement l'ensemble des langages sur X reconnaissables par automate d'états finis.

Nous avons **Rat(X*) = Rec(X*) où**

Rat(X*) est la famille des langages rationnels sur X (tout langage décrit par une expression régulière est un langage rationnel).

Rec(X*) est la famille des langages reconnaissables sur X (tout langage reconnu par un automate d'états finis est un langage reconnaissable).

Expressions Régulières et Automates d'Etats Finis

Proposition :

A toute expression régulière E, il existe un automate d'états fini A(E), reconnaissant le langage dénoté par E.

Les méthodes les plus répandues pour la construction d'un automate à partir d'une expression régulière sont :

- La méthode de Thompson
- La méthode de Brzozowski (méthode des dérivées).
- .
- .

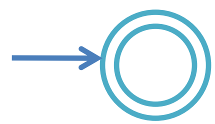
Expressions Régulières et Automates d'Etats Finis

Méthode de Thompson :

L'algorithme consiste à construire l'automate petit à petit (étape par étape), en utilisant des constructions standard pour l'union, la concaténation et l'étoile en se basant sur la structure de l'expression régulière.

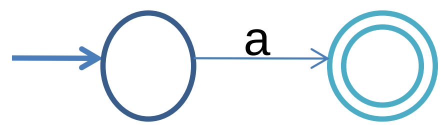
- **L'expression ε**

  on lui associe l'automate :



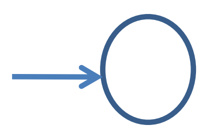
- **L'expression a**

  on lui associe l'automate :



- **L'expression ∅**

  on lui associe l'automate :

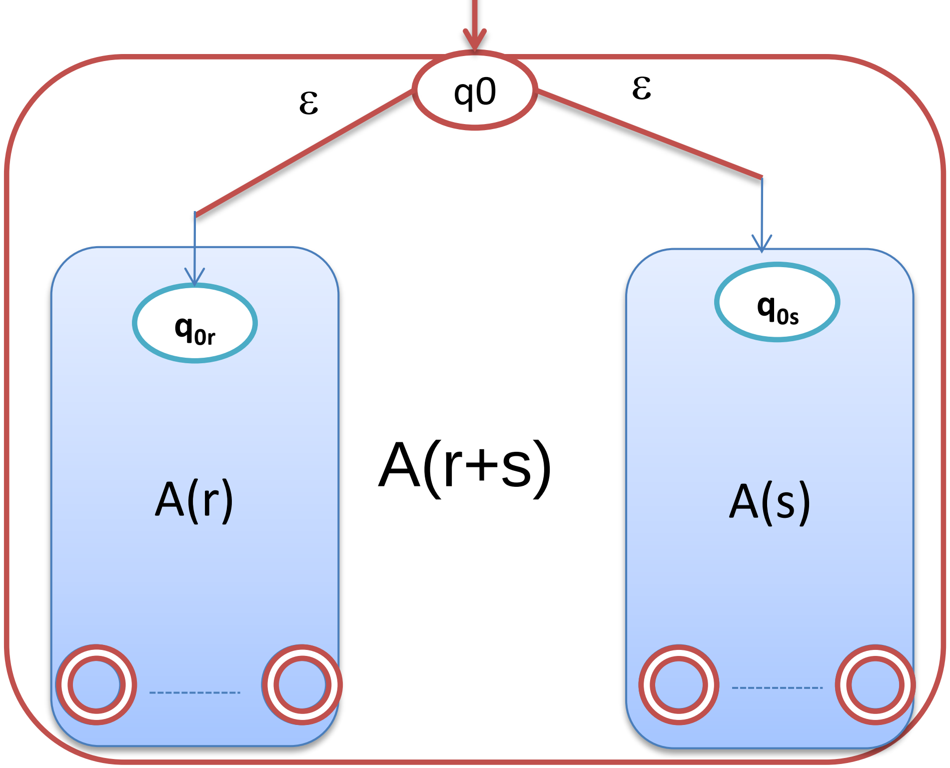


Remarque : Un automate sans état final ne reconnaît aucun mot.

Expressions Régulières et Automates d'Etats Finis

Pour l'expression r+s,

on associe l'automate A(r+s)



Données :

A(r) = (Xr, Qr, q_{0r}, δr, Fr)

A(s) = (Xs, Qs, q_{0s}, δs, Fs)

Formellement, on a :

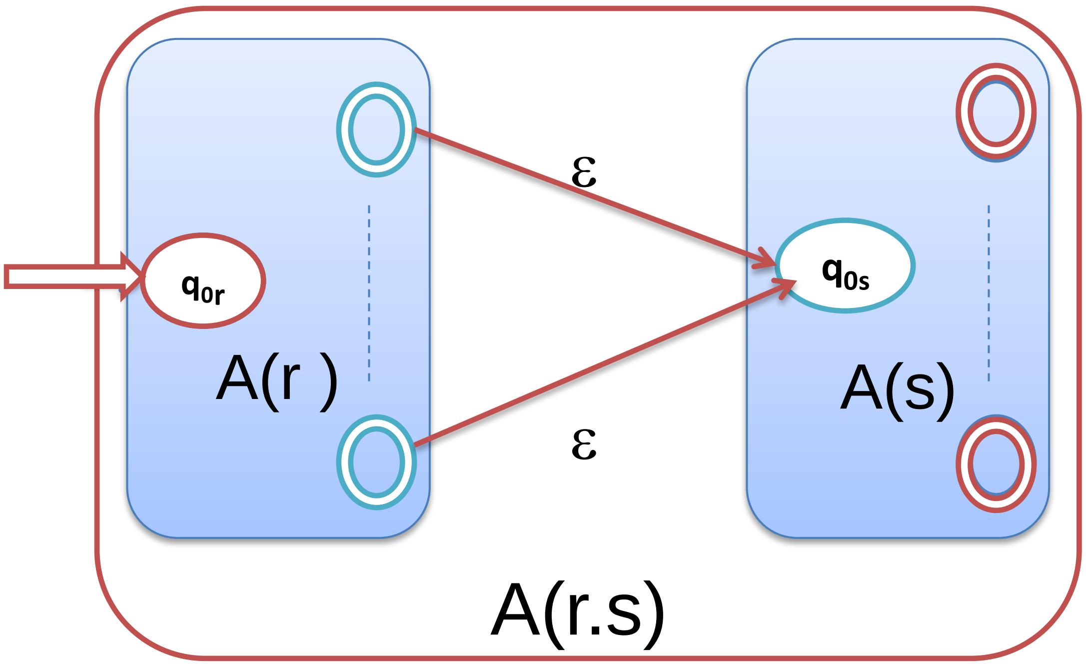
A(r+s)=(X, Q, q_0, δ, F) où :

- X = Xr $\cup$ Xs
- Q = Qr $\cup$ Qs $\cup$ $\{q_0\}$
- q_0 / $q_0 \notin (Qr \cup Qs)$
- $\delta = \delta r + \delta s + \delta(q_0,\varepsilon)=\{q_{0r}, q_{0s}\}$
- F =Fr $\cup$ Fs

Expression Régulière et Automate d'Etats Finis

- Pour l'expression r.s,

  on associe l'automate A(r.s)



Données :

$A(r)=(Xr, Qr, q_{0r}, \delta r, Fr)$

$A(s)=(Xs, Qs, q_{0s}, \delta s, Fs)$

Formellement, on a :

$A(r.s)=(X, Q, q_0, \delta, F)$ où

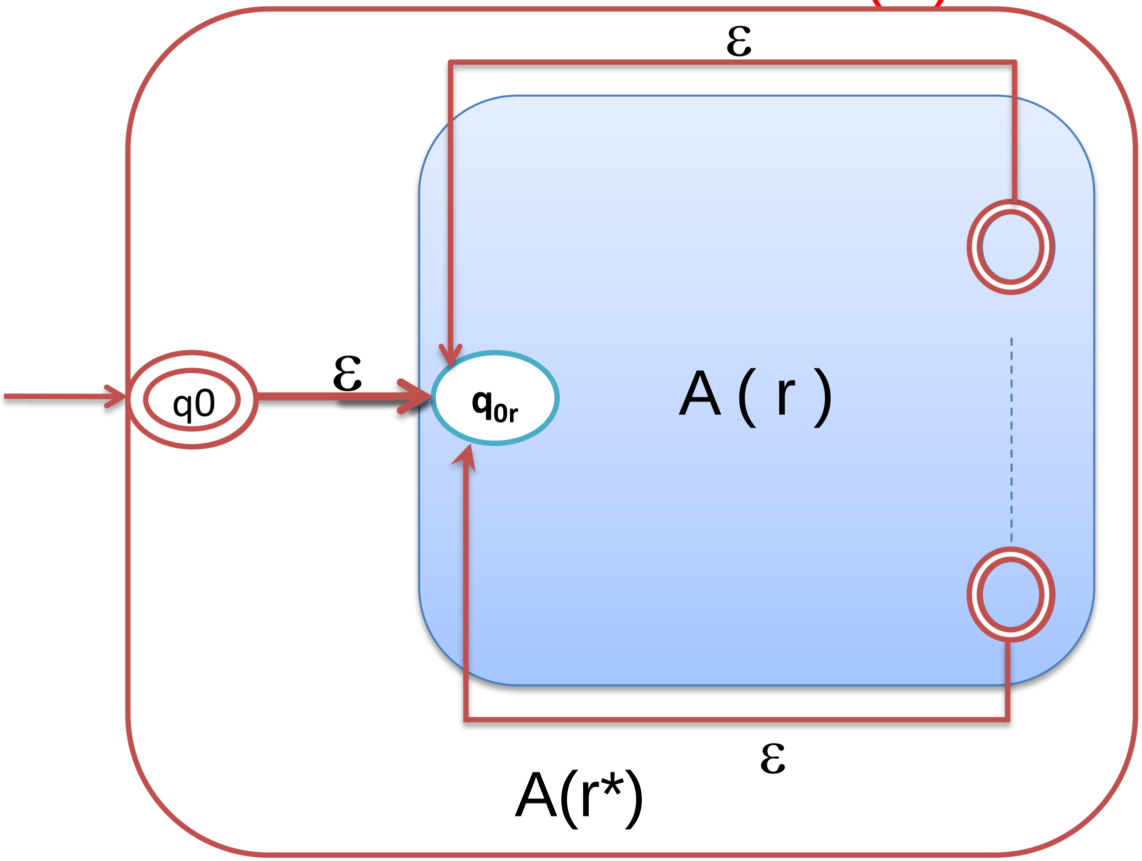
- $X = Xr \cup Xs$
- $Q = Qr \cup Qs$
- $q_0=q_{0r}$
- $\delta = \delta r + \delta s +$

  $\delta(q, \varepsilon)=q_{0s}\ \forall q \in Fr$
- $F = Fs$

Expression Régulière et Automate d'Etats Finis

- Pour l'expression r*,

  on associe l'automate A(r*)



Donnée :

$A(r)=(Xr, Qr, q_{0r}, \delta r, Fr)$

Formellement, on a :

$A(r^*)=(X, Q, q_0, \delta, F)$ où

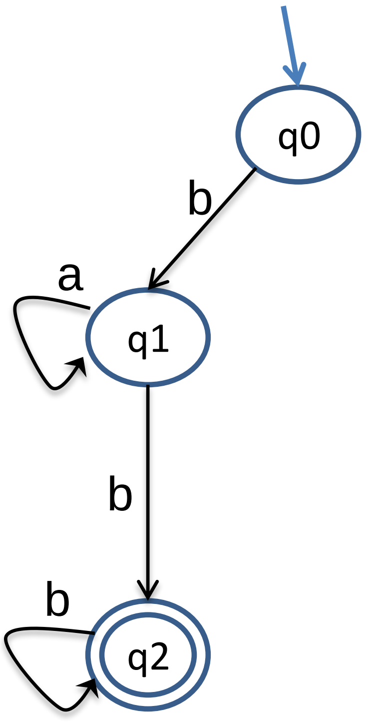
- $X = Xr$
- $Q = Qr \cup \{q_0\}$
- $q_0 \,/\, q_0 \notin Qr$
- $\delta = \delta r + \delta(q_0, \varepsilon)=q_{0r} +$
  $q_{0r} \in \delta(q, \varepsilon) \;\; \forall q \in Fr$
- $F = Fr \cup \{q_0\}$

Expressions Régulières et Automates d'Etats Finis

Proposition :

A tout automate d'états fini **A,** il lui correspond une expression régulière qui le dénote.

Exemple :



Le langage reconnu par cet automate est dénoté par l'expression régulière : **ba*bb***

Pour l'obtention d'une expression régulière à partir d'un automate d'états finis, on peut citer les méthodes suivantes :

- La méthode d'élimination ou méthode de Brzozowski et McCluskey
- La méthode par résolution d'équations

Applications des Expressions Régulières

Les expressions régulières ont de nombreuses utilités en informatique, elles servent principalement pour réaliser :

1) des contrôles : vérifier qu'une donnée entrée par un utilisateur a bien le format souhaité.
2) des substitutions : remplacer un motif par une chaine de caractères précise ; par exemple, remplacer les majuscules par des minuscules.
3) des filtres : ne conserver que certaines lignes d'un fichier texte.
4) des découpages : récupérer une partie d'une chaine de caractères par exemple une date placée dans une chaine de caractères.

CARACTÉRISATION DES LANGAGES RÉGULIERS

Les langages réguliers peuvent être **caractérisés** de 3 façons, en utilisant :

1) Les grammaires régulières.
2) Les automates d'états finis.
   (déterministes, non-déterministes ou généralisés).
3) Les expressions régulières.

Remarque :

Pour démontrer qu'un langage est régulier il faut lui trouver : une **grammaire régulière** qui le génère, un **automate d'état finis** qui le reconnait ou une **expression régulière** qui le dénote.

CARACTÉRISATION DES LANGAGES RÉGULIERS

Exemple : Montrer que le langage

L = {w∈{a, b}* / w commence et se termine par la même lettre} est régulier en utilisant les 3 méthodes.

1) L est dénoté par l'expression régulière : a(a+b)*a+b(a+b)*b+a+b

2) L est généré par la grammaire régulière G=(T, N, S, P) avec

T={a, b}, N={S, A, B}, et P est défini par :

S→ aA / bB / a / b

A→ aA / bA / a

B→ aB / bB / b

3) L est reconnu par l'automate d'états fini :