IFT 615 – Intelligence Artificielle

Raisonnement probabiliste
Réseaux bayésiens

Professeur: Froduald Kabanza

Assistants: D’Jeff Nkashama

UdS Université de Sherbrooke

Sujets couverts

- C’est quoi un réseau bayésien (RB)?
  - structure d’un RB
  - calcul de probabilités dans un RB
- Indépendance conditionnelle dans un RB
- Inférence dans un réseau bayésien
  - inférence exacte
  - inférence approximative

Réseaux bayésiens

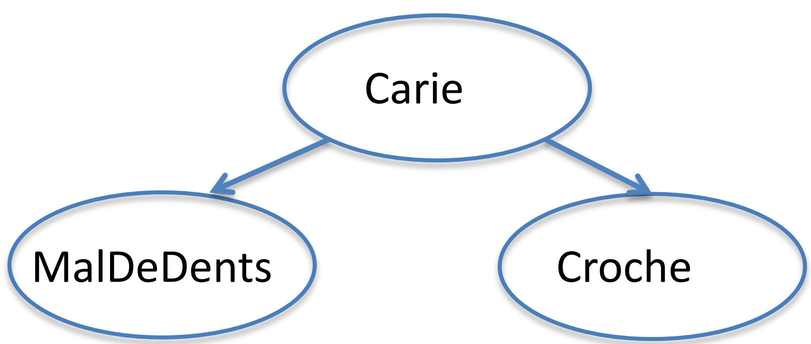
- Les **réseaux bayésiens** (RB) sont un mariage entre la théorie des graphes et la théorie des probabilités

- Un RB permet de représenter les connaissances probabilistes d'une application donnée :
  - par exemple, les connaissances cliniques d'un médecin sur des liens de causalité entre maladies et symptômes

- Les RB sont utiles pour modéliser des connaissances d'un système expert ou d'un système de support à la décision, dans une situation pour laquelle :
  - la causalité joue un rôle important (des événements en causent d'autres)
  - mais notre compréhension de la causalité des événements est incomplète (on doit recourir aux probabilités)

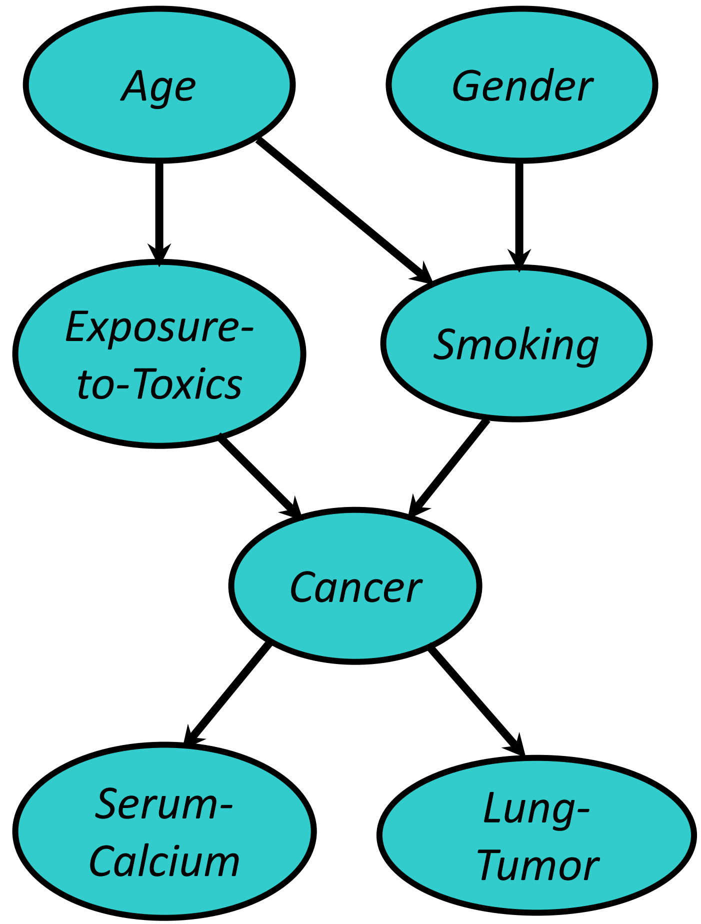
Syntaxe

- Un RB est un **graphe**
  - **orienté**
  - **acyclique**
  - dont les **nœuds sont des variables aléatoires** et
  - les **arcs** représentent
    - des **dépendances** (par exemple des causalités) probabilistes entre les variables et
    - des **distributions de probabilités conditionnelles** (locales) pour chaque variable étant donnés ses parents

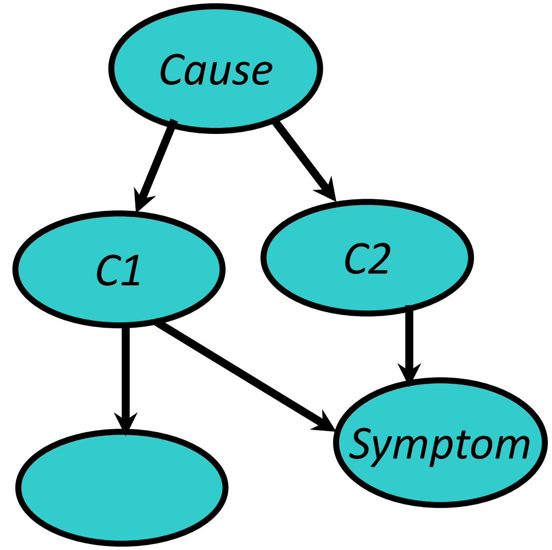


Application : diagnostique médical

- Déterminer la maladie d'un patient, sachant des symptômes
- On peut avoir une maladie mais montrer seulement un sous-ensemble des symptômes possibles



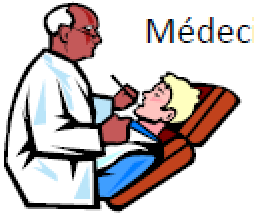
Applications



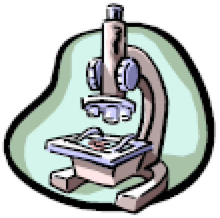
- Diagnostique : P(Causes | Symptômes)
- Prédiction : P(Symptomes | Causes)
- Classification : max P(Classe |Données)

classe

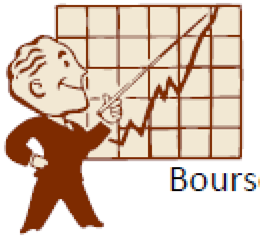
Commerce électronique



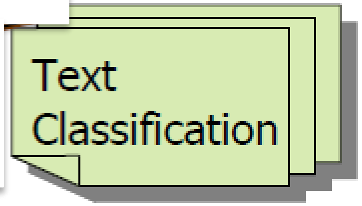
Médecine



Bio-informatique



Bourse



Diagnostique informatique

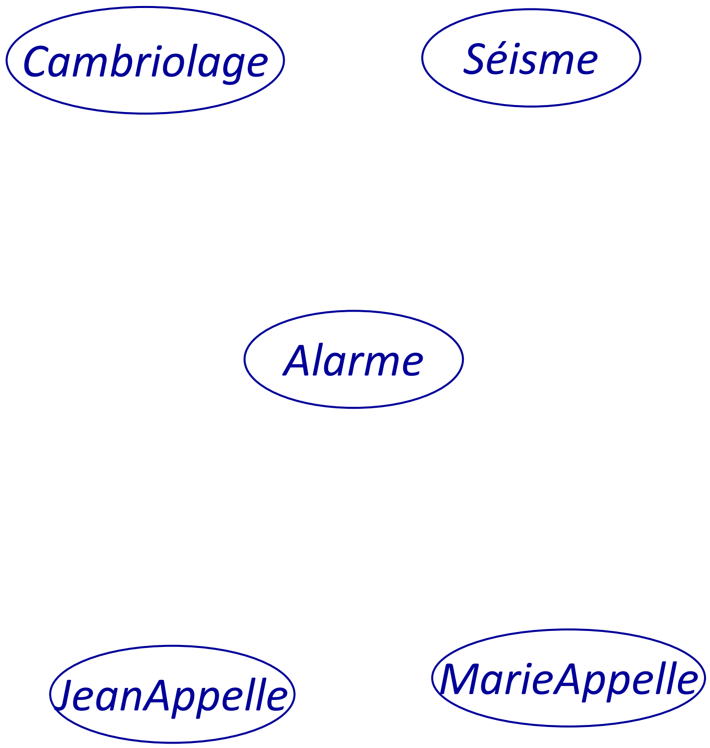
Exemple

- Considérons la situation suivante :
  - je suis au travail, et mes voisins Marie et Jean m'ont promis de m'appeler chaque fois que mon alarme sonne
  - mon voisin Jean m'appelle pour me dire que mon alarme sonne
    - parfois il confond l'alarme avec la sonnerie du téléphone
  - par contre ma voisine Marie ne m'appelle pas toujours
    - parfois elle met la musique trop fort
  - parfois mon alarme se met à sonner lorsqu'il y a de légers séismes
  - comment conclure qu'il y a ou non un cambriolage chez moi?

- On peut représenter ce problème par un RB

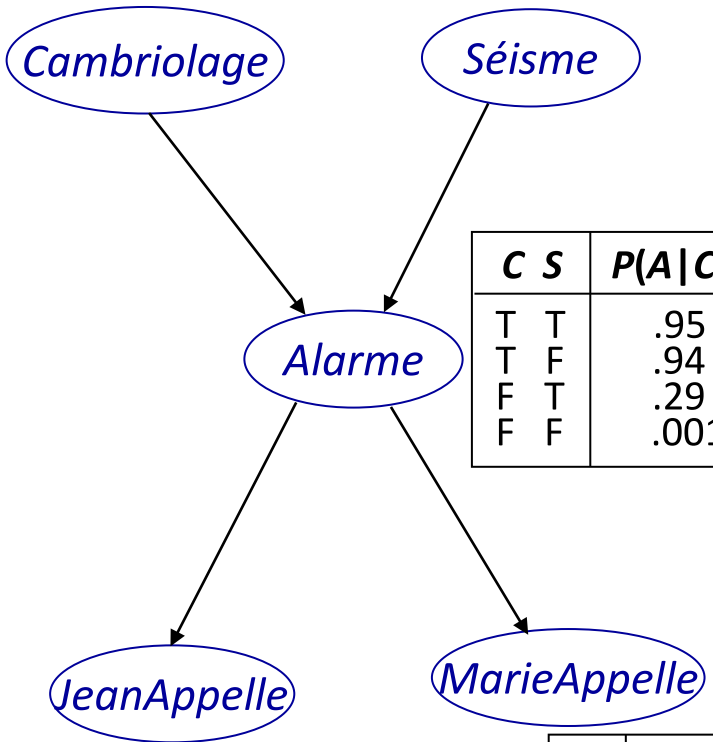
Exemple

- Variables aléatoires :
  - *Cambriolage*
  - *Séisme*
  - *Alarme*
  - *JeanAppelle*
  - *MarieAppelle*



Exemple

- La topologie du RB modélise les relations de causalité
- Un arc d'un nœud *X* vers un nœud *Y* signifie que la variable *X* **influence** la variable *Y*
  - un cambriolage peut déclencher l'alarme
  - un séisme aussi
  - l'alarme peut inciter Jean à appeler
  - idem pour Marie
- Une **table de probabilités conditionnelles** (TPC) donne la probabilité pour chaque valeur du nœud étant donnés les combinaisons des valeurs des parents du nœud (c'est l'équivalent d'une **distribution**)



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
T	.90
F	.05

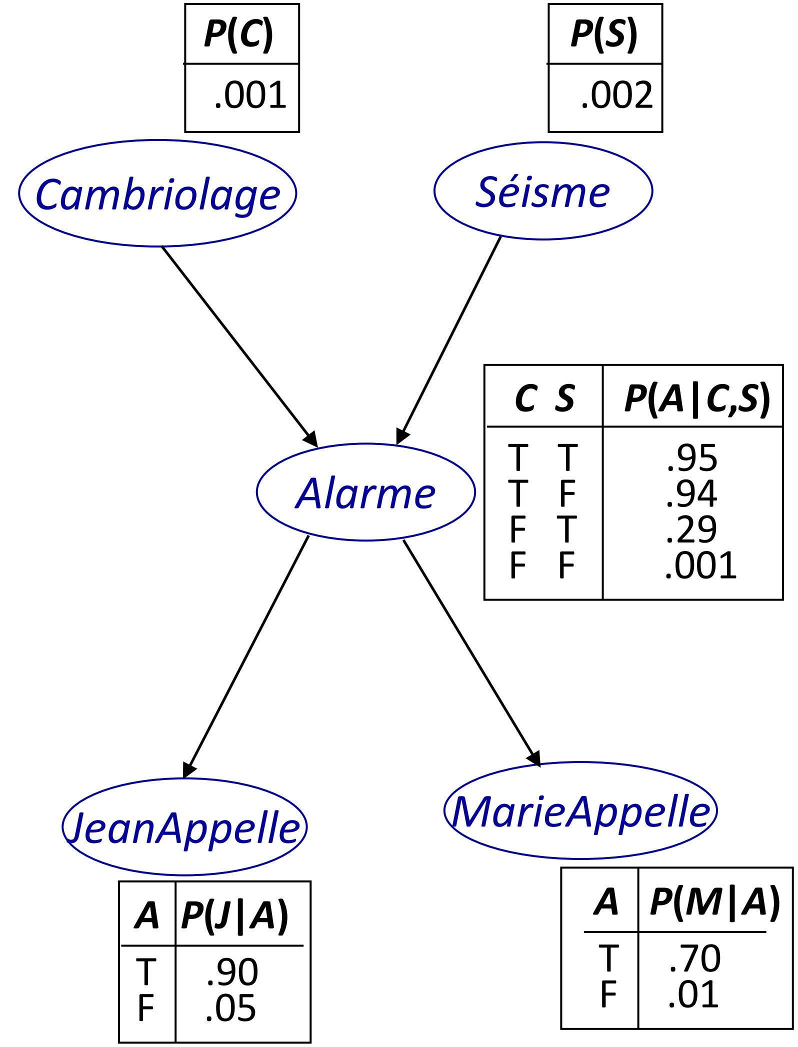
A	***P*(*M*|*A*)**
T	.70
F	.01

Définitions

- S'il y a un arc d'un nœud *Y* vers un nœud *X*, cela signifie que la variable *Y* influence la variable X
  - *Y* est appelé le **parent** de *X*
  - *Parents*(*X*) est l'ensemble des parents de *X*

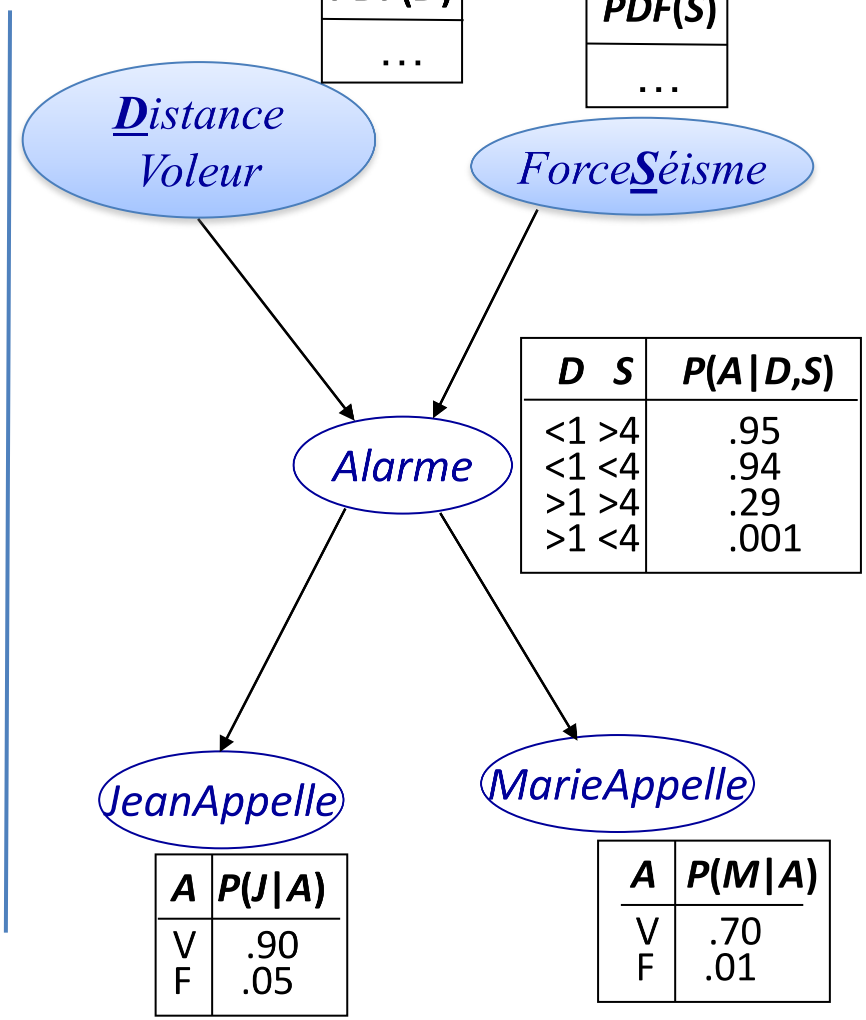
- Si *X* n'a pas de parents, sa distribution de probabilités est dite **inconditionnelle** ou **a priori**

- Si *X* a des parents, sa distribution de probabilités est dite **conditionnelle**



RB avec des variables continues

- Dans ce cours, on considère uniquement des RB avec des variables discrètes :
  - les TPC sont spécifiées en énumérant toutes les entrées
- Mais les RB peuvent aussi supporter les variables continues :
  - les probabilités conditionnelles sont spécifiées par des **fonctions de densité de probabilités** (PDF)
  - exemples :
    - » distance entre voleur et le capteur de mouvement
    - » force du séisme sur l'échelle de Richter



PDF(D)
…

PDF(S)
…

D	S	P(A|D,S)
<1	>4	.95
<1	<4	.94
>1	>4	.29
>1	<4	.001

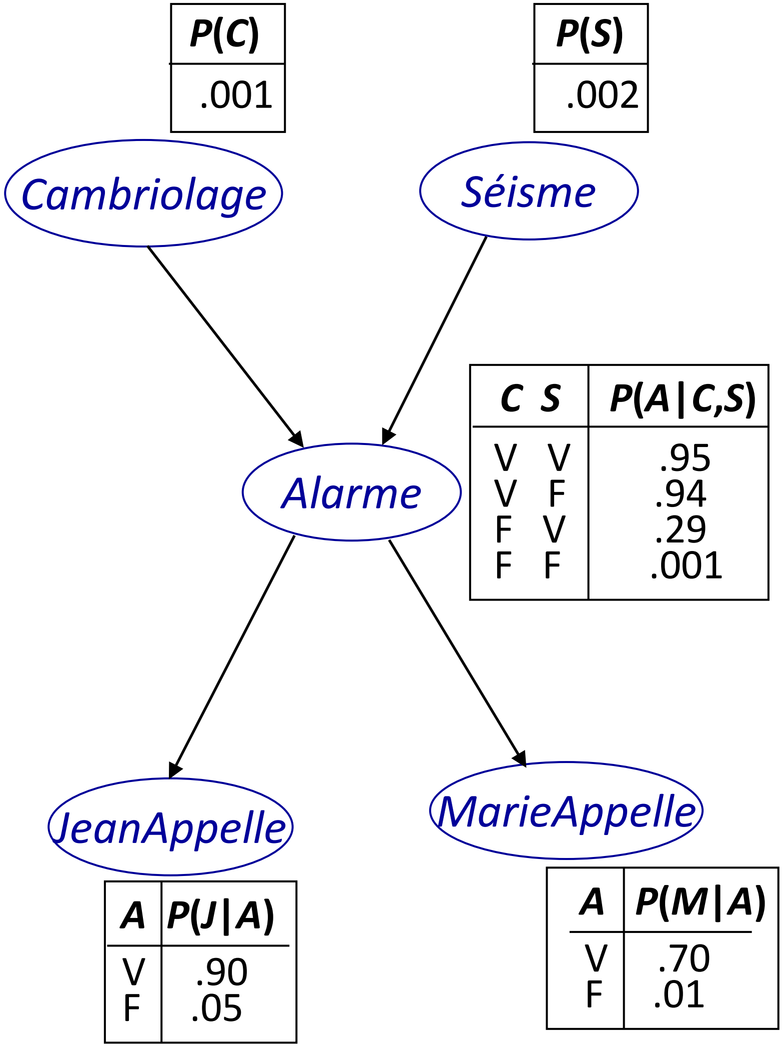
A	P(J|A)
V	.90
F	.05

A	P(M|A)
V	.70
F	.01

Autres appellations

- Il y a d'autres appellations pour les RB :
  - **réseaux de croyance** (***belief networks***)
  - **modèle graphique dirigé acyclique**

- Les RB font partie de la classe plus courante des **modèles graphiques**



Sémantique

- Un RB est une façon compacte de représenter des probabilités conjointes

- Par définition, la probabilité conjointe de X_1 et X_2 est donnée par la distribution $\boldsymbol{P}(X_1,X_2)$, pour une valeur donnée de X_1 et X_2

- La distribution conditionnelle de X_1 sachant X_2 est notée $\boldsymbol{P}(X_1 | X_2)$
  - $\boldsymbol{P}(X_1,X_2) = \boldsymbol{P}(X_1 \mid X_2)\, P(X_2)$

- Soit $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, l'ensemble des variables d'un RB :

$$\boldsymbol{P}(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(X_i \mid Parents(\mathrm{X_i}))$$

- En d'autres mots, la distribution conjointe des variables d'un RB est définie comme étant le produit des distributions conditionnelles (locales)

Calcul de probabilité conjointe

- Nous avons vu que, quelque soit l'ensemble de variables $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, par définition :

$$P(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) = P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1}, \ldots, X_1)$$
$$= P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1} \mid X_{n-2}, \ldots, X_1) \ldots P(X_2 | X_1)\, P(X_1)$$
$$= \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_1)$$

- Pour un RB : $P(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$
  - ceci est cohérent avec l'assertion précédente pour autant que $Parents(X_i)$ soit l'ensemble de $\{\mathrm{X}_{i-1}, \ldots, \mathrm{X}_1\}$
  - ainsi, un RB est en fait une façon de **représenter les indépendances conditionnelles**

Exemple : probabilité conjointe

$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$

$P(j, m, a, \neg c, \neg s)$

$= P(j|a)\, P(m|a)\, P(a| \neg c, \neg s)$

$P(\neg c)\, P(\neg s)$

$= .90 * .70 * .001 *$

$.999 * \; .998$

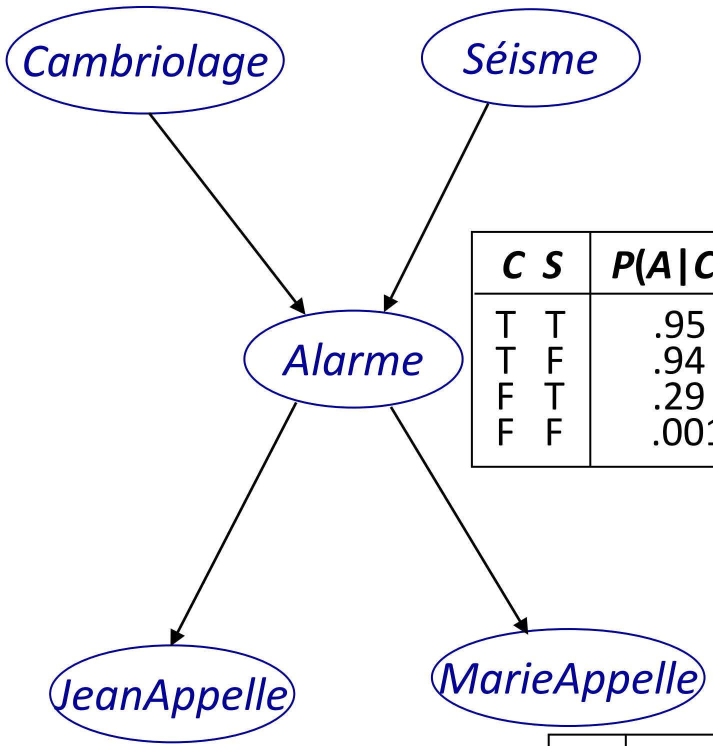
$\approx .00062$

$P(J{=}T, M{=}T, A{=}T, C{=}F, S{=}F)$
est aussi noté $P(j, m, a, \neg c, \neg s)$

$P(J{=}j, M{=}m, A{=}a, C{=}\neg c, S{=}\neg s)$
est aussi noté $P(j, m, a, \neg c, \neg s)$

P(C)
.001

P(S)
.002



C	***S***	***P(A|C,S)***
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	***P(J|A)***
T	.90
F	.05

A	***P(M|A)***
T	.70
F	.01

Exemple : probabilité marginale

$P(\neg c, a) = \Sigma_m \Sigma_j \Sigma_s P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$

$= \Sigma_m \Sigma_j \Sigma_s P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$

$= \Sigma_s \Sigma_j \Sigma_m P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$

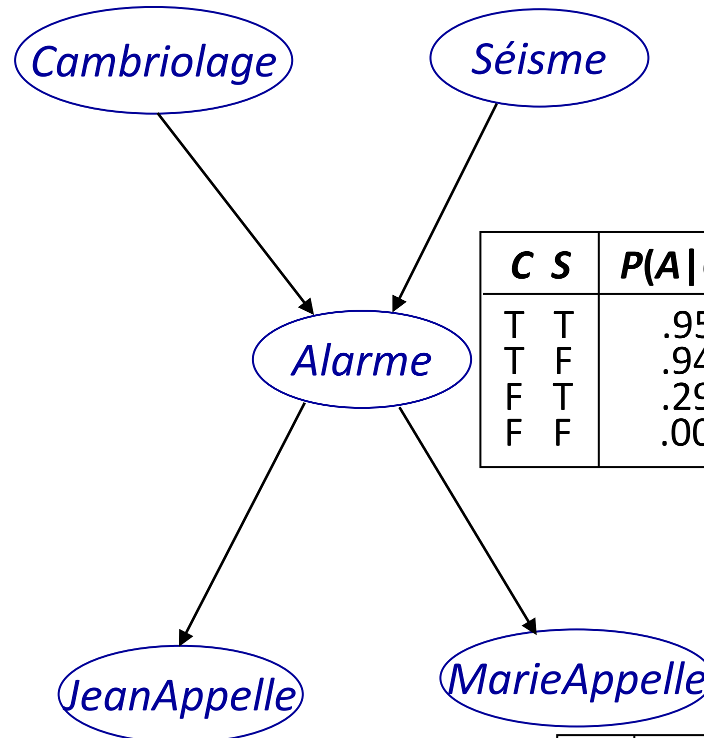
$= \Sigma_s \Sigma_j P(j|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s) \underbrace{\cancel{\Sigma_m P(m|a)}}_{= 1}$

$= \Sigma_s P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s) \underbrace{\cancel{\Sigma_j P(j|a)}}_{= 1}$

$= P(a|\neg c,s)\, P(\neg c)\, P(s) + P(a|\neg c,\neg s)\, P(\neg c)\, P(\neg s)$

$= .29 * .999 * .002 + .001 * .999 * .998$

≈ 0.0016



P(C)
.001

P(S)
.002

C	*S*	*P(A|C,S)*
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	*P(J|A)*
T	.90
F	.05

A	*P(M|A)*
T	.70
F	.01

Exemple : probabilité marginale

$$P(\neg c, a) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$$

$$= \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$$

$$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, \Sigma_m\, P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$$

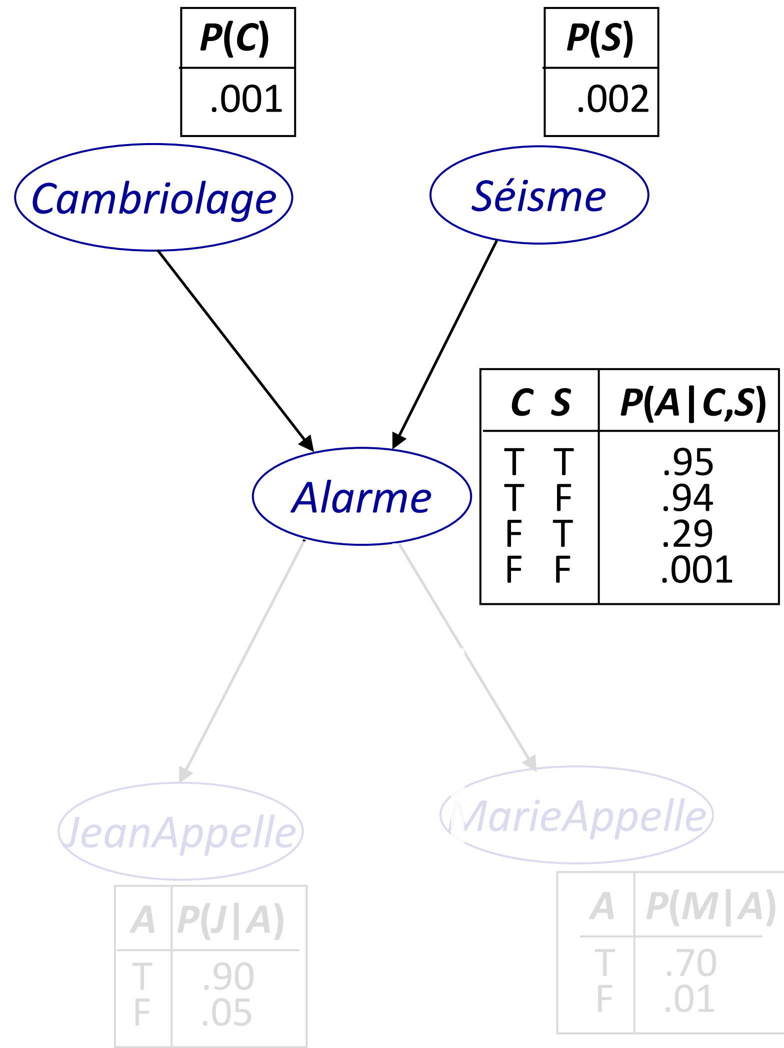
$$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, P(j|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_m P(m|a)}}_{= 1}$$

$$= \Sigma_s\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_j P(j|a)}}_{= 1}$$

$$= P(a|\neg c,s)\, P(\neg c)\, P(s) + P(a|\neg c,\neg s)\, P(\neg c)\, P(\neg s)$$

$$= .29 * .999 * .002 + .001 * .999 * .998$$

$$\approx 0.0016$$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

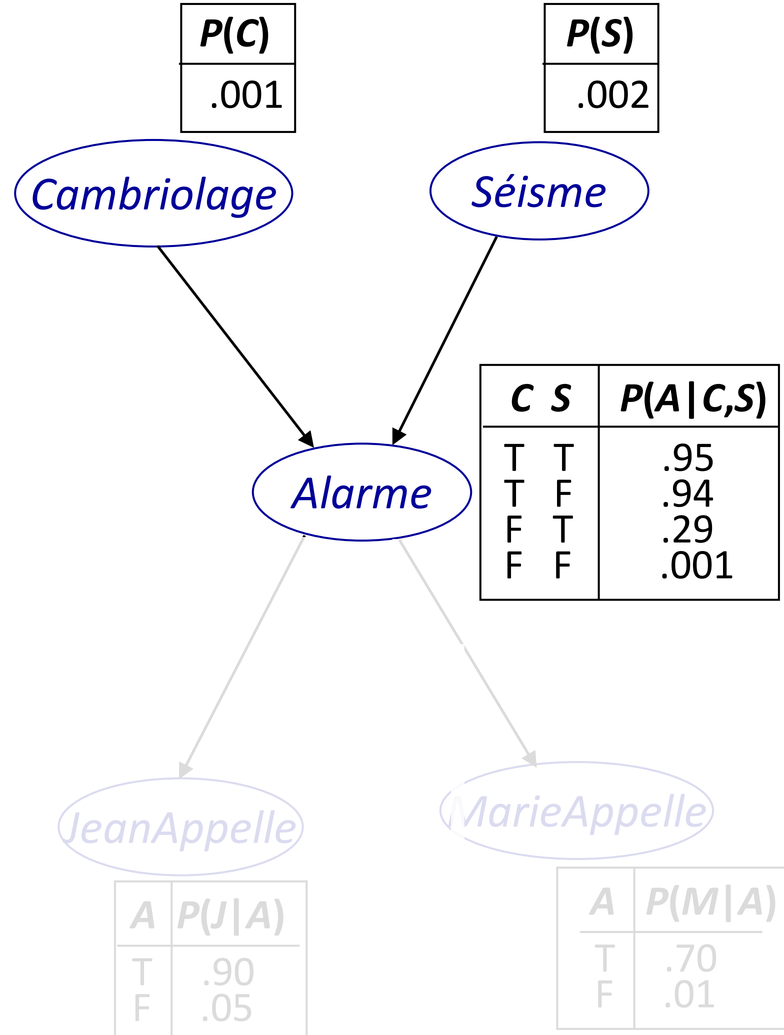
A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

Probabilité marginale

$$P(\neg\, c,\, a) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$$
$$= \Sigma_s\, P(a \mid \neg\, c,\, S{=}s)\; P(\neg c)\; P(S{=}s)$$

- Pour les probabilités marginales, on peut ignorer les nœuds **dont les descendants ne sont pas les nœuds observés**
  - *JeanAppelle* et *MarieAppelle* et leurs descendants ne sont pas observés, alors on peut les ignorer
  - *Séisme* est un ancêtre de *Alarme*, alors on doit le marginaliser explicitement



P(C)
.001

P(S)
.002

C	*S*	*P(A|C,S)*
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	*P(J|A)*
T	.90
F	.05

A	*P(M|A)*
T	.70
F	.01

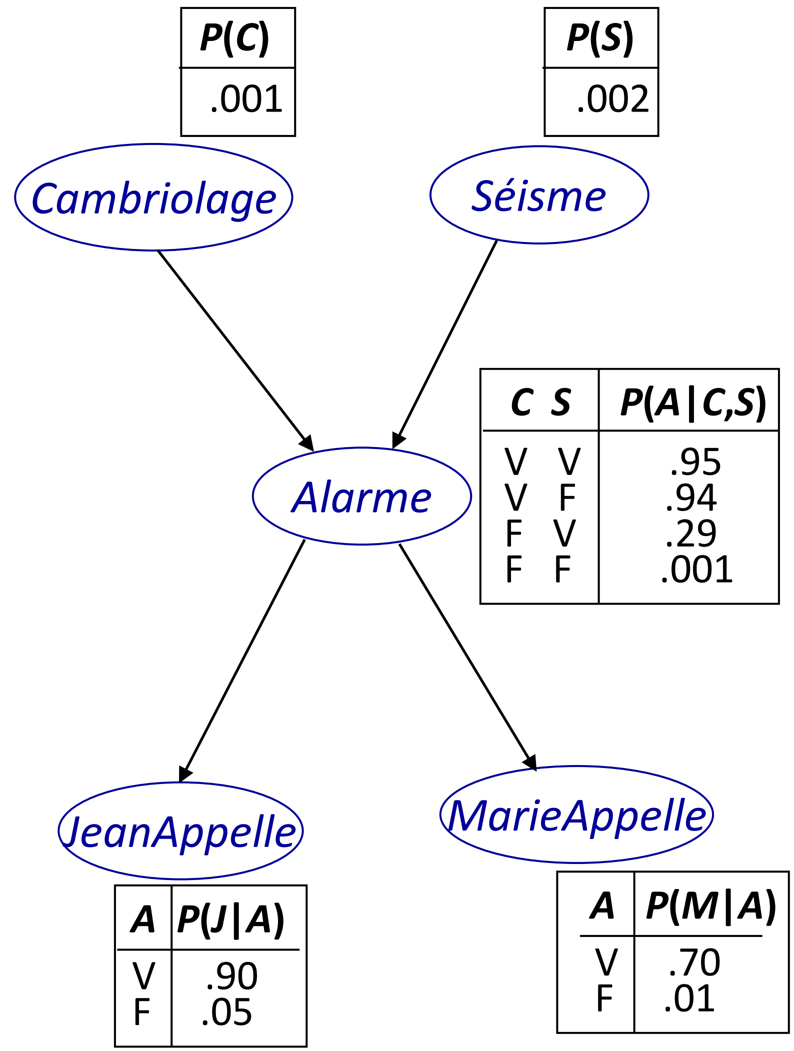
Indépendance conditionnelle dans un RB

1. Relation entre **grand-parent** et **enfant** étant donné les parents
   - sont indépendants si tous les parents sont observés.

- Exemples :
  - *Cambriolage* et *MarieAppelle* sont **dépendants** a priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $P(M|A,C) = P(M|A)$

  - si *A* est connu, *C* n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** *A* « bloque » le chemin entre *M* et *C*



$P(C)$
.001

$P(S)$
.002

C	*S*	$P(A\|C,S)$
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	$P(J\|A)$
V	.90
F	.05

A	$P(M\|A)$
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

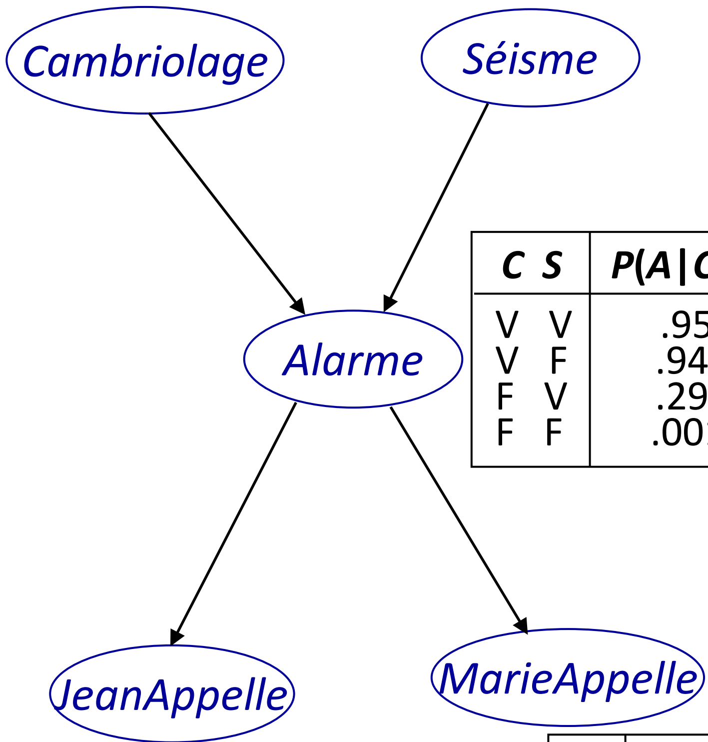
$$P(M|A,C) = P(M,A,C) \,/\, P(A,C)$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M,A,C,S{=}s)}{\Sigma_s\, P(A,C,S{=}s)}$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M|A)\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}$$

$$= P(M|A)\, \frac{\cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}}{\cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
V	.90
F	.05

A	P(M|A)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

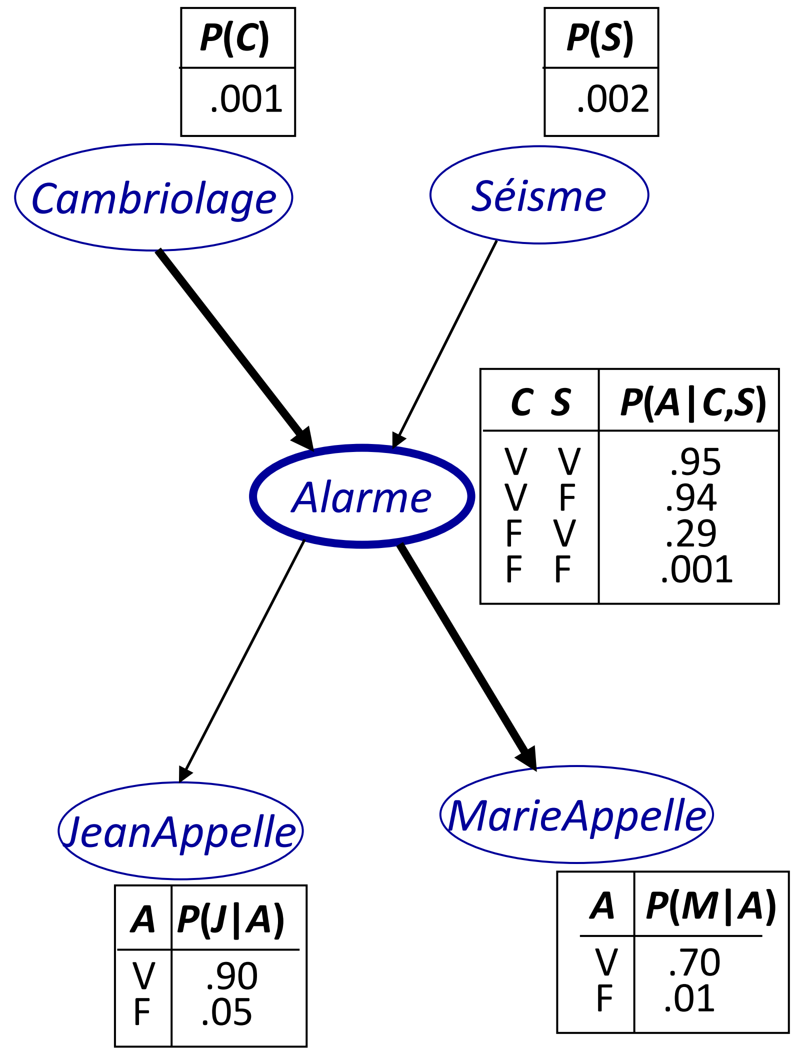
$$P(M|A,C) = P(M,A,C) / P(A,C)$$

$$= \frac{\Sigma_s P(M,A,C,S=s)}{\Sigma_s P(A,C,S=s)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \mathbf{P(M|A)\ P(A|C,S=s)}\ P(S=s)\ P(C)}{\Sigma_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}$$

$$= \frac{P(M|A)\ \cancel{\Sigma_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}{\cancel{\Sigma_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
V	.90
F	.05

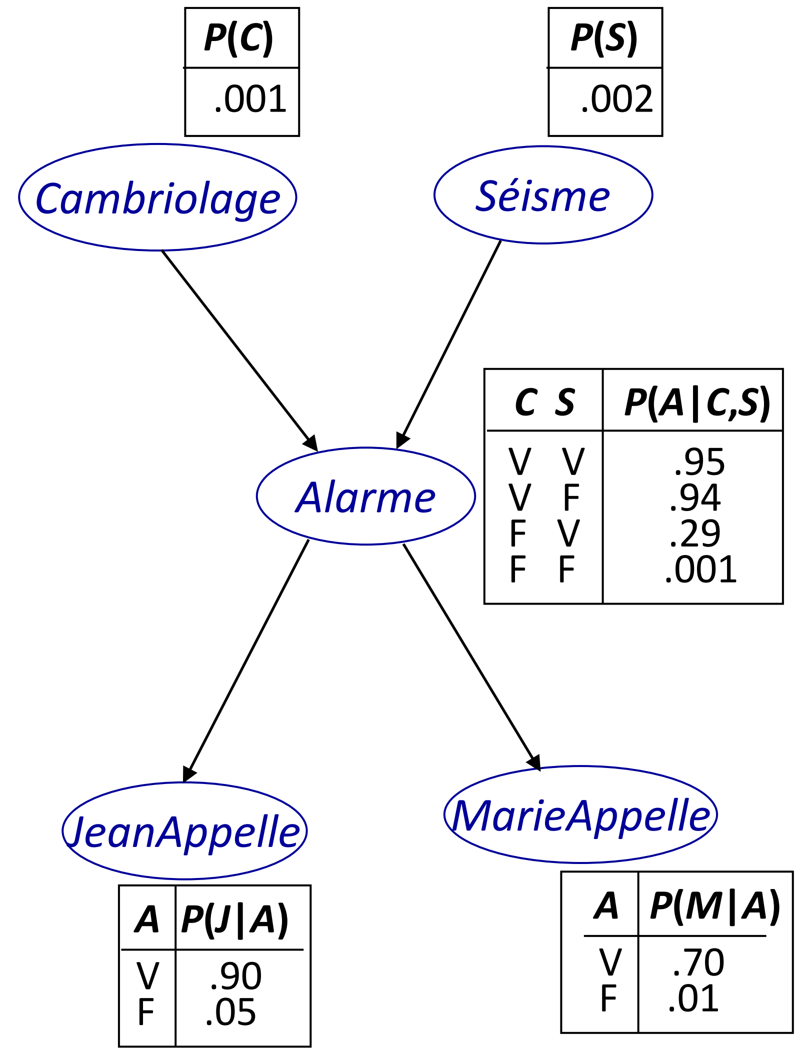
A	P(M|A)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

2. Relation entre **deux enfants** étant donné un parent:
   - sont indépendants si tous leurs parents sont observés

- Exemples :
  - *JeanAppelle* et *MarieAppelle* sont **dépendants** à priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $P(M|A,J) = P(M|A)$
  - si *A* est connu, *J* n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** *A* « bloque » le chemin entre *J* et *M*



Indépendance conditionnelle dans un RB

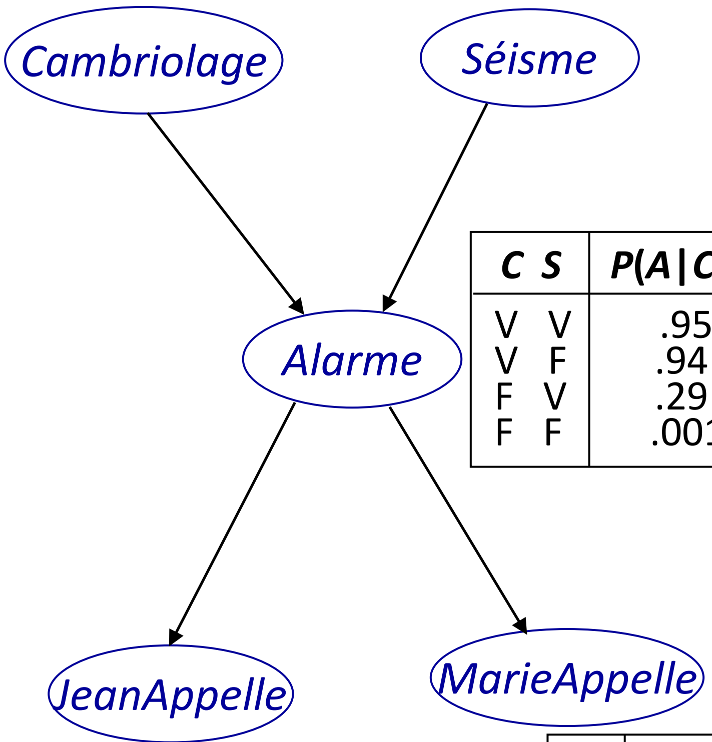
$$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S=s,C=c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S=s,C=c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(M|A)\, P(A,S=s,C=c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}}$$

$$= P(M|A)$$



$P(C)$
.001

$P(S)$
.002

C	S	$P(A\|C,S)$
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	$P(J\|A)$
V	.90
F	.05

A	$P(M\|A)$
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

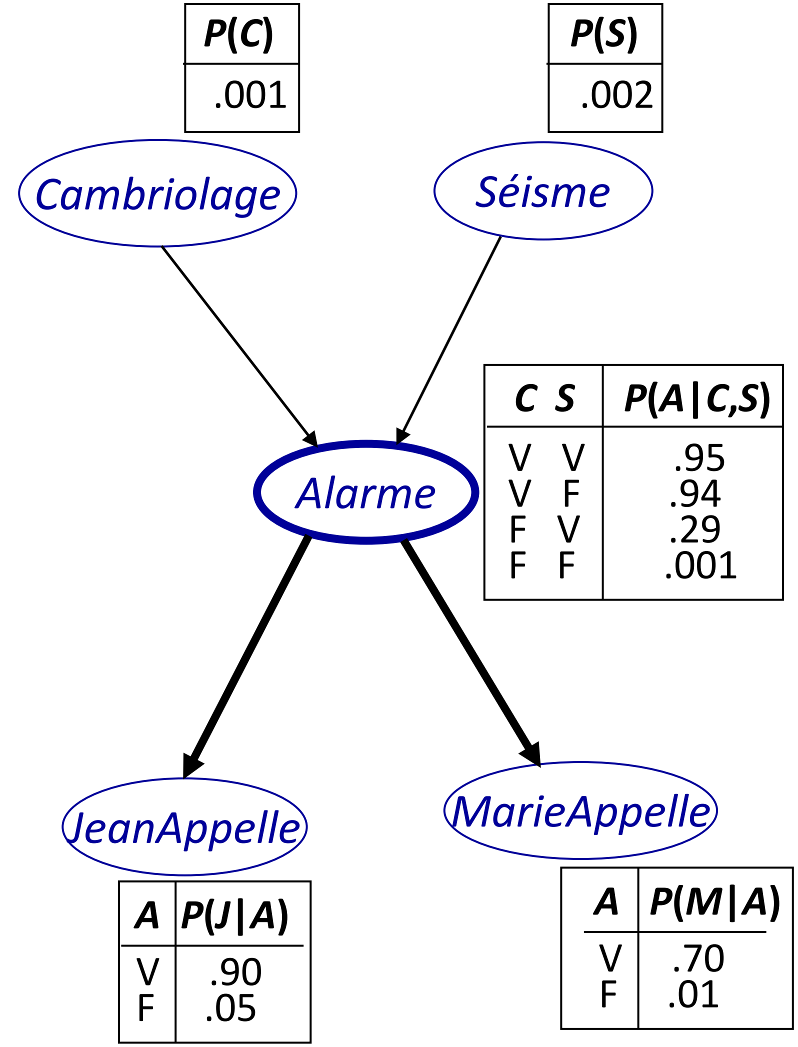
$$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S=s,C=c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S=s,C=c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c \mathbf{P(J|A)}\, \mathbf{P(M|A)}\, P(A,S=s,C=c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}$$

$$= \frac{P(M|A)\, \cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S=s,C=c)}}$$

$$= P(M|A)$$



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

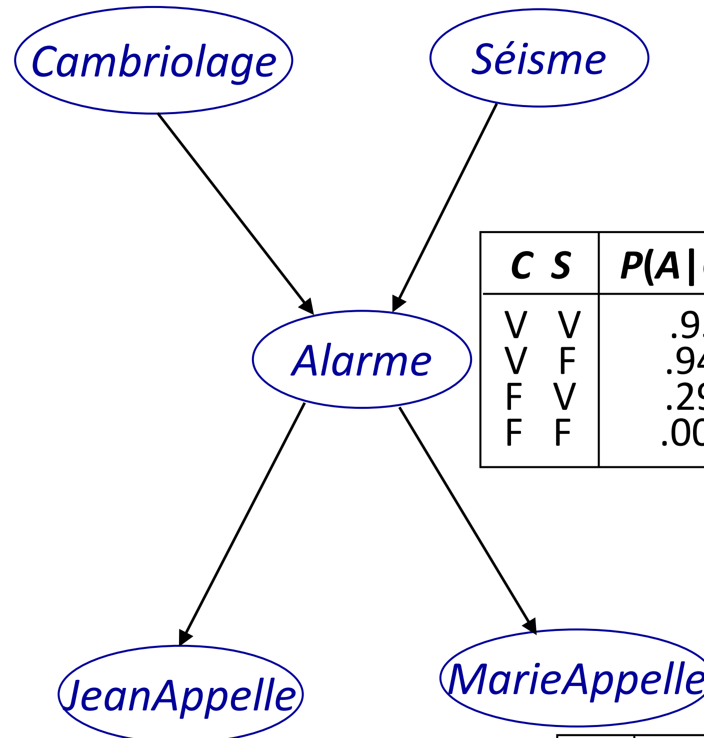
A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

3. Relation entre **deux parents** étant donné un enfant
   - sont indépendants si enfant **non** observé
- Exemples :
   - *Cambriolage* et *Séisme* sont **indépendants** à priori
   - mais ils sont **dépendants** étant donné *Alarme*
      - *P*(*C*|*A*,*S*) n'est pas simplifiable, parce que *P*(A|C,*S*) n'est pas simplifiable
   - **ne pas connaître** A « bloque » le chemine entre C et S

***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002



C S	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V V	.95
V F	.94
F V	.29
F F	.001

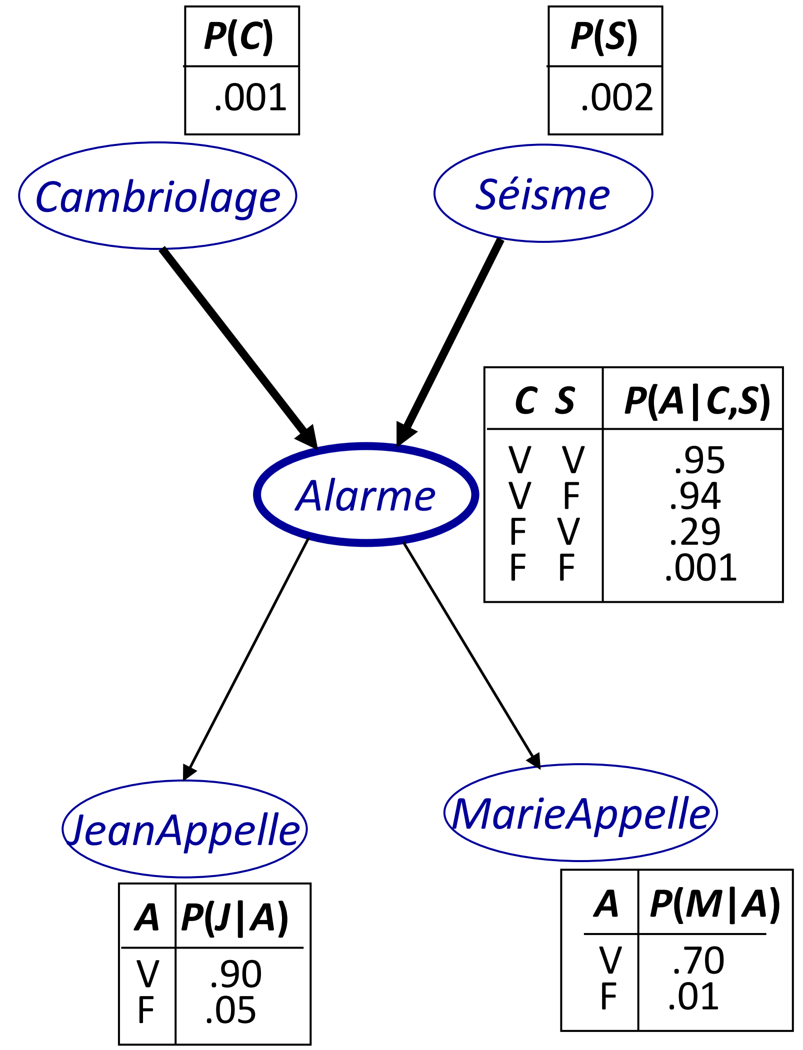
A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

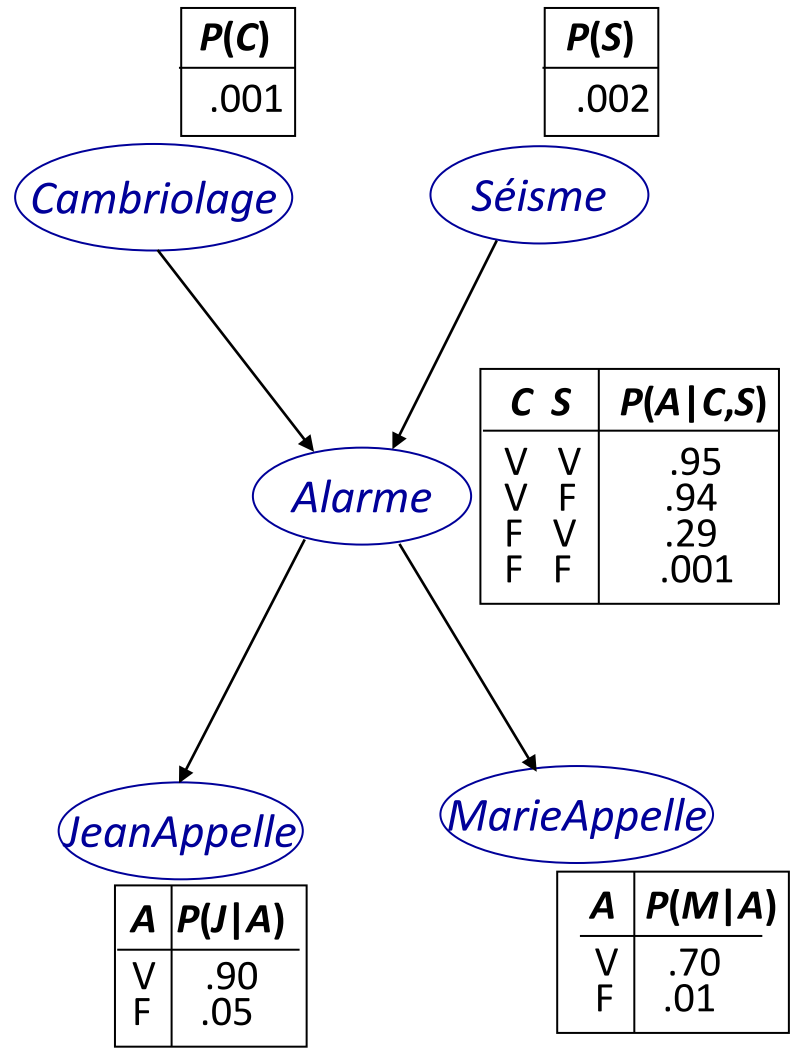
$P(C|A,S) = P(C,A,S) \,/\, P(A,S)$

$$= \frac{\mathbf{P(A|S,C)}\, P(S)\, P(C)}{\Sigma_c\, P(A|S)\, P(S)\, P(C)}$$



Indépendance conditionnelle dans un RB

- De ces trois dernières règle, émane une **règle plus générale**:
  - un nœud est indépendant de ses **non-descendants**, étant donné ses parents
  - exemples :
    - » *Cambriolage* et *Séisme* sont **indépendants** a priori
    - » mais ils sont **dépendants** étant donné *Alarme*
      - – $P(C|A,S)$ n’est pas simplifiable, parce que $P(A|C,S)$ n’est pas simplifiable
    - » **ne pas connaître** A « bloque » le chemine entre C et S



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB : D-séparation

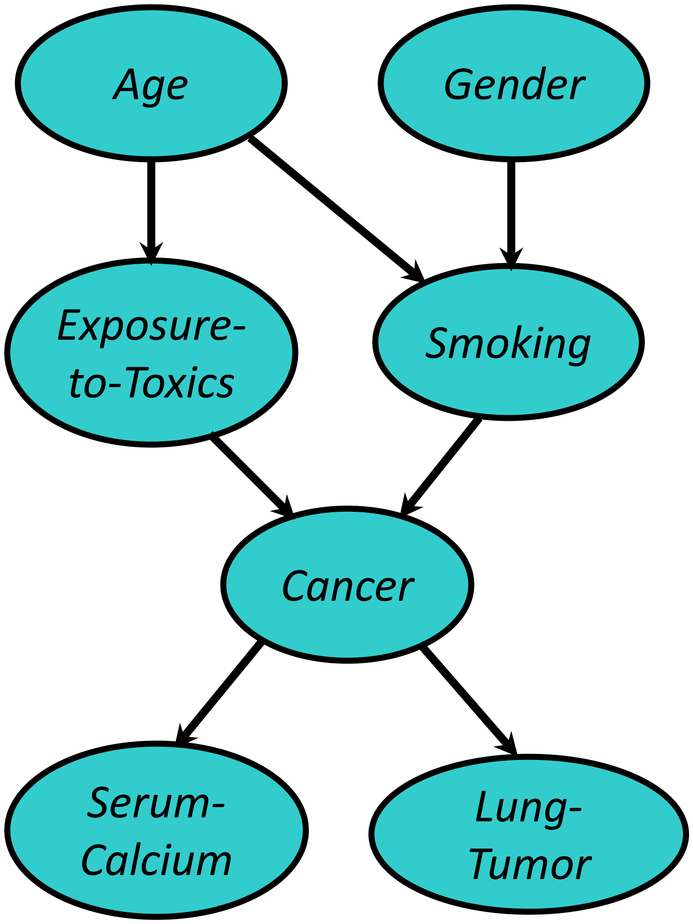
- **D-séparation** : critère général pour décider si un nœud *X* est indépendant d'un nœud *Y*, étant donnés d'autres nœuds $Z = \{Z_1, ..., Z_m\}$

- *X* est indépendant de *Y* sachant *Z* si tous **les chemins non-dirigés** entre *X* et *Y* sont **bloqués** par *Z*

- Un **chemin est bloqué** s'il contient au moins un noeud *N* qui satisfait une ou l'autre des conditions suivantes :
  1. il inclue un noeud $\rightarrow N \rightarrow$ ou $\leftarrow N \rightarrow$, où $N \in \{Z_1, ..., Z_m\}$
  2. il inclue un noeud $\rightarrow N \leftarrow$ et $N \notin \{Z_1, ..., Z_m\}$, et **aucun des descendants** de *N* *appartient* $\{Z_1, ..., Z_m\}$.

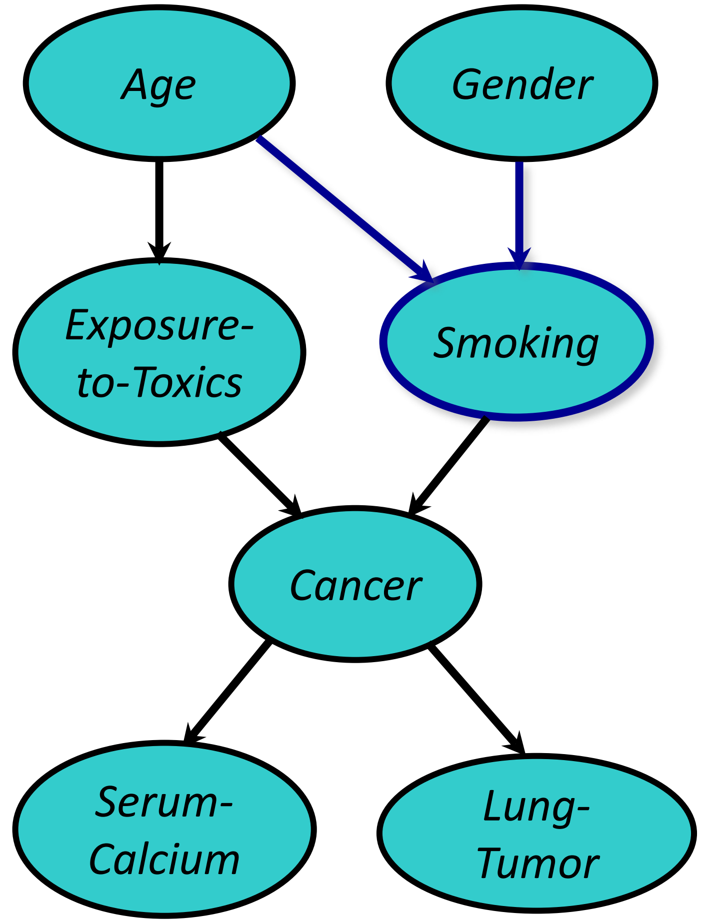
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?



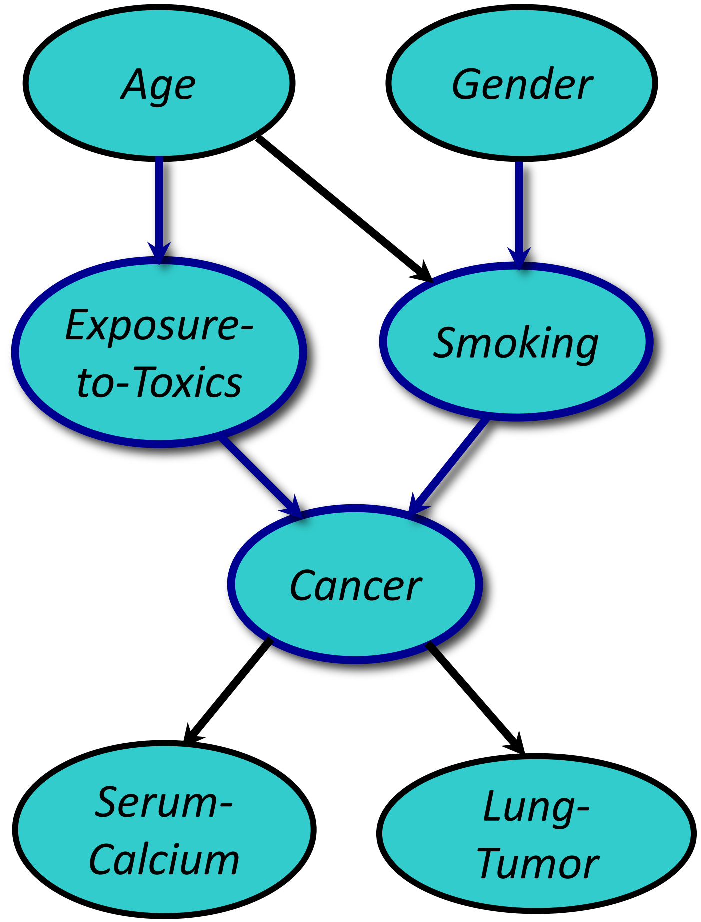
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \leftarrow$
    - » *Smoking* et ses descendants *Cancer*, *Serum-Calcium* et *Lung-Tumor* ne sont pas observés



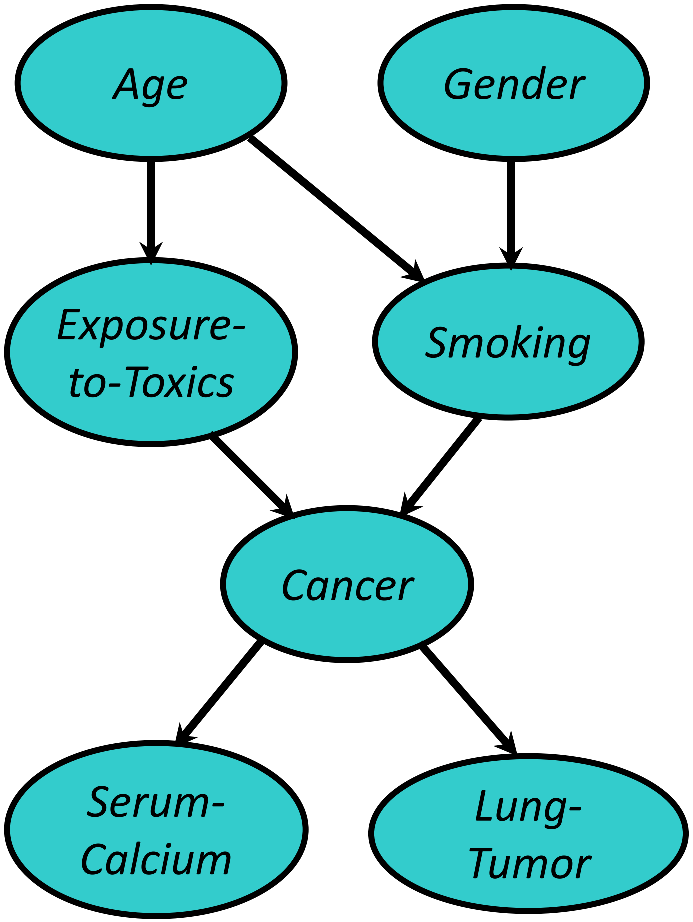
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow \bigcirc\!\!\!\!\!\!\;N \leftarrow$
    - » *Smoking* et ses descendants *Cancer*, *Serum-Calcium* et *Lung-Tumor* ne sont pas observés
  - chemin 2 est aussi Cancer
    - » même raisons $\rightarrow \bigcirc\!\!\!\!\!\!\;N \leftarrow$
- Réponse : **oui**



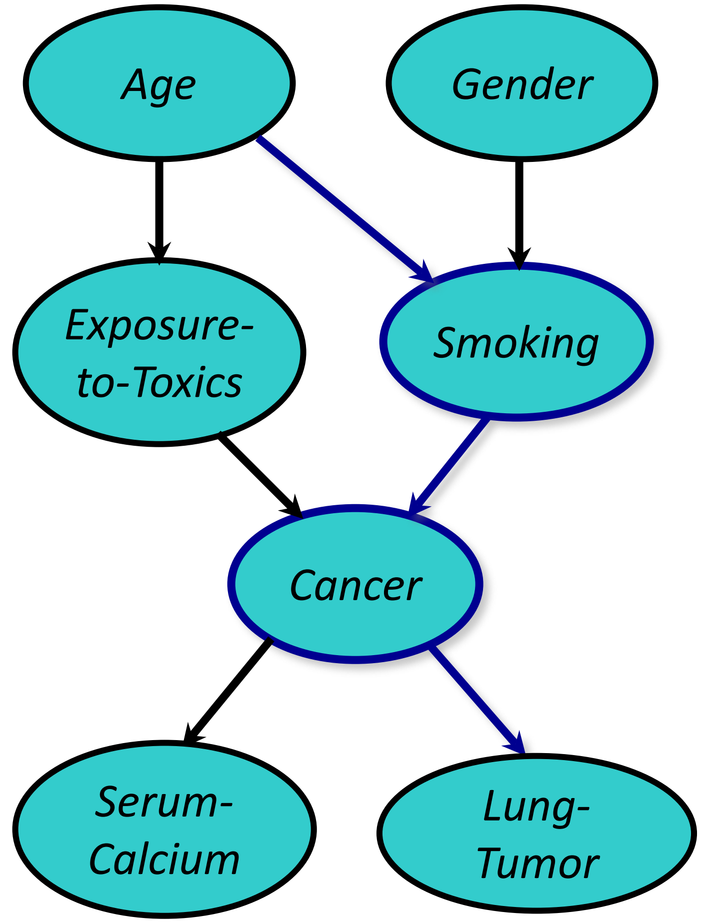
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?



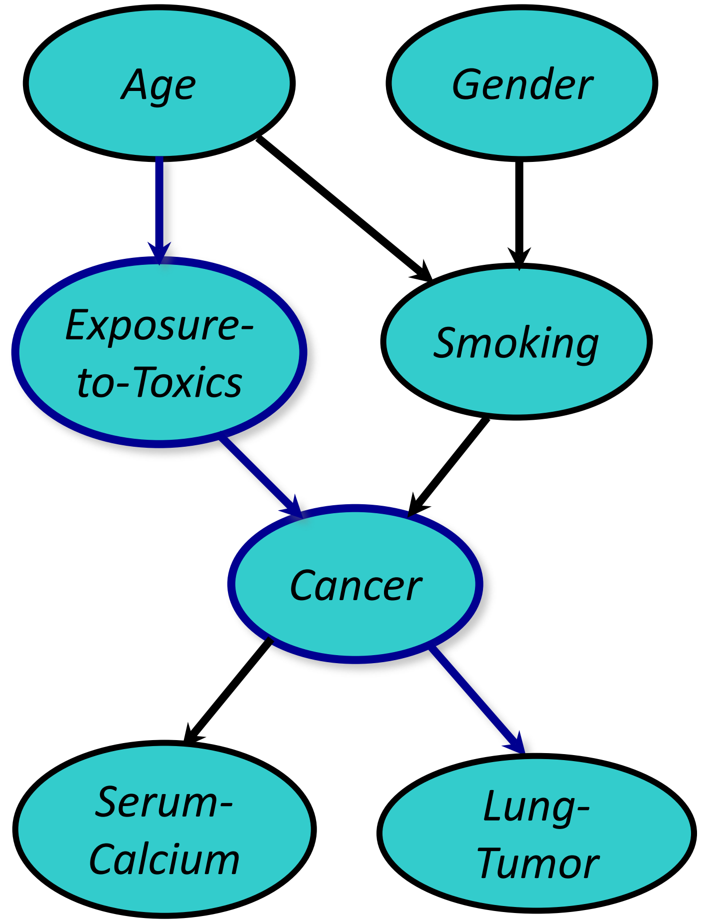
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \rightarrow$
    - » *Smoking* est observé



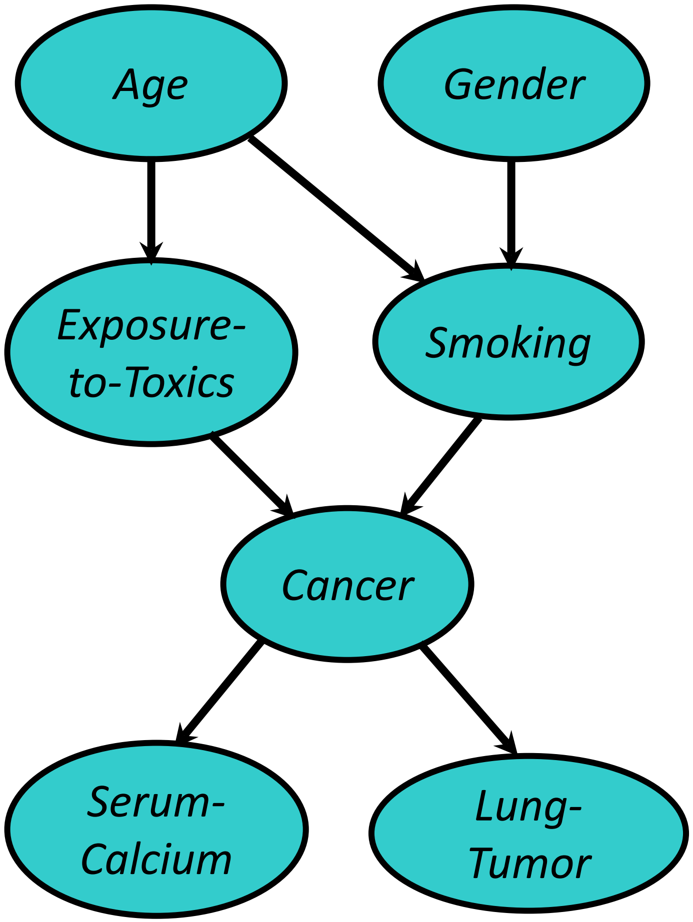
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \rightarrow$
    - » *Smoking* est observé
  - chemin 2 n'est pas bloqué
    - » *Exposure-to-Toxics* $\rightarrow N \rightarrow$ n'est pas observé
    - » *Cancer* $\rightarrow N \rightarrow$ n'est pas observé
- Réponse : **non**



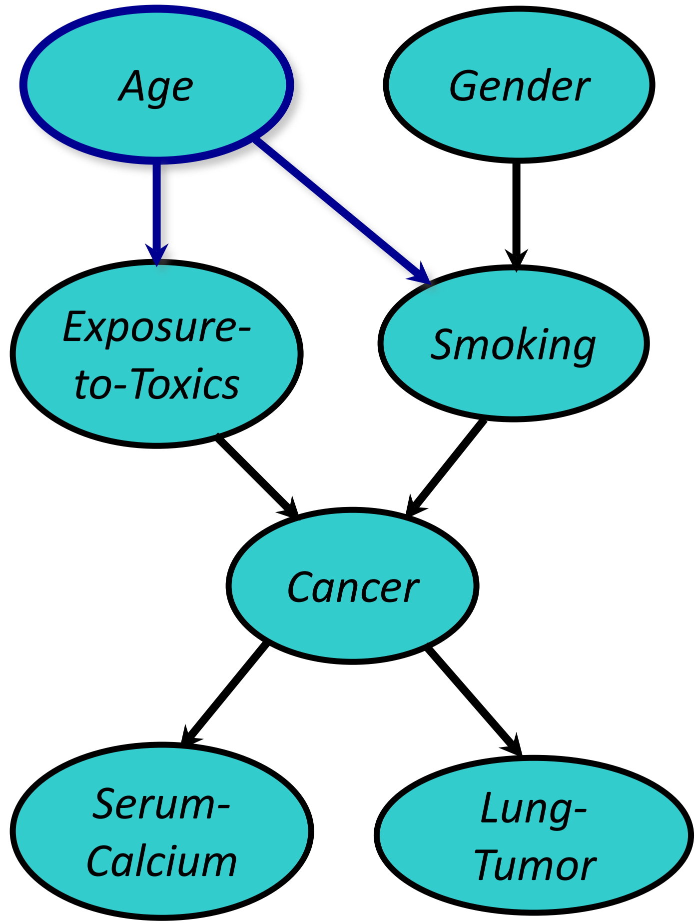
Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?



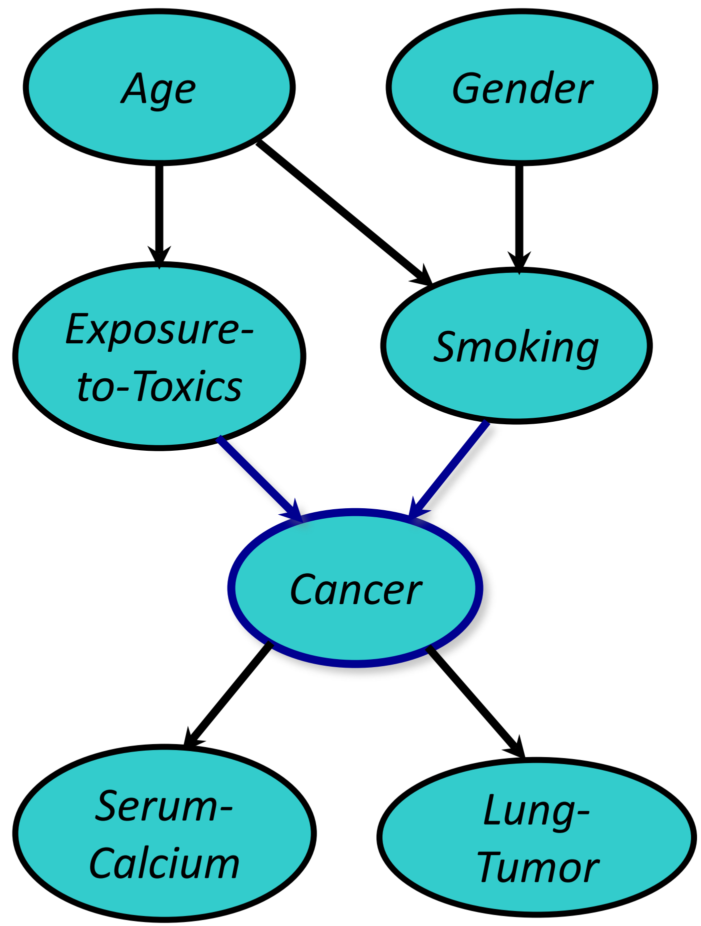
Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Age* ← *N* →
    - » *Age* est observé



Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Age* ← *N* →
    - » *Age* est observé
  - chemin 2 n'est pas bloqué
    - » *Cancer* → *N* ←
      ne bloque pas le chemin puisque *Lung-Tumor*, un de ses descendants, est observé
- Réponse : **non**



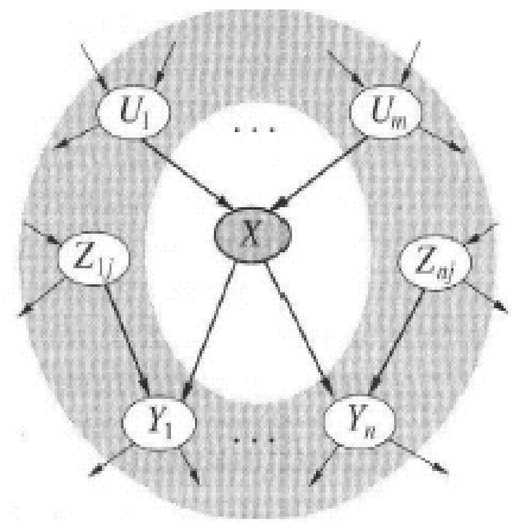
Indépendance conditionnelle dans un RB : Couverture de Markov

- Soit la **couverture de Markov** (***Markov blanket***) *MB*(*X*) d'un nœud *X*, c'est à dire :
  - les parents de *X*
  - les enfants de *X*
  - et les parents des enfants de *X*
- Le nœud *X* est conditionnellement indépendant des autres nœuds (hors de la couverture de Markov), étant donné les nœuds de la couverture de Markov :

  $$\mathbf{P}(X|MB(X),Others) = \mathbf{P}(X|MB(X))$$

- **La couverture de Markov** est décrite dans le manuel du cours mais elle **est moins générale que la D-séparation.**

Couverture de Markov de *X*

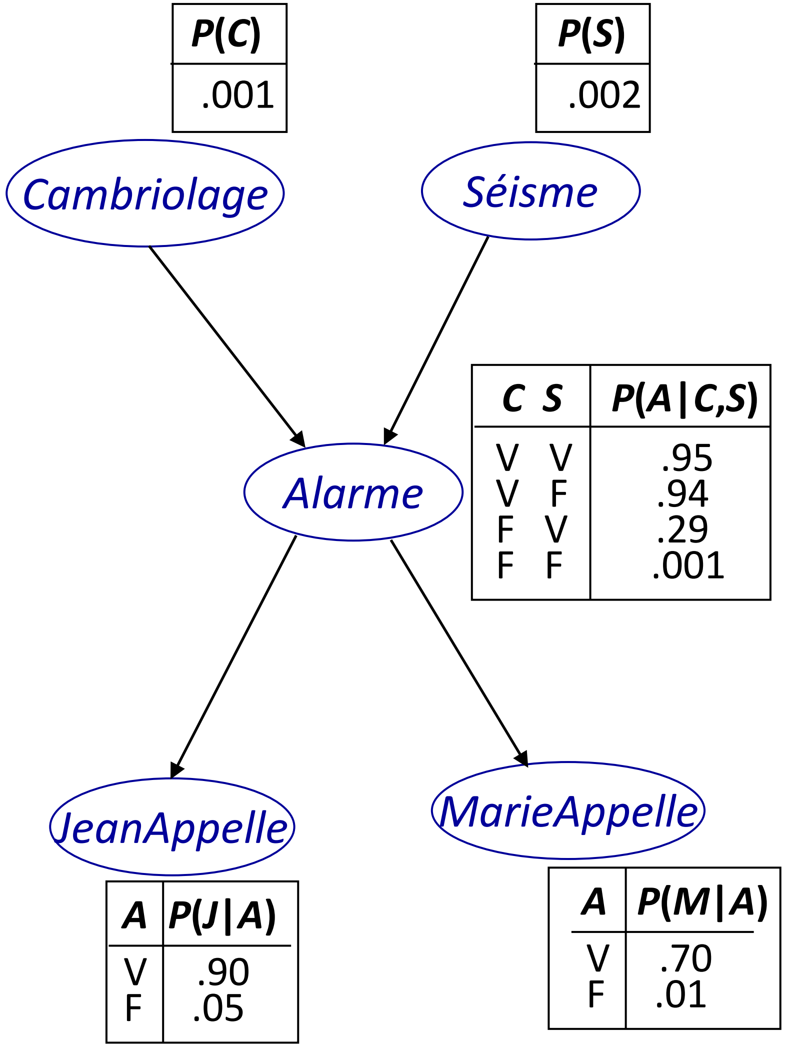


Requête dans un RB

- L'usage principal d'un RB est de calculer les probabilités à posteriori, étant donné un événement observé
  - un événement est une assignation de valeurs à certaines variables d'observation
  - ex. : sachant le résultat d'une batterie de test, quelle est maintenant la probabilité qu'un patient ait une maladie *X* ?
- On va noter
  - *X* **l'ensemble** de variables pour lesquelles on fait une requête
    - » ex. : la patient a la maladie *X*
  - *E* l'ensemble des variables d'observation et *e* les valeurs observées
    - » ex. : $E_i = e_i$ est le résultat d'un test
  - *Y* l'ensemble des variables cachées (qui ne sont pas observées)
    - » ex. : Y_i est le résultat de tests qui n'ont pas été faits
- Une **requête** est l'inférence de $\mathbf{P}(X|e)$, où *e* est une assignation de valeurs aux variables dans E

Types d'interrogations d'un RB

- **Diagnostique** (on connaît les effets, on cherche les causes)
  - **P**(*Cambriolage*|*JeanAppelle*=*vrai*)
  - garder à l'esprit qu'on a des arcs « causes / effets ».
- **Prédiction** (étant données les causes, quels sont les effets)
  - **P**(*JeanAppelle*|*Cambriolage*=*vrai*)
- **Probabilité conjointe ou marginale**
  - **P**(*Alarme*)

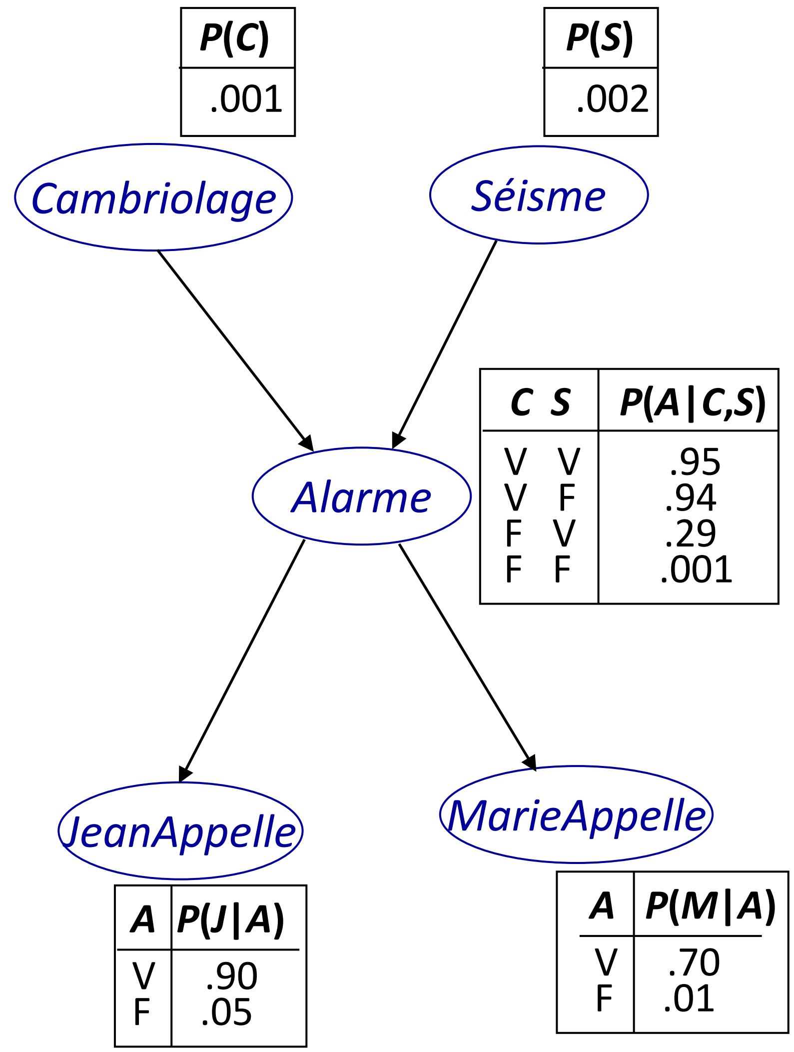


Requête dans un RB

- Exemple :

  P(*Cambriolage* | *JeanAppelle = vrai,*
  MarieAppelle = vrai)
  = [0.284, 0.716]

- Comment fait-on un tel calcul?
  - **inférence exacte** (prohibitif)
    - **par énumération**
  - **inférence approximative par échantillonnage** avec les méthodes Monte-Carlo (plus efficace)
    - **méthode de rejet**



Inférence par énumération

- On veut calculer la distribution sur les variables de requêtes **sachant** les observations

$$\mathbf{P}(X|e) = \alpha\, \mathbf{P}(X,E=e) = \alpha\, \Sigma_y\, \mathbf{P}(X, e, y)$$

- Les termes $P(X, e, y)$ peuvent s'écrire comme le produit des probabilités conditionnelles du réseau
- On peut donc calculer la réponse à une requête $P(X|e)$ dans un RB, simplement en
  1. calculant les sommes des produits des probabilités conditionnelles du RB
  2. normalisant ces sommes de façon à obtenir une distribution qui somme à 1
- Les ensembles des variables X, E et Y couvrent ensemble tous les noeuds
  - complexité en temps : $O(d^{|X|+|Y|})$, avec d la taille du plus grand domaine
  - complexité en espace : $O(d^{|X|})$, pour stocker la distribution

Exemple 1

- **P**(*Cambriolage* | *JeanAppelle = vrai*, *MarieAppelle = vrai*)
  - noté **P**(C | j, m)

- Les variables cachées sont *Séisme* et *Alarme*

  $\mathbf{P}(C \mid j, m) = \alpha\, \mathbf{P}(C, j, m)$

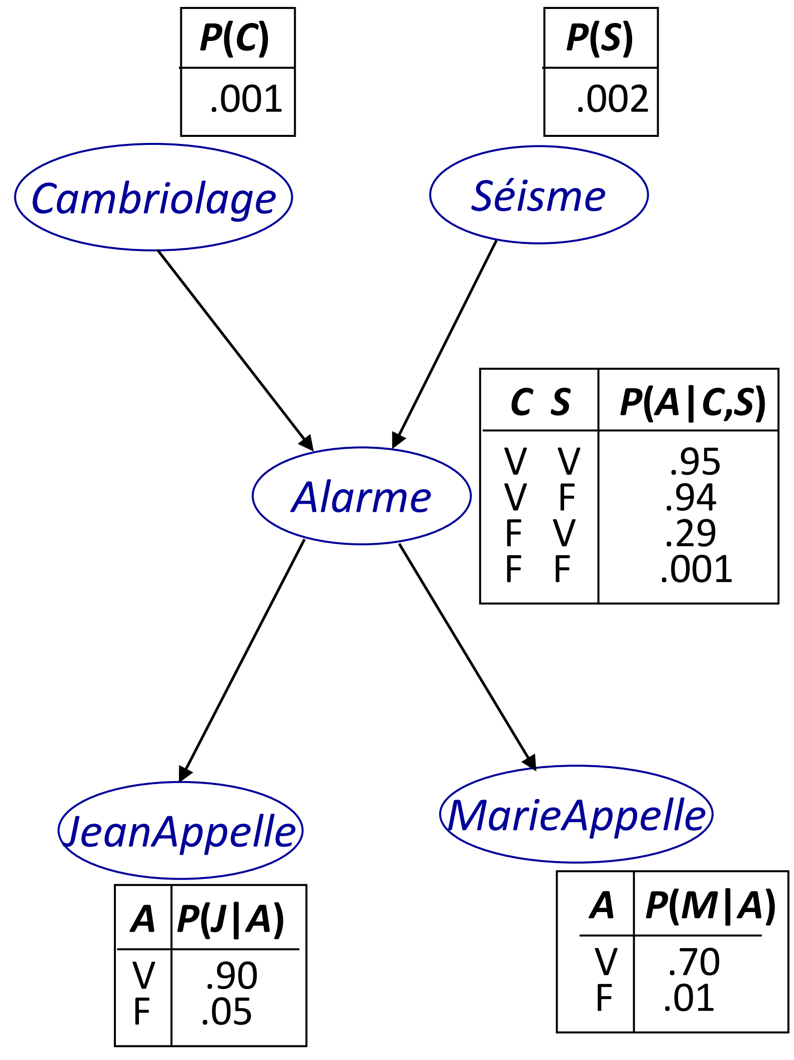
  $= \alpha\, \Sigma_s\, \Sigma_a\, \mathbf{P}(C, s, a, j, m)$

$= P(C)\, \Sigma_s \Sigma_a P(s)\, P(a|C,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

$= P(C)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a|C,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

Note :

- s et a prennent toutes les valeurs possibles pour $S=s$ et $A=a$
- ne pas confondre avec j et m qui sont des observations fixes (J=*vrai* et M=*vrai*)



P(*C*)
.001

P(*S*)
.002

C	*S*	*P*(*A*|*C*,*S*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*J*|*A*)
V	.90
F	.05

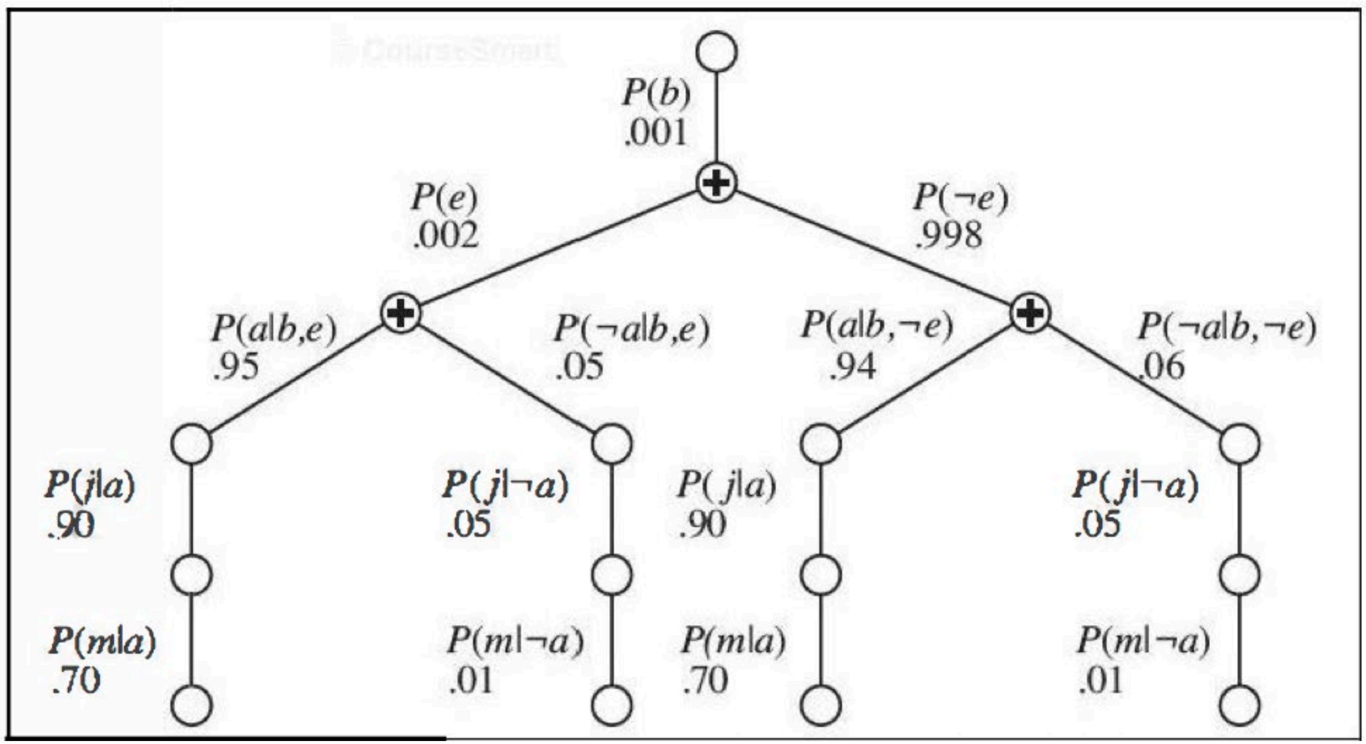
A	*P*(*M*|*A*)
V	.70
F	.01

Exemple 1 (suite)

- Structure de l'expression representée par l'équation

  $P(c \mid j, m) = \alpha * P(c)\ \Sigma_s P(s)\ \Sigma_a P(a|c,s)\ P(j|a)\ P(m|a)$

  $P(b \mid j, m) = \alpha * P(b)\ \Sigma_s P(e)\ \Sigma_a P(a|b,e)\ P(j|a)\ P(m|a)$ - En anglais



Exemple 1 (suite)

- On calcule pour $C = vrai$

  $P(c \mid j, m)$

  $= \alpha\, P(c)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a|c,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

  $= \alpha * 0.001*(0.002*(0.95*0.90*0.70+$
  $0.05*0.05*0.01)+$
  $0.998*(0.94*0.90*0.70+$
  $0.06*0.05*0.01))$

  $= \alpha * 0.00059224$

- Et $C = faux$

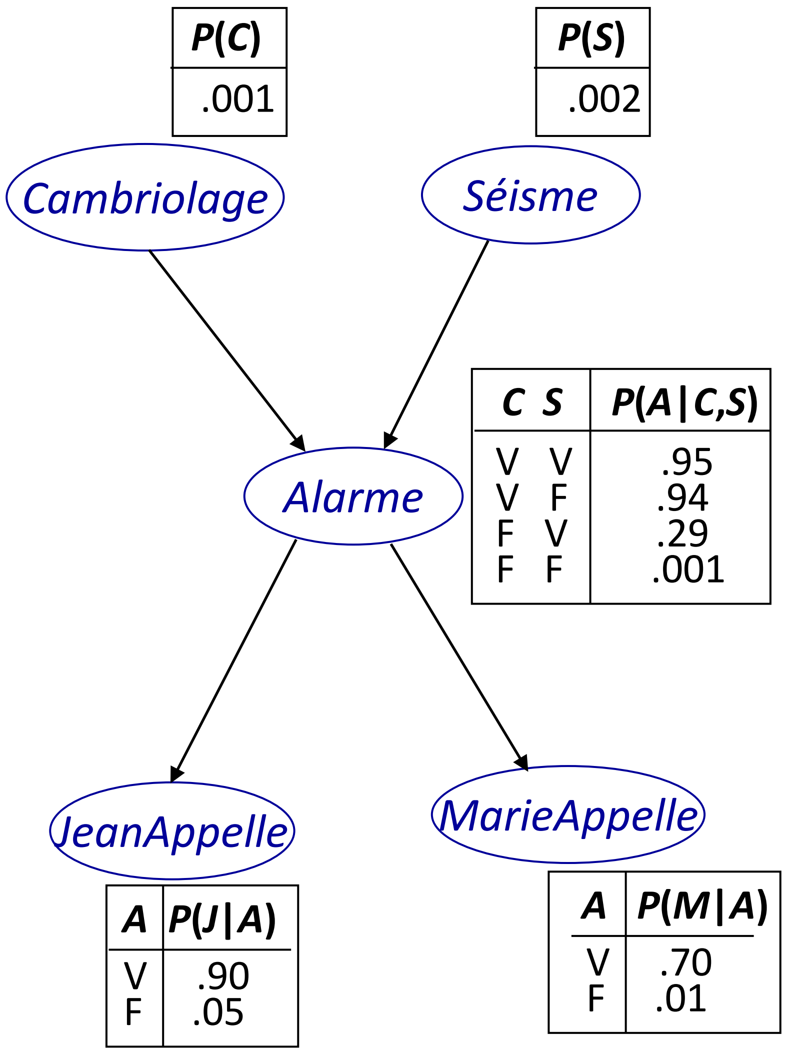
  $P(\neg c \mid j, m)$

  $= \alpha\, P(\neg c)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a|\neg c,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

  $= \alpha * 0.0014919$

  $\alpha = 1 / (0.00059224 + 0.0014919)$

- Donc, $\mathbf{P}(C \mid j, m) = [0.284, 0.716]$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	*S*	*P(A|C,S)*
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P(J|A)*
V	.90
F	.05

A	*P(M|A)*
V	.70
F	.01

Exemple 2 : Évaluation par énumération

<u>**Requête**</u> :

Calculer $P(T{=}vrai \mid F{=}faux, M{=}vrai)$

<u>Variables connues :</u>

F = faux

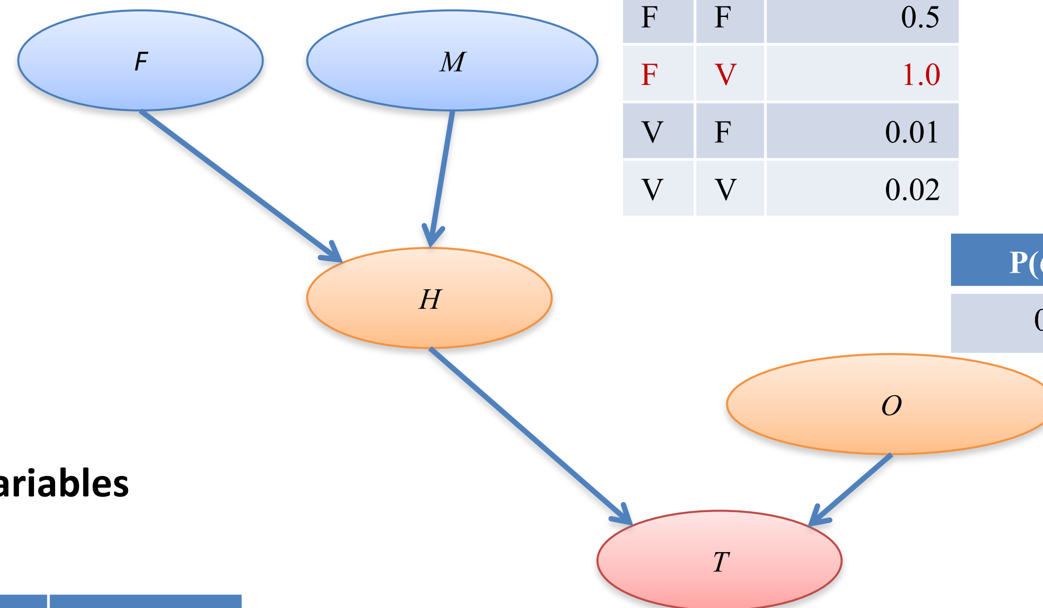
M = vrai

<u>Variables inconnues :</u>

H

O

F	*M*	P(*H*|*F*,*M*)
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02



P(*O*)
0.6

H	*O*	P(*T*|*H*,*O*)
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

Énumération des valeurs possibles des variables cachées (2*2)

H	*O*	P(*H*|*F*,*M*) * P(*O*)*P(*T*|*H*,*O*)	=
F	F	0.0 * 0.4 * 0.1	0
F	V	0.0 * 0.6 * 0.5	0
V	F	1.0 * 0.4 * 0.5	0.20
V	V	1.0 * 0.6 * 1.0	0.60
		TOTAL	**0.80**

Exemple 3 : Évaluation par énumération

Requête :

Calculer $P(T{=}vrai \mid M{=}vrai)$

Variables connues :

$M = vrai$

Variables inconnues :

H

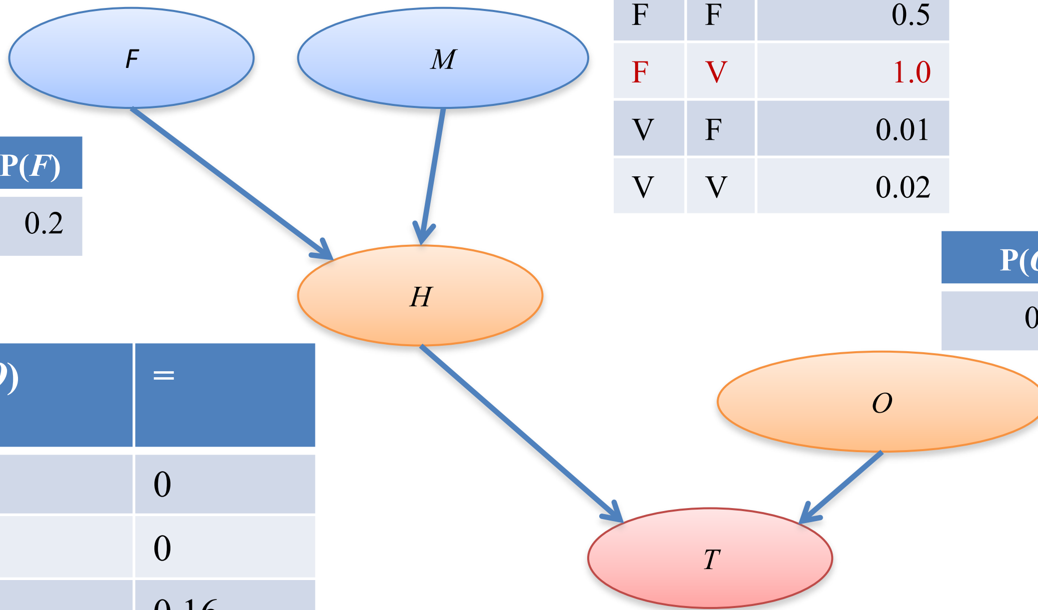
O

F

$P(F)$
0.2

F	M	$P(H \mid F,M)$
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02

$P(O)$
0.6



H	O	$P(T \mid H,O)$
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

F	H	O	$P(F)*P(H \mid F,M)*P(O)*P(T \mid H,O)$	=
F	F	F	0.8 * 0.0 * 0.4 * 0.1	0
F	F	V	0.8 * 0.0 * 0.6 * 0.5	0
F	V	F	0.8 * 1.0 * 0.4 * 0.5	0.16
F	V	V	0.8 * 1.0 * 0.6 * 1.0	0.48
V	F	F	0.2 * 0.98 * 0.4 * 0.1	0.00784
V	F	V	0.2 * 0.98 * 0.6 * 0.5	0.0588
V	V	F	0.2 * 0.02 * 0.4 * 0.5	0.0008
V	V	V	0.2 * 0.02 * 0.6 * 1.0	0.0024
			TOTAL	**0.71**

Exercice

- Soit le RB ayant les tables de probabilités conditionnelles suivantes
  - Dessinez le graphe du RB.
  - Calculez *P*(*A*=faux | *E*=vrai).
  - Dites si *B* et *E* sont indépendants sachant *F*. Pourquoi?
  - Dites si *E* et *F* sont indépendants sachant *A* et *C*. Pourquoi?

A	*C*	*F=vrai*
faux	*faux*	0.1
faux	*vrai*	0.2
vrai	*faux*	0.8
vrai	*vrai*	0.7

E	*C=vrai*
faux	0.2
vrai	0.4

D=vrai
0.2

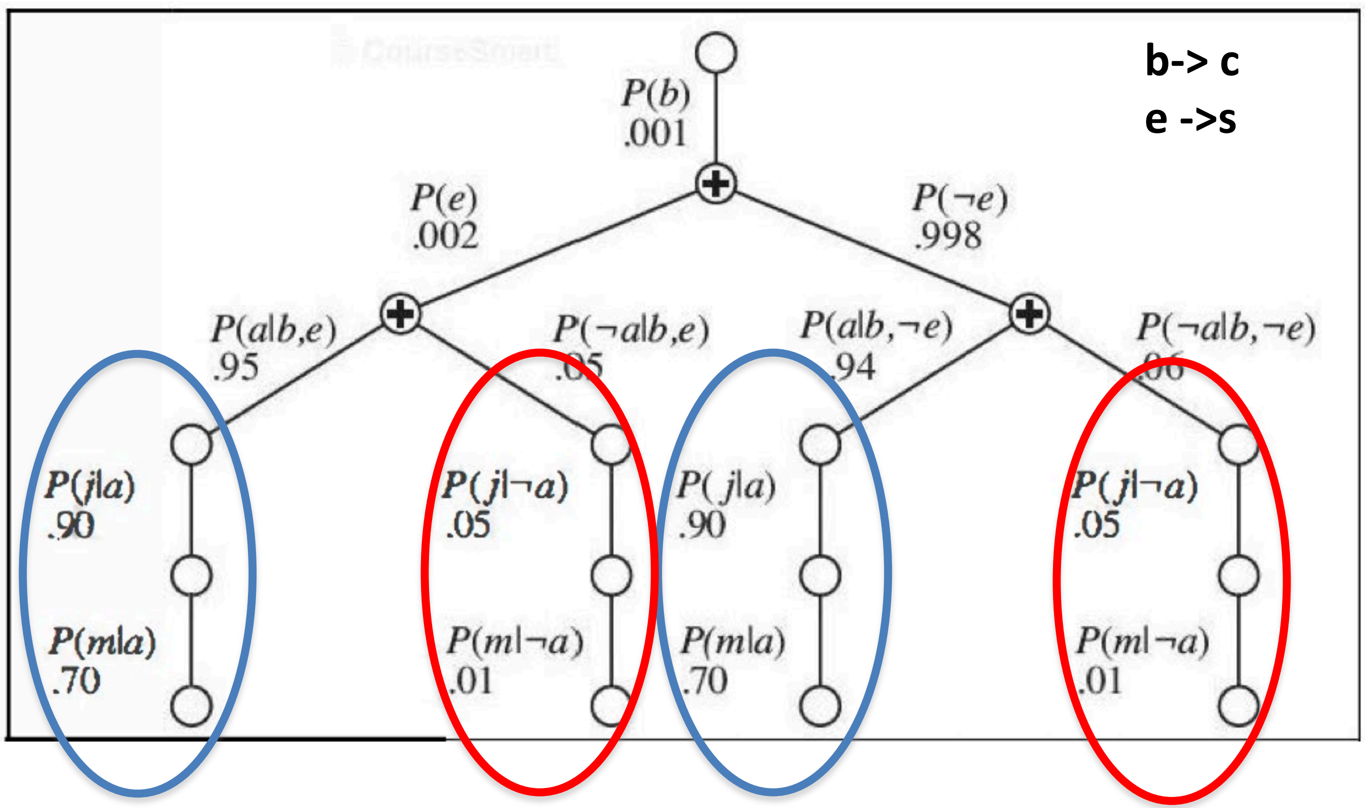
B	*D*	*E*	*A=vrai*
faux	*faux*	*faux*	0.7
faux	*faux*	*vrai*	0.2
faux	*vrai*	*faux*	0.5
faux	*vrai*	*vrai*	0.1
vrai	*faux*	*faux*	0.2
vrai	*faux*	*vrai*	0.9
vrai	*vrai*	*faux*	0.8
vrai	*vrai*	*vrai*	0.6

E=vrai
0.9

B=vrai
0.7

Inférence par élimination des variables

- Même principe que l'inférence par énumération, mais on évite les répétions de calculs déjà faits (comme en programmation dynamique)
- Voir section 14.4.2 du livre: $P(b \mid j, m) = \alpha * P(b)\, \Sigma_s P(e)\, \Sigma_a P(a|b,e)\, P(j|a)\, P(m|a)$



Inférence approximative

- Les méthodes d'inférence exactes sont inefficaces
  - le problème d'inférence dans un RB est NP-Complet
- Les méthodes d'inférence approximatives sont plus pratiques
  - en général, on n'a pas besoin d'un calcul exact des probabilités pour qu'une conclusion tirée d'un RB soit correcte
  - les méthodes approximatives assignent des valeurs aux variables aléatoires en fonction des TPC associées à ces variables
  - ces assignations sont basées sur des simulations stochastiques, plutôt que des observations réelles

Méthode de rejet (*rejection sampling*)

- Pour estimer $P(X{=}x|e)$
  - Générer des échantillons complets à partir de la distribution spécifiée par le RB
  - Rejeter tous les échantillons qui ne correspondent pas à l'observation ***e***.
  - Estimer $P(X{=}x|e)$ en comptant combien de fois X=x se produit dans les échantillons restant.
- Autremet dit:

$$P(X{=}x|e) = \alpha \, \Sigma_y \, P(X{=}x, e, y) \approx \mathrm{freq}(x,e) \,/\, \Sigma_{x'} \, \mathrm{freq}(x',e) = \mathrm{freq}(x,e) \,/\, \mathrm{freq}(e)$$

- Cette technique est appelée **méthode de rejet** (***rejection sampling***)
  - le problème avec cette méthode est que si E=*e* est très rare selon le RB, il y aura peu d'échantillons qui correspondront à cette observation
  - d'autres méthodes sont plus efficaces et nécessitent moins d'échantillons pour obtenir une bonne estimation
  - voir la section 14.5 dans le livre

Exemple

Requête :

Calculer $P(T{=}vrai \mid M{=}vrai)$

Variables connues :

M = *vrai*

Variables inconnues :

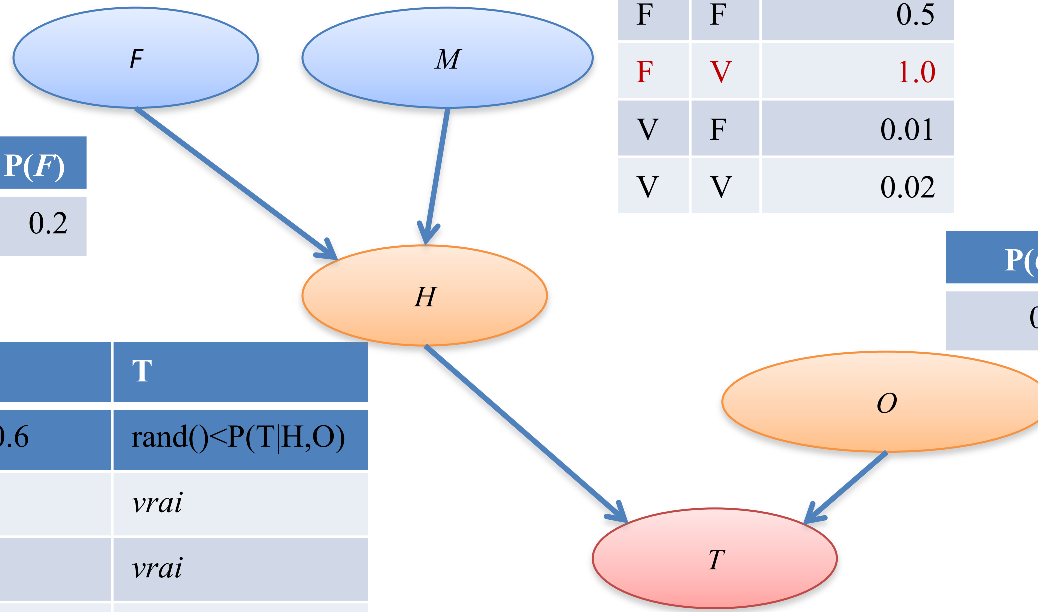
H

O

F

F	*M*	P(*H*|*F*,*M*)
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02

P(*F*)
0.2



P(*O*)
0.6

	F	H	O	T
#	rand()<0.2	rand()<P(H|F,M)	rand()<0.6	rand()<P(T|H,O)
1	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
2	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
3	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
4	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*
5	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
6	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
7	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
8	*faux*	*vrai*	*faux*	*vrai*
			Average of *T=vrai*	6/8 = **0.75**

H	*O*	P(*T*|*H*,*O*)
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

Plus qu'il y a d'échantillons, plus l'erreur d'estimation est faible.

(Vrai réponse : 0.71)

Construction d’un RB

- Comment bâtir un RB afin de modéliser un environnement/problème donné?

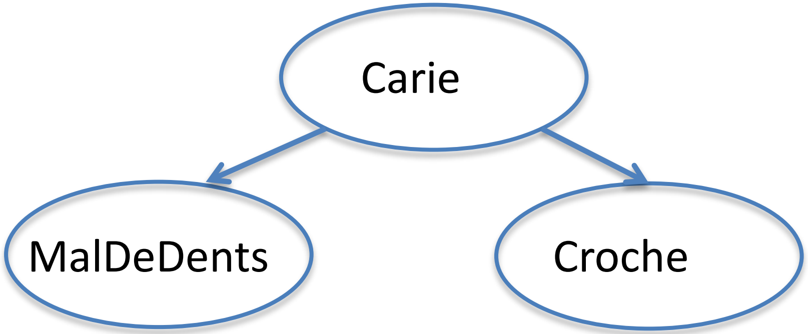
- On a besoin de spécifier 2 choses:
  1. La structure (graphe) du réseau (quelles indépendances peut-on supporter)
  2. Les table de probabilités (quelles relations entre les variables de l’environnement?)

Spécifier les tables de probabilités d'un RB

- Si on a un ensemble de données **où tous les nœuds X_i sont observés**, c'est facile :

$$P(X_i = x \mid Parents(X_i) = p\ ) \approx \mathrm{freq}(x,p) \,/\, \Sigma_{x'}\, \mathrm{freq}(x',p)$$

- On fait ce calcul pour toutes les valeurs x de X_i et toutes les valeurs p de ses parents possibles
  - pour éviter d'avoir de probabilités à 0, on peut initialiser freq(x,p) = δ à une petite constante δ (ex. : δ=1)

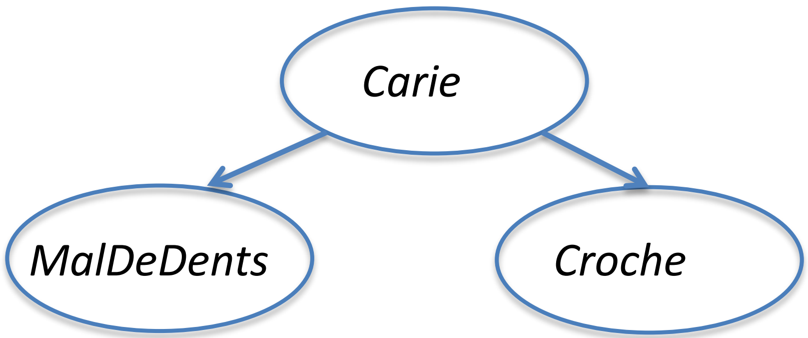


Exemple

- Supposons que l'on souhaite diagnostiquer une carie à l'aide du RB suivant:
  - ***MalDeDents***: le patient a mal aux dents
  - ***Croche***: la sonde s'accroche dans les dents
  - ***Carie***: le patient a une carie

- Supposons qu'on collecte un ensemble de données sur 120 patients où
  - 70 des 120 patients avaient une carie

P(Carie=vrai)=(70+1)/(70+1+50+1)=0.52

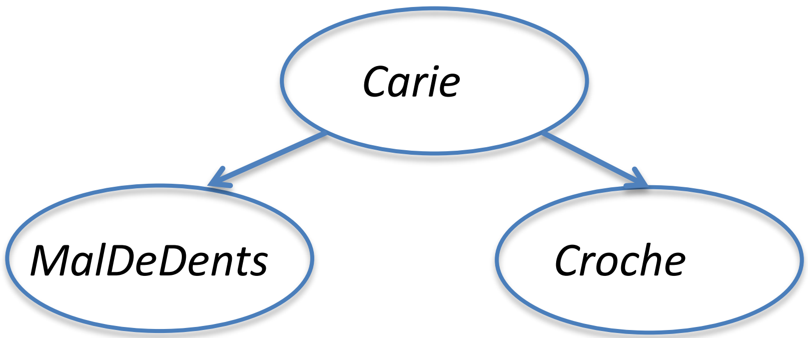


Exemple

- Supposons maintenant que dans mes données de 120 patients,
  - Parmi les 70 qui avaient une carie
    - 65 avaient mal aux dents
    - 51 ont la sonde qui s'accrochait

P(MalDeDents=vrai|Carrie=Vrai)=(65+1)/(65+1+5+1)=0.92

P(Croche=vrai|Carie=vrai)=(51+1)/(51 + 1 + 19 + 1)=0.72

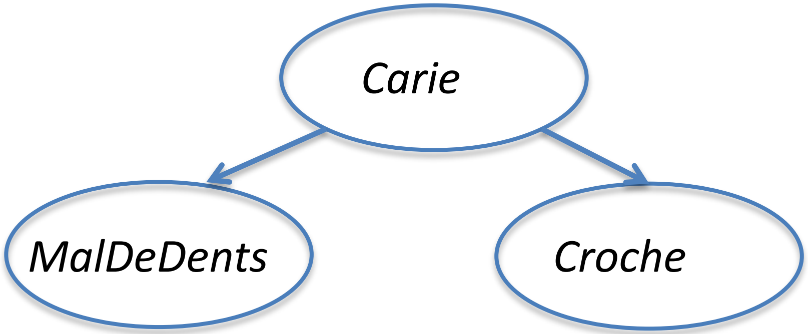


Exemple

- Supposons que dans mes données de 120 patients,
  - Parmi les 50 qui n'avaient pas de carie
    - 10 avaient mal aux dents
    - La sonde ne s'accrochait pour aucun d'eux

P(MalDeDents=vrai|Carrie=faux)=(10+1)/(10+1+42+1)=0.20

P(Croche=vrai|Carie=faux)=(0+1)/(0 + 1 + 50 + 1)=0.02



Spécifier les tables de probabilités d'un RB

- Si on a un ensemble de données où certaines des variables ne sont pas observées, on doit utiliser des méthodes plus sophistiquées.
  - Algorithme EM (voir section 20.3.2)

Construction de la structure du RB

1. Choisir un ordre des variables $X_1, \ldots, X_n$
2. Pour i = 1 to n :
   - ajouter X_i au réseau
   - choisir les parents $X_1, \ldots, X_{i-1}$ tels que $P(X_i \mid Parents(X_i)) = P(X_i \mid X_1, \ldots X_{i-1})$
   - ce choix garantit que :

     $P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$ (*chain rule*)

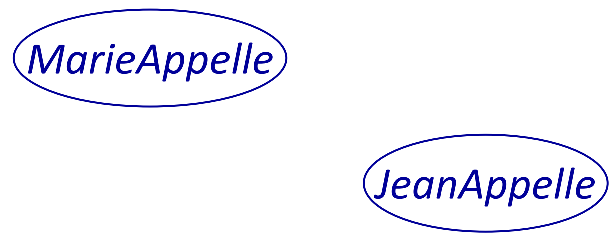
     $= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$ (par construction)

- Pour construire un bon RB, sa structure doit refléter les indépendances conditionnelles du problème

- Dans quel ordre ajouter les nœuds au réseau?
  - mettre les « causes racines » d'abord, ensuite les nœuds qu'ils influencent directement

Exemple

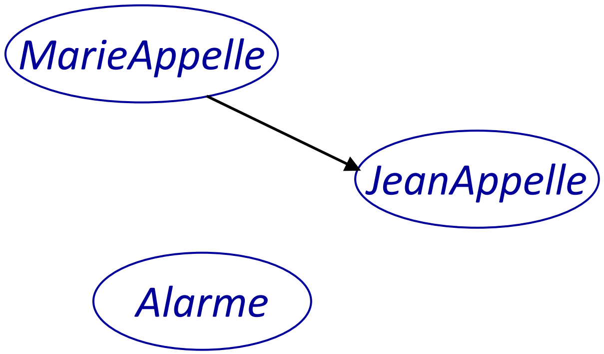
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J \mid M) = P(J)$?

Exemple

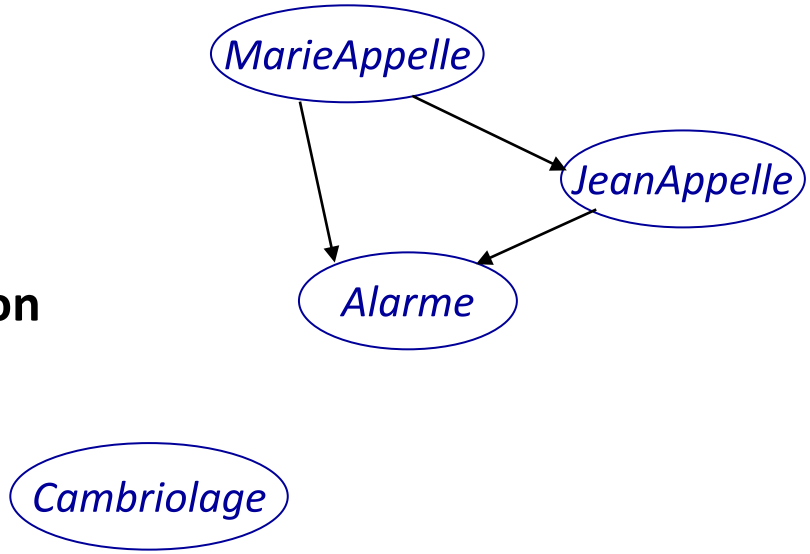
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$?

Exemple

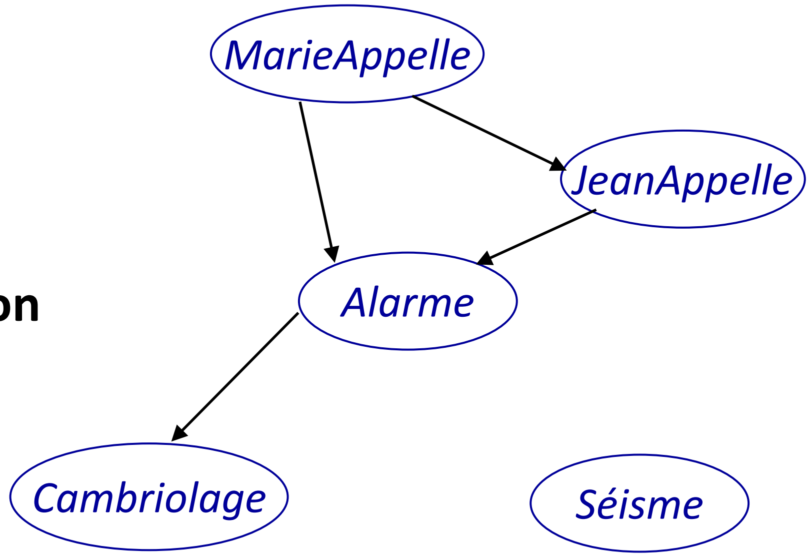
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$?
- $P(C|A,J,M) = P(C)$?

Exemple

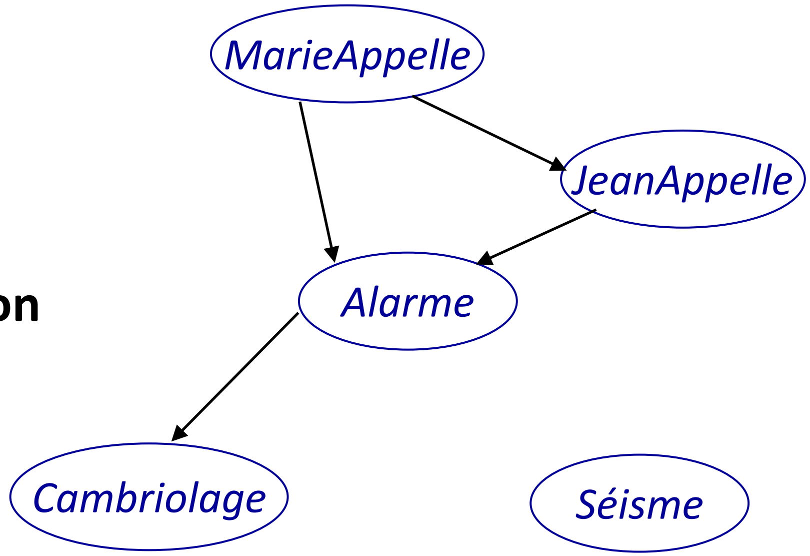
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$? **Oui**
- $P(C|A,J,M) = P(C)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A,C)$?

Exemple

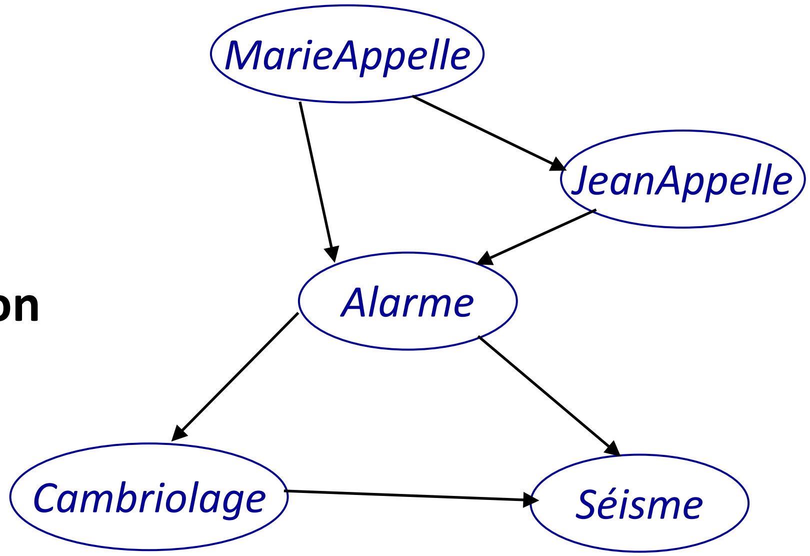
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$? **Oui**
- $P(C|A,J,M) = P(C)$? **Non**
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A,C)$?

Exemple

- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M, J, A, C, S*



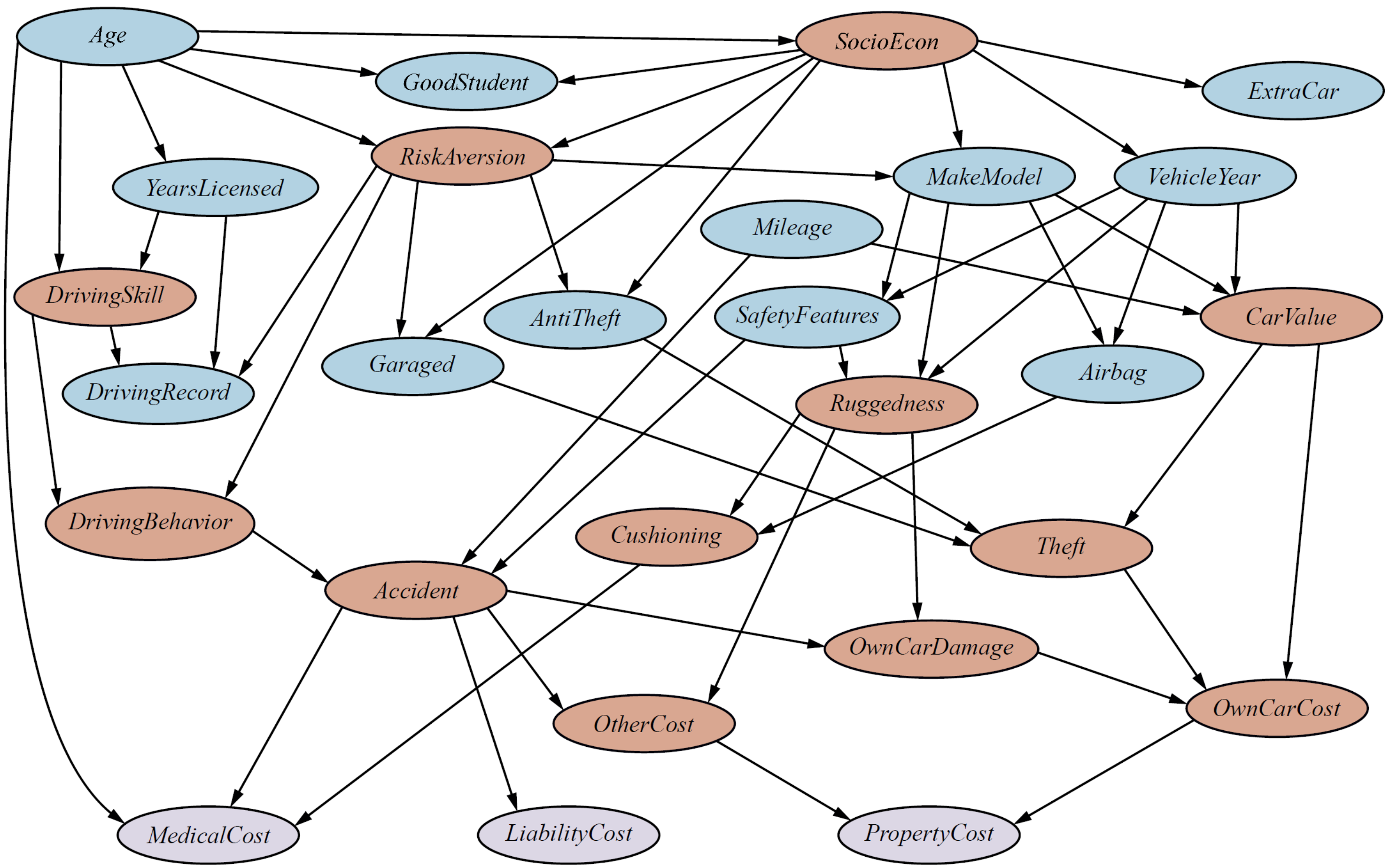
- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$? **Oui**
- $P(C|A,J,M) = P(C)$? **Non**
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A)$? **Non**
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A,C)$? **Oui**

Exemple

- Déterminer l'indépendance conditionnelle est très difficile dans le sens non causal
  - par exemple, en médecine, souvent les experts préfèrent donner des probabilités dans le sens causal (pathologie → symptôme) plutôt que dans le sens diagnostique

- Un réseau avec des dépendances diagnostiques (effet → cause) est généralement moins compacte
  - dans le cas présent : 1 + 2 + 4 + 2 + 4 = 13 nombres pour représenter les tables de probabilité conditionnelle du réseau au lieu de 10 pour la première version

RB pour évaluation des applications pour l'assurance auto



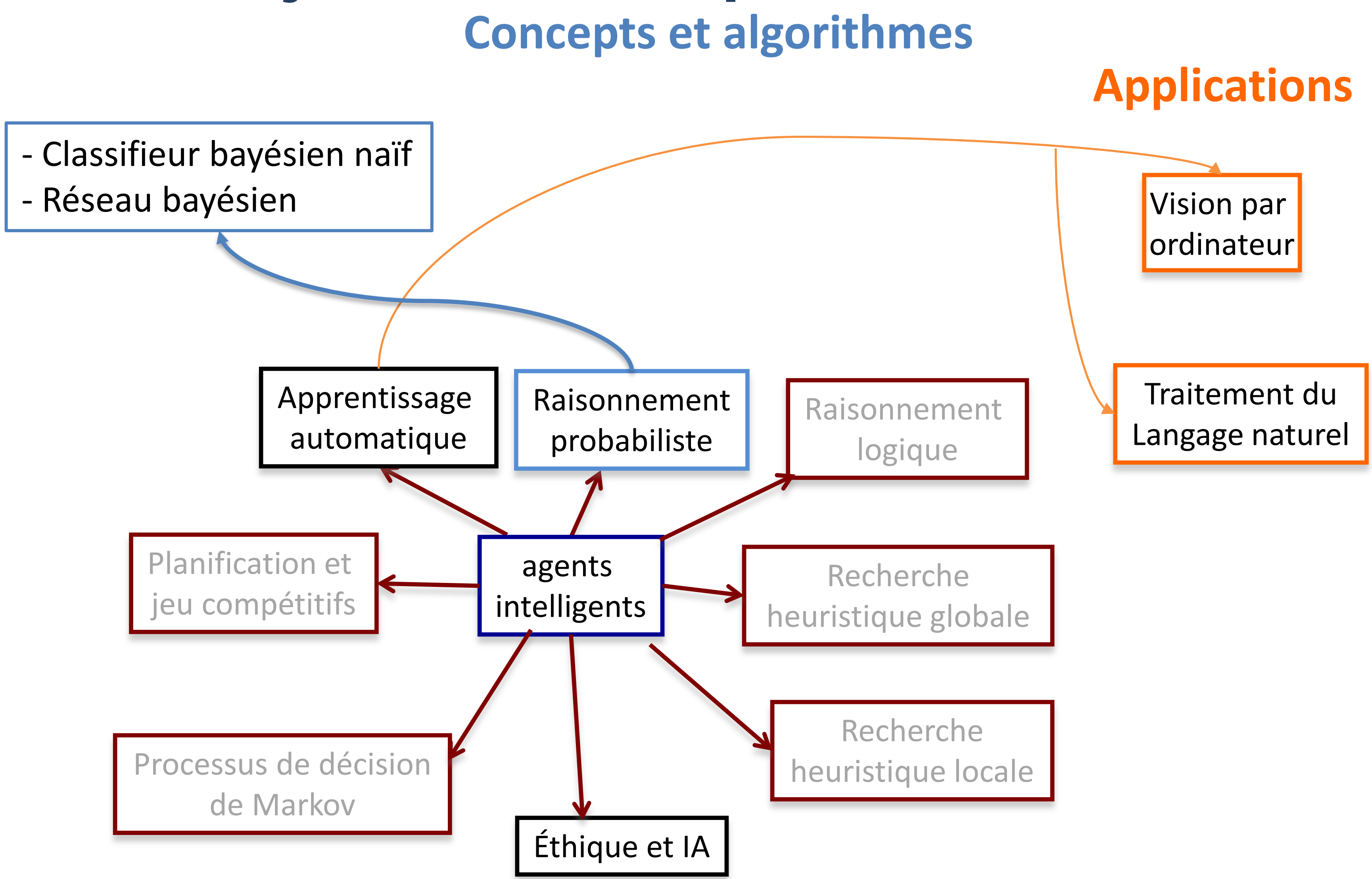
Résumé

- Un RB est un graphe orienté, acyclique, représentant des connaissances causales, et reflétant les dépendances conditionnelles entre des variables

- La topologie du réseau (arcs entres les variables) et les TPC donnent une représentation compacte de la distribution conjointe des probabilités

- Les connaissances du réseau (liens de causalité et probabilités) sont généralement obtenus avec l'aide d'un expert
  - pour des applications concrètes, ceci peut être très laborieux

Sujets couverts par le cours



Vous devriez être capable de...

- Décrire ce qu'est un réseau bayésien :
  - qu'est-ce que la topologie représente
  - quelle est la distribution conjointe associée à un réseau bayésien

- Étant donné un réseau bayésien :
  - calculer une probabilité conjointe, marginale, conditionnelle
  - dire si deux variables sont (conditionnellement) indépendantes

- Décrire l'inférence par énumération exacte

- Décrire la méthode de rejet pour l'inférence dans un RB

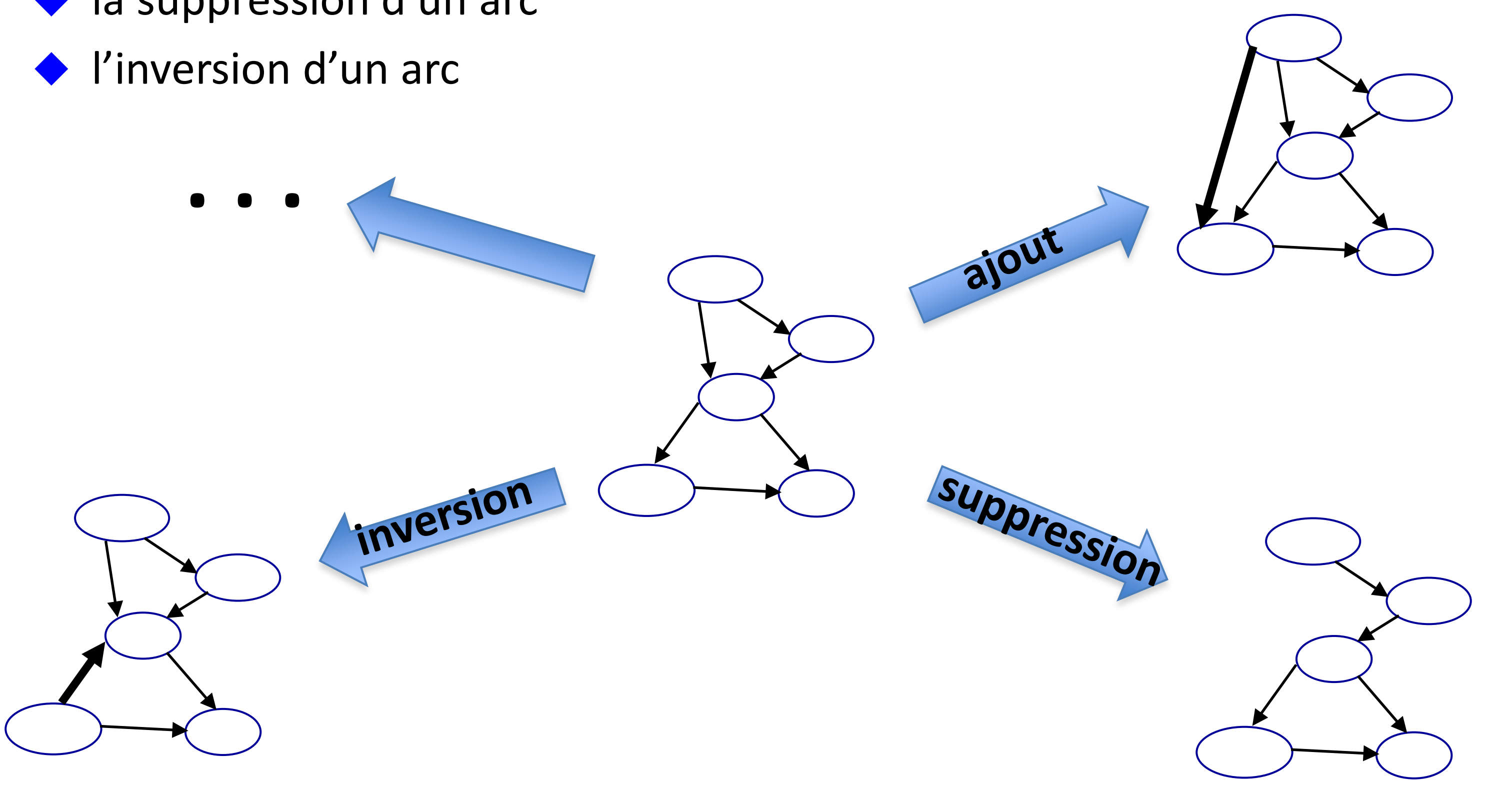
LA PARTIE SUIVANTE N’EST PAS COUVERTE POUR LES EXAMENS

Génération automatique de la structure du RB

- Quoi faire si on n'a pas accès à un expert pour nous donner un bon graphe de RB ?
- On peut aussi tenter d'obtenir la structure du RB à partir de données, à l'aide de la recherche locale (par exemple *Hill Climbing* que nous verrons plus tard dans le cours) :
  1. on débute avec un **graphe acyclique aléatoire** comme graphe courant
  2. on **obtient ses tables de probabilités** à partir des fréquences d'observation du graphe courant
  3. on utilise la recherche locale pour **générer des graphes successeurs** du graphe courant
     4. on obtient les tables de probabilités du graphe successeur
     5. on remplace le graphe courant par le successeur s'il est « meilleur »
  3. on retourne à 2. jusqu'à un certain critère d'arrêt

Génération automatique de la structure du RB

- On génère des successeurs à partir des modifications au graphe suivantes
  - l'ajout d'un arc
  - la suppression d'un arc
  - l'inversion d'un arc



Génération automatique de la structure du RB

- La fonction objectif à maximiser par la recherche locale est :

$$\underbrace{\Sigma_t \log \; P(X_1 = x_1^t, \ldots, X_n = x_n^t)}_{\textbf{log probabilité des données}} \; - \; \underbrace{M\,(\log T) / 2}_{\textbf{complexité du graphe}}$$

  - $\{x_1^t, \ldots, x_n^t\}$ est la $t^{\text{ième}}$ donnée de mon ensemble de T données
  - M est le nombre de paramètres requis par les tables de probabilités conditionnelles du réseau bayésien
- On cherche donc un graphe
  - qui **explique bien les données** (leur donne une haute probabilité)
  - qui est **compacte** (qui a peu de paramètres)