

Nom:

Prénom:

Les graphes

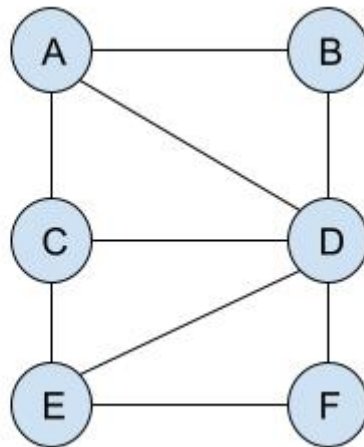
Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

La description de ce réseau social, malgré son faible nombre d'abonnés, est déjà quelque peu rébarbative, alors imaginez cette même description avec un réseau social comportant des millions d'abonnés !

Il existe un moyen plus "visuel" pour représenter ce réseau social : on peut représenter chaque abonné par un cercle (avec le nom de l'abonné situé dans le cercle) et chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite).

Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-dessus :



Ce genre de figure s'appelle un **graphe**. Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique. Les cercles sont appelés des sommets et les segments de droites des arêtes.

Exercice :

Construire un graphe de réseau social à partir des informations suivantes :

- Amélie est ami avec Bastien et Emi.
- Bastien est ami avec Amélie et Camille.
- Camille est ami avec Bastien, Franck et Diane.
- Diane est ami avec Camille, Franck et Emi.
- Emi est ami avec Amélie, Diane et Franck.
- Franck est ami avec Camille, Diane et Emi.

Quelques définitions

Chaîne : Dans un graphe, une chaîne reliant un sommet x à un sommet y est définie par une suite finie d'arêtes consécutives, reliant x à y .

exemple : Dans le graphe donné ci-dessus (graphe 1), A-D-E-C est une chaîne.

Distance entre 2 sommets : La distance entre deux sommets d'un graphe est le nombre minimum d'arêtes d'une chaîne allant de l'un à l'autre.

exemple : La distance entre le sommet A (graphe 1) et le sommet F est de 2 (chaîne A-D-F).

ATTENTION : On parle bien du nombre minimum d'arêtes, A-D-E-F est aussi une chaîne entre A et F mais dans ce cas, nous avons 3 arêtes.

Excentricité : L'excentricité d'un sommet est la distance maximale existant entre ce sommet et les autres sommets du graphe.

exemple 1 : Toujours dans le graphe 1 : distance (A-B) = 1 ; distance (A-C) = 1 ; distance (A-D) = 1 ; distance (A-E) = 2 ; distance (A-F) = 2 ; nous pouvons donc dire que la distance maximale existant entre le sommet A et les autres sommets du graphe est de 2 (distance (A-E) et distance (A-F)). Nous pouvons donc dire que l'excentricité de A est de 2.

exemple 2 : distance (D-A) = 1 ; distance (D-B) = 1 ; distance (D-C) = 1 ; distance (D-E) = 1 ; distance (D-F) = 1 ; nous pouvons donc dire que l'excentricité de D est de 1.

Centre : On appelle centre d'un graphe, le sommet d'excentricité minimale (le centre n'est pas nécessairement unique).

exemple : Dans le graphe 1 tous les sommets ont une excentricité de 2 à l'exception du sommet D qui a une excentricité de 1, nous pouvons donc affirmer que le centre du graphe 1 est le sommet D.

Rayon : On appelle rayon d'un graphe G , l'excentricité d'un centre de G .

exemple : D a une excentricité de 1, c'est le centre du graphe 1, nous pouvons donc dire que le rayon du graphe 1 est de 1.

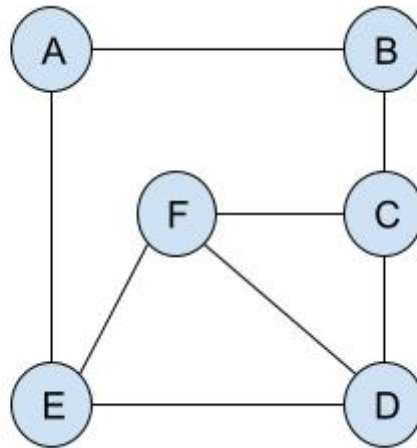
Diamètre : On appelle diamètre d'un graphe G , la distance maximale entre deux sommets du graphe G .

exemple : Dans le graphe 1 la distance maximale entre 2 sommets est de 2, nous pouvons donc dire que le diamètre du graphe est de 2.

Exercices

Exercice 1 :

Soit le graphe suivant :



1. Déterminez le (ou les) centre(s) du graphe.

Sommet	Distance A	Distance B	Distance C	Distance D	Distance E	Distance F
A	0					
B		0				
C			0			
D				0		
E					0	
F						0

2. En déduire le rayon du graphe.

3. Déterminez le diamètre du graphe.

Exercice 2 :

Manon, élève en classe de seconde, vient d'être élue déléguée par ses camarades. Elle a de nombreux amis sur Instagram, et voudrait profiter de ce réseau social pour diffuser des informations à la classe . Le réseaux de Manon comporte 12 amis.

- Emma est amie avec Adam, Kevin et Manon.
- Damien est ami avec Manon et Raphaël.
- Raphaël et Manon sont amis.
- Kevin est ami avec Chloé, Hayfaa et Victor.

- Chloé et Victor sont amis.

1. Reconstituer le graphe des relations à partir des liens d'amitié existants.

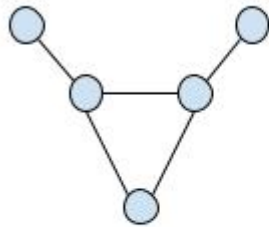
2. Déterminer le rayon, le diamètre et le centre de ce graphe.

3. Conseiller à Manon deux liens d'amitié à créer sur le réseau afin d'être placée, elle aussi, au centre du graphe. Ajouter les arêtes correspondantes au graphe dans une autre couleur.

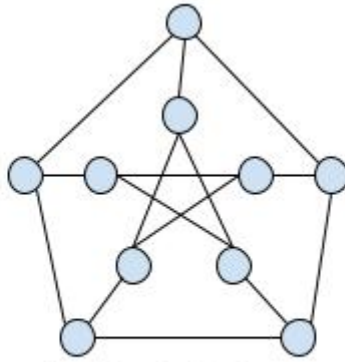
4. Si le lien d'amitié entre Emma et Manon se rompt, quelle sera la conséquence sur les centres du graphe ?

Exercice 3 :

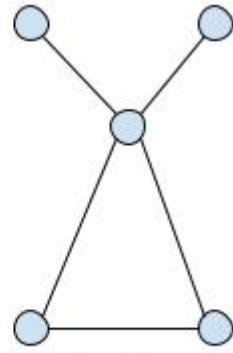
1. Compléter les caractéristiques de chacun des graphes suivants.



Le Graphe du Taureau



Le Graphe Petersen



Le graphe Criquet

Caractéristiques	Le graphe Taureau	Le graphe Petersen	Le graphe Criquet
Nombre de sommets			
Nombres d'arêtes			
Rayon			
Diamètre			

2. Entourer en couleur le ou les centre(s) des trois graphes.