EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours109
Dérivation

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Introduction

La notion de dérivée de fonction est fondamentale en analyse. C'est un outil mathématique tellement utilisé qu'il est pratiquement impossible de dresser une liste complète de ses domaines d'application. Nous nous contenterons donc de quelques exemples.

(a) En analyse mathématique, pour connaître les propriétés d'une fonction, il est fort utile d'analyser sa dérivée.
(b) En géométrie, dans l'étude de courbes ou surfaces, des renseignements tels que les normales ou les tangentes en un point sont obtenus grâce à la dérivation.
(c) En mécanique, un objet mobile qui se déplace admet une vitesse et une accélération qui sont obtenues par dérivation du déplacement de l'objet.
(d) En démographie, économie, finance, biologie...

Résumé du cours

Les trois chapitres sont consacrés aux limites, à la continuité et à la dérivabilité des fonctions.

On présente d'abord la notion de limite pour une fonction : définition des différents types de limites. On s'intéresse au graphe de la fonction dont on cite quelques propriétés. La notion de fonction dite équivalente est alors présentée car elle permet de simplifier de nombreux calculs de limites.

On peut alors définir la continuité d'une fonction. En un point, une fonction égale à sa limite est dite continue. On donne les règles de calcul pour les limites de fonctions.

On donne ensuite la définition rigoureuse de dérivée d'une fonction et l'interprétation géométrique correspondante. Le paragraphe suivant est consacré à la dérivation des fonctions usuelles et à de nombreuses règles de dérivation. Le lecteur dispose ainsi des outils nécessaires pour effectuer des calculs de dérivées. On évoque ensuite l'approximation numérique de calcul de dérivées.

Chapitre 1

Limites d'une fonction

1.1 Définition

1.1.1 Limite finie

Soit c un point de la droite réelle. L'expression "x tend vers c" signifie que la variable x prend des valeurs de plus en plus proches de c, et, à la limite tend vers c comme le ferait une suite numérique. On peut par exemple imaginer que x prend les valeurs d'une suite numérique quelconque dont la limite est c. On note : x $\rightarrow$ c.

On peut alors donner la définition d'une limite de fonction en un point.

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c appartenant à I. On dit que f(x) tend vers l quand x tend vers c, si au fur et à mesure que x se rapproche de c, f(x) se rapproche simultanément de l. On note :*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Cette expression se dit : limite de f(x) quand x tend vers c égale l.

Si la limite l existe, alors elle est nécessairement égale à f(c).

Exemple 1 *On a :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^2 & = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} cos(x) & = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} e^x & = 1 \end{cases}$$

1.1.2 Limite à l'infini

L'expression "x tend vers $+\infty$" signifie que la variable x prend des valeurs de plus en plus grandes, et, à la limite tend vers $+\infty$ comme le ferait une suite numérique. On note : x $\to +\infty$.

On peut alors donner la définition d'une limite de fonction en $+\infty$.

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a,$+\infty$[. On dit que f(x) admet pour limite l en $+\infty$, si quand x croît indéfiniment, f(x) se rapproche de l. On note :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

On définit de la même manière la limite en $-\infty$.

Exemple 2 *On a :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x & = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} arctan(x) & = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1.1.3 Limite infinie

Définition 3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c appartenant à I. On dit que f(x) admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers c, si f(x) croît indéfiniment quand x tend vers c. On note :*

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

On définit de la même manière une fonction tendant vers $-\infty$. On étend la définition au cas où x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) au lieu de tendre vers une valeur finie c.

Exemple 3 *Voici quelques exemples de limites :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} Log(x) & = +\infty \end{cases}$$

1.2 Propriétés du graphe

Soit f une fonction. Le graphe de f est l'ensemble du plan suivant :

$$G = \{(x, f(x)) \quad | \quad x \in D_f\}$$

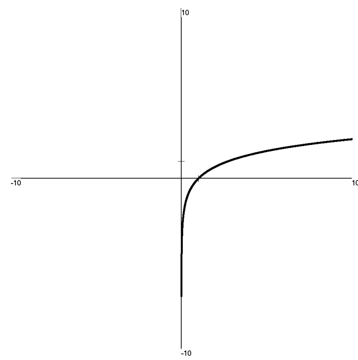

FIG. 1.1 – Fonction logarithme et son asymptote x=0

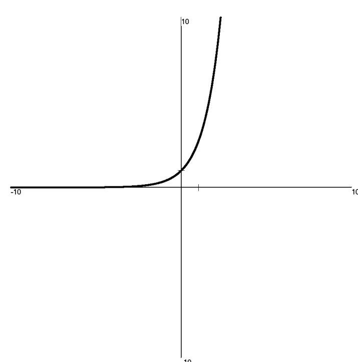

FIG. 1.2 – Fonction exponentielle et son asymptote y=0

Définition 4 *La droite d'équation x=c est asymptote au graphe G si :*

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \quad (ou\ \text{-}\infty)$$

On dira que la droite x=c est une asymptote verticale. Quand x tend vers c, le graphe de la courbe se confond avec la droite.

Exemple 4 *La fonction f(x) = Log(x) admet pour asymptote au graphe la droite d'équation x = 0 (voir figure 1.1). En effet :*

$$\lim_{x \to 0} Log(x) = -\infty$$

Définition 5 *La droite d'équation y=d est asymptote au graphe G si*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = d$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$$

On dira que la droite y=d est une asymptote horizontale. A l'infini, le graphe de la courbe se confond avec la droite.

Exemple 5 *La fonction f(x) =* e^x *admet pour asymptote au graphe la droite d'équation y = 0 (voir figure 1.2). En effet :*

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

1.3 Fonctions équivalentes

Soient f et g deux fonctions réelles. On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers c, si il existe une fonction h définie pour x suffisamment proche de c telle que :

$$f(x) = g(x).h(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) \to 1 \quad \text{quand} \quad x \to c$$

On écrit alors :

$$f \sim g \quad (x \to c)$$

On a notamment qu'un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré. En effet, soit P(x) le polynôme suivant :

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_n \neq 0$$

Le polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, ce qui s'écrit :

$$P(x) \sim a_n.x^n \quad (x \to \pm\infty)$$

Ceci se démontre aisément. En effet, on peut écrire pour x $\neq 0$:

$$P(x) = a_n.x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right)$$

Et le terme entre parenthèse est exactement la fonction h qui tend vers 1 quand x tend vers $\pm\infty$.

Les équivalences permettent de calculer des limites comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6 *La limite de la fraction suivante est immédiatement obtenue en prenant les équivalences du numérateur et du dénominateur :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+3x^2+2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On trouve également une mise en évidence de la limite de la fonction tanh(x) quand x tend vers $+\infty$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty} tanh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

On en déduit aussi facilement la limite de la fonction tanh(x) quand x tend vers $-\infty$ *:*

$$\lim_{x\to-\infty} tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

Attention les fonctions équivalentes ne s'additionnent pas. Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$ quand x tend vers c, on a pas en général $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.

Exemple 7 *Quand x tend vers 0, on a* $x + x^2 \sim x + x^3$ *et* $x \sim x$.
Mais on a pas : $x^2 \sim x^3$.

Chapitre 2

Continuité

2.1 Définition

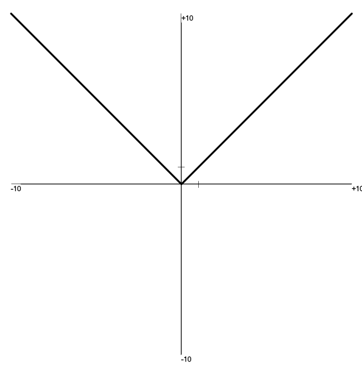

Fig. 2.1 – Fonction valeur absolue continue

Définition 6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit c appartenant à I.*
(a) La fonction f est dite continue au point c si la valeur f(c) est la limite de la fonction au point c. C'est à dire si :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

(b) On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.

Intuitivement, dire qu'une fonction f est continue revient à dire que l'on peut tracer le graphe de f "sans lever le crayon". Il n'y a pas de sauts, c'est à dire pas de points de discontinuité.

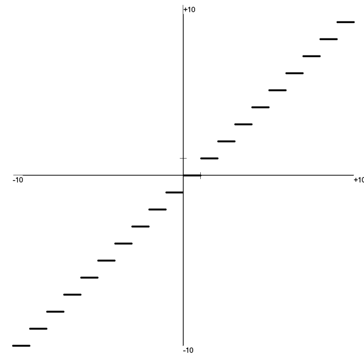

FIG. 2.2 – Fonction partie entière discontinue

Exemple 8 *La fonction valeur absolue f(x) = |x| est continue sur* $\mathbb{R}$*(voir figure 2.1). La fonction partie entière f(x) = E(x) n'est pas continue. Elle admet des sauts en toutes les valeurs entières (voir figure 2.2).*

2.2 Règles de calcul pour les limites

Toutes les règles de calcul avec les limites pour les suites numériques sont valables pour les fonctions. On prendra garde aux formes indéterminées, auxquelles les règles de calcul ne s'appliquent pas. On rappelle que les formes indéterminées sont les suivantes :

$$\infty - \infty \qquad 0.\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

On a donc, pour les fonctions, les règles de calcul suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to c}[f(x) + g(x)] & = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) \\ \lim\limits_{x \to c} f(x).g(x) & = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x) \\ \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} & = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \qquad \text{si} \quad \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to c} g[f(x)] & = g\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \qquad \text{où g est une fonction continue} \end{cases}$$

Ces règles de calcul s'appliquent non seulement pour des limites en un nombre fini c, mais aussi en $+\infty$ et $-\infty$.

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Dérivée d'une fonction

Pour x appartenant au voisinage d'un point c, on définit le taux d'accroissement de la fonction f par :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Il donne la pente de la droite passant par les points P(x,f(x)) et C(c,f(c)). Si, au fur et à mesure que x se rapproche de c, le taux tend vers une limite, alors on dit que la fonction est dérivable au point c. La limite du taux correspond à la pente de la droite tangente à la courbe au point c. Ceci est décrit rigoureusement par la définition suivante.

Définition 7 *On dit que f est dérivable au point c si la limite du rapport* $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ *existe et est unique. Cette valeur limite s'appelle dérivée de f au point c et se note f'(c).*

L'interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction correspond à la pente de son graphe au point c. L'équation de cette droite tangente s'écrit alors de la façon suivante :

$$y - f(c) = f'(c).(x - c)$$

Exemple 9 *Soit f la fonction définie par f(x) = x. Calculons sa dérivée en un point c quelconque.*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x - c}{x - c} = \lim_{x \to c} 1 = 1$$

Soit f la fonction définie par f(x) = x^2*. Calculons sa dérivée en un point c quelconque.*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x - c).(x + c)}{x - c} = \lim_{x \to c} (x + c) = 2c$$

Si une fonction est dérivable en un point, elle est nécessairement continue en ce point. La réciproque est fausse.

Si f est dérivable en tout point de son domaine de définition, alors elle est dite dérivable. La fonction f' s'appelle la fonction dérivée de la fonction f.

On peut étendre la définition de dérivée aux dérivées infinies.

Définition 8 (Dérivée infinie) *Si le rapport* $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ *tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers c, alors on dit que f admet la dérivée* $+\infty$ *en c. De même dans le cas de limite de* $-\infty$.

3.2 Règles de dérivation

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques dérivées de fonctions usuelles et règles de dérivation.

Fonction constante

La fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

$$\boxed{\text{si f(x) = c alors f'(x) = 0}}$$

Fonction puissance

Dans le calcul de la dérivée d'une fonction x^a, l'exposant a est diminué de 1 et l'ancien exposant a apparaît en facteur.

$$\boxed{(x^a)\text{'} = \text{a}.x^{a-1}}$$

Exemple 10 *Voici quelques exemples de dérivation de fonctions puissances :*

$$\begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ f(x) = x^3 & f'(x) = 3x^2 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \\ f(x) = \sqrt{x} & f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

Fonctions usuelles

Voici quelques dérivées utiles :

f(x)	f'(x)
e^x	e^x
$Log(x)$	$\frac{1}{x}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\dfrac{1}{cos^2(x)}$

Multiplication par une constante

La fonction dérivée d'une fonction multipliée par une constante est également multipliée par la constante.

$$\boxed{(c.f(x))\text{'} = \text{c.f'(x)}}$$

Dérivée d'une somme

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

$$\boxed{\text{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}}$$

Exemple 11 *Si f(x) =* x^3 *et g(x) = x alors (f(x) + g(x))' =* $3x^2 + 1$

Dérivée d'un produit

On a la formule suivante :

$$\boxed{\text{(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}}$$

Exemple 12 *Si f(x) = 2x+1 et g(x) = x+3, alors :*
f'(x) = 2 et g'(x) = 1, donc :
(f(x).g(x))' = 2.(x+3) + (2x+1).1 = 4x+7

Dérivée d'un quotient

On a la formule suivante :

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{si g(x)} \neq 0}$$

Et, en particulier :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{si g(x)} \neq 0}$$

Exemple 13 *Si f(x) = 2x+1 et g(x) = x+3, alors :*
f'(x) = 2 et g'(x) = 1, donc :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2.(x+3) - (2x+1).1}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

Dérivée d'une fonction composée

On a la formule suivante :

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)}$$

Exemple 14 *Si f(x) = sin(x) et g(x) =* x^2*, alors :*
f'(x) = cos(x) et g'(x) = 2x, donc :
$(f(g(x)))' = \left(sin(x^2)\right)' = cos(x^2).2x = 2x.cos(x^2)$

3.3 Dérivées d'ordre supérieur

Nous avons vu que lorsque la fonction f admet une dérivée en chaque point de l'intervalle [a,b], on dit que f est dérivable dans [a,b], de dérivée f'. Dans ce cas, on peut itérer cette définition, c'est à dire définir la dérivée de f' qu'on appelle dérivée seconde de f et qu'on note f''. On peut définir ainsi de suite $f^{(3)}$, $f^{(4)}$...

3.4 Approximation numérique de la dérivée

Il y a deux cas importants où on ne sait pas calculer la dérivée de manière exacte et où on est obligé de l'approcher :

1. le premier cas se produit quand on connaît les valeurs que prend la fonction f, mais que l'expression de f n'est pas connue. Par exemple, ces valeurs de f peuvent venir de mesures physiques ou d'un calcul précédent.
2. le second cas, qui est le plus fréquent, se produit quand la fonction f fait précisément partie des inconnues du problème. Par exemple, lorsque f est la solution d'une équation différentielle.

Définition 9 *Pour h>0 fixé et pour tout point c et toute fonction* f*, on définit les taux suivants qui constituent trois approximations de f'(c) :*

$$\textit{Taux avant :} \quad T_1(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\textit{Taux arrière :} \quad T_2(c) = \frac{f(c) - f(c-h)}{h}$$

$$\textit{Taux centré :} \quad T_3(c) = \frac{f(c+h/2) - f(c-h/2)}{h}$$

Il est clair par définition que si f est dérivable en c, les trois approximations tendent bien vers $f'(c)$ quand h tend vers 0. Mais, en calcul numérique, on ne se contente pas d'établir qu'une approximation converge vers la valeur que l'on cherche, on veut aussi estimer la vitesse de convergence. Pour cela, on estime l'erreur d'approximation commise.

Dans le cas du taux avant ou du taux arrière, si f est suffisamment régulière, on peut montrer que l'erreur commise est de l'ordre de h. Dans le cas du taux centré, si f est suffisamment régulière, l'erreur commise est de l'ordre de h^2. On conclut que $T_3(c)$ est une bien meilleure approximation de $f'(c)$.