EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Année 2011-2012
Projet 109deriv

1 Objectif

L'objectif de ce sujet est de résoudre des équations de la forme suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad x(0) = a \qquad t \text{ dans } [0, 1]$$

La variable est t qui varie dans l'intervalle [0,1]. La fonction x(t) est la solution recherchée de cette équation. x'(t) représente la dérivée de cette fonction. La fonction f est une fonction connue qui dépend à la fois de t et de x. En plus de l'équation, on se donne une condition initiale vérifiée par la fonction x(t) au point t=0, x(0) doit être égal à une valeur donnée a.

Pour résoudre ce type d'équations, on dispose de toute une famille de méthodes numériques. Ces méthodes sont applicables dès que l'on sait que l'équation admet une solution unique. Ce sera le cas pour les exemples de ce sujet. La méthode numérique que nous utiliserons est le schéma d'Euler.

La méthode est basée sur le principe suivant : on découpe l'intervalle [0,1] en n sous-intervalles de longueur h constante, h = $\frac{1}{n}$. On obtient ainsi une suite de points régulièrement espacés t_0,t_1,...,t_n, avec :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = h \\ t_2 = 2h \\ ... \\ t_n = nh = 1 \end{cases}$$

Pour construire une approximation de la solution x(t), on calcule une suite de valeurs x_0,x_1,...x_n où x_i est une approximation de $x(t_i)$ pour i=0,1,...,n. Le schéma d'Euler de solution y(t) est le suivant :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{i+1} = x_i + h.f(t_i, x_i) \qquad i = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$

On suppose que les fonctions varient linéairement entre deux points d'approximations successifs (t_i, x_i) et (t_{i+1}, x_{i+1}). C'est à dire que ces points sont reliés par un segment de droite sur le graphique.

Pour tester la méthode que nous avons retenue, nous choisirons des exemples où la solution x(t) de l'équation est connue explicitement. Nous pourrons alors comparer la solution x(t) et l'approximation par schéma d'Euler y(t) en les traçant sur un même graphique.

2 Le sujet

On s'intéresse aux quatre équations dont les données sont les suivantes, résolues par le logiciel en option 1 à 4 :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f(t,x)=x^2 \\ a=\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} f(t,x)=\frac{5}{4}.x \\ a=1 \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} f(t,x)=\frac{3}{2}.cos(t).x \\ a=1 \end{array}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{array}{l} f(t,x)=2.(cos(t)-t.tg(t^2)).x \\ a=1 \end{array}\right.$$

La solution x(t) de chacune de ces équations est donnée par :

$$(1) \quad x(t)=\frac{3}{4-3t}$$

$$(2) \quad x(t)=e^{\frac{5t}{4}}$$

$$(3) \quad x(t)=e^{\frac{3sin(t)}{2}}$$

$$(4) \quad x(t)=e^{2sin(t)}.cos(t^2)$$

Pour chaque option 1 à 4, on tracera la solution x(t) en rouge et l'approximation y(t) en vert sur un graphique [0,1]×[0,5] avec quadrillage de pas 0,2 en abscisse et de pas 1 en ordonnée (voir exemple).

3 Le logiciel

Répertoire de rendu : ~/../rendu/math/109deriv/
Nom de l'exécutable : 109deriv
Exemple de lancer pour l'option 1 :
$>$ **109deriv** 1 10
En entrée : le numéro d'option et le nombre n de subdivisions de l'intervalle [0,1] (n peut prendre des valeurs entre 5 et 100).
En sortie : relativement à l'équation (1), le graphique de la solution x(t) et de l'approximation d'Euler y(t) dans le domaine [0,1]×[0,5].

Exemple de lancer pour l'option 2 à 4 :
$>$ **109deriv** 2 10

> **109deriv** 3 50
> **100deriv** 4 100
En entrée/sortie : idem option 1, pour les équations (2) à (4).

4 Avertissement

LES FONCTIONS PRE-PROGRAMMEES DE TRACE DE COURBE SONT INTERDITES (GNUPLOT ET AUTRES...) SINON VOTRE PROJET NE SERA PAS CORRIGE.

5 Questions

1° Quand dit-on qu'une fonction f(x) tend vers une limite l quand x tend vers c ?
2° Que signifie intuitivement qu'une fonction est continue ?
3° Quelle est l'interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point ?
4° Quelles sont les trois façons d'approcher numériquement la valeur d'une dérivée en un point ?
5° Quelle est la meilleure de ces trois méthodes et pourquoi ?

6 Exemple

Pour les options 1 à 4, on obtient les graphes représentés sur les figures ci-après.

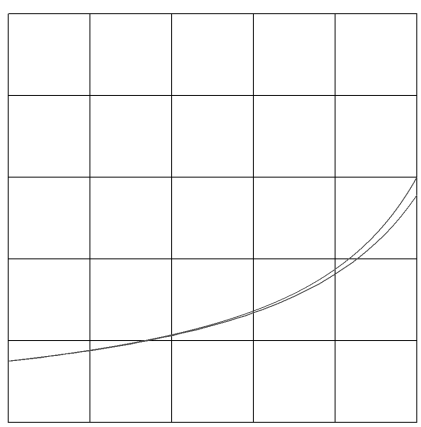

FIG. 1 – Option 1 / n = 50

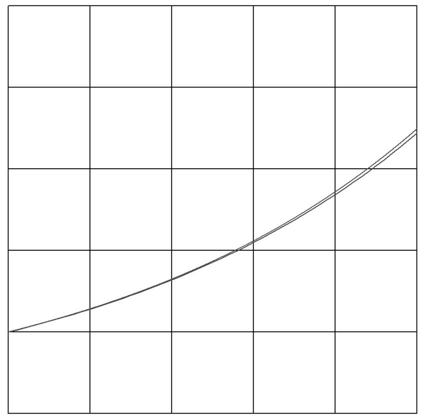

Fig. 2 – Option 2 / n = 50

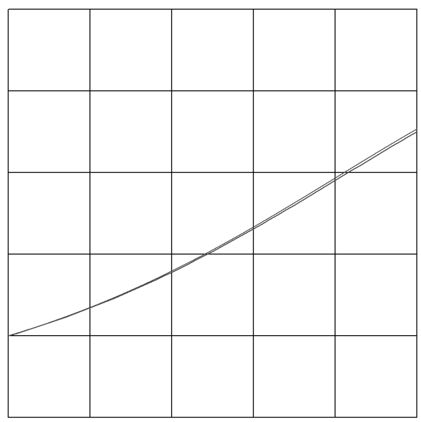

Fig. 3 – Option 3 / n = 50

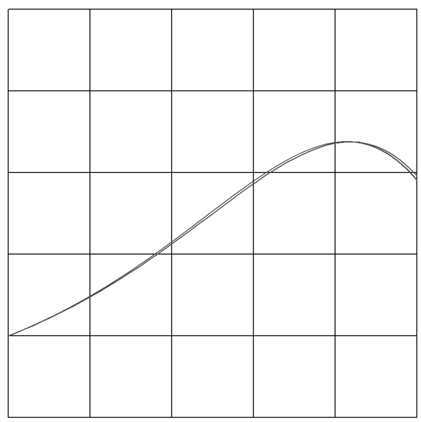

FIG. 4 – Option 4 / n = 50