EPITECH
PROBABILITES ET STATISTIQUES
Cours204
Variables aléatoires continues

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Résumé du cours

On décrit ce qu'est une variable aléatoire continue définie sur un espace de probabilité (Ω,P) pour laquelle on considère les évènements :

$$\{a \leq X \leq b\}$$

On donne alors les fonctions qui caractérisent au sens des probabilités une variable aléatoire continue : la fonction de répartition et la densité de probabilité.

Une variable aléatoire est totalement déterminée soit par sa fonction de répartition, soit par sa densité de probabilité. En statistiques, on se contente généralement de certaines valeurs caractéristiques qui ne décrivent pas entièrement la variable aléatoire mais qui sont en général suffisantes. Les valeurs caractéristiques les plus importantes sont l'espérance mathématique et la variance.

Chapitre 1

Variables aléatoires continues

Les variables aléatoires qualifiées de continues sont celles pouvant prendre toutes les valeurs possibles entre des limites données.
Beaucoup de mesures de quantités physiques s'expriment en termes de variables aléatoires continues : la durée d'un appel téléphonique, la direction du vent, le poids d'un individu. Chacune de ces variables prend ses valeurs non pas dans un ensemble discret mais sur des intervalles de la droite réelle : la durée exacte d'un appel téléphonique peut être n'importe quelle valeur entre 0 et l'infini... Les éventualités d'une variable aléatoire continue forment donc un ensemble non dénombrable.

1.1 Définition

L'application des lois de probabilités aux variables aléatoires continues pose un problème. En effet, l'application de la notion de probabilité est dans un contexte d'évènements dont le nombre est fini ou tout au moins dénombrable. Que faire quand le nombre d'évènements est non dénombrable ?

Considérons le problème suivant : une montre tombe en panne. La position exacte de la grande aiguille au moment de l'arrêt est une variable continue. Les positions possibles sont l'ensemble des angles entre 0° et 360°. Comment dénombrer les possibilités ?

On peut apporter une solution si, au lieu d'attribuer à chaque possibilité une probabilité, on attribue une probabilité à chaque intervalle de valeurs.

Ainsi, on va attribuer une probabilité à chaque intervalle de valeurs compris entre 0° et 360°, une probabilité proportionnelle à la longueur de l'intervalle. Si X est l'angle d'arrêt de la montre, la probabilité que l'aiguille soit dans le premier quadrant est $1/4$; qu'elle soit entre 30° et 90° est $1/6$. On décrit ce résultat par :

$$P(30 \leq X \leq 90) = \frac{90-30}{360} = \frac{1}{6}$$

Définition 1 *Une v.a. continue prend ses valeurs dans toute la droite réelle* $\mathbb{R}$*. C'est une application :*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

définie sur un espace de probabilité (Ω,P) *pour laquelle on considère les évènements :*

$$\{a \leq X \leq b\}$$

1.2 Fonction de répartition

Définition 2 *Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels R. Soit x un nombre réel particulier, la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x est exprimée par :*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

La fonction F(x) est appelée fonction de répartition de X.

Propriété 1 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- *F(x) est une fonction continue dérivable ;*
- *F(x) est une fonction croissante pour tout x.*

La probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans l'intervalle [a,b] est :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Par conséquent :

$$P(X = x) = 0$$

La probabilité d'un "point" au sens mathématique, est nulle. De même qu'en physique la masse d'un "point" est nulle.

Pour l'exemple de l'aiguille de la montre (voir paragraphe 1.1), la fonction de répartition est définie par :

F(x) = $\frac{x}{360}$, $0 \leq$ x ≤ 360,

et F(x) = 0 pour x ≤ 0,
et F(x) = 1 pour x ≥ 360.

1.3 Densité de probabilité

Définition 3 *On dit qu'une v.a. réelle X possède ou suit la densité de probabilité f(.) sur* $\mathbb{R}$ *si :*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x).dx, \text{ pour tous réels } a < b.$$

La fonction f(.) doit être nécessairement positive et d'intégrale 1 sur tout $\mathbb{R}$ *:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

La fonction de répartition vérifie :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx$$

Avec des v.a. continues, on ne calcule que la probabilité pour la variable de se situer dans un intervalle. Il en résulte que les probabilités pour les v.a. continues sont toujours données par des intégrales, tandis que pour des v.a. discrètes elles sont données par des sommes.

Exemple 1 (Densité uniforme) *La densité uniforme sur un intervalle réel [u,v] est la densité constante sur cet intervalle et nulle en dehors, qui est donc donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{v-u} & si\ x \in [u, v], \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

En physique, par exemple, un angle ou une phase aléatoire se voit souvent attribuer la densité uniforme sur [0,2π].

Exemple 2 (Densité gaussienne) *La densité gaussienne réduite est définie par :*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.exp(-x^2/2)$$

pour tout x de $\mathbb{R}$. *Plus généralement par le changement de variable affine* $y = \mu + \sigma x$ $(\sigma > 0)$, *nous voyons que :*

$$g_{\mu,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma}.g\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

est encore une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ *(noter le facteur* $1/\sigma$*).*

1.4 Espérance mathématique

Une variable aléatoire est totalement déterminée soit par sa fonction de répartition, soit par sa densité de probabilité. En statistiques, on se contente généralement de certaines valeurs caractéristiques qui ne décrivent pas entièrement la variable aléatoire mais qui sont en général suffisantes. On doit être alors parfaitement conscient de perdre en précision certaines informations. La valeur caractéristique la plus importante est l'espérance mathématique.

Définition 4 *L'espérance d'une v.a. réelle X admettant la densité f(x) sur* $\mathbb{R}$ *est définie par :*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x.f(x).dx$$

si cette intégrale converge absolument.

Une v.a. réelle est dite centrée si son espérance est nulle.

L'espérance d'une v.a. réelle positive X est toujours définie, mais elle peut prendre la valeur $+\infty$. L'espérance de la v.a. réelle X est le centre de gravité de la densité f(x).

On remarque que dans le cas des variables discrètes, les coefficients de pondération de l'espérance mathématique sont des probabilités, et dans le cas des variables continues, il s'agit de densités.

Exemple 3 *Pour l'exemple de l'aiguille de la montre (voir paragraphe 1.1), la fonction de densité de la variable X est égale à :*

$$f(x) = \frac{1}{360}$$

L'espérance mathématique de X (c'est à dire la position d' arrêt de l'aiguille) est obtenue par le calcul suivant : E(X) =

$$\int_0^{360} x.f(x).dx = \int_0^{360} \frac{x}{360}.dx = 180$$

Donc, en moyenne, l'aiguille s'arrête à mi-chemin du cercle constitué par la montre.

Exemple 4 (Densité uniforme) *Pour une loi de densité uniforme sur un intervalle [u,v], l' espérance est donnée par :*

$$E(X) = \frac{1}{v-u}.\int_{[u,v]} x.dx = \frac{u+v}{2}$$

Exemple 5 (Densité gaussienne) *L'espérance de la loi gaussienne réduite est nulle car :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{(-x^2/2)}.dx = 0$$

La loi de densité gaussienne admet μ *pour espérance :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y.g_{\mu,\sigma^2}(y).dx = \mu$$

Propriété 2 *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue possède des propriétés analogues à celles de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète. En particulier :*

$$E(aX + b) = a.E(X) + b$$

et l'espérance mathématique de la somme de deux variables aléatoires continues est égale à la somme des espérances mathématiques :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

1.5 Variance

L'espérance et la variance des v.a. réelles sont de très loin les paramètres caractéristiques les plus importants de ces v.a. Cette importance tient à la fois au grand nombre de propriétés intéressantes de ces paramètres, à la facilité avec laquelle on peut généralement les calculer dans les applications et aux interprétations physiques qu'ils possèdent.

Pour toute v.a. réelle, on peut écrire la décomposition :

$$X = E(X) + [X - E(X)]$$

qui exprime la v.a. X comme la somme d'une constante (non aléatoire !) et d'une v.a. centrée (d'espérance nulle). Cette composante centrée représente les fluctuations possibles de la v.a. X autour de son espérance E(X). La grandeur absolue moyenne de ces fluctuations est mesurée par la variance dont la définition est donnée ci-après.

Définition 5 *La variance d'une v.a. réelle mesure les fluctuations de la v.a. autour de son espérance E(X) :*

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2.f(x)\,dx$$

En fait, c'est plutôt la racine carrée de cette variance qui est importante. Cette racine carrée est appelée l'écart quadratique moyen de la v.a. réelle X, notée σ(X) :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

L'écart quadratique moyen σ(X) est d'autant plus grand que la loi de probabilité P de X est plus dispersée autour de E(X).

Exemple 6 *Pour l'exemple de l'aiguille de la montre (voir paragraphe 1.1), la variance de la position de l'aiguille de la montre est obtenue par :*

$$Var(X) = \int_0^{360}(x - E(X))^2.\tfrac{1}{360}.dx = 10\,800$$

$$\sigma = \sqrt{10\,800} = 103,92$$

Exemple 7 (Densité uniforme) *Pour la loi de densité uniforme sur un intervalle [u,v], la variance est donnée par :*

$$Var(X) = \frac{1}{v-u}.\int_{[u,v]}(x - \frac{u+v}{2})^2.dx = \frac{(v-u)^2}{12}$$

et l'écart quadratique moyen :

$$\sigma(X) = \frac{v-u}{2\sqrt{3}}$$

Exemple 8 (Densité gaussienne) *La variance de la loi gaussienne réduite est égale à 1 :*

$$\begin{aligned} Var(X) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{(-x^2/2)}]^2.dx \\ &= \textstyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

La loi de densité gaussienne admet σ^2 pour variance :

$$Var(g_{\mu,\sigma^2}) = \sigma^2$$

Propriété 3 *Mentionnons la double formule suivante importante dans les calculs :*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

La variance, à la différence de l'espérance, n'est pas additive. On a :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$$

où cov(X,Y) désigne la covariance des variables X et Y définie par :

$$cov(X,Y) = E\left([X - E(X)][Y - E(Y)]\right)$$