EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours102
Bases arithmétiques
Calcul matriciel

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Introduction

Un système numérique est un ensemble de symboles appartenant à une **base arithmétique** qui sont les chiffres du système numérique. Nous avons l'habitude de calculer dans le système décimal. Mais d'autres systèmes sont d'une importance fondamentale en informatique comme le système binaire ou le système hexadécimal.

Les opérations sur **matrices** sont au coeur du calcul scientifique. Il existe de nombreuses applications liées au calcul vectoriel et aux équations linéaires. Les problèmes les plus fréquemment rencontrés sont la résolution de systèmes linéaires et la recherche de valeurs propres. Ces problèmes font intervenir des matrices de grande taille (milliards de termes). Disposer d'algorithmes efficaces pour les matrices est donc d'une importance considérable.

En informatique, on rencontre des matrices dans les graphes, dans les codes, dans les automates...

Résumé du cours

La première partie de ce cours est consacrée aux différents systèmes numérique. On montre comment passer d'une base quelconque dans la base décimale et inversement.

La deuxième partie de ce cours propose une introduction à la théorie des matrices.

On donne les bases du calcul matriciel : définition d'une matrice, opérations telles que l'addition, la multiplication par un nombre, le produit par un vecteur et le produit de matrices entre elles.

Parmi l'ensemble des matrices, on distingue le cas particulier des matrices carrées dont on cite quelques matrices remarquables et quelques formes de matrices particulières. On introduit alors brièvement les deux grandes familles de problèmes attachés aux matrices carrées : résolution de systèmes linéaires et recherche de valeurs propres.

Chapitre 1

Bases arithmétiques

1.0.1 Chiffres utilisés

Nous calculons habituellement en base 10 qui compte les chiffres de 0 à 9. Dans ce chapitre, on considère les bases comprises entre 2 et 16. Par exemple, en base 4, on utilise les chiffres : 0,1,2,3. En base 16, on utilise les chiffres : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

1.0.2 Ecriture d'un nombre

Un nombre dans une base donnée s'écrit sous la forme d'additions des puissances successives de cette base. Soit **n** un nombre entier positif. Soient $a_0a_1...a_p$ les chiffres qui composent **n** en base 10. On écrit :

$$n = a_p...a_1a_0$$

La valeur de **n** est égale à :

$$n = a_0 + 10.a_1 + 10^2.a_2 + ... + 10^p.a_p$$

Par exemple, $1234 = 4 + 10.3 + 100.2 + 1000.1$

1.0.3 Exemple de passage en base décimale

Soit $b_0b_1...b_q$ les chiffres qui composent **n** en base 4. Les chiffres b_i sont donc compris entre 0 et 3. On écrit :

$$n = b_q...b_1b_0$$

La valeur de **n** est égale à :

$$n = b_0 + 4.b_1 + 4^2.b_2 + ... + 4^q.b_q$$

La base est indiquée en petit en bas à droite du nombre. Par exemple :

$$123_4 = 3 + 4.2 + 16.1 = 26_{10}$$

1.0.4 Passage de la base décimale à la base a

Soit **a** une base de départ. On note **n** le nombre à transformer donné dans la base 10, s la chaîne de caractères représentant le nombre résultat en base **a**.

Algorithme 1 *Pour passer de la base décimale à la base* **a***, on peut utiliser l'algorithme donné ci-après :*
1° s ← ''
2° Tant que n>0 faire
3°   s ← IntToHex(n mod a) + s
4°   n ← n div a
5° Fin
6° Afficher s

Les fonctions modulo notée **mod** et division euclidienne **div** sont des opérations sur les nombres entiers que l'on retrouve dans tous les langages de programmation. La fonction **IntToHex** renvoie le caractère représentant le chiffre en notation hexadécimale.

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Définition d'une matrice

Une matrice est un tableau à deux dimensions dont les coefficients sont des nombres réels. Une matrice contenant m lignes et n colonnes est dite de dimension **m×n**. Les nombres qui sont rangés dans la matrice sont appelés les coefficients de la matrice. On note a_{ij} le coefficient de la matrice A qui est situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Avertissement : dans les exemples de ce chapitre, les coefficients des matrices sont des nombres entiers pour plus de simplicité. Mais, naturellement, les coefficients de matrices sont généralement des nombres réels quelconques (nombres à virgule flottante).

2.1.1 Notations

On note, en abrégé :

$$A = (a_{ij})^{1 \leq i \leq m}_{1 \leq j \leq n} = (a_{ij})$$

On note, en extension :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En informatique, les matrices sont souvent représentées comme des quantités indexées (champs ou tableaux). Par convention en mathématiques, les indices débutent à 1, alors que certains langages de programmation utilisent des indices débutant à 0.

2.1.2 Matrice transposée

Soit A une matrice de dimension $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$. La matrice transposée de A , notée A^T est une matrice de dimension $\mathbf{n}\times\mathbf{m}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A. Les coefficients de ces matrices sont reliés par la relation :

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Exemple 1 *Soit A une matrice 3×2 donnée par ses coefficients :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La transposée de A est une matrice A^T de dimension 2×3 dont les coefficients sont les suivants :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque : les vecteurs peuvent être considérés comme un cas particulier de matrice à une seule colonne de dimension $\mathbf{m}\times\mathbf{1}$. On peut transposer un vecteur comme on transpose une matrice.

2.2 Calcul matriciel

2.2.1 Addition de deux matrices

Deux matrices peuvent être additionnées entre elles pourvu qu'elles aient la même dimension, c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Soient A = (a_{ij}) et B = (b_{ij}) deux matrices de dimension $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$. La matrice somme, notée A+B, est également de dimension $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$. Elle admet des coefficients qui sont les sommes des coefficients de A et B, terme à terme. Les coefficients de A+B sont donc les suivants :

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \le i \le m, \qquad 1 \le j \le n$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 *Soient A et B deux matrices de dimension 2×3, données par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

La matrice somme A+B admet donc pour coefficients :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Une matrice quelconque peut être multipliée par un nombre réel. Soient A = (a_{ij}) une matrice de dimension **m**×**n**, et λ un nombre réel. La matrice multipliée est notée λ.A. Elle est également de dimension **m**×**n**. Ses coefficients sont les coefficients de A multipliés par le nombre λ. Les coefficients de λ.A sont donc donnés par :

$$(\lambda.A)_{ij} = \lambda.a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & ... & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & ... & \lambda.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & ... & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple 3 *Soit A une matrice de dimension 2×3, donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice 2A admet donc pour coefficients :

$$2A = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 & 2\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Produit d'un vecteur par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur par une matrice pourvu que la dimension du vecteur soit égal au nombre de colonnes de la matrice. Soit A = (a_{ij}) une matrice de dimension **m**×**n**, et $\overrightarrow{u} = (u_i)$ un vecteur de dimension **n**, le produit, noté A.$\overrightarrow{u}$, est un vecteur de dimension **m** défini par :

$$(A.\overrightarrow{u})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.u_j \qquad 1 \leq i \leq m$$

$$A.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.u_1 + a_{12}.u_2 + ... + a_{1n}.u_n \\ a_{21}.u_1 + a_{22}.u_2 + ... + a_{2n}.u_n \\ \vdots \\ a_{m1}.u_1 + a_{m2}.u_2 + ... + a_{mn}.u_n \end{pmatrix}$$

Exemple 4 *Soient la matrice A de dimension 2×3 et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de dimension 3 suivants :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice A et du vecteur $\overrightarrow{u}$, se calcule d'après la définition :

$$A.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 16 + 27 \\ 28 + 40 + 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Produit de deux matrices

Le produit d'une matrice A par une matrice B n'est défini que lorsque A admet autant de colonnes que B de lignes. Si A est une matrice de dimension **m×n**, alors la matrice B doit nécessairement avoir n lignes. Soit donc B une matrice de dimension **n×p**. La matrice produit, notée A.B, est de dimension **m×p**. Elle admet des coefficients $(A.B)_{ij}$ qui sont chacun le produit scalaire de la i-éme ligne de A par la j-ème colonne de B. On a la formule suivante :

$$(A.B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq p$$

On donne les formules sur un exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \end{pmatrix}$$

Exemple 5 *Soit A et B les matrices de dimension 2×2 données par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

La matrice produit se calcule à l'aide des formules ci-dessus :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

On prendra bien garde au fait que le produit de deux matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que, en général :

$$A.B \neq B.A \qquad \text{ATTENTION !}$$

D'abord, le produit de B par A n'a de sens que si B a autant de colonnes que A de lignes. Même dans ce cas, les produits ne sont pas égaux comme on peut s'en convaincre sur l'exemple suivant.

Exemple 6 *Reprenons les matrices A et B de l'exemple précédent. On avait obtenu le produit $A.B$:*

$$A.B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le produit $B.A$:

$$B.A = \begin{pmatrix} 5\times 1+6\times 3 & 5\times 2+6\times 4 \\ 7\times 1+8\times 3 & 7\times 2+8\times 4 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

On constate que $A.B \neq B.A$.

On fera donc très attention à l'ordre dans lequel les matrices sont multipliées entre elles.

2.3 Matrices carrées

Une matrice est dite carrée si elle comporte le même nombre de lignes que de colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3.1 Matrices remarquables

La **matrice nulle** est la matrice dont tous les termes sont nuls :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

La **matrice unité** est celle dont tous les termes sont égaux à 1 :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

La **matrice identité** contient des zéros sauf sur la diagonale composée de 1 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice qui joue un rôle fondamental parmi les matrices carrées.

Le produit de la matrice identité par un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque redonne le vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$I.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

D'autre part, la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication des matrices. En effet, la multiplication par une matrice A quelconque donne :

$$A.I = I.A = A$$

2.3.2 Matrice inverse

Une matrice carrée A est inversible si il existe une matrice inverse notée A^{-1} telle que :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

où I est la matrice identité. Si elle existe, la matrice inverse est unique. Il existe des formules qui permettent de calculer l'inverse d'une matrice lorsqu'elle existe. Les calculs étant toutefois assez lourds, nous nous contenterons de donner les formules pour une matrice A de dimension 2×2.

Soit A une matrice 2×2 dont les coefficients sont notés :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On appelle déterminant de A et on note det(A) la quantité carctéristique suivante :

$$det(A) = a.d - b.c$$

On peut montrer que la matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, on obtient l'expression de la matrice inverse par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.3.3 Formes particulières de matrices

Une matrice est dite **diagonale** si les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Un cas particulier de matrice diagonale est celui ou tous les termes diagonaux sont égaux :

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix} = a.I$$

C'est la matrice d'une homothétie de rapport **a**. La multiplication par un vecteur $\overrightarrow{u}$ donne :

$$\Delta.\overrightarrow{u} = a.I.\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{u}$$

Une matrice est dite **triangulaire supérieure** (respectivement triangulaire inférieure) si ses seuls coefficients non nuls sont dans la partie triangulaire supérieure (respectivement triangulaire inférieure) de la matrice :

$$U_{(pper)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad et \qquad L_{(ower)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite **symétrique** si et seulement si elle est égale à sa transposée. Les coefficients sont alors symétriques par rapport à la diagonale :

$$A = A^T \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

2.4 Problèmes classiques de calcul matriciel

2.4.1 Systèmes linéaires

Un problème très classique en calcul scientifique est la résolution d'un système linéaire. Un système linéaire est un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme :

$$A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$$

où A est une matrice carrée, $\overrightarrow{b}$ le vecteur second membre, $\overrightarrow{u}$ le vecteur solution recherché. Ce système s'écrit aussi :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

Les inconnues sont les composantes $(u_i)_{(1 \leq i \leq n)}$ du vecteur $\overrightarrow{u}$, tous les autres coefficients sont connus. C'est un système linéaire de n équations à n inconnues qui admet une solution $\overrightarrow{u}$ unique dès que la matrice A est inversible. Montrons comment calculer la solution $\overrightarrow{u}$ du système linéaire. On peut multiplier le système par la matrice inverse A^{-1} :

$$A^{-1}.A.\overrightarrow{u} = A^{-1}.\overrightarrow{b}$$

D'après la propriété de la matrice inverse, on A^{-1}.A = I où I est la matrice identité. Ainsi, on a :

$$I.\overrightarrow{u} = A^{-1}.\overrightarrow{b}$$

La solution est donc simplement égale à :

$$\overrightarrow{u} = A^{-1}.\overrightarrow{b}$$

Dans la pratique, on n'évalue jamais la matrice inverse A^{-1} car cela demande des calculs beaucoup trop coûteux. Il existe de nombreuses méthodes différentes pour résoudre un système linéaire. Une des familles de méthodes est basée sur le fait que résoudre un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure est simple. On effectue par modifications successives du système une transformation de la matrice A en une matrice équivalente qui est triangulaire supérieure.

Montrons sur des exemples qu'un système à matrice triangulaire est simple à résoudre.

Exemple 7 (Exemple théorique en dimension 3) *Soit A la matrice de dimension 3×3 triangulaire supérieure suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

On peut montrer que si la matrice A est inversible alors ses coefficients diagonaux sont non nuls. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + & a_{12}u_2 + & a_{13}u_3 & = b_1 \\ & a_{22}u_2 + & a_{23}u_3 & = b_2 \\ & & a_{33}u_3 & = b_3 \end{cases}$$

La troisième équation permet de calculer u_3 :

$$u_3 = b_3/a_{33}$$

Connaissant u_3, la deuxième équation permet de calculer u_2 :

$$u_2 = (b_2 - a_{23}u_3)/a_{22}$$

Puisque l'on connaît u_2 et u_3, la première équation fournit la valeur de u_1 :

$$u_1 = (b_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3)/a_{11}$$

Exemple 8 (Exemple pratique en dimension 3) *Soient A la matrice de dimension 3×3 triangulaire supérieure et $\overrightarrow{b}$ le vecteur suivants :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} u_1 + & u_2 + & u_3 & = 1 \\ & u_2 + & u_3 & = 2 \\ & & u_3 & = 3 \end{cases}$$

On obtient alors successivement en partant de la dernière équation et en remontant :

$$u_3 = 3$$

$$u_2 = 2 - 3 = -1$$

$$u_1 = 1 - (-1) - 3 = -1$$

2.4.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Outre le problème de la résolution d'un système linéaire, on rencontre souvent en calcul scientifique, la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice. Un vecteur propre $\overrightarrow{x}$ d'une matrice carrée A est un vecteur solution de l'équation :

$$A.\overrightarrow{x} = \lambda.\overrightarrow{x} \qquad avec \qquad \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$$

Le nombre réel λ est appelé valeur propre de A associée au vecteur propre $\overrightarrow{x}$. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice lorsqu'ils existent. Parmi ces méthodes, certaines sont basées sur le fait qu'une matrice diagonale admet des valeurs propres évidentes (les éléments de la diagonale).

Exemple 9 *Soit A la matrice de dimension 2×2 diagonale suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On peut établir que les valeurs λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice A et que les vecteurs propres associés sont les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ de la base canonique. En effet :

$$A.\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 . \overrightarrow{e_1}$$

$$A.\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 . \overrightarrow{e_2}$$

On a donc bien :

$$A.\overrightarrow{e_1} = \lambda_1 . \overrightarrow{e_1}$$

$$A.\overrightarrow{e_2} = \lambda_2 . \overrightarrow{e_2}$$

Chapitre 3

Annexe

3.1 Annexe-A Applications linéaires

Dans cette annexe, nous allons définir ce qu'est une application linéaire et qu'il existe un lien étroit entre les applications linéaires et les matrices.

Soit E_m et E_n les ensembles de vecteurs de dimension m et n respectivement. Soit φ une application de E_n dans E_m :

$$\begin{cases} \varphi & : E_n \to E_m \\ & : \overrightarrow{u} \mapsto \varphi(\overrightarrow{u}) \end{cases}$$

On notera que $\varphi(\overrightarrow{u})$ est un vecteur, mais pour ne pas alourdir la notation, on omettra d'indiquer la flêche supérieure.

On dit que φ est une application linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(a) $\varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v})$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de E_n
(b) $\varphi(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda.\varphi(\overrightarrow{u})$ pour tout λ de $\mathbb{R}$ et tout $\overrightarrow{u}$ de E_n

Exemple 10 *L'application homothétie de rapport α définie par :*

$$\begin{cases} \varphi & : E_n \to E_n \\ & : \overrightarrow{u} \mapsto \varphi(\overrightarrow{u}) = \alpha.\overrightarrow{u} \end{cases}$$

est une application linéaire.

On peut établir qu'il existe une correspondance entre l'ensemble des matrices de dimension **m×n** et l'ensemble des applications linéaires de E_n dans E_m. A toute matrice A on peut faire correspondre une application linéaire unique définie simplement par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi & : E_n \rightarrow E_m \\ & : \overrightarrow{u} \mapsto \varphi(\overrightarrow{u}) = A.\overrightarrow{u} \end{array} \right.$$

Et réciproquement, on peut montrer qu'à toute application linéaire φ, on peut associer une matrice A unique. Soit $(\overrightarrow{e_i})$ les n vecteurs d'une base de l'espace E_n. La matrice A est la matrice dont la j-ème colonne est constituée des composantes dans E_m de l'image $\varphi(\overrightarrow{e_j})$ du j-ème vecteur de la base de E_n par φ.

Exemple 11 *On a vu précédemment que l'application homothétie est linéaire. La matrice A qui lui est associée est la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha \end{pmatrix}$$

Exemple 12 *L'application translation de vecteur $\overrightarrow{T}$ de E_n dans E_n n'est pas une application linéaire. On en déduit donc que cette application ne peut pas être représentée par une matrice.*