EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours103
Transformations géométriques

Dominique Neveu

Année 2010-2011

Table des matières

1 Transformations géométriques dans le plan **3**
1.1 La translation . . . 3
1.2 L'homothétie . . . 4
1.3 La rotation . . . 5
1.4 La symétrie par rapport à une droite . . . 5
1.5 La symétrie par rapport à un point . . . 6
1.6 La projection orthogonale sur une droite . . . 7

2 Transformations géométriques dans l'espace **9**
2.1 La translation . . . 9
2.2 L'homothétie . . . 9
2.3 La rotation autour d'un axe . . . 10
2.4 La symétrie par rapport à un plan . . . 10
2.5 La symétrie par rapport à un axe . . . 10
2.6 La symétrie par rapport à un point . . . 10
2.7 La projection orthogonale sur un plan . . . 11
2.8 La projection orthogonale sur un axe . . . 11

3 Coordonnées homogènes **12**
3.1 Définition . . . 13
3.2 Translation . . . 13
3.3 Produit matrice vecteur . . . 14
3.4 Exemple . . . 14

Introduction

L'étude des transformations de coordonnées admet des applications importantes en CAO et dessin sur ordinateur. Les transformations de coordonnées dans le plan et dans l'espace sont des bases mathématiques importantes pour les programmes graphiques interactifs.

Le positionnement ou le déplacement d'un objet dans le plan ou dans l'espace implique que chaque sommet subisse les transformations. Avec un modèle précis de l'objet, par exemple pour une machine outil, on peut avoir des milliers de vecteurs. Si seul importe le résultat final, alors la transformation totale est calculée à partir des transformations individuelles par multiplication matricielle, et c'est seulement cette transformation qui est appliquée aux vecteurs.

L'application successive de différentes transformations donne des calculs complexes. En infographie, ceci est considérablement simplifié à l'aide des coordonnées homogènes. Les coordonnées homogènes ont d'abord été développées en géométrie. Elles ont été appliquées par la suite en informatique graphique. De nombreuses bibliothèques graphiques et processeurs d'affichage travaillent en coordonnées homogènes.

Résumé du cours

On décrit les principales transformations du plan :
- la translation
- l'homothétie
- la rotation autour d'un point
- la symétrie par rapport à une droite
- la symétrie par rapport à un point
- la projection orthogonale sur une droite

On donne également l'expression des transformations dans l'espace :
- la translation
- l'homothétie
- la rotation autour d'un axe
- la symétrie par rapport à un plan
- la symétrie par rapport à une droite ou un point
- la projection orthogonale sur un plan
- la projection orthogonale sur un axe

En infographie, on utilise un système de coordonnées homogènes qui allège considérablement les calculs relatifs aux transformations complexes.

Chapitre 1

Transformations géométriques dans le plan

Dans ce chapitre, nous étudierons les transformations dans le plan appliquées aux points suivantes :

1. la translation
2. l'homothétie
3. la rotation autour d'un point
4. la symétrie par rapport à une droite
5. la symétrie par rapport à un point
6. la projection orthogonale sur une droite

Ces transformations sont plus facilement représentées en coordonnées cartésiennes, ce sont donc celles que nous utiliserons. Nous nous placerons dans un repère Oxy. Nous noterons P(x,y) le point auquel on applique la transformation et P'(x',y') le point transformé. Notre objectif sera de déterminer les coordonnées (x',y') du point P' en fonction des coordonnées (x,y) du point P. On rappelle que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ admettent pour composantes :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

1.1 La translation

La translation est caractérisée par un vecteur de translation, noté :

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

Soit P un point du plan, P' son image après translation. On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{T}$$

En coordonnées cartésiennes, cette relation s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases}$$

1.2 L'homothétie

Homothétie de centre O

L'homothétie de centre l'origine O dans le plan est caractérisée par deux facteurs multiplicatifs H_x et H_y qui sont appliqués aux coordonnées d'un point P du plan. Plus précisément, la transformation s'exprime à l'aide d'une matrice H, sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = H.\overrightarrow{OP} \qquad H = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix}$$

En terme de coordonnées, la relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x.x \\ H_y.y \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} x' = H_x.x \\ y' = H_y.y \end{cases}$$

Homothétie de centre A

Si le centre de l'homothétie n'est plus l'origine du plan mais un point A quelconque de coordonnées (x_A,y_A), alors la relation qui relie le point P' au point P s'écrit :

$$\overrightarrow{AP'} = H.\overrightarrow{AP}$$

Cette relation se transforme en :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right)$$

D'où :

$$\overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

On doit appliquer une translation au vecteur $\overrightarrow{OP}$, de vecteur $-\overrightarrow{OA}$, puis une homothétie de matrice H, puis encore une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. En terme de coordonnées, la relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} x' = H_x.(x - x_A) + x_A \\ y' = H_y.(y - y_A) + y_A \end{cases}$$

1.3 La rotation

Rotation autour de l'origine

La rotation autour de l'origine est caractérisée par un angle de rotation φ compté à partir de l'axe des abscisses Ox. La relation entre le point P' et le point P est caractérisée par la matrice R suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = R.\overrightarrow{OP} \qquad R = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Soit, en terme de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi).x - sin(\varphi).y \\ sin(\varphi).x + cos(\varphi).y \end{pmatrix}$$

Par exemple, la matrice de rotation d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotation de centre A

Si le centre de la rotation n'est plus l'origine du plan mais un point A quelconque, alors la relation qui relie le point P' au point P s'écrit :

$$\overrightarrow{AP'} = R.\overrightarrow{AP}$$

On en déduit que (voir paragraphe 1.2) :

$$\overrightarrow{OP'} = R.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

1.4 La symétrie par rapport à une droite

Droite passant par l'origine

Soit D une droite passant par l'origine, inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox. Soit P(x,y) un point du plan, soit P'(x',y') le transformé dans la symétrie par rapport à l'axe D. La transformation s'exprime à l'aide d'une matrice S qui a la forme suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = S.\overrightarrow{OP} \qquad S = \begin{pmatrix} cos(2.\varphi) & sin(2.\varphi) \\ sin(2.\varphi) & -cos(2.\varphi) \end{pmatrix}$$

Pour une symétrie par rapport à l'axe Ox, on a $\varphi = 0$, et la matrice s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La transformation se réduit simplement à :

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Pour une symétrie par rapport à l'axe Oy, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et la matrice s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transformation se réduit simplement à :

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Symétrie par rapport à une droite quelconque

Soit maintenant D une droite quelconque passant par un point A et inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox. La relation qui relie le point P' au point P s'écrit :

$$\overrightarrow{AP'} = S.\overrightarrow{AP}$$

On en déduit que (voir paragraphe 1.2) :

$$\overrightarrow{OP'} = S.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

1.5 La symétrie par rapport à un point

Symétrie par rapport à l'origine

Pour une symétrie par rapport à l'origine, on a tout simplement :

$$\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$$

La transformation est caractérisée par la matrice C égale à :

$$\overrightarrow{OP'} = C.\overrightarrow{OP} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées sont transformées de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Soit :

$$x' = -x \qquad y' = -y$$

Symétrie par rapport à un point A

La relation qui relie le point P' au point P s'écrit :

$$\overrightarrow{AP'} = C.\overrightarrow{AP}$$

On en déduit que (voir paragraphe 1.2) :

$$\overrightarrow{OP'} = C.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

1.6 La projection orthogonale sur une droite

Droite passant par l'origine

Soit D une droite passant par l'origine, inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox. Soit P(x,y) un point du plan, soit P'(x',y') le transformé dans la projection orthogonale sur l'axe D. La transformation s'exprime à l'aide d'une matrice Π qui a la forme suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = \Pi.\overrightarrow{OP} \qquad \Pi = \begin{pmatrix} cos^2(\varphi) & cos(\varphi).sin(\varphi) \\ cos(\varphi).sin(\varphi) & sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

Pour une projection sur l'axe Ox, on a $\varphi = 0$, et la matrice s'écrit :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformation se réduit simplement à :

$$x' = x \qquad y' = 0$$

Pour une projection sur l'axe Oy, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et la matrice s'écrit :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transformation se réduit simplement à :

$$x' = 0 \qquad y' = y$$

Projection orthogonale sur une droite quelconque

Soit maintenant D une droite quelconque passant par un point A et inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox. La relation qui relie le point P' au point P s'écrit :

$$\overrightarrow{AP'} = \Pi.\overrightarrow{AP}$$

On en déduit que (voir paragraphe 1.2) :

$$\overrightarrow{OP'} = \Pi.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

Chapitre 2

Transformations géométriques dans l'espace

Dans ce chapitre, on étudie les transformations appliquées aux points suivants :

1. la translation
2. l'homothétie
3. la rotation autour d'un axe
4. la symétrie par rapport à un plan
5. la symétrie par rapport à une droite
6. la symétrie par rapport à un point
7. la projection orthogonale sur un plan
8. la projection orthogonale sur un axe

2.1 La translation

La translation est caractérisée par un vecteur de translation, noté T = (T_x, T_y, T_z). En coordonnées cartésiennes, la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

2.2 L'homothétie

L'homothétie dans l'espace est caractérisée par trois facteurs multiplicatifs H_x, H_y et H_z. En coordonnées cartésiennes, la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.3 La rotation autour d'un axe

La rotation dans l'espace s'effectue autour d'un axe. Nous choisirons d'écrire l'expression d'une rotation autour de l'axe Ox. En coordonnées cartésiennes, la rotation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ 0 & sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où φ désigne l'angle de la rotation.

La symétrie dans l'espace peut s'effectuer par rapport à un plan, par rapport à un axe, ou par rapport à un point.

2.4 La symétrie par rapport à un plan

Une symétrie par rapport au plan Oxy s'exprime sous la forme suivante, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.5 La symétrie par rapport à un axe

Une symétrie par rapport à l'axe Ox s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.6 La symétrie par rapport à un point

Une symétrie par rapport à l'origine s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale dans l'espace peut s'effectuer par rapport à un plan ou par rapport à un axe.

2.7 La projection orthogonale sur un plan

Une projection orthogonale sur le plan Oxy s'exprime sous la forme suivante, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.8 La projection orthogonale sur un axe

Une projection orthogonale sur l'axe Ox s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Coordonnées homogènes

En infographie, on utilise les coordonnées dites homogènes qui permettent d'écrire toutes les transformations sous forme de multiplication matrice vecteur. Ceci simplifie considérablement les calculs.

Aux chapitres précédents, nous avons étudié différentes transformations géométriques. Nous pouvons constater que nous n'avons utilisé que deux types d'opérations appliquées au vecteur $\overrightarrow{OP}$: une addition de vecteur ou translation, et un produit par une matrice.

Nous ne le démontrons pas ici, mais on l'admettra : une translation ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit par une matrice. Or, cela présente un très gros inconvénient. En effet, imaginons que toutes les transformations puissent s'écrire sous forme de produit matrice vecteur. Pour calculer une transformation complexe composée d'une multitude de transformations élémentaires, il suffirait d'évaluer une matrice résultat (obtenue par produit matriciel des matrices élémentaires) et de l'appliquer aux points à transformer. Ceci aurait été très économique quand le nombre de points à traiter est important. Un seul produit matrice vecteur pour chaque point au lieu de devoir lui appliquer successivement chaque transformation élémentaire.

Or, en infographie, on introduit les coordonnées dites homogènes qui permettent d'écrire toutes les transformations vues au paragraphe précédent sous forme de multiplication matrice vecteur. Les coordonnées homogènes présentent les avantages suivants :

1. au lieu d'effectuer successivement plusieurs transformations sur tous les points, on ne calcule qu'une matrice de transformation globale, qui est ensuite multipliée par les coordonnées homogènes des points ;
2. les opérations matricielles sont effectuées extrêmement rapidement avec des stations de travail graphiques de haute puissance.

Remarque : si l'on effectue plusieurs transformations successives, on prendra garde au fait que la multiplication de matrices n'est pas commutative. Une règle est à retenir, pour la multiplication :

$$A.B \neq B.A \qquad \text{en général}$$

où A et B sont deux matrices.

3.1 Définition

Soit P(x,y) un point du plan de coordonnées cartésiennes x et y. Les coordonnées homogènes de P sont définies à l'aide d'un facteur h arbitraire, non nul :

$$P(h.x, h.y, h) \qquad h \neq 0$$

Soit P(x,y,z) un point de l'espace de coordonnées cartésiennes x,y et z. Les coordonnées homogènes de P sont définies à l'aide d'un facteur h arbitraire, non nul :

$$P(h.x, h.y, h.z, h) \qquad h \neq 0$$

Dans la suite de ce chapitre, nous choisirons h = 1 et nous raisonnerons dans le plan. Naturellement, les raisonnements se transposent simplement dans l'espace.

3.2 Translation

La translation est caractérisée par un vecteur de translation, noté :

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

La translation est la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{T}$$

En coordonnées cartésiennes, la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \end{pmatrix}$$

En coordonnées homogènes, et ceci est fondamental, on peut écrire la transformation à l'aide d'une multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Produit matrice vecteur

Supposons que, en coordonnées cartésiennes, nous ayons la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = M.\overrightarrow{OP} \qquad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}.x + m_{12}.y \\ m_{21}.x + m_{22}.y \end{pmatrix}$$

En coordonnées homogènes, la relation de produit matrice vecteur est conservée. Il suffit d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}.x + m_{12}.y \\ m_{21}.x + m_{22}.y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Exemple

Expression en coordonnées homogènes

Traitons, par exemple, le cas de l'homothétie de centre le point quelconque A (voir paragraphe 1.2). On avait établit la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

On doit appliquer une translation au vecteur $\overrightarrow{OP}$, de vecteur $-\overrightarrow{OA}$, puis une homothétie de matrice H, puis encore une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. En terme de coordonnées, la relation s'écrit :

$$\begin{cases} x' = H_x.(x - x_A) + x_A \\ y' = H_y.(y - y_A) + y_A \end{cases}$$

Ecrivons ces mêmes relations en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_A \\ 0 & 1 & y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_A \\ 0 & 1 & -y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'effectuer le produit des trois matrices (nous ne le faisons pas ici, l'ordinateur s'en chargera) pour obtenir une matrice résultat. C'est cette seule matrice résultat que l'on devra appliquer aux points à transformer. Notons qu'il est inutile de calculer la troisième composante du vecteur résultat qui est toujours égale à un.

Nombre d'opérations

Prenons, par exemple, le cas d'un million de points qui doivent être transformés successivement par une symétrie, une homothétie et une projection.

En coordonnées cartésiennes, nous avons vu que cela représente 6 translations et 3 produits matrice vecteur. Ceci représente 18 additions et 12 multiplications par point. Soit 30 opérations élémentaires par point.

En coordonnées homogènes, il faut évaluer la matrice résultat, ce qui demande quelques dizaines d'opérations, nombre que l'on considère comme négligeable. Le produit de la matrice résultat par un vecteur demande 4 additions et 6 multiplications. Soit 10 opérations élémentaires.

On constate que la différence entre les deux méthodes est de 20 opérations élémentaires par point. Soit de 20 millions d'opérations élémentaires pour l'ensemble des points. Cet exemple simple nous montre l'importance de l'utilisation des coordonnées homogènes.