EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours101
Fonctions trigonométriques
Calcul vectoriel

Dominique Neveu

Année 2010-2011

Table des matières

Introduction

La connaissance des fonctions s'avère très utile en informatique car elle intervient dans de nombreux domaines, soit de l'informatique proprement dite, soit des applications (tous les domaines scientifiques, l'économie, ...). Les fonctions servent à représenter des lois, modéliser des phénomènes, aux représentations graphiques... Dans ce cours, nous présentons le cas particulier des **fonctions trigonométriques**.

La notion de **vecteur** a prouvé son importance aussi bien en physique qu'en mathématiques. Par exemple lors de l'étude de la vitesse et de la direction d'une balle de tennis après son rebond sur une raquette. L'état de la balle peut être représenté par un segment de droite orienté (ou flèche) qui est orienté suivant la direction du mouvement de la balle, sa longueur indique la vitesse de la balle. Il s'agit du vecteur vitesse de la balle.
Les vecteurs ont également leur place en informatique. Par exemple, on utilise très largement les vecteurs en informatique graphique, pour représenter des positions de points dans un repère de coordonnées, l'orientation d'une surface dans l'espace, la direction d'une lumière agissant sur des objets solides et pour de nombreuses autres applications.
De nombreux vecteurs sont donnés en dimension deux ou trois, mais le concept de vecteur peut être étendu à la dimension n. Les vecteurs en dimension **n** (même avec $\mathbf{n} > 1000$) sont d'un grand intérêt pratique.

Résumé du cours

Ce cours présente la définition et quelques propriétés des fonctions sinus, cosinus et tangente appelées fonctions trigonométriques. Il s'intéresse également à la fonction inverse de la fonction tangente. Quelques tables indiquent des valeurs usuelles prises par les fonctions.

Ce cours propose ensuite une introduction au calcul vectoriel. On définit d'abord ce qu'est un vecteur, qui est entièrement déterminé par sa longueur, sa direction et son sens. On indique qu'un vecteur peut également être caractérisé par ses composantes.

On donne les deux opérations fondamentales sur les vecteurs : addition et multiplication par un nombre. On précise la fonction de calcul de la longueur d'un vecteur qui s'appelle norme.

Il existe deux produits de vecteurs qui sont le produit scalaire dont le résultat est un nombre et le produit vectoriel (uniquement en dimension trois) dont le résultat est un vecteur.

Chapitre 1

Fonctions trigonométriques

1.1 Le radian, unité de mesure d'angles

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal Oxy. L'origine du plan est le point O. Le repère contient deux axes de coordonnées orthogonaux Ox (axe horizontal des abscisses) et Oy (axe vertical des ordonnées). On considère le cercle unité centré à l'origine O et de rayon 1. Soit P un point quelconque de ce cercle. On note θ l'angle formé par l'axe Ox et le segment OP. L'angle θ est compté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Une première unité de mesure de l'angle θ est le degré. Lorsque le point P se déplace à partir de l'axe Ox pour réaliser un tour complet du cercle, l'angle θ varie entre 0° et 360°. Un angle droit est de 90°. Un angle plat est de 180°.

En France, le degré est une unité peu utilisée. On lui préfère le radian. Le radian est mesuré à l'aide du nombre π. Un tour complet du cercle admet une mesure de 2π radians. La conversion des degrés en radians est donc simple. On trouvera dans la table ci-après quelques angles remarquables et leur mesure en degrés et radians.

Degrés	Radians
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

L'angle θ varie à priori entre -π et π. Mais on peut aussi, suivant la nécessité, lui attribuer d'autres valeurs équivalentes (au delà de π...). Par exemple, l'angle $3\pi/2$ est identique à l'angle -$\pi/2$. On dit que θ est déterminé à 2π près. En réalité, l'angle θ peut prendre toutes les valeurs réelles, mais les angles significatifs sont compris dans l'intervalle]-π,π].

1.2 Fonctions cosinus et sinus

Reprenons le repère Oxy du paragraphe précédent et le cercle unité. Soit toujours P un point du cercle et θ la mesure de l'angle entre l'axe horizontal Ox et le segment OP. Par définition, les coordonnées du point P dans le repère Oxy sont le cosinus de θ suivant l'axe Ox et le sinus de θ suivant l'axe Oy. Que l'on note de la façon suivante :

$$P(cos(\theta), sin(\theta))$$

Un angle θ est donc entièrement déterminé par son cosinus et son sinus. Comme le point P est sur le cercle unité, on peut remarquer certaines propriétés du cosinus et du sinus :

$$-1 \leq cos(\theta) \leq 1$$

$$-1 \leq sin(\theta) \leq 1$$

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

Ces formules sont vérifiées pour tout angle θ de $\mathbb{R}$.

Les fonctions cosinus et sinus sont déterminées sur l'intervalle]-π,π], et reprennent les mêmes valeurs sur les intervalles translatés de longueur 2π, comme par exemple,]-3π,-π] ou]π,3π]. On dit que ces fonctions sont des fonctions périodiques de période 2π. Ceci est illustré par les formules :

$$cos(\theta + 2\pi) = cos(\theta)$$

$$sin(\theta + 2\pi) = sin(\theta)$$

1.3 Fonction tangente

La fonction tangente est définie par :

$$tg(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$$

La fonction tangente est définie, sauf quand cos(θ) s'annule, c'est à dire pour les angles de la forme $\frac{\pi}{2}$ + k.π, où k est un entier quelconque (positif, négatif ou nul).

Contrairement aux fonctions cosinus et sinus, la fonction tangente prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$. D'autre part, d'après les propriétés de périodicité des fonctions cosinus et sinus, on obtient que la fonction tangente est une fonction périodique, de période π :

$$tg(\theta + \pi) = tg(\theta)$$

1.4 Valeurs caractéristiques

Voici quelques valeurs prises par les fonctions cos, sin et tg :

Angle en radians	Angle en degrés	Cosinus	Sinus	Tangente
0	0°	1	0	0
$\pi/6$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\pi/4$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	0	1	$+\infty$
π	180°	-1	0	0
$3\pi/2$	270°	0	-1	$-\infty$

1.5 Fonction tangente inverse

Un angle θ variant dans l'intervalle]-π,π] est entièrement déterminé par son cosinus et son sinus. Par conséquent, si on connaît le cosinus et le sinus d'un angle, on peut lui associer un angle unique de l'intervalle]-π,π]. C'est ainsi que l'on définit la fonction tangente inverse, notée arctg2(y,x) où x et y sont le cosinus et le sinus de l'angle considéré. Sur l'intervalle]-π,π], on a :

$$arctg2\left(sin(\theta), cos(\theta)\right) = \theta$$

En langage C, la fonction est prévue et s'appelle atan2.

Nous vous proposons ci-après une série de tests.

$cos(\theta)$	$sin(\theta)$	θ en radians
-1	0	$3,1416$
$-0,7071$	$-0,7071$	$-2,3562$
0	-1	$-1,5708$
$0,7071$	$-0,7071$	$-0,7854$
1	0	0
$0,7071$	$0,7071$	$0,7854$
0	1	$1,5708$
$-0,7071$	$0,7071$	$2,3562$
-1	0	$3,1416$

Chapitre 2

Calcul vectoriel

2.1 Notion de vecteur

Un vecteur est une quantité de l'espace définie par une direction, un sens et une longueur. On adopte usuellement une notation de la forme $\overrightarrow{u}$ pour un vecteur. Nous verrons dans ce paragraphe, qu'un vecteur peut également être défini par ses composantes.

Avertissement : dans les exemples de ce chapitre, les composantes de vecteur sont des nombres entiers pour plus de simplicité. Mais, naturellement, les composantes de vecteurs sont généralement des nombres réels quelconques (nombres à virgule flottante).

Vecteurs du plan 2D

En dimension 2, un vecteur admet deux composantes. Soit Oxy un repère du plan. On peut représenter un vecteur dans le plan par un segment de droite orienté terminé par une flèche. Appelons P le point origine du segment et Q le point extrémité. Alors on note :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$$

Par définition, les deux composantes x et y du vecteur $\overrightarrow{u}$ se calculent par différence entre les coordonnées (x_Q,y_Q) du point Q et les coordonnées (x_P,y_P) du point P. On a :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$$

Vecteurs de l'espace 3D

En dimension 3, un vecteur admet trois composantes, suivant les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. On note :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vecteurs de l'espace de dimension n

On généralise la notion de vecteur en dimension **n** par une quantité à **n** composantes, toujours notées en colonne :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En informatique, les vecteurs sont souvent représentés comme des quantités indexées (champs ou tableaux). Par convention en mathématiques, les indices débutent à 1, alors que certains langages de programmation utilisent des indices débutant à 0.

Il existe une opération de transposition d'un vecteur colonne en vecteur ligne qui se note de la façon suivante :

$$\text{Si } \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{alors } \overrightarrow{u}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Nous verrons dans le cours Cours102 de calcul matriciel, l'importance de toujours noter les composantes de vecteur en colonne.

Il est important de bien distinguer les vecteurs des points. Un vecteur est représenté par une flèche et est uniquement déterminé par sa longueur, sa direction et son sens. Sa position dans l'espace ne le caractérise pas. Le "vecteur" symbolise toutes les flèches que l'on peut obtenir par translation de la flèche qui le représente.

2.2 Addition de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Le vecteur somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est un vecteur de dimension n, dont chaque composante est la somme de composantes de

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. En terme de composantes, cela s'écrit :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1 *En dimension 3 :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

On définit le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, dont toutes les composantes sont nulles. Suit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque, on a :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

L'addition de deux vecteurs peut être aussi définie par la règle du parallé-

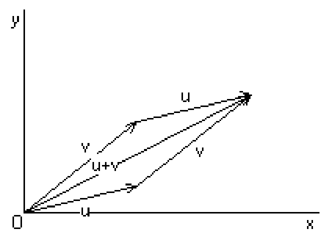

FIG. 2.1 – Addition de deux vecteurs dans le plan

logramme. Considérons l'espace 2D muni d'une origine O. Pour calculer la somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, nous traçons une flèche partant de O au point représentant le vecteur $\overrightarrow{u}$. Nous translatons cette flèche afin que son origine coïncide avec le point correspondant à $\overrightarrow{v}$, et nous définissons $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ comme étant le nouveau vecteur partant de l'origine à extrémité de la flèche. En effectuant les mêmes opérations avec le vecteur $\overrightarrow{v}$, nous obtenons un parallélogramme, comme le montre la figure 2.1. Naturellement, la définition peut être étendue à l'espace 3D et à l'espace de dimension n.

2.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, et λ un nombre réel, le vecteur produit de $\overrightarrow{u}$ par λ, noté $\lambda.\overrightarrow{u}$, admet pour composantes chaque composante de $\overrightarrow{u}$ multipliée par le nombre λ. Ainsi :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda.x_1 \\ \lambda.x_2 \\ \vdots \\ \lambda.x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 *En dimension 3 :*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad 2\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 2\times 2 \\ 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

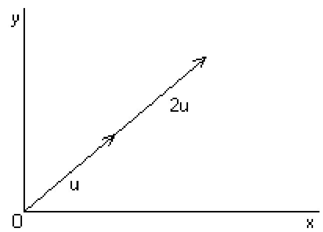

FIG. 2.2 – Multiplication d'un vecteur par un nombre

On peut donner une interprétation géométrique de la multiplication par un nombre. Nous traçons une flèche partant de l'origine au point $\overrightarrow{u}$. Nous l'étirons par un facteur λ en maintenant fixe son origine. Nous définissons alors $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme étant le point extrémité de la flèche obtenue (voir figure 2.2). On voit que l'on obtient un vecteur de même direction mais de longueur modifiée. Le sens ne change que si le nombre λ est négatif.

2.4 Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur est une fonction destinée à mesurer sa longueur. Elle est définie en fonction des composantes du vecteur par :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

On remarque que la norme d'un vecteur est toujours un nombre positif ou nul et que le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.

Exemple 3 *Dans le plan, soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de composantes :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{alors} \qquad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$$

La norme correspond à notre notion usuelle de longueur. Plaçons nous, par exemple, dans le plan muni d'un repère Oxy. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur positionné à l'origine et d'extrémité le point P. On a vu précédemment que les composantes x et y du vecteur $\overrightarrow{u}$ coïncident avec les coordonnées x et y du point P. La distance du point P à l'origine, notée d(O,P), est donnée par le théorème de Pythagore, on a :

$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Or, par définition :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On voit donc que la norme d'un vecteur est égale à la distance usuelle entre ses extrémités.

2.5 Produit scalaire de deux vecteurs

En dimension n, le produit scalaire de deux vecteurs, noté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ **est un nombre** égal à la somme du produit des composantes des vecteurs :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$$

Exemple 4 *En dimension 3, soient u et v les vecteurs suivants donnés par leurs composantes :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Leur produit scalaire est alors égal à :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -1 \times 5 + 2 \times 1 + 5 \times (-10) = -5 + 2 - 50 = -53$$

On notera les petites propriétés suivantes :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \|u\|^2$$

Formule du produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tel qu'il a été défini plus haut est également donné par la formule suivante, en fonction des normes :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les directions des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan qui les contient. θ est un angle compris entre 0 et π.

Orthogonalité de deux vecteurs

Par définition, deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. D'après la formule du produit scalaire, on retrouve bien que le cosinus de l'angle entre les directions des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est nul, c'est à dire que les vecteurs sont orthogonaux (angle de $\pi/2$).

Déterminer l'angle entre les directions de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace de dimension 3. D'après la formule du produit scalaire, on a :

$$cos(\theta) = \frac{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$$

Il est alors aisé de déterminer l'angle θ compris entre 0 et π et donc entièrement caractérisé par son cosinus. On utilise pour cela la fonction inverse de la fonction cosinus.

Exemple 5 *On cherche l'angle θ entre les deux vecteurs :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On utilise la formule du produit scalaire :

$$cos(\theta) = \frac{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

On en déduit la valeur de l'angle θ d'après la table des valeurs caractéristiques de cosinus (voir paragraphe 1.4) :

$$\theta = \pi/3$$

2.6 Produit vectoriel de deux vecteurs en dimension 3

Le produit vectoriel de deux vecteurs n'est défini qu'en dimension 3, dans l'espace habituel. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, alors le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u \wedge v}$, admet pour composantes :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_2.y_3 - x_3.y_2 \\ x_3.y_1 - x_1.y_3 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ admet pour propriété d'être orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple 6 *En dimension 3, soient u et v les vecteurs suivants donnés par leurs composantes :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Leur produit vectoriel est alors égal au vecteur :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On notera la petite propriété suivante :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

Formule du produit vectoriel

La norme du produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tel qu'il a été défini plus haut est donnée par la formule suivante :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|) = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.sin(\theta)$$

où θ est l'angle entre les directions des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan qui les contient. θ est un angle compris entre 0 et π.

Chapitre 3

Annexes

3.1 Annexe-A Equations paramétrique et cartésienne de droite

Une droite est déterminée par deux points distincts par lesquels elle passe. Mais elle peut aussi être entièrement déterminée par un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point A par lequel elle passe. Elle est alors définie de la façon suivante :

$$D = \{P \quad | \quad \overrightarrow{AP} = \lambda.\overrightarrow{u} \qquad \lambda \text{ dans } \mathbb{R}\}$$

L'équation vérifiée par le vecteur $\overrightarrow{AP}$ fournit les **équations paramétriques** de la droite D. Si les points A et P admettent pour coordonnées :

$$P = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

et si le vecteur $\overrightarrow{u}$ admet pour composantes :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

alors les équations paramétriques de la droite D sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda.u_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda.u_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda.u_n \end{cases}$$

où λ est le paramètre qui varie.

Exemple 7 *En dimension 2, soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur de composantes :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit A le point de coordonnées A(3,-1). La droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ *admet les équations paramétriques suivantes :*

$$\begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = \lambda - 1 \end{cases}$$

où λ *est le paramètre qui varie. L'équation de la droite peut encore s'écrire sous la forme suivante en éliminant* λ *:*

$$x - y - 2 = 0$$

L'**équation cartésienne** d'une droite en dimension n s'écrit sous la forme suivante :

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n + a_{n+1} = 0$$

où a_1, a_2, $...a_{n+1}$ sont des constantes.

3.2 Annexe-B Equation paramétrique de plan

Un plan est entièrement déterminé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un point A par lequel il passe. Il est défini de la façon suivante :

$$\{P \quad | \quad \overrightarrow{AP} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \qquad \lambda, \mu \text{ dans } \mathbb{R}\}$$

L'équation vérifiée par le vecteur $\overrightarrow{AP}$ fournit les équations paramétriques du plan. Si les points A et P admettent pour coordonnées :

$$P = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

et si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ admettent pour composantes :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

alors les équations paramétriques du plan affine sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda.u_1 + \mu.v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda.u_2 + \mu.v_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda.u_n + \mu.v_n \end{cases}$$

où λ et μ sont les paramètres qui varient.

Exemple 8 *En dimension 3, soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de composantes :*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit A le point de coordonnées $A(3,1,4)$. Le plan P passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ admet les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu + 3 \\ y = \lambda - \mu + 1 \\ y = \lambda + 3\mu + 4 \end{cases}$$

où λ et μ sont les paramètres qui varient.

Remarque : en dimension **n**, il n'existe pas de façon simple d'écrire l'équation cartésienne d'un plan.