EPITECH
PROBABILITES ET STATISTIQUES
Cours202
Variables aléatoires discrètes

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Résumé du cours

Une expérience aléatoire étant donnée, on peut définir une ou plusieurs fonctions du résultat de l'expérience appelées variables aléatoires. Les variables aléatoires qui ont leurs valeurs dans un ensemble discret (ensemble d'entiers...) sont dites variables aléatoires discrètes.

Une variable aléatoire prend ses valeurs avec une loi de probabilités. On cite en exemple plusieurs lois de probabilité, dont la loi uniforme discrète et la loi de Bernouilli.

Il arrive que la loi de probabilités soit déterminée pour plusieurs variables aléatoires simultanément. On cite le cas du couple de variables aléatoires dont on connait la loi conjointe. On peut alors en déduire la loi de probabilités dite marginale de chacune des variables aléatoires isolément. Enfin, on donne la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires.

La loi de probabilités d'une variable aléatoire peut être caractérisée par la fonction de répartition associée. Chaque variable aléatoire est caractérisée également par deux grandeurs qui sont son espérance mathématique et sa variance.

Chapitre 1

Variables aléatoires discrètes

1.1 Variables aléatoires

Une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire est appelée variable aléatoire, notée v.a. La valeur de la v.a. dépend du résultat ω de l'expérience aléatoire. Une variable aléatoire est donc une fonction définie sur l'espace Ω associé à l'expérience aléatoire.

Exemple 1 *Dans l'exemple du jet de k dés ($k \geq 1$), la somme S des points amenés par les dés est une variable aléatoire à valeurs entières positives égale à la fonction donnée par :*
$S(\omega) = n_1 + n_2 + ... + n_k$,
si $\omega = (n_1, n_2, ..., n_k)$ $(1 \leq n_j \leq 6$ *et* $j = 1,...,k)$

On distingue généralement les variables aléatoires dites **discrètes** (ne prenant que certaines valeurs discrètes) de celles de qualifiées de **continues** (pouvant prendre toutes les valeurs possibles entre des limites données).

1.2 Variables aléatoires discrètes

1.2.1 Nature d'une variable aléatoire discrète

Définition 1 *Etant donné un espace de probabilité (Ω,P), une variable aléatoire discrète est une application :*

$$X : \Omega \rightarrow E,$$

de Ω dans un espace dénombrable E.
Une variable aléatoire entière positive est une application de Ω dans N :

$$X : \Omega \rightarrow N.$$

Exemple 2 *Si on lance une pièce de monnaie trois fois, l'ensemble fondamental est :*

X	nombre total de "pile".
Y	nombre de "pile" lors des deux premiers essais.
Z	nombre de "pile" lors des deux derniers essais.

TAB. 1.1 – Définition des variables aléatoires

Evènement	X	Y	Z
PPP	3	2	2
PPF	2	2	1
PFP	2	1	1
FPP	2	1	2
PFF	1	1	0
FPF	1	1	1
FFP	1	0	1
FFF	0	0	0

TAB. 1.2 – Valeur des variables aléatoires X, Y et Z

$$\Omega = \{PPP,\ PPF,\ PFP,\ FPP,\ PFF,\ FPF,\ FFP,\ FFF\}.$$

où P représente "pile" et F "face". A partir de cet exemple, nous pouvons définir diverses variables aléatoires dont, par exemple, les variables aléatoires X, Y et Z définies dans le tableau 1.1. Dans le tableau 1.2, nous trouvons la liste des 8 évènements et la valeur des variables aléatoires X, Y et Z correspondante. On remarque que X est une variable aléatoire prenant une valeur dans l'ensemble {0, 1, 2, 3}. Y et Z prennent des valeurs incluses dans {0, 1, 2}.

1.2.2 Loi de probabilité

La loi de probabilité p(x) est une fonction qui associe à chaque valeur x de la variable aléatoire X sa probabilité P(X = x).

Définition 2 *Soit (Ω,P) un espace de probabilité , et X une variable aléatoire discrète de Ω dans un espace dénombrable E.*
La famille des nombres

$$p(x) = P(\ X = x\ ),\ x \in E,$$

est appelée loi de probabilité de X.

Cette fonction est discrète lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est un ensemble dénombrable de nombres réels, tel que X = $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Exemple 3 *Pour la variable aléatoire X = nombre total de piles apparus sur trois lancers, les probabilités correspondant aux différentes valeurs de X*

x	x_1=0	x_2=1	x_3=2	x_4=3	Total
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	1

TAB. 1.3 – Probabilités associées aux valeurs de X

sont données dans le tableau 1.3. Comme un des huit évènements possibles doit se réaliser, la somme des $p(x_i)$ doit être égale à 1.

L'intérêt de la loi de probabilité est de permettre de calculer directement, sans passer par Ω, la probabilité de tout évènement ne dépendant que de X. Un tel évènement est en effet de la forme :

$$\mathrm{A} = \bigcup_{x \in F} \{X = x\}$$

pour une partie F de E et sa probabilité vaut donc :

$$\mathrm{P(A)} = \sum_{x \in F} p(x)$$

Exemple 4 *Pour la somme X des points obtenus en jetant deux dés, le dénombrement des cas possibles donne :*

$$p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 2/36,\ \ldots\ ,\ p(7) = 6/36,$$

la variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle entier [2, 12]. Alors, par exemple, d'après cette loi :

$$P(X \leq 5) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 10/36 \simeq 0{,}278,$$

sans qu'il soit nécessaire de dénombrer les cas favorables à $X \leq 5$.

Exemple 5 (Loi de Bernouilli) *De nombreuses expériences aléatoires sont formées d'une suite d'épreuves identiques et indépendantes, chacune n'ayant que deux résultats possibles, les mêmes tout au long de l'expérience. Quand les probabilités des deux résultats possibles sont constantes d'une épreuve à l'autre, les suite d'épreuves est dite de* ***Bernouilli****.*
Soit A un évènement d'un espace de probabilité Ω. Sa variable aléatoire indicatrice notée 1_A est définie sur Ω par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \\ 0 & si\ x \in A^C. \end{cases}$$

La loi de probabilité de 1_A est la loi de Bernouilli sur {0,1} :

- *$P(1_A = 1) = P(A) = a$,*
- *$P(1_A = 0) = P(A^C) = 1 - a$.*

Exemple 6 (Loi uniforme discrète) *Loi d'une variable aléatoire discrète X qui prend les valeurs x_i, i=1, 2, ..., n avec des probabilités uniformément distribuées (jeu de dés).*

- *$X = x_i$, i = 1, 2, ..., n,*
- *$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$.*

1.3 Couple de variables aléatoires

1.3.1 Loi conjointe

Il arrive que la loi de probabilités soit déterminée pour plusieurs variables aléatoires simultanément, deux variables par exemple. On parle alors de loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes.

Définition 3 *Soit une variable aléatoire X qui prend ses valeurs sur un ensemble discret E, et une autre variable aléatoire Y qui prend des valeurs sur un ensemble également discret F. Le modèle probabiliste du couple (X, Y) est entièrement défini par la loi de probabilité conjointe :*

$$p(x, y) = P[(X = x) \cap (Y = y)], \quad x \in E, \quad y \in F$$

Exemple 7 *Soient deux examens effectués successivement et pour lesquels un étudiant reçoit une note X de 0 à 3 pour le premier examen et une note Y de 0 à 2 pour le second examen. Les probabilités de toutes les valeurs possibles du couple (X, Y) sont données dans le tableau suivant :*

	X=0	*X=1*	*X=2*	*X=3*
Y=0	*0,10*	*0,12*	*0,20*	*0,13*
Y=1	*0,07*	*0,08*	*0,10*	*0,07*
Y=2	*0,03*	*0,06*	*0,02*	*0,02*

Les probabilités contenues dans le tableau sont appelées probabilités conjointes du couple de variables aléatoires (X,Y). On lit, par exemple, que la probabilité d'avoir X=2 et Y=1 est égale à :

$$p(2, 1) = P[(X = 2) \cap (Y = 1)] = 0,10$$

1.3.2 Loi marginale

D'une loi conjointe du couple (X,Y), on peut déduire la loi de probabilité dite marginale de chacune des variables aléatoires X ou Y.

Définition 4 *La loi de la variable aléatoire X, composante d'une loi conjointe (X, Y), est appelée loi marginale. On dit que la loi est marginale car elle correspond à la répartition de X qui se lit sur la marge du tableau croisé X et Y :*

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in F} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in E} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

Notons qu'on a toujours :

$$\sum_{x,y} p(x, y) = \sum_{x,y} P[(X = x) \cap (Y = y)] = 1$$

Exemple 8 (suite de l'exemple 7) *Les probabilités de la loi marginale de X, c'est à dire les valeurs P(X = x) pour x=0,1,2,3 sont obtenues en ajoutant toutes les valeurs P(Y = y) correspondant à la colonne X = x. De même, la loi marginale de Y, c'est à dire les probabilités P(Y = y) pour y=0,1,2 sont obtenues en ajoutant toutes les valeurs P(X = x) correspondant à la ligne Y = y. Le tableau suivant représente les probabilités conjointes et marginales des variables aléatoires X et Y :*

	X=0	X=1	X=2	X=3	Loi de Y
Y=0	0,10	0,12	0,20	0,13	0,55
Y=1	0,07	0,08	0,10	0,07	0,32
Y=2	0,03	0,06	0,02	0,02	0,13
Loi de X	0,20	0,26	0,32	0,22	1,00

1.3.3 Indépendance

Définition 5 *Un couple de variables aléatoires discrètes est dit indépendant si quelles que soient les valeurs x,y, les évènements {X=x} et {Y=y} sont indépendants.*

A cet effet, il est nécessaire et suffisant que la loi de probabilité p(x,y) du couple (X,Y) vérifie les égalités :

$$p(x, y) = p_X(x).p_Y(y)$$

où les fonctions p_X et p_Y désignent les lois de probabilités marginales de X et Y respectivement.

Exemple 9 (suite de l'exemple 7, 8) *Dans cet exemple, les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Il suffit, par exemple, de vérifier qu'on a :*

$$p(0, 0) \neq p_X(0).p_Y(0)$$

En effet :

$$p_X(0) = 0,20 \quad p_Y(0) = 0,55 \quad et \quad p(0,0) = 0,10$$

1.4 Fonction de répartition et grandeurs caractéristiques

1.4.1 Fonction de répartition

Définition 6 *On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F définie par :*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p(X = x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

TAB. 1.4 – Probabilités associées à la valeur des points de deux dés

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(x) = p(X $\leq$ x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

TAB. 1.5 – Probabilités cumulées associées à la valeur des points de deux dés

Pour un nombre réel x, la fonction de répartition de X correspond donc à la probabilité pour que X soit inférieure ou égale à x.

Propriété 1 *Nous avons les propriétés suivantes :*
- *F est une fonction croissante ;*
- *F prend des valeurs situées dans l'intervalle [0,1] ;*

Exemple 10 *Reprenons l'exemple (4) avec le jet successif de deux dés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points des deux dés. Les probabilités associées à chaque valeur de X sont données par le tableau 1.4. Pour construire la fonction de répartition, nous créons un nouveau tableau associant à chaque valeur x de X la somme des probabilités pour toute valeur inférieur ou égale à x. On obtient le tableau 1.5 des probabilités cumulées.*

1.4.2 Espérance mathématique

Une v.a. discrète X : $\Omega \rightarrow$ E est dite réelle si ses valeurs possibles sont réelles, c'est-à-dire si E = R.

Définition 7 *L'espérance d'une v.a. réelle discrète X : $\Omega \rightarrow E$ se note E(X) et est définie à partir de sa loi par :*

$$E(X) = \sum_{E} x.p(x),$$

pourvu que la série du second membre soit absolument convergente. Dans le cas où $E(X) = \infty$, on dit que l'espérance mathématique n'existe pas.

L'espérance mathématique est donc la moyenne des valeurs de X pondérées par leur probabilité respective. Elle est le coefficient le plus important que l'on associe à une v.a. réelle.

Exemple 11 (Loi de Bernouilli) *Les valeurs possibles x de 1_A sont 0 et 1. Par définition :*

$$E(1_A) = 0.P(1_A = 0) + 1.P(1_A = 1) = P(A).$$

Exemple 12 (Loi uniforme discrète) *Les valeurs possibles de X sont x_i, i=1, 2, ..., n. Par définition :*

$$E(X) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i$$

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la variable. Dans le cas d'un jet de dé, on obtient :

$$E(X) = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 3{,}5.$$

Propriété 2 *Les propriétés de l'espérance mathématique sont les suivantes :*

* $E(aX + b) = a.E(X) + b$, *où a et b sont deux constantes, X une v.a. ;*

* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, *où X et Y sont deux v.a. ;*

* $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, *où X et Y sont deux v.a.* ***indépendantes****.*

1.4.3 Variance

Définition 8 *La variance d'une variable aléatoire discrète est notée Var(X) et est obtenue en multipliant le carré de chaque écart à la moyenne* $(x - E(X))^2$ *par la probabilité correspondante, et en faisant la somme de chacun de ces produits :*

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2)$$

Elle se calcule à partir de la loi de X par la formule de définition de l'espérance :

$$Var(X) = \sum_{x \in E} [x - E(X)]^2.p(x)$$

Ce qui s'écrit aussi, après avoir développé :

$$Var(X) = \sum_{x \in E} x^2.p(x) - [E(X)]^2$$

Ou, de façon équivalente :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

La variance sert à mesurer l'ampleur de la déviation de la loi de probabilité de X par rapport à son centre E(X). Plus la variance a une valeur proche de 0, plus les valeurs de la variable aléatoire sont proches de l'espérance E(X). A l'inverse, plus la valeur de la variance est élevée, plus les valeurs sont dispersées loin de l'espérance E(X).

A partir de la variance, on définit un nouveau coefficient qui joue également un rôle important.

Définition 9 *On appelle écart quadratique moyen d'une variable aléatoire X, et on note* $\sigma(X)$*, le coefficient défini en fonction de la variance par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Comme la variance, l'écart quadratique moyen σ(X) est d'autant plus grand que la loi de probabilité P de X est plus dispersée autour de E(X).

Exemple 13 (Loi uniforme discrète) *La variance s'obtient par :*

$$Var(X) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - E(X)^2$$

Dans le cas d'un jet de dé, on obtient :

$$Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 \simeq 2,916$$

$$\sigma(X) \simeq \sqrt{2,916} \simeq 1,708$$

Exemple 14 (Loi de Bernouilli) *Les valeurs possibles x de 1_A sont 0 et 1. Par définition :*

$$\begin{aligned}
Var(1_A) &= 0^2.P(1_A = 0) + 1^2.P(1_A = 1) - E(1_A)^2 \\
Var(1_A) &= P(A) - P(A)^2 \\
Var(1_A) &= a.(1-a) \\
\sigma(1_A) &= \sqrt{a.(1-a)}
\end{aligned}$$

Dans l'exemple de l'urne qui contient une boule blanche B et trois boules vertes V, on a :

$$Var(1_B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \simeq 0,187$$

$$\sigma(1_B) = \sqrt{\frac{3}{16}} \simeq 0,433$$

Propriété 3 *Les propriétés de la variance sont les suivantes (on note v.a. pour variable aléatoire) :*

Var(aX + b)	$= a^2.Var(X)$,	*où a et b sont deux constantes, X une v.a.*
Var(X + Y)	$= Var(X) + Var(Y)$,	*où X et Y sont deux v.a. indépendantes*