EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours105
Résolution d'équations

Dominique Neveu

Année 2010-2011

Table des matières

Introduction

Le numéricien est souvent confronté à la résolution d'équations algébriques de la forme :

$$f(x) = 0$$

et ce, dans toutes sortes de contextes.

On obtient des formules générales pour les équations degré 2 à 4. Par contre, il n'existe pas de formule permettant de trouver les zéros de polynômes de degré supérieur ou égal à 5. Les mathématiciens Abel et par la suite Galois ont démontré que ces formules n'existent pas.

Puisqu'il n'existe pas de formule générale pour des fonctions aussi simples que des polynômes, il est peu probable que l'on puisse résoudre l'équation $\mathrm{f(x)} = 0$ dans tous les cas qui nous intéressent. Il faudra donc recourir aux méthodes numériques pour résoudre ces équations. Elles sont très nombreuses et efficaces.

Résumé du cours

Dans ce cours, on s'intéresse à la résolution des équations non linéaires de la forme $\mathrm{f(x)} = 0$. On présente d'abord la méthode intuitive de la bissection. L'algorithme de la bissection converge à coup sûr pourvu que l'on dispose d'un intervalle où figure une unique racine, et tel que la fonction admette un changement de signe aux bornes de l'intervalle.

Une autre méthode célèbre est celle du point fixe. C'est à dire que l'on cherche à résoudre une équation de la forme $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}$. On peut toujours se ramener à cette forme d'équation à partir d'une équation, donnée sous la forme $\mathrm{f(x)} = 0$. Nous précisons sous quelles conditions l'algorithme converge, et nous en donnons une variante où la convergence est accélérée de façon significative.

On s'intéresse enfin à une dernière classe de méthodes qui sont la méthode de Newton et la méthode de la sécante. La méthode de Newton donne d'excellents résultats pourvu que l'on puisse donner une expression de la dérivée de la fonction **f**, et que cette dérivée ne s'annule pas au point recherché. Lorsqu'on ne dispose pas de l'expression de la dérivée, on a recours à la méthode de la sécante.

Le cours est illustré par la résolution d'une équation de degré 4. Nous avons appliqué tous les algorithmes présentés à la résolution de cette équation.

Chapitre 1

Equations non linéaires

1.1 Résolution des équations de degré 2 à 4

Nous donnons en annexe de ce cours les documents suivants :
<A> Annexe-A Nombres complexes
<B> Annexe-B Résolution d'une équation de degré 2
<C> Annexe-C Résolution d'une équation de degré 3
<D> Annexe-D Résolution d'une équation de degré 4
Le but de ces documents est de vous donner les éléments pour arriver à résoudre une équation de degré 4 par programmation. Les annexes <A>,<B>,<C> sont à consulter car ce sont des étapes indispensables pour traiter la méthode proposée dans le document <D>. Les méthodes que nous proposons utilisent largement la théorie des nombres complexes. Nous vous conseillons donc de bien vous familiariser avec cette théorie. Nous n'en donnons que les éléments indispensables dans le document <A>. Nous vous conseillons également de coder les calculs en nombres complexes très soigneusement (effectuez de nombreux tests) avant de vous lancer dans la résolution des équations. Sachez qu'il existe également des méthodes indirectes pour résoudre ces équations. L'objet de ce cours est de vous les présenter.

1.2 Exemple-Résolution d'une équation de degré 4

Dans ce cours, nous présentons différentes méthodes pour résoudre les équations non linéaires. Nous appliquerons systématiquement les algorithmes décrits à la résolution d'une équations de degré 4 qui admet deux racines réelles. L'équation est la suivante :

$$x^4 + x^2 + 4x - 2 = 0$$

Elle admet deux racines réelles qui sont :

$$r_1 \simeq -1,5518 \quad \text{et} \quad r_2 \simeq 0,4417$$

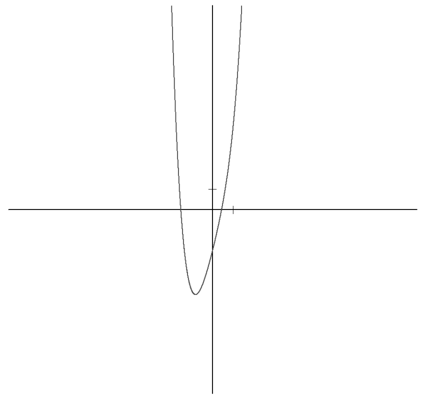

FIG. 1.1 – Graphe du polynôme $x^4 + x^2 + 4x - 2$

Nous nous attacherons au calcul de la deuxième solution $r_2 \simeq 0,4417$. Le graphe de la fonction est représenté sur la figure 1.1.

1.3 Méthode de la bissection

1.3.1 Algorithme de la bissection

La méthode de la bissection repose sur une idée simple : en général, de part et d'autre d'une solution de l'équation f(x) = 0, une fonction continue **f** change de signe et passe du positif au négatif ou vice versa. De toute évidence, ce n'est pas toujours le cas puisque la fonction **f** peut aussi être tangente à l'axe des x sans changer de signe. Nous reviendrons plus loin sur ces situations particulières.

Supposons pour l'instant qu'il y ait effectivement un changement de signe autour d'une racine **r** de f(x). Soit $[x_1,x_2]$ un intervalle ayant un unique changement de signe, c'est à dire :

$$f(x_1).f(x_2) < 0$$

On pose alors :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

qui est le point milieu de l'intervalle. Il suffit alors de déterminer, entre les intervalles $[x_1,x_m]$ et $[x_m,x_2]$, celui qui possède un changement de signe. La racine se trouvera forcément dans cet intervalle. Cela nous amène à l'algorithme suivant.

Algorithme 1 *Algorithme de la bissection*
1° Etant donné un intervalle [x_1,x_2] pour lequel f possède un unique changement de signe.
2° Etant donnés ϵ le critère d'arrêt, et N le nombre maximal d'itérations.
3° Poser :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

4° Si $\dfrac{|x_1 - x_2|}{2|x_m|} < \epsilon$:

- *convergence atteinte*
- *écrire la racine x_m*
- *écrire f(x_m)*
- *arrêt*

5° Si f(x_1).f(x_m) $<$ 0 alors $x_2 = x_m$ sinon $x_1 = x_m$
6° Si le nombre maximal d'itérations est atteint :

- *convergence non atteinte en N itérations*
- *arrêt*

7° Retour à l'étape 3°.

L'expression :

$$\frac{|x_1 - x_2|}{2|x_m|}$$

est une approximation de l'erreur relative. L'erreur absolue est égale à la longueur de l'intervalle de recherche, soit :

$$\frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

En divisant par $|x_m|$, on obtient une approximation assez fiable de l'erreur relative.

Remarque 1 *Dans cet algorithme, il faut prendre garde au cas où la racine recherchée est 0. Il y alors un risque de division par 0 au cours de l'évaluation de l'erreur relative. Ce cas est toutefois rare en pratique.*

Remarque 2 *Il est parfois utile d'introduire un critère d'arrêt sur la valeur de f(x), qui doit également tendre vers 0. Nous vous recommandons ce test alternatif qui fonctionne très bien en pratique.*

Remarque 3 *La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre à partir du moment où on a un intervalle avec unique changement de signe.*

Remarque 4 *Il existe des cas où la méthode de la bissection ne fonctionne pas.*
La première situation critique est celle où la fonction f est tangente à l'axe des x et ne présente pas de changement de signe. La bissection ne peut alors s'appliquer.
Il y a aussi celle où deux racines (ou un nombre pair de racines) sont présentes dans l'intervalle de départ. Dans ce cas, il n'y a toujours pas de changement de signe.
Enfin, si l'intervalle de départ contient un nombre impair de racines, la fonction change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.
On peut assez facilement éviter ces difficultés en illustrant graphiquement la fonction f dans l'intervalle choisi.

1.3.2 Exemple

Nous avons appliqué l'algorithme de la bissection à la résolution de l'équation citée au paragraphe 1.2. D'après le graphe de la fonction, on constate bien que la fonction change bien de signe autour de la racine. Nous avons choisi l'intervalle [0.4,0.5] pour calculer la solution. Le déroulement de l'algorithme est le suivant :

Méthode de la bissection
Point initial x1 = 0,4
Point initial x2 = 0,5
Itération 1 valeur x = 0,450000000000000
Itération 2 valeur x = 0,425000000000000
Itération 3 valeur x = 0,437500000000000
Itération 4 valeur x = 0,443750000000000
Itération 5 valeur x = 0,440625000000000
Itération 6 valeur x = 0,442187500000000
Itération 7 valeur x = 0,441406250000000
Itération 8 valeur x = 0,441796875000000
Itération 9 valeur x = 0,441601562500000
Itération 10 valeur x = 0,441699218750000
Itération 11 valeur x = 0,441748046875000
Itération 12 valeur x = 0,441723632812500
Itération 13 valeur x = 0,441711425781250
Itération 14 valeur x = 0,441705322265625
Itération 15 valeur x = 0,441708374023438
Itération 16 valeur x = 0,441706848144531
Itération 17 valeur x = 0,441707611083984
Itération 18 valeur x = 0,441707229614258
Solution r = 0,441707229614258

Solution f(r) = 2,6E-07

On remarque que l'algorithme converge relativement lentement. D'autre part, la valeur de de la fonction à la racine f(r) n'est pas d'une précision exceptionnelle. En conclusion, nous dirons que la méthode est efficace mais lente et de précision un peu décevante. Son mérite est d'être très simple à implanter.

1.4 Méthode du point fixe

1.4.1 Définition

Avant de présenter la méthode des points fixes, il faut définir ce qu'est un point fixe d'une fonction.

Définition 1 *Un point fixe d'une fonction g(x) est une valeur de x qui reste invariante pour cette fonction, c'est à dire toute solution de :*

$$x = g(x)$$

est un point fixe de la fonction g(x).

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Il suffit en effet d'effectuer les itérations de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

à partir d'une valeur estimée initiale x_0.

1.4.2 Algorithme du point fixe

L'intérêt de l'algorithme réside dans sa généralité et dans la relative facilité avec laquelle on peut en faire l'analyse de convergence.

Algorithme 2 *Algorithme du point fixe*
1° Etant donné ϵ un critère d'arrêt.
2° Etant donné N le nombre maximal d'itérations.
3° Etant donné x_0 une valeur estimée initiale du point fixe.
4° Effectuer $x_{n+1} = g(x_n)$
5° Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$:

- *convergence atteinte*
- *écrire la solution x_{n+1}*
- *arrêt*

6° Si le nombre maximal d'itérations est atteint :

- *convergence non atteinte en N itérations*
- *arrêt*

7° Retour à l'étape 4°.

1.4.3 Conditions de convergence

On peut résoudre des équations non linéaires de la forme f(x) = 0 en utilisant l'algorithme des points fixes. Il suffit pour ce faire de transformer l'équation f(x) = 0 en un problème équivalent de la forme x = g(x). L'ennui c'est qu'il y a une infinité de façons différentes de le faire. Nous verrons que certains choix donnent lieu à des algorithmes convergents, d'autres pas.

Exemple 1 *On cherche à résoudre l'équation du second degré*

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Il n'est pas nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour résoudre ce problème, dont les deux solutions sont $r_1 = 3$ *et* $r_2 = -1$. *Cet exemple permet cependant de mieux comprendre ce qui se passe lorsqu'on utilise l'algorithme des points fixes. Puisqu'il y a une infinité de façons différentes de transformer cette équation sous la forme* $x = g(x)$, *nous en choisissons trois au hasard :*

1° $x = \sqrt{2x+3} = g_1(x)$

2° $x = \dfrac{3}{x-2} = g_2(x)$

3° $x = \dfrac{x^2-3}{2} = g_3(x)$

On applique l'algorithme des points fixes à chacune des fonctions $g_i(x)$, *en partant de* $x_0 = 4$.

1° Pour $g_1(x)$, *l'algorithme converge vers la racine* $r_1 = 3$.

2° Pour $g_2(x)$, *l'algorithme converge vers la racine* $r_2 = -1$ *en ignorant la racine* $r_1 = 3$.

3° Pour $g_3(x)$, *les itérations tendent vers l'infini et aucune des deux solutions possibles n'est atteinte.*

Donnons une condition nécessaire pour que l'algorithme du point fixe soit convergent.

Théorème 1 *Une condition nécessaire pour que l'algorithme du point fixe soit convergent est que :*

$$|g'(r)| < 1$$

En fait, plus la valeur de |g'(r)| est petite, plus la convergence est rapide. Le cas limite est celui où g'(r) = 0.

La convergence d'une méthode des points fixes est également assujetie au choix de la valeur initiale x_0. En effet, un mauvais choix de x_0 peut résulter en un algorithme divergent même si la condition du théorème précédent est respectée.

Théorème 2 *Soit g(x) une fonction continue dans l'intervalle [a,b] et telle que g(x) soit dans [a,b] pour tout x de [a,b]. Si de plus g'(x) existe et si :*

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

pour tout x de]a,b[, alors tous les points de l'intervalle [a,b] constituent des valeurs initiales correctes pour la convergence de l'algorithme des points fixes.

Exemple 2 *Revenons aux trois fonctions de l'exemple 1. On veut s'assurer que la condition |g'(x)| < 1 est vérifiée pour les racines r_1 = 3 et r_2 = -1. Dans le tableau suivant, on donne la valeur des dérivées des fonctions g_i pour chacune des deux racines.*

	$r_1 = 3$	$r_2 = -1$
$g_1'(r)$	$0,333$	1
$g_2'(r)$	-3	$-0,333$
$g_3'(r)$	3	-1

Ce tableau aide à comprendre les résultats obtenus dans l'exemple précédent. La méthode des points fixes appliquée à $g_1(x)$ converge vers r_1 = 3 puisque $g_1'(3)$<1. De même, avec $g_2(x)$, les itérations ignorent r_1 et convergent vers r_2 où la valeur de la dérivée est inférieure à 1. Dans le cas de $g_3(x)$, on a divergence de la méthode de point fixe car la dérivée reste supérieure ou égale à 1.

1.4.4 Exemple

Nous avons appliqué l'algorithme du point fixe à la fonction définie par (voir exemple 1.2) :

$$g(x) = \frac{-x^4 - x^2 + 2}{4}$$

Les itérations se sont déroulées de la façon suivante :
Méthode du point fixe
Point initial x1 = 0,4
Itération 1 valeur x = 0,453600000000000
Itération 2 valeur x = 0,437978189862810
Itération 3 valeur x = 0,442844578735298
Itération 4 valeur x = 0,441357257223409
Itération 5 valeur x = 0,441814550214234
Itération 6 valeur x = 0,441674206358920
Itération 7 valeur x = 0,441717302216457
Itération 8 valeur x = 0,441704070901622
Itération 9 valeur x = 0,441708133401897
Itération 10 valeur x = 0,441706886085115
Itération 11 valeur x = 0,441707269052940
Solution r = 0,441707269052940
Solution f(r) = 4,7E-07
L'algorithme de converge pas très vite. La précision sur la solution n'est pas excellente. Nous verrons au paragraphe suivant un algorithme qui accélère grandement l'algorithme des points fixes. C'est l'algorithme de Steffenson.

1.4.5 Algorithme de Steffenson

Algorithme 3 *Algorithme de Steffenson*
1° Etant donné ϵ un critère d'arrêt.
2° Etant donné N le nombre maximal d'itérations.
3° Etant donné x_0 une valeur estimée initiale du point fixe.
4° Effectuer :

- $x_1 = g(x_0)$

- $x_2 = g(x_1)$

- $x_e = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$

5° Si $\dfrac{|x_e - x_0|}{|x_e|} < \epsilon$ *:*

- *convergence atteinte*
- *écrire la solution* x_e
- *arrêt*

6° Si le nombre maximal d'itérations est atteint :

- *convergence non atteinte en N itérations*
- *arrêt*

7° $x_0 = x_e$ *et retour à l'étape 4°.*

La convergence est beaucoup plus rapide avec algorithme de Steffenson. Par contre, chaque itération de l'algorithme de Steffenson demande plus de calculs. Il y a un prix à payer pour obtenir une meilleure convergence.

1.4.6 Exemple

L'application de l'algorithme de Steffenson à la résolution de l'équation exemple (voir paragraphe 1.2 a fourni les itérations suivantes : Méthode de Steffenson
Point initial x1 = 0,4
Itération 1 valeur x = 0,441503682066477
Itération 2 valeur x = 0,441707173813961
Itération 3 valeur x = 0,441707179090632
Solution r = 0,441707179090632
Solution f(r) = -1,9E-17
On voit qu'il s'agit d'un algorithme excellent qui converge très rapidement et qui fournit la solution avec une grande précision. Nous avons pu constater sur de nombreux autres exemples qu'en effet il s'agit d'un algorithme très performant dans tous les cas.

1.5 Méthode de Newton

1.5.1 Algorithme de Newton

La méthode de Newton est une des plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires. Cette méthode possède également une interprétation géométrique intéressante. Nous commençons par donner l'algorithme, basé sur la connaissance de la dérivée **f'** de la fonction **f** de l'équation à résoudre.

Algorithme 4 *Algorithme de Newton*
1° Etant donné ϵ un critère d'arrêt.
2° Etant donné N le nombre maximal d'itérations.
3° Etant donné x_0 une valeur initiale de la solution
4° Effectuer :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5° Si $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$ *:*

- *convergence atteinte*
- *écrire la solution* x_{n+1}
- *arrêt*

6° Si le nombre maximal d'itérations est atteint :

- *convergence non atteinte en N itérations*
- *arrêt*

7° Retour à l'étape 4°.

Nous pouvons donner une interprétation géométrique assez simple de la méthode de Newton. Soit le point (x_0,f(x_0)) qui est sur la courbe. La droite tangente à la courbe en ce point est de pente f'(x_0) et a pour équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

Cette droite coupe l'axe des x en y = 0, c'est à dire en :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

qui devient la nouvelle valeur estimée de la solution. On reprend le même raisonnement à partir du point (x_1,f(x_1)) et ainsi de suite.

Pour appliquer la méthode de Newton, il faut connaître l'expression de la fonction dérivée **f'** et s'assurer que **f'** ne s'annule pas pour la solution recherchée : on doit avoir f'(r) $\neq$ 0.

La convergence de la méthode de Newton dépend de la valeur initiale x_0.

Malgré ses propriétés de convergence, une mauvaise valeur initiale peut provoquer la divergence de la méthode. Il faut toujours choisir une valeur de x_0 près de la racine **r**. On peut pour cela s'aider d'une représentation graphique de la fonction.

1.5.2 Exemple

Nous appliquons la méthode de Newton à l'exemple 1.2 : Méthode de Newton
Point initial x1 = 0,4
Itération 1 valeur x = 0,442405063291139
Itération 2 valeur x = 0,441707381414856
Itération 3 valeur x = 0,441707179090649
Solution r = 0,441707179090649
Solution f(r) = 8,9E-14
On constate que l'algorithme converge très rapidement et que la précision sur la solution (valeur de f(r) est très satisfaisante. La méthode de Newton est très efficace. Elle est très couramment utilisée.

1.6 Méthode de la sécante

1.6.1 Algorithme de la sécante

La méthode de Newton présente de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivée f'(x). Si la fonction f(x) est complexe, cette dérivée peut être difficile à évaluer. On contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente f'(x_n) de la droite tangente à la courbe par l'expression suivante :

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Cela revient à utiliser la droite sécante passant par les points (x_n,f(x_n)) et (x_{n-1},f(x_{n-1})) plutôt que la droite tangente passant par (x_n,f(x_n)). Il en résulte l'algorithme suivant.

Algorithme 5 *Algorithme de la sécante*
1° Etant donné ϵ un critère d'arrêt.
2° Etant donné N le nombre maximal d'itérations.
3° Etant donné x_0 et x_1 deux valeurs initiales de la solution
4° Effectuer :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n).(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

5° Si $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$ *:*

- *convergence atteinte*
- *écrire la solution* x_{n+1}
- *arrêt*

6° Si le nombre maximal d'itérations est atteint :

- *convergence non atteinte en N itérations*
- *arrêt*

7° Retour à l'étape 4°.

Plusieurs remarques s'imposent au sujet de cet algorithme.

Remarque 5 *1° la dérivée f'(x) n'apparaît plus dans l'algorithme.*
2° Il faut fournir au départ deux valeurs initiales. C'est ce qu'on appelle un algorithme à deux pas.
3° On choisit les valeurs initiales le plus près possible de la racine recherchée. Il n'est cependant pas nécessaire qu'il y ait changement de signe dans l'intervalle $[x_0, x_1]$*, comme c'est le cas avec la méthode de la bissection.*

1.6.2 Exemple

La méthode de la sécante appliquée à l'exemple 1.2 a fournit les résultats suivants : Méthode de la sécante
Point initial x1 = 0,4
Point initial x2 = 0,5
Itération 1 valeur x = 0,440690833175176
Itération 2 valeur x = 0,441724477343632
Itération 3 valeur x = 0,441706884547618
Itération 4 valeur x = 0,441707184105876
Solution r = 0,441707184105876
Solution f(r) = 2,6E-08
La convergence est légèrement plus lente qu'avec l'algorithme de Newton et la précision sur la solution moins bonne. Toutefois, cet algorithme, facile à coder reste un algorithme de qualité intéressante.