EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Année 2011-2012
Projet 107interpol

1 Objectif

On se donne six points du plan. On sait qu'il existe un unique polynôme de degré cinq qui passe exactement par ces points. L'objectif de ce sujet est de calculer le polynôme. La méthode utilisée est la méthode de Lagrange décrite en annexe de ce sujet. On tracera les points donnés ainsi que le polynôme sur une fenêtre graphique.

2 Les points

Les six points du plan sont les suivants :
0.0000 2.0000
1.0000 6.0000
2.0000 8.0000
3.0000 3.0000
5.0000 7.0000
6.0000 5.0000

Sur chaque ligne ci-dessus, on lit les deux coordonnées (x_i,y_i) de chaque point, pour i variant de 0 à 5.

3 Le polynôme

Pour évaluer le polynôme recherché, on utilise la méthode de Lagrange. Cette méthode permet d'obtenir la valeur P(x) du polynôme P en un point x, x variant entre 0 et 6. Pour vérifier que l'on a obtenu le polynôme exact, on peut vérifier qu'il passe bien par les six points donnés. Autrement dit, on doit obtenir : P(x_i) $= y_i$, pour i variant de 0 à 5.

4 Le graphique

On donnera la représentation graphique des points donnés avec la représentation graphique du polynôme obtenu. Le cadre graphique doit être adapté aux données (calcul de min-max). Les axes de coordonnées seront représentés avec la graduation de l'unité. Les points d'interpolation seront représentés à l'aide d'une croix. Le polynôme sera représenté par une courbe continue. On peut à nouveau vérifier sur ce graphique, qu'il passe bien par les points donnés.

5 Le logiciel

Répertoire de rendu : $\tilde{}$/../rendu/math/107interpol/
Nom de l'exécutable : 107interpol
Exemple de lancer :
107interpol
En sortie : la fenêtre graphique avec tracé des points donnés et de la courbe représentative du polynôme obtenu (voir Figure 1).

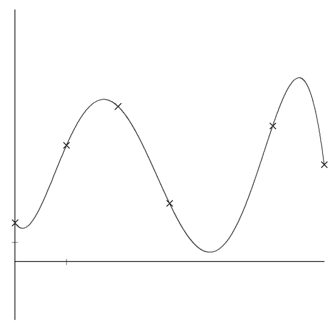

FIG. 1 – Points donnés et polynôme P

6 Avertissement

LES FONCTIONS PRE-PROGRAMMEES DE TRACE DE COURBE SONT INTERDITES (GNUPLOT ET AUTRES...) SINON VOTRE PROJET NE SERA PAS CORRIGE.

7 Questions

1° Qu'est-ce que le domaine de définition d'une fonction ? Donner un exemple.
2° Qu'est-ce que l'image d'une fonction ? Donner un exemple.
3° Qu'est-ce qu'une fonction polynomiale ?
4° La parabole est le graphe de quelle fonction ?
5° L'hyperbole est le graphe de quelle fonction ?

8 Annexe : Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme passant par des points donnés. Etant donnés n+1 points (x_i,y_i), on suppose qu'on sait construire n+1 polynômes L_i(x) de degré n satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

Cela signifie que le polynôme L_i(x) de degré n prend la valeur 1 en x_i et s'annule en tous les autres points donnés. Nous verrons comment les construire un peu plus loin. Dans ces conditions le polynôme P(x) défini par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i.L_i(x)$$

est un polynôme de degré n qui passe par les n+1 points d'interpolation et est donc le polynôme recherché.

Les polynômes L_i(x) sont donnés par :

$$L_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

ou encore :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Le numérateur contient tous les facteurs (x - x_k) sauf (x - x_i), et le dénominateur contient tous les facteurs (x_i - x_k) sauf (x_i - x_i). On donne ci-après un algorithme permettant de calculer le polynôme à partir des n+1 valeurs aux points donnés :

Algorithme 1 *L'algorithme est le suivant :*

1. p ← 0
2. pour i ← 0 à n
3. s ← y[i]
4. pour j ← 0 à n
5. si i ≠ j alors s ← s.(x - x[j])/(x[i] - x[j])
6. p ← p + s

Exemple 1 *Une fonction passant par les points (0,0), (1,-1) et (3,3) peut être approximée par un polynôme de degré 2. Les coefficients sont :*

$$L_0(x) = \frac{(x-1).(x-3)}{(-1).(-3)} = \frac{(x-1).(x-3)}{3}$$
$$L_1(x) = \frac{x.(x-3)}{1.(-2)} = -\frac{x.(x-3)}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{x.(x-1)}{3.2} = \frac{x.(x-1)}{6}$$

La fonction est représentée par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.L_0(x) - 1.L_1(x) + 3.L_2(x) \\ &= \tfrac{x.(x-3)}{2} + \tfrac{x.(x-1)}{2} \\ &= \tfrac{x.(x-3+x-1)}{2} \\ &= x^2 - 2.x \end{aligned}$$