EPITECH
PROBABILITES ET STATISTIQUES
Cours205
Lois continues

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Résumé du cours

Dans ce chapitre, on décrit les lois des variables aléatoires continues les plus usuelles : la loi uniforme continue et la loi de Gauss. On en donne toutes les caractéristiques : densité de probabilité et fonction de répartition, espérance mathématique et variance.

La loi de Gauss est aussi connue sous le nom de loi normale. La loi normale est couramment utilisée pour des évaluations statistiques. Au début du XIX^{eme} siècle, les travaux de Gauss établirent l'aspect fondamental de la distribution normale, comme la forme de distribution résultante des erreurs de mesures.

Chapitre 1

Lois continues

1.1 Loi uniforme continue

La loi uniforme continue est la loi la plus simple, de densité constante sur un intervalle de définition [u,v]. Puisque la surface totale sous la fonction de densité f d'une variable aléatoire doit être égale à 1, la fonction de densité de la loi uniforme est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{v-u} & \text{si } x \in [u, v], \\ 0 & \text{si } non. \end{cases}$$

Par intégration, nous obtenons la loi de répartition F :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_u^x \frac{dx}{v-u} = \frac{x-u}{v-u}, \qquad u \leq x \leq v$$

L'espérance mathématique de la loi uniforme est égale à :

$$E(X) = \int_u^v x.f(x).dx = \frac{u+v}{2}$$

La variance est donnée par :

$$Var(X) = \frac{(v-u)^2}{12}$$

1.2 Loi de Gauss

1.2.1 Cadre d'utilisation

La loi de Gauss est aussi connue sous le nom de loi normale. La loi normale est couramment utilisée pour des évaluations statistiques. Au début du XIX^{eme} siècle, les travaux de Gauss établirent l'aspect fondamental de la distribution normale, comme la forme de distribution résultante des erreurs de mesures. En particulier, Gauss a montré que lorsqu'une mesure physique sujette à un assez grand nombre d'erreurs indépendantes et additives, l'erreur totale se comporte comme une variable aléatoire dont la distribution est approximativement une distribution normale, d'où l'importance de cette loi. Des circonstances semblables se rencontrent souvent dans la pratique et dans beaucoup de domaines :

- la vente totale d'un produit industriel est la somme des quantités achetées par de multiples consommateurs dont les consommations sont plus ou moins indépendantes ;

- le gain total d'une compagnie d'assurances est la somme des gains (ou pertes) résultant des différentes polices d'assurances contractées par ses clients.

On peut s'attendre dans de tels cas à ce que la quantité étudiée (vente totale, gain total) ou une transformation soit représentée par une variable aléatoire suivant approximativement une loi normale.

1.2.2 Densité de probabilité et fonction de répartition

La loi normale est entièrement définie par deux paramètres, la moyenne μ et la variance σ^2. Nous dirons donc qu'une variable aléatoire continue Y suit une loi normale de paramètres μ et σ^2, et nous noterons Y $\sim$ N(μ,σ^2).

Définition 1 *La fonction de densité qui définit la loi normale N(μ,σ^2) a pour expression :*

$$g_{\mu,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La fonction de répartition correspondante est la probabilité que la variable aléatoire Y ait une valeur inférieure ou égale à une quantité quelconque y. Cette fonction est exprimée par :

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz$$

La fonction de répartition ne pouvant être exprimée sous forme explicite d'une façon simple, son calcul demande l'utilisation des méthodes d'évaluation numériques. Les résultats de ces calculs sont présentés sous forme de tables, appelées tables de la loi normale.
Il n'est pas nécessaire de calculer les résultats de la loi normale pour diverses valeurs de μ et σ^2 car on se ramène à une loi normale de moyenne zéro et de variance égale à 1 par une transformation simple.

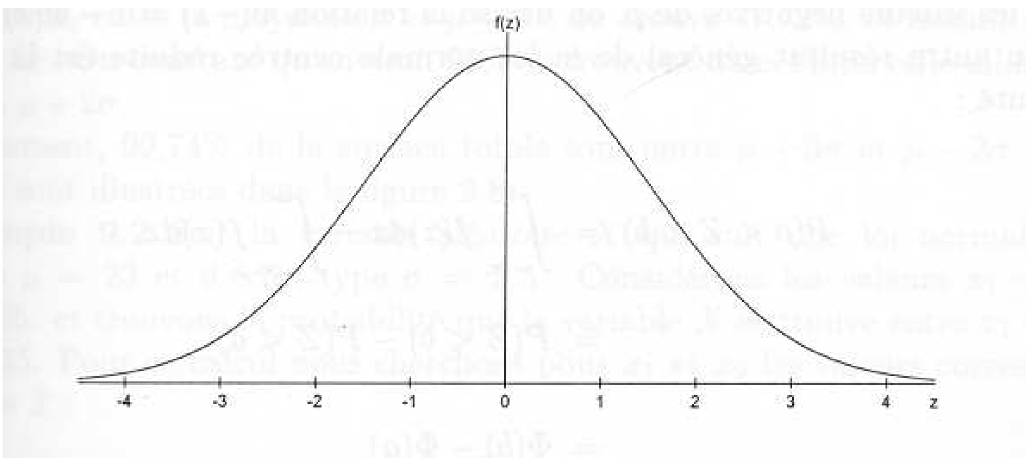

FIG. 1.1 – Courbe normale centrée réduite

1.2.3 Loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire Y suit une loi N(μ,σ^2), la variable X = (Y - μ)/σ suit une loi N(0,1), appelée loi normale standard ou loi normale centrée réduite.

Définition 2 *La loi normale centrée réduite correspond à la loi normale avec les paramètres $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Sa fonction de densité est donc :*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.exp(-x^2/2)$$

La figure 1.1 représente la courbe normale centrée réduite. On l'appelle courbe en cloche. Elle est symétrique autour de 0 et la surface totale délimitée par la courbe est égale à 1.
La symétrie de la courbe de g(x) implique que :

$$g(-x) = g(x)$$

et que la valeur maximale de g(x) est atteinte à x = 0, la valeur maximale étant g(0) = $1/\sqrt(2\pi)$ = 0,399.

Définition 3 *La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est définie par :*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} exp(-z^2/2)dz$$

La courbe correspondante est représentée par la figure 1.2 : La symétrie de la courbe de densité par rapport à l'origine implique que la fonction de répartition F(x) vérifie :

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

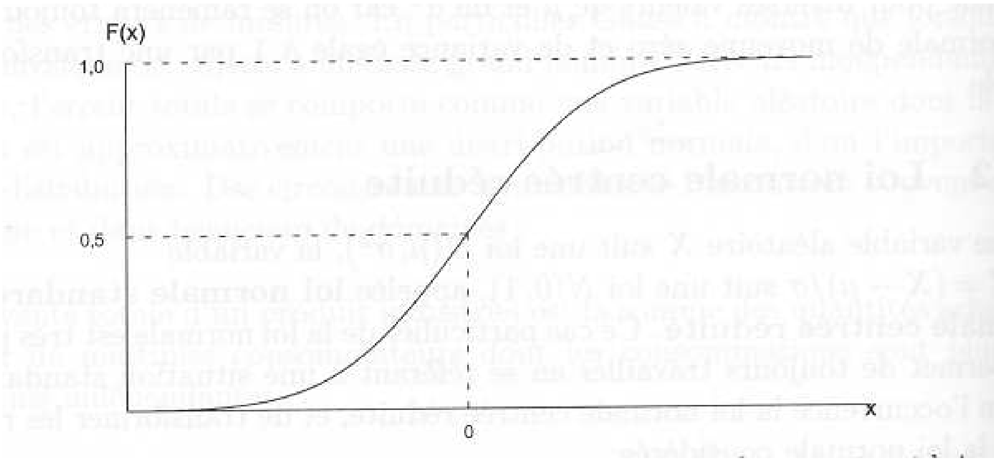

FIG. 1.2 – Fonction de répartition de la loi normale réduite

Ce dernier résultat est très utile, car il pemet d'obtenir la valeur de la fonction de répartition pour x négatif à partir de la valeur de la fonction pour x positif.
D'autre part, on rappelle que la fonction de répartition vérifie la relation suivante :

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

1.2.4 Table de Gauss

Il existe pour la courbe de loi normale standard une table (voir figure) donnant pour chaque valeur positive de la valeur x la valeur de sa fonction de répartition. La fonction de répartition nous donne pour une valeur particulière x, la probabilité que X soit inférieur ou égal à x, ou P(X $\leq$ x).

Examinons, à l'aide de quelques exemples, l'utilisation de la table de Gauss.

Exemple 1 *En raison de divers aléas, le poids d'une boîte de fromage n'est pas toujours égal au poids indiqué sur la boîte. Le poids Y des boîtes de fromage Audebert suit une loi normale de moyenne μ = 100 gr. et d'écart type σ = 4 gr. Calculons la probabilité qu'une boîte ait un poids situé entre 90 gr. et 110 gr., soit P(90 $\leq$ Y $\leq$ 110).*
En passant par la variable normale standard X, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(90 \leq Y \leq 110) &= P\left(\frac{90-100}{4} \leq X \leq \frac{110-100}{4}\right) \\ &= P(-2{,}5 \leq X \leq 2{,}5) \\ &= F(-2{,}5) - F(2{,}5). \end{aligned}$$

Nous pouvons lire dans la table de Gauss la valeur F(2,5) = 0,9938, et déduire

Table de Gauss

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

La table de Gauss donne les probabilités $\Phi(z)$ pour des valeurs positives de z telles que

$$P\{Z \leq z\} = \Phi(z) = A$$

Note : $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Fig. 1.3 – ABAQUE : Table de Gauss

par symétrie que F(-2,5) = 1 - F(2,5) = 0,0062, d'où :

$$P(90 \leq Y \leq 110) = 0,00938 - 0,0062 = 0,9876$$

Donc la probabilité qu'une boîte de fromage de 100 gr. de la marque Salembier ait en réalité un poids compris entre 90 gr. et 110 gr. est de 98,76%.

Exemple 2 *Dans l'exemple 1, les bornes de l'intervalle contenant Y (-2,5 ≤ X ≤ 2,5) étaient symétriques par rapport à zéro. Le principe du calcul reste inchangé pour des valeurs de bornes non symétriques.*
Calculons par exemple la probabilité que X soit compris entre 1 et 2. On lit dans la table de Gauss la valeur correspondant à 1, c'est à dire F(1) = 0,8413. De même, la valeur correspondant à 2 vaut F(2) = 0,9772. La probabilité recherchée s'obtient par différence :

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$$

Exemple 3 *Calculons maintenant la probabilité que X soit compris entre -2 et -1. On note que la courbe normale étant symétrique, l'aire comprise entre -2 et -1 est la même que celle comprise entre 1 et 2. Donc la probabilité que X soit compris entre -2 et -1 vaut 0,1359. De façon plus générale, on a :*

$$P(-b < X < -a) = P(a < X < b)$$

pour toutes les valeurs de a et b, a < b.

1.2.5 Espérance et variance

Dans le cas de la loi de Gauss centrée réduite, on obtient :

$$E(X) = 0 \qquad et \qquad Var(X) = 1$$

Pour la loi de Gauss N(μ,σ^2), on a :

$$E(Y) = \mu \qquad et \qquad Var(Y) = \sigma^2$$

1.2.6 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi normale s'utilise souvent comme cas limite pour d'autres lois de probabilité. Ceci permet, quand les conditions sont remplies, d'employer la loi normale pour calculer les valeurs approximatives des probabilités engendrées par d'autres distributions, souvent plus compliquées que la loi normale.
La distribution binomiale B(n,p) peut être approchée par une distribution normale N(μ,σ^2) de paramètres :

$$\mu = n.p \text{ et } \sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}.$$

Pour une valeur fixe de n, plus p est proche de 0,5, plus l'approximation de la loi binomiale par la loi normale est bonne. De même, pour une valeur fixe de p, plus n est grand, plus l'approximation de la loi binomiale par la loi normale est correcte.