EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours108
Fonctions avancées

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Introduction

La connaissance des fonctions s'avère très utile en informatique car elle intervient dans de nombreux domaines, soit de l'informatique proprement dite, soit des applications (tous les domaines scientifiques, l'économie, ...). Les fonctions servent à représenter des lois, modéliser des phénomènes, aux représentations graphiques...

La plupart des langages de programmation incluent l'accès aux fonctions mathématiques. C'est le cas en langage C, où l'on trouve l'ensemble des fonctions courantes ainsi que quelques constantes prédéfinies dans la bibliothèque <math.h>. Il est nécessaire de maîtriser l'utilisation de ces fonctions pour pouvoir les employer à bon escient.

Résumé du cours

Ce cours est le deuxième d'une série de deux cours portant sur les fonctions usuelles et leur programmation en langage C.

Ce cours est consacré aux fonctions dites transcendantes :
- fonction logarithme : Log(x)
- fonction exponentielle : e^x
- fonction exponentielle généralisée : a^x
- fonctions hyperboliques : ch(x), sh(x), th(x)
- fonctions trigonométriques : cos(x), sin(x), tg(x)
- fonctions trigonométriques inverses : arccos(x), arcsin(x), arctg(x)

Pour chaque série de fonctions, on en cite la définition, on en donne le graphe et les propriétés et on décrit les fonctions informatiques du langage C correspondantes lorsqu'elles existent.

Chapitre 1

Fonctions avancées

1.1 Fonction logarithme

La fonction logarithme admet une définition rigoureuse qui sort du cadre de ce cours. Nous examinerons simplement l'allure du graphe de la fonction et nous en donnerons les principales propriétés.

La fonction logarithme est une fonction sur les nombres réels strictement positifs à valeurs réelles. On la note généralement Log(x) :

$$\begin{aligned} \text{Log} \quad &: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ &: x \mapsto Log(x) \end{aligned}$$

Le graphe de la fonction logarithme est présenté sur la figure 1.1. On remarque que la fonction Log(x) n'est définie que pour les valeurs de x>0. Elle est négative pour x $\leq$ 1, positive sinon. Lorsque x se rapproche de zéro par valeurs positives, elle tend à prendre de très grandes valeurs négatives. A l'inverse, elle augmente lentement vers de très grandes valeurs positives lorsque x augmente positivement.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons quelques valeurs prises par la fonction logarithme.

x	10^{-2}	10^{-1}	1	2	e	10	100
$Log(x)$	$-4,605$	$-2,303$	0	$0,693$	1	$2,303$	$4,605$

Le nombre e est le nombre exponentiel. C'est un nombre transcendant (i.e. qui ne peut pas s'écrire sous forme de fraction) qui joue un rôle fondamental en mathématiques. Il est approximativement égal à :

$$e \simeq 2,71828...$$

C'est l'unique nombre positif tel que :

$$Log(e) = 1$$

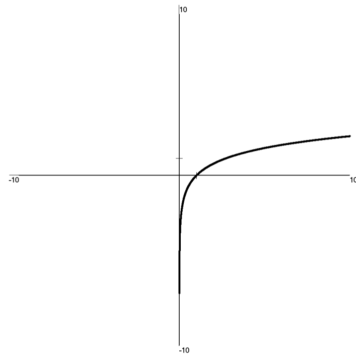

FIG. 1.1 – Fonction logarithme

Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble :

$$D_f = \mathbb{R}^{+*} = \{x > 0\}$$

Sur cet ensemble, la fonction est continue. Une fonction continue est une fonction dont on peut tracer le graphe "sans lever le crayon". La courbe représentant f ne présente pas de saut ou point de discontinuité.

D'autre part, la fonction logarithme est strictement croissante. Une fonction strictement croissante est une fonction f(x) qui augmente lorsque x augmente. La définition est la suivante :

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implique} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

On a les règles de calcul suivantes :

$$\begin{cases} Log(xy) = Log(x) + Log(y) & x, y > 0 \\ Log(\frac{1}{x}) = -Log(x) & x > 0 \\ Log(\frac{x}{y}) = Log(x) - Log(y) & x, y > 0 \\ Log(x^n) = n.Log(x) & x > 0, \text{ n entier} \end{cases}$$

La fonction logarithme du langage C s'applique aux variables de type double :

double log (double x)

Elle ne s'applique qu'aux nombres x>0.

1.2 Logarithme de base a

Soit a un nombre >0, distinct de 1. Alors Log(a) existe et est différent de zéro. On pose, pour tout x>0 :

$$Log_a(x) = \frac{Log(x)}{Log(a)}$$

On dit que $Log_a(x)$ est la fonction logarithmique de base a. Pour a=e, on retrouve Log(x).

Au lieu de la formule Log(e)=1, on a :

$$Log_a(a) = 1$$

En particulier, les logarithmes de base 10 sont appelés logarithmes décimaux. La formule

$$Log_{10}(10) = 1$$

les rend commode pour le calcul numérique. On a :

$$Log_{10}(x) = M.Log(x) \qquad M = 0,43429...$$

En mathématiques, quand on ne précise pas la base en indice, il s'agit toujours du logarithme népérien, c'est à dire de base e.

La fonction logarithme de base 10 du langage C s'applique aux variables de type double :

double log10 (double x)

Elle ne s'applique qu'aux nombres x>0.

1.3 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle admet une définition rigoureuse qui sort du cadre de ce cours. Nous examinerons simplement l'allure du graphe de la fonction et nous en donnerons les principales propriétés.

La fonction exponentielle est une fonction sur les nombres réels à valeurs réelles. On la note exp(x) :

$$\begin{aligned} exp \quad &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &: x \mapsto exp(x) \end{aligned}$$

Le graphe de la fonction exponentielle est présenté sur la figure 1.2. On remarque que la fonction ne prend que des valeurs strictement positives. Elle se rapproche de zéro lorsque x décroît négativement. Elle augmente extrêmement rapidement lorsque x augmente positivement. C'est ainsi que l'on

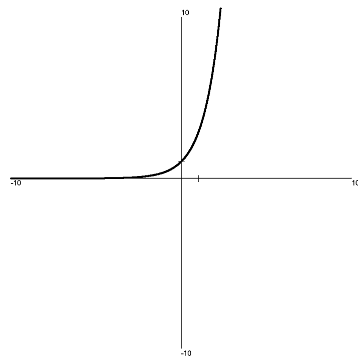

FIG. 1.2 – Fonction exponentielle

parle de croissance exponentielle pour signifier une croissance très rapide.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons quelques valeurs approximatives prises par la fonction exponentielle.

x	-20	-10	-2	-1	0	1	2	10	20
$exp(x)$	2.10^{-9}	5.10^{-5}	$0,1353$	$0,3679$	1	e	$7,389$	2.10^4	5.10^8

Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des réels tout entier :

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction exponentielle est une fonction continue sur toute la doite réelle (n'admet pas de saut de valeur). D'autre part, la fonction exponentielle est également une fonction strictement croissante sur cet ensemble.

La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction logarithme. La fonction logarithme est définie sur les nombres réels strictement positifs et admet des valeurs réelles. On a :

$$y = exp(x) \qquad \text{est équivalent à} \qquad x = Log(y)$$

D'après une propriété des fonctions réciproques, on remarque que le graphe de la fonction exponentielle (voir figure 1.2) est le symétrique du graphe de la fonction logarithme (voir figure 1.1) par rapport à la première bissectrice, c'est à dire la droite d'équation y=x.

Pour n entier quelconque, c'est à dire dans $\mathbb{Z}$, et en utilisant les propriétés du logarithme, on a :

$$Log(exp(n)) = n = n.Log(e) = Log(e^n)$$

On en déduit, puisque la fonction logarithme est strictement croissante que :

$$exp(n) = e^n$$

Ceci suggère de définir e^x même si l'exposant x n'est pas un entier rationnel par la formule :

$$e^x = exp(x)$$

C'est cette notation que nous utiliserons dans la suite de ce cours.

Puisque la fonction exponentielle est la fonction réciproque de Log, on a :

$$\begin{cases} e^{Log(x)} = x \\ Log(e^x) = x \end{cases}$$

En langage C, il existe une constante prédéfinie pour le nombre exponentiel de type double, qui peut s'avérer utile pour les calculs :

M_E

La fonction exponentielle existe en langage C :

double exp (double x)

Il est strictement recommandé d'utiliser cette fonction pré programmée plutôt que d'appliquer directement la fonction puissance au nombre e.

1.4 Fonction exponentielle généralisée

1.4.1 La fonction f(x) = 2^x

Nous sommes capables de donner un sens à l'expression 2^n où n est un élément de $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Par définition :

$$\begin{aligned} 2^n &= \overbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}^{\text{n fois}} \\ 2^0 &= 1 \\ 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \end{aligned}$$

Nous connaissons également le sens de l'expression de 2^p où p est un élément de $\mathbb{Z}$, ensembles des entiers positifs, négatifs ou nuls. Si p est négatif, on pose p = -n où n est un entier positif, et on a par définition :

$$2^p = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \qquad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \qquad \ldots$$

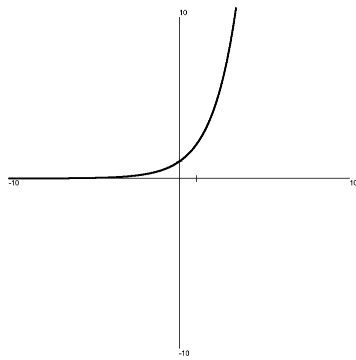

FIG. 1.3 – Fonction 2^x

Si l'exposant est un élément $\dfrac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}$, l'ensemble des fractions, nous pouvons donner un sens à l'expression $2^{\frac{p}{q}}$. Commençons par définir $2^{\frac{1}{n}}$ où n est un entier positif :

$$\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{n}} \text{ est équivalent à } x^n = 2 \\ 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \\ \text{On note : } 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2} \end{array}$$

Supposons maintenant que le nombre q est positif, ce qui ne restreint pas la généralité, on pose :

$$2^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{2}\right)^p$$
$$2^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^3$$

On étend alors la définition aux nombres réels, et on obtient un sens pour l'expression 2^x où x est un nombre réel quelconque. On pose :

$$2^x = e^{x.Log(2)}$$

1.4.2 La fonction f(x) = a^x, a>0

Soit a>0. On pose, pour x réel quelconque :

$$a^x = e^{x.Log(a)}$$

Remarquons que si a=e, la définition ci-dessus redonne bien e^x, puisque Log(e) = 1. Remarquons, d'après le signe strictement positif de la fonction exponentielle, que :

$$a^x > 0 \qquad \text{pour tout a>0,} \qquad \text{et pour tout x}$$

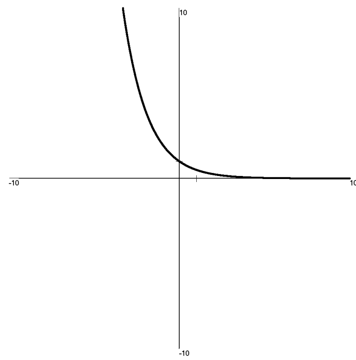

FIG. 1.4 – Fonction $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

D'autre part, on a :

$$1^x = e^{x.Log(1)} = e^0 = 1 \qquad \text{pour tout x}$$

Enfin, on a le formulaire suivant :

$$\begin{cases} Log(a^x) = x.Log(a) & (a > 0) \\ a^x.a^y = a^{x+y} & (a > 0) \\ (a^x)^y = a^{xy} & (a > 0) \\ (ab)^x = a^x.b^x & (a > 0, b > 0) \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x & (a > 0) \end{cases}$$

Les graphes des fonctions a^x ont l'allure générale présentées sur la figure 1.3 pour a>1 et sur la figure 1.4 pour a<1. Toutes ces courbes passent par le point (0,1).

Pour les fonctions exponentielles généralisées, on utilise la fonction pow du langage C :

```
double pow ( double a , double x )
```

Attention, car cette fonction n'est définie que pour des valeurs strictement positives de a.

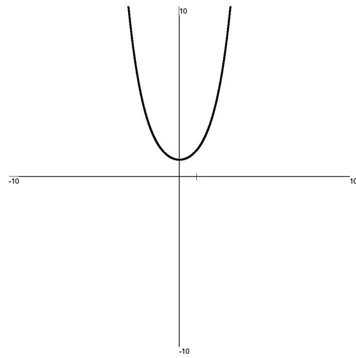

Fig. 1.5 – Fonction cosinus hyperbolique

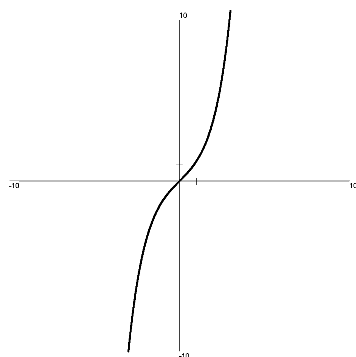

Fig. 1.6 – Fonction sinus hyperbolique

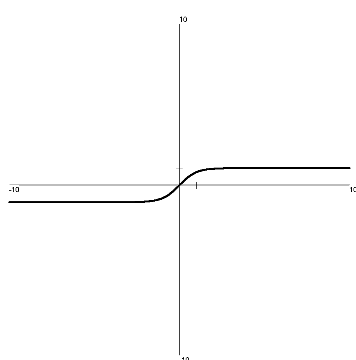

Fig. 1.7 – Fonction tangente hyperbolique

1.5 Fonctions hyperboliques

On définit pour tout réel x les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, par les formules :

$$\begin{cases} ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ th(x) = \dfrac{ch(x)}{sh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

Ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. La terminologie s'explique par la représentation paramétrique de l'hyperbole.

On a le formulaire suivant :

$$\begin{cases} ch(x) + sh(x) = e^x \\ ch(x) - sh(x) = e^{-x} \\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \end{cases}$$

D'autre part, le changement de signe donne les symétries suivantes :

$$\begin{cases} ch(-x) = ch(x) \\ sh(-x) = -sh(x) \\ th(-x) = -th(x) \end{cases}$$

Les graphes de ces fonctions sont donnés sur les figures 1.5 à 1.7.

Les fonctions hyperboliques existent en langage C :

double cosh (double x)

double sinh (double x)

double tanh (double x)

Ces fonctions sont définies pour tout x.

1.6 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques les plus connues sont les fonctions cosinus, sinus et tangente. Ce sont également des fonctions transcendantes. Rappelons-en la définition.

Considérons le cercle unité, c'est à dire de rayon égal à 1, centré autour de l'origine du plan, muni de deux axes orthogonaux Ox et Oy. Soit P un

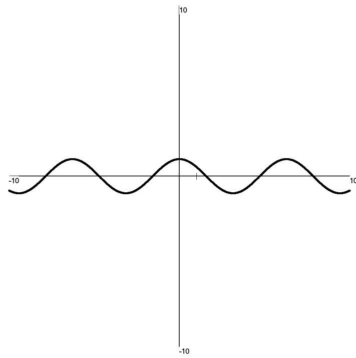

Fig. 1.8 – Fonction cosinus

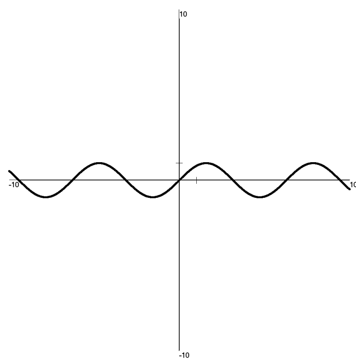

Fig. 1.9 – Fonction sinus

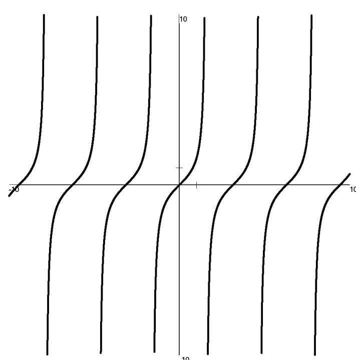

Fig. 1.10 – Fonction tangente

point du cercle, de coordonnées P(x,y). Soit θ l'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\overrightarrow{OP}$. On a, par définition :

$$x = cos(\theta) \qquad y = sin(\theta)$$

Un angle θ est entièrement caractérisé par son cosinus et son sinus. L'angle θ est compté en radians. Il varie à priori entre 0 et 2π (c'est à dire 360°). Mais on peut aussi, suivant la nécessité, lui attribuer d'autres valeurs équivalentes (au delà de 2π, valeurs négatives...). Par exemple, l'angle $3\pi/2$ est identique à l'angle $-\pi/2$. On dit que θ est déterminé à 2π près.

C'est ainsi que les fonctions cosinus et sinus sont déterminées sur l'intervalle $[0,2\pi]$, et reprennent les mêmes valeurs sur les intervalles translatés de longueur 2π, comme par exemple, $[-2\pi,0]$ ou $[2\pi,4\pi]$. On dit que ces fonctions sont des fonctions périodiques de période 2π. Ceci est illustré par les formules :

$$cos(\theta + 2\pi) = cos(\theta) \qquad sin(\theta + 2\pi) = sin(\theta)$$

On constate également ce phénomène sur le graphe des fonctions (voir figures 1.8 et 1.9), graphe qui se répète tous les intervalles de longueur 2π.

La fonction tangente est définie par :

$$tg(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$$

La fonction tangente est définie, sauf quand $\cos(\theta)$ s'annule, c'est à dire pour les angles de la forme $\frac{\pi}{2} + k.\pi$, où k est un entier quelconque. D'après les propriétés de périodicité des fonctions cosinus et sinus, on admettra que la fonction tangente est une fonction périodique, de période π (voir graphe de la fonction, figure 1.10).

Voici quelques valeurs prises par les fonctions cos, sin et tg qu'il est bon de connaître :

Angle en radians	Angle en degrés	cos	sin	tg
0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1	$+\infty$

Le graphe des fonctions cosinus, sinus et tangente est présenté sur les figures 1.8 à 1.10. Comme nous l'avons vu plus haut, ces graphes confirment bien que les fonctions sont périodiques de période :

Fonction	Période
Cosinus	2π
Sinus	2π
Tangente	π

On voit par ailleurs, ce qui découle des définitions, que les fonctions cosinus et sinus ont leurs valeurs comprises dans l'intervalle [-1,1], et que la fonction tangente prend toutes les valeurs de]-∞,+∞[.

Dans un repère Oxy, on considère un point P du cercle unité centré à l'origine. Soient ($\overrightarrow{e_x}$,$\overrightarrow{e_y}$) les vecteurs unitaires portés par les axes Ox et Oy. Alors on a la formule :

$$\overrightarrow{OP} = cos(\theta).\overrightarrow{e_x} + sin(\theta).\overrightarrow{e_y}$$

Nous laissons le soin au lecteur de montrer cette formule, en rappelant que les coordonnées de ces vecteurs sont données par :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, comme le point P est sur le cercle unité, la distance entre l'origine et P est égale à 1 :

$$d(O,P) = ||\overrightarrow{OP}|| = 1$$

On en déduit la formule :

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

qui est valable, quelque soit l'angle θ. C'est une formule importante, puisqu'elle permet notamment d'obtenir la valeur de sinus en fonction de cosinus (au signe près) :

$$sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

Prenons maintenant un point M situé à une distance r de l'origine (placé sur le cercle de rayon r) :

$$d(O,M) = ||\overrightarrow{OM}|| = r$$

Soit θ l'angle entre l'axe Ox et le rayon OM, on obtient les coordonnées du point M par :

$$M = (r.cos(\theta), r.sin(\theta))$$

Et, on a la formule vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OM} = r.cos(\theta).\overrightarrow{e_x} + r.sin(\theta).\overrightarrow{e_y}$$

Nous donnons ci-après une série de formules utiles pour les calculs. Nous désignons par a et b deux angles quelconques, exprimés en radians.

Formule fondamentale :

$$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$$

Formules du signe :

$$\begin{cases} cos(-a) = cos(a) \\ sin(-a) = -sin(a) \\ tg(-a) = -tg(a) \end{cases}$$

Formules de symétrie :

$$\begin{cases} cos(a) = sin(\frac{\pi}{2} - a) \\ sin(a) = cos(\frac{\pi}{2} - a) \end{cases}$$

Formules d'addition :

$$\begin{cases} cos(a + b) = cos(a).cos(b) - sin(a).sin(b) \\ sin(a + b) = sin(a).cos(b) + cos(a).sin(b) \end{cases}$$

Formules de soustraction :

$$\begin{cases} cos(a - b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b) \\ sin(a - b) = sin(a).cos(b) - cos(a).sin(b) \end{cases}$$

Formules du double de l'angle :

$$\begin{cases} cos(2a) = 2.cos^2(a) - 1 = 1 - 2.sin^2(a) \\ sin(2a) = 2.sin(a).cos(a) \end{cases}$$

En langage C, il existe une constante prédéfinie de type double qui peut s'avérer utile pour les calculs :

M_PI

Les fonctions cosinus, sinus, tangente existent en langage C :

double cos (double x)

double sin (double x)

double tan (double x)

L'angle x doit être exprimé en radians. Ces fonctions sont définies pour tout x, sauf la fonction tangente qui n'est pas définie pour les angles de la forme $\frac{\pi}{2}$ + k.π, où k est un entier quelconque.

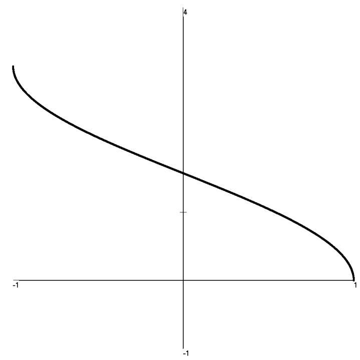

Fig. 1.11 – Fonction arc-cosinus

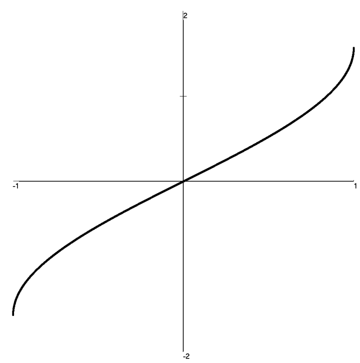

Fig. 1.12 – Fonction arc-sinus

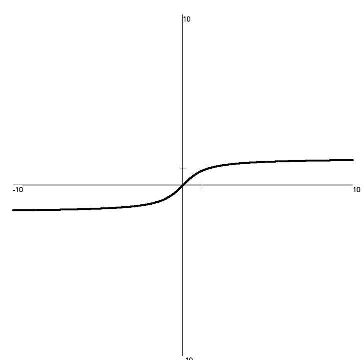

Fig. 1.13 – Fonction arc-tangente

1.7 Fonctions trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses sont les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Elles donnent la valeur de l'angle correspondant aux valeurs définies par les fonctions trigonométriques :

$$arccos(x) = \theta \qquad \text{équivaut à} \qquad x = cos(\theta)$$

$$arcsin(x) = \theta \qquad \text{équivaut à} \qquad x = sin(\theta)$$

$$arctan(x) = \theta \qquad \text{équivaut à} \qquad x = tan(\theta)$$

Comme cette affectation n'est pas unique, une valeur principale est affectée à une fonction trigonométrique inverse. On donne ainsi le domaine de définition et l'image de ces fonctions :

Fonction f(x)	D_f	Im(f)
arccos(x)	[-1,1]	[0,π]
arcsin(x)	[-1,1]	[-$\frac{\pi}{2}$,+$\frac{\pi}{2}$]
arctan(x)	]-∞,+∞[	]-$\frac{\pi}{2}$,+$\frac{\pi}{2}$[

Le graphe de ces fonctions est représenté sur les figures 1.11 à 1.13.

Ces fonctions existent en langage C :

double acos (double x)

double asin (double x)

double atan (double x)

Les fonctions acos et asin ne sont définies que pour les x qui vérifient :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Tandis que la fonction atan est définie pour tout x. Ces fonctions renvoient la valeur de l'angle en radians.

Il existe une autre fonction arc-tangente à deux arguments qui renvoie un angle θ compris entre :

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

car elle tient compte du quadrant dans lequel se situe le point :

double atan2 (double y , double x)

Les arguments sont les coordonnées (x,y) du point P en ordre inversé. Il est interdit que ces deux valeurs soient toutes deux nulles. La valeur renvoyée est celle de l'angle entre l'axe Ox et le rayon vecteur $\overrightarrow{OP}$.