EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours104
Systèmes de coordonnées

Dominique Neveu

Année 2010-2011

Table des matières

Introduction

L'étude des transformations de coordonnées admet des applications importantes en CAO et dessin sur ordinateur. Les transformations de coordonnées en dimension deux et en dimension trois sont des bases mathématiques importantes pour les programmes graphiques interactifs.

Les différents systèmes de coordonnées jouent un rôle fondamental dans de nombreuses disciplines, notamment en physique et en mécanique. Ces systèmes de coordonnées permettent de simplifier considérablement les calculs lorsque l'on traite des problèmes à symétrie particulière comme les symétries cylindriques ou sphériques. On les utilise donc également largement en informatique graphique.

En coordonnées cartésiennes, lorsque l'on maintient une coordonnées fixe, on obtient un plan. Dans d'autres systèmes de coordonnées, maintenir une coordonnée fixe permet de décrire des surfaces plus complexes comme le cylindre, la sphère, le cône... C'est un des intérêts majeurs de ces systèmes de coordonnées différents.

En informatique graphique, on utilise plusieurs systèmes de coordonnées (système de coordonnées local, du monde, de référence de vue...). Il est donc indispensable de pouvoir passer avec aisance d'un système à l'autre.

Résumé du cours

Dans le plan, les types de systèmes de coordonnées les plus couramment utilisés sont les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires. On choisit l'un ou l'autre système suivant la géométrie du problème que l'on considère. On donne les formules de conversion d'un système dans un autre. Ensuite, on s'intéresse à l'équation de quelques courbes du plan.

Ce cours présente ensuite, dans l'espace de dimension trois, trois systèmes de coordonnées principaux : les coordonnées cartésiennes, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

On donne ensuite les formules de conversion avec les coordonnées cartésiennes. On donne l'équation de courbes et surfaces de l'espace dans ces différents systèmes de coordonnées. La surface qui admet une équation très simple en coordonnées cylindriques est le cylindre. Des surfaces qui admettent des équations très simples en coordonnées sphériques sont notamment la sphère et le cône.

Chapitre 1

Systèmes de coordonnées dans le plan

1.1 Base de vecteurs

Pour chacun des systèmes de coordonnées du plan que nous décrivons dans ce chapitre, nous donnons la base de vecteurs correspondante. Dans le plan, une base est un ensemble de deux vecteurs élémentaires qui permettent de repérer aisément tous les vecteurs du plan. Cette base est généralement orthonormée, c'est à dire que les vecteurs qui la composent sont orthogonaux entre eux et qu'ils sont de norme égale à 1. Si B = ($\overrightarrow{e_1}$,$\overrightarrow{e_2}$) est une base orthonormée du plan, alors :

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 0 \qquad \|\overrightarrow{e_1}\| = 1 \qquad \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$$

1.2 Coordonnées cartésiennes

Le plan est muni d'un repère Oxy avec une origine O et deux axes de coordonnées orthogonaux Ox et Oy. Dans ce repère, un point P admet deux coordonnées : l'abscisse x (suivant l'axe horizontal) et l'ordonnée y (suivant l'axe vertical). On note P(x,y) le point P (voir figure 1.1), l'abscisse x est toujours donnée en premier.

Les vecteurs de la base associée au repère de coordonnées cartésiennes, notés $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont des vecteurs unitaires portés par les axes de coordonnées (voir figure 1.1). Ils ne dépendent pas du point considéré.

1.3 Coordonnées polaires

Le plan est muni d'un repère Oxy avec une origine O et deux axes de coordonnées orthogonaux Ox et Oy. Dans ce repère, un point P admet deux

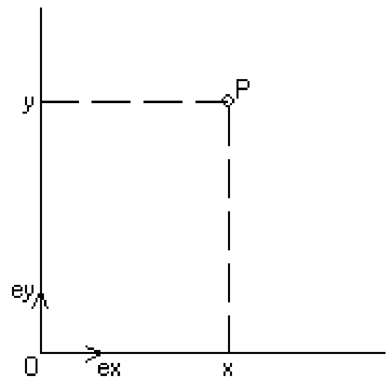

FIG. 1.1 – Coordonnées cartésiennes du point P

coordonnées polaires : le rayon r qui est la distance du point à l'origine et l'angle polaire θ qui est l'angle entre l'axe des abscisses Ox et le rayon OP. On note P(r,θ) le point P (voir figure 1.2). Le rayon r est positif ou nul. L'angle polaire θ varie entre 0 et 2π. Il est compté positivement de façon croissante dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'angle polaire est généralement exprimé en radians.

Les vecteurs de la base associée au repère de coordonnées polaires, no-

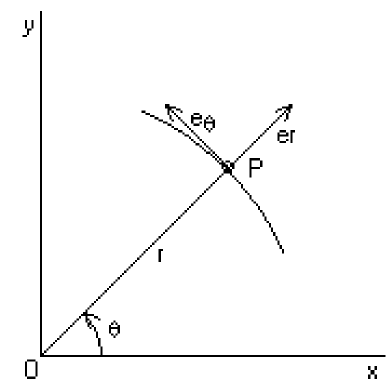

FIG. 1.2 – Coordonnées polaires du point P

tés $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ sont des vecteurs unitaires portés par le rayon vecteur OP, et la direction obtenue par rotation de $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 1.2). Ils dépendent du point considéré.

Précisons les coordonnées des vecteurs de la base B = ($\overrightarrow{e_r}$,$\overrightarrow{e_\theta}$) :

$$\overrightarrow{e_r} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad et \qquad \overrightarrow{e_\theta} = \begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le lecteur vérifiera que la base B est bien une base orthonormée, c'est à dire que l'on a :

$$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}) = 0 \qquad \|\overrightarrow{e_r}\| = 1 \qquad \|\overrightarrow{e_\theta}\| = 1$$

Dans cette base B, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OP} = r.\overrightarrow{e_r}$$

Conversion entre systèmes de coordonnées

Soit un point P de coordonnées polaires (r,θ), alors ses coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} x = r.cos(\theta) \\ y = r.sin(\theta) \end{cases}$$

Inversement, si le point P est donné par ses coordonnées cartésiennes (x,y), on en déduit ses coordonnées polaires par inversion. Le rayon r est donné par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'angle θ est entièrement déterminé par son cosinus et son sinus qui sont égaux à :

$$\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{x}{r} \\ \\ sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Nous rappelons dans le paragraphe suivant comment calculer un angle, connaissant son cosinus et son sinus.

Rappel : Fonction tangente inverse

Un angle θ variant dans l'intervalle [0,2π[est entièrement déterminé par son cosinus et son sinus. Par conséquent, si on connaît le cosinus et le sinus d'un angle, on peut lui associer un angle unique de l'intervalle [0,2π[. C'est ainsi que l'on définit la fonction tangente inverse, notée arctg2(y,x) où x et y sont le cosinus et le sinus de l'angle considéré. En langage C, la fonction est prévue et s'appelle atan2. Elle renvoie un angle dans l'intervalle]-π,π]. Lorsque l'angle obtenu est négatif, on additionnera 2π de façon à se ramener à l'intervalle [0,2π[.

Exemple 1 *Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes*
Pour $r = 2$ *et* $\theta = \frac{\pi}{6}$*, on a :*

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad et \qquad sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\begin{cases} x = r.cos(\theta) = \sqrt{3} \\ y = r.sin(\theta) = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 *Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires*
Pour $x = 2$ *et* $y = 2$*, on a :*

$$\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.\sqrt{2} \\ cos(\theta) = \dfrac{2}{2.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = \dfrac{2}{2.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

1.4 Courbes dans le plan

1.4.1 Equation d'une droite

La forme générale de l'équation d'une droite en coordonnées cartésiennes est la suivante :

$$ax + by + c = 0$$

La représentation paramétrique d'une droite s'écrit à l'aide des coordonnées d'un de ses points A et de son vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda.u_x \\ y = y_A + \lambda.u_y \end{cases} \qquad ou \qquad A(x_A, y_A) \qquad et \qquad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

où λ est le paramètre qui varie.

1.4.2 Equation d'un cercle

L'équation en coordonnées cartésiennes d'un cercle de rayon R et de centre l'origine s'écrit :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La représentation paramétrique du cercle s'écrit :

$$\begin{cases} x = R.cos(\theta) \\ y = R.sin(\theta) \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

où θ est l'angle entre l'axe Ox et le rayon OP où P est le point de coordonnées (x,y). L'équation en coordonnées polaires s'écrit simplement :

$$r = R \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Chapitre 2

Systèmes de coordonnées dans l'espace

2.1 Base de vecteurs

Pour chacun des systèmes de coordonnées de l'espace que nous décrivons dans ce chapitre, nous donnons la base de vecteurs correspondante. Dans l'espace, une base est un ensemble de trois vecteurs élémentaires qui permettent de repérer aisément tous les vecteurs du plan. Cette base est généralement orthonormée, c'est à dire que les vecteurs qui la composent sont orthogonaux deux à deux et qu'ils sont de norme égale à 1. Si B = $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée de l'espace, alors :

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) = 0 \quad (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}) = 0 \quad (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) = 0 \quad \|\overrightarrow{e_1}\| = 1 \quad \|\overrightarrow{e_2}\| = 1 \quad \|\overrightarrow{e_3}\| = 1$$

2.2 Coordonnées cartésiennes

L'espace est muni d'un repère Oxyz avec une origine O et trois axes de coordonnées deux à deux orthogonaux Ox, Oy et Oz. Dans ce repère, un point P admet trois coordonnées : l'abscisse x (suivant l'axe Ox dans le plan horizontal), l'ordonnée y (suivant l'axe Oy dans le plan horizontal) et la cote z (suivant l'axe vertical Oz). On note P(x,y,z) le point P (voir figure 2.1), les coordonnées x et y sont toujours données en premier, la cote z en dernier.

La distance entre le point P et l'origine est donnée par :

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les vecteurs de la base associée au repère de coordonnées cartésiennes, notés $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont des vecteurs unitaires portés par les axes de coordonnées (voir figure 2.2). Ils ne dépendent pas du point considéré. Dans cette base,

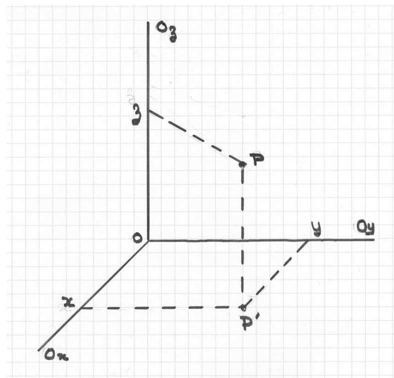

Fig. 2.1 – Coordonnées cartésiennes du point P

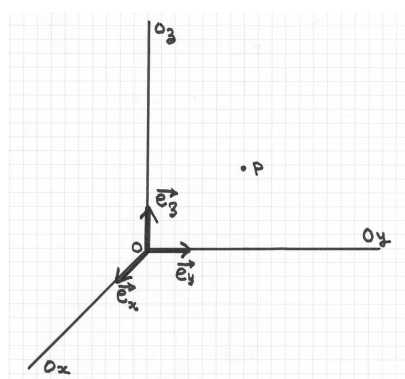

Fig. 2.2 – Base des vecteurs en coordonnées cartésiennes

le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

2.3 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont importantes pour les problèmes à symétrie cylindrique en dimension trois, c'est à dire avec une symétrie de rotation autour de l'axe Oz.

L'espace est muni d'un repère Oxyz avec une origine O et trois axes de coordonnées orthogonaux Ox, Oy et Oz. Dans ce repère, un point P admet trois coordonnées cylindriques (r,θ,z) : les deux coordonnées polaires (r,θ) dans le plan Oxy et la cote z suivant l'axe vertical Oz. On note P(r,θ,z) le point P (voir figure 2.3). Le rayon r est positif ou nul. L'angle polaire θ varie entre 0 et 2π, soit 360°. La cote z peut prendre toutes les valeurs.

La distance entre le point P et l'origine est donnée par :

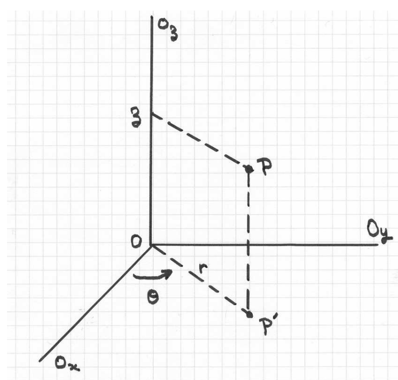

FIG. 2.3 – Coordonnées cylindriques du point P

$$OP = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Les vecteurs de la base associée au repère de coordonnées cylindriques sont, d'une part, les vecteurs de la base de coordonnées polaires $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, et le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ identique à celui du repère des coordonnées cartésiennes (voir figure 2.4). Ils dépendent du point considéré.

Dans la base de coordonnées cylindriques, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

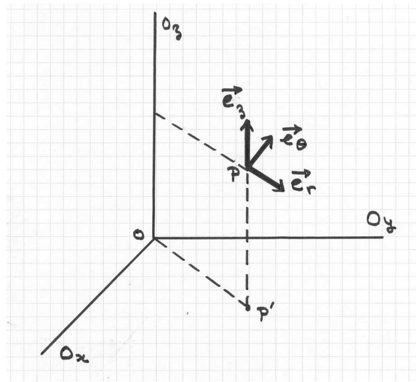

FIG. 2.4 – Base des vecteurs en coordonnées cylindriques

Conversion entre systèmes de coordonnées

Les relations entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

D'autre part, pour effectuer le passage inverse, et sachant qu'un angle θ est entièrement déterminé par son cosinus et son sinus, on a :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ cos(\theta) = \dfrac{x}{r}, \qquad sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{cases}$$

Nous avons déjà rappelé dans un paragraphe de ce document relatif aux coordonnées polaires du plan comment calculer un angle, connaissant son cosinus et son sinus.

2.4 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont importantes pour les problèmes à symétrie sphérique en dimension trois. Par exemple, en coordonnées sphériques, l'écriture de l'équation d'une sphère centrée à l'origine est particulièrement simple.

L'espace est muni d'un repère Oxyz avec une origine O et trois axes de coordonnées orthogonaux Ox, Oy et Oz. Dans ce repère, un point P admet trois coordonnées sphériques :

- la distance ρ du point P à l'origine. Cette coordonnée ρ est positive ou nulle.

- l'angle θ entre l'axe Ox et la projection OP' de OP sur le plan Oxy. Cet angle est aussi appelé longitude géographique. Il est identique à la coordonnée cylindrique θ, et varie entre 0 et 2π.
- l'angle φ entre la projection OP' de OP sur le plan Oxy et OP. Cet angle est aussi appelé latitude géographique. L'angle φ=0 correspond à l'équateur. Cette coordonnée varie entre -$\pi/2$ et $\pi/2$.

Les coordonnées (ρ,θ,φ) d'un point P sont représentées sur la figure 2.5. Les domaines de variations des coordonnées sont donc les suivants :

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$$

La distance entre le point P et l'origine est donnée par :

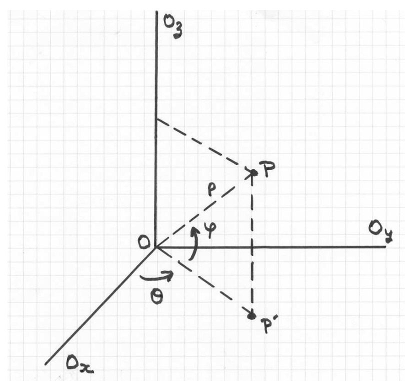

FIG. 2.5 – Coordonnées sphériques du point P

$$OP = \rho$$

Les vecteurs de la base associée au repère de coordonnées sphériques, notés $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ sont les suivants :
- le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ est le vecteur unitaire porté par le rayon vecteur OP.
- le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est identique à celui des coordonnées polaires ou cylindriques.
- le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est obtenu par rotation de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ "vers le haut". C'est à dire que cette rotation s'effectue dans le plan déterminé par OP et l'axe vertical Oz.

Cette base de vecteurs dépend du point considéré (voir figure 2.6).

Dans la base de coordonnées sphériques, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'exprime de la

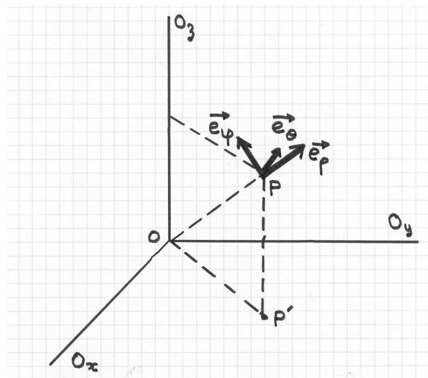

FIG. 2.6 – Base des vecteurs en coordonnées sphériques

façon simple suivante :

$$\overrightarrow{OP} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho}$$

Conversion entre systèmes de coordonnées

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'on a l'égalité :

$$\overrightarrow{OP} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho}$$

Nous allons alors utiliser le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ des coordonnées polaires ou cylindriques pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$. On a :

$$\overrightarrow{e_\rho} = cos(\varphi)\, \overrightarrow{e_r} + sin(\varphi)\, \overrightarrow{e_z}$$

Rappelons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{e_r} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$:

$$\overrightarrow{e_\rho} = \begin{pmatrix} cos(\varphi)cos(\theta) \\ cos(\varphi)sin(\theta) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les coordonnées cartésiennes du point P en fonction de ses coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = \rho\, cos(\varphi)cos(\theta) \\ y = \rho\, cos(\varphi)sin(\theta) \\ z = \rho\, sin(\varphi) \end{cases}$$

Procédons par étapes pour effectuer le passage inverse. D'abord, la coordonnée ρ est la distance du point P à l'origine. On a donc :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour poursuivre, utilisons la coordonnée cylindrique r afin de simplifier les calculs. La coordonnée cylindrique r s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'angle θ étant entièrement déterminé par son cosinus et son sinus, il suffit alors d'écrire :

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

Soit encore :

$$cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Enfin, l'angle φ, compris dans l'intervalle [-π/2,π/2] est entièrement déterminé par son sinus. On a donc simplement :

$$sin(\varphi) = \frac{z}{\rho}$$

Soit, finalement :

$$sin(\varphi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Il suffit alors d'utiliser la fonction sinus inverse, notée asin pour connaître l'angle φ compris dans l'intervalle [-π/2,π/2]. On a :

$$asin(sin(\varphi)) = \varphi$$

La fonction sinus inverse existe dans les langages de programmation, notamment en langage C.

2.5 Courbes et surfaces dans l'espace

2.5.1 Equation d'une droite

Une droite dans l'espace est définie par un système de deux équations cartésiennes vérifiées par les points de la droite :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Ces équations traduisent le fait que la droite est à l'intersection de deux plans.

La représentation paramétrique d'une droite s'écrit à l'aide des coordonnées d'un de ses points A et de son vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda.u_x \\ y = y_A + \lambda.u_y \\ z = z_A + \lambda.u_z \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad A = (x_A, y_A, z_A), \qquad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

où λ est le paramètre qui varie.

2.5.2 Equation d'un plan

La forme générale de l'équation d'un plan en coordonnées cartésiennes est la suivante :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c, d sont quatre constantes.
Soit A un point du plan de coordonnées (x_A,y_A,z_A), l'équation peut alors s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Nous allons donner une interprétation de cette équation. Soient $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ les vecteurs de coordonnées données par :

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

alors l'équation du plan exprime que $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont orthogonaux (de produit scalaire nul). Ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal au plan considéré. On remarque qu'il s'exprime simplement en fonction des coefficients de l'équation du plan.

Si l'on connaît deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan et un point A par lequel passe le point, on peut en donner une représentation paramétrique. Nous adopterons les notations suivantes pour les coordonnées des vecteurs et du point :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad A = (x_A, y_A, z_A)$$

On obtient alors la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_A + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_A + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases}$$

où λ et μ sont les deux paramètres qui varient.

2.5.3 Equation d'un cylindre

L'équation en coordonnées cartésiennes d'un cylindre de section circulaire et d'axe vertical porté par Oz s'écrit :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

où R est le rayon du cylindre.

L'équation en coordonnées cylindriques d'un cylindre de section circulaire et d'axe vertical porté par Oz s'écrit simplement sous la forme suivante :

$$r = R$$

2.5.4 Equation d'une sphère

L'équation en coordonnées cartésiennes d'une sphère centrée à l'origine s'écrit :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

où R est le rayon de la sphère. Si la sphère est centrée au point A de coordonnées (x_A,y_A,z_A), l'équation devient :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$$

L'équation en coordonnées sphériques d'une sphère centrée à l'origine s'écrit simplement sous la forme suivante :

$$\rho = R$$

où R est le rayon de la sphère.

2.5.5 Equation d'un cône

En coordonnées cartésiennes, l'équation du cône est la suivante :

$$x^2 + y^2 - z^2/tg^2(\varphi_0) = 0$$

où φ_0 est l'angle constant entre la surface du cône et le plan Oxy (angle qui peut être mesuré, par exemple, dans le plan Oxz) et $tg^2(\varphi_0)$ est la tangente de l'angle élevée au carré.

L'équation en coordonnées sphériques d'un cône dont le sommet est l'origine s'écrit simplement sous la forme suivante :

$$\varphi = \varphi_0$$

2.5.6 Equation d'un tore

Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle (C) autour d'une droite (D) de son plan ; c'est donc un tube de diamètre constant et d'âme un cercle. Soit R le rayon majeur du torre, a le rayon mineur. L'équation cartésienne du tore est donnée par :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 = 4R^2.(x^2 + y^2)$$

En coordonnées cylindriques, cette équation devient :

$$(r^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 = 4R^2.r^2$$