EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours106
Suites numériques

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

1 Suites numériques **3**
1.1 Notions initiales . . . 3
1.1.1 Définition . . . 3
1.1.2 Monotonie . . . 4
1.1.3 Suites bornées . . . 7
1.2 Limite d'une suite . . . 7
1.2.1 Limite finie . . . 7
1.2.2 Limite infinie . . . 10
1.2.3 Unicité de la limite . . . 10
1.3 Comportement d'une suite . . . 10
1.3.1 Convergence . . . 10
1.3.2 Suites géométriques . . . 11
1.3.3 Propriétés des valeurs limites . . . 11
1.3.4 Formes indéterminées . . . 13
1.4 Critères de convergence . . . 13
1.4.1 Critère de monotonie . . . 13
1.4.2 Critère de comparaison . . . 13
1.5 Valeur d'adhérence d'une suite . . . 13
1.5.1 Sous-suite . . . 13
1.5.2 Valeur d'adhérence . . . 14
1.6 Etude d'une suite par ordinateur . . . 14
1.6.1 Suite bornée . . . 14
1.6.2 Schéma synthétique . . . 15
1.6.3 Schémas détaillés . . . 15

Introduction

La notion de suite est fondamentale pour la branche des Mathématiques appelée Analyse. Le principal outil attaché aux suites est celui de limite d'une suite. Sans cette notion, il serait impossible d'étudier la continuité ou la dérivabilité de fonctions. C'est également grâce à cette notion que l'on introduit l'intégrale des fonctions.

Par ailleurs, la notion de suite (et de série que nous n'abordons pas ici) joue un rôle important en informatique car elle permet, par exemple, de calculer à peu de frais la plupart des nombres transcendants et fonctions transcendantes couramment utilisés en calcul.

Résumé du cours

Ce chapitre est destiné à présenter les principales notions relatives aux suites numériques.

On définit d'abord la notion de suite numérique et on en décrit les principales propriétés directement remarquables. On dit alors dans quelles conditions une suite admet une limite finie et on s'intéresse à de telles suites dites convergentes. On donne les critères les plus célèbres qui permettent de déterminer si une suite est convergente ou divergente.

On introduit la notion de valeur d'adhérence d'une suite qui se présente comme limite de sous-suite extraite de la suite principale. On cite quelques propriétés relatives aux valeurs d'adhérences.

Ensuite, on étudie le comportement d'une suite définie par récurrence à l'aide de graphiques fournis par l'ordinateur.

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Notions initiales

1.1.1 Définition

Définition 1 *Toute fonction de* $\mathbb{N}^*$ *dans un ensemble* E *est appelée suite. On la note* $(u_1, u_2, u_3 \ldots)$*, ou plus simplement* (u_n)*.*

On peut avoir des suites de nombres, de points, de fonctions, de matrices ou d'autres objets mathématiques. Ce chapitre traite des suites numériques réelles, c'est à dire des suites de nombres réels pour lesquelles $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

Exemple 1 *Voici quelques exemples de suites numériques :*

$$(u_n) = (1,2,3,\ldots) \qquad u_n = n$$

$$(u_n) = (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\ldots) \qquad u_n = \tfrac{1}{n}$$

$$(u_n) = (\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{5},\ldots) \qquad u_n = \tfrac{n}{n+1}$$

Une suite peut être définie par son terme générique ou par récurrence, c'est à dire que le terme générique est défini en fonction des termes qui précèdent (voir exemples ci-après).

Exemple 2 (Définition par terme générique) *Voici quelques exemples de telles définitions de suites :*

Carré des nombres entiers : 1,4,9,16,...	$u_n = n^2$
Factorielle : 1,2,6,24,120,...	$u_n = n!$
Suite constante	$u_n = c$

Exemple 3 (Définition par récurrence) *Voici quelques exemples de telles définitions de suites :*

Nombres de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,...	$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
Suite arithmétique	$u_n = u_{n-1} + d$
Suite géométrique	$u_n = u_{n-1} \times q$

Dans les paragraphes suivants, on s'intéresse au comportement des suites. On notera que le comportement d'une suite ne change pas lorsqu'on modifie ses premiers termes, pourvu que ces modifications n'affectent que des termes jusqu'à un rang fini (on peut enlever des termes, en rajouter, en modifier ou en permuter).

1.1.2 Monotonie

Définition 2 *On définit les comportements suivants :*

(u_n) est constante si	$u_n = u_{n+1}$	*à partir d'un certain rang*
(u_n) est croissante si	$u_n \leq u_{n+1}$	*à partir d'un certain rang*
(u_n) est strictement croissante si	$u_n < u_{n+1}$	*à partir d'un certain rang*
(u_n) est décroissante si	$u_n \geq u_{n+1}$	*à partir d'un certain rang*
(u_n) est strictement décroissante si	$u_n > u_{n+1}$	*à partir d'un certain rang*

On définit également les notions de monotonie et de stricte monotonie :

Définition 3 *(u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
(u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 4 *Voici deux exemples de stricte monotonie :*
La suite $u_n = n^2$ est strictement croissante.
La suite $u_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante.

Exemple 5 *Nous voyons sur la figure 1.1 les premiers termes d'une suite arithmétique croissante. Sur la figure 1.2 les premiers termes d'une suite arithmétique décroissante.*

Exemple 6 *Nous voyons sur la figure 1.3 les premiers termes d'une suite géométrique croissante. Sur la figure 1.4 les premiers termes d'une suite géométrique décroissante.*

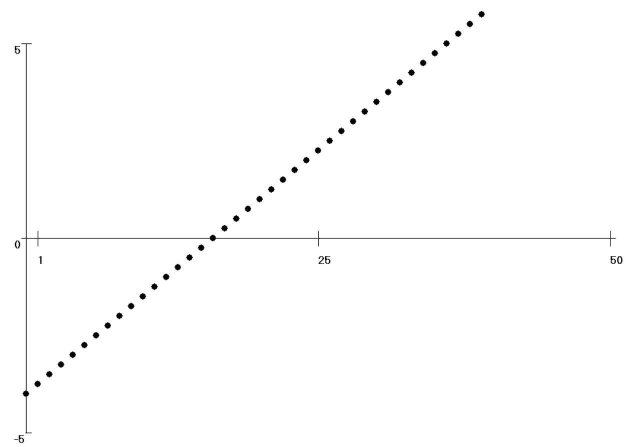

FIG. 1.1 – Suite arithmétique croissante $u_n = u_{n-1} + d$, $u_0 = -4$, $d = 0.25$

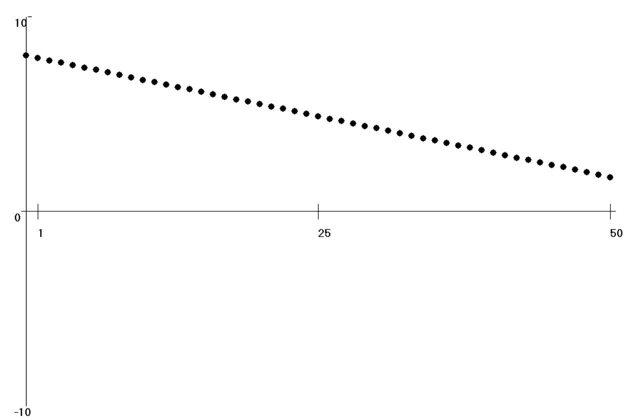

FIG. 1.2 – Suite arithmétique décroissante $u_n = u_{n-1} + d$, $u_0 = 8$, $d = -0.125$

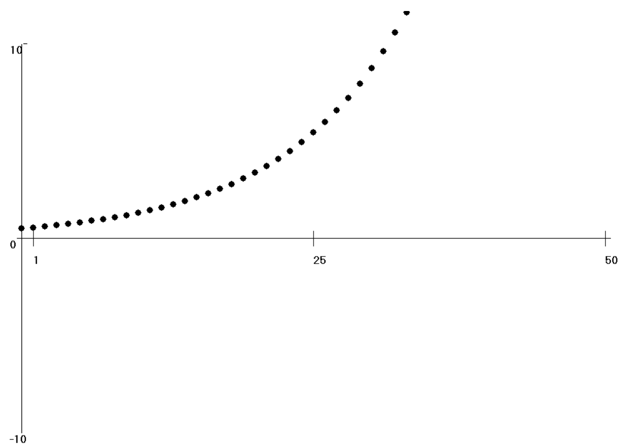

Fig. 1.3 – Suite géométrique croissante $u_n = u_{n-1} \times$q, $\mathrm{u}_0 = 0.5$, $q = 1.1$

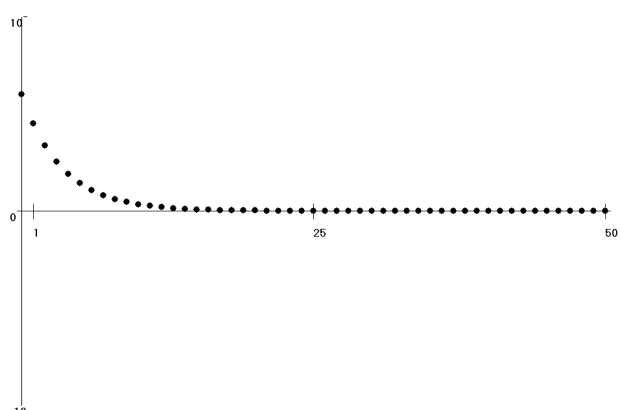

Fig. 1.4 – Suite géométrique décroissante $u_n = u_{n-1} \times$q, $\mathrm{u}_0 = 6$, $q = 0.75$

1.1.3 Suites bornées

Définition 4 *On définit les comportements suivants :*
(u_n) est majorée s'il existe M tel que $\quad u_n \leq M \quad$ à partir d'un certain rang
(u_n) est minorée s'il existe m tel que $\quad u_n \geq m \quad$ à partir d'un certain rang
(u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 7 *La suite $u_n = cos(n)$ est bornée. En effet, on a toujours :*

$$-1 \leq cos(n) \leq 1$$

Le nombre qui minore est m=-1 et le nombre qui majore est M=1.
Les premiers termes de cette suite sont représentés sur la figure 1.5.

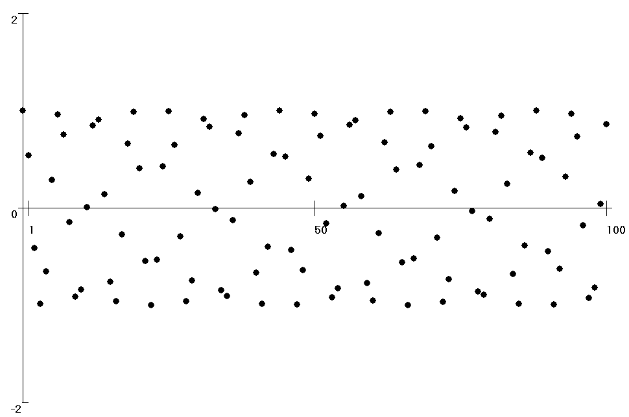

FIG. 1.5 – Suite $u_n = cos(n)$

1.2 Limite d'une suite

1.2.1 Limite finie

Parmi les suites, il y en a certaines qui se rapprochent de plus en plus d'un nombre bien défini l lorsque n augmente. On dit qu'elles tendent vers ce nombre l lorsque n tend vers l'infini. On note :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l$$

Pour le lecteur intéressé, la définition mathématique rigoureuse est la suivante :

Définition 5 *La suite (u_n) converge vers une limite réelle l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N.*

Ceci peut encore s'écrire de la façon ci-après. Soit]l-ϵ,l+ϵ[un intervalle ouvert contenant l où ϵ est un nombre fixé arbitrairement petit. On dira que la suite (u_n) converge vers l si on peut trouver un rang N(ϵ) à partir duquel on a :

$$\text{si} \quad n \geq N(\epsilon) \quad \text{alors} \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

Exemple 8 *La suite $u_n = \frac{1}{n}$ admet pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini :*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Exemple 9 *La suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ admet pour limite 1 lorsque n tend vers l'infini :*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1$$

Exemple 10 *La suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ admet pour limite le nombre exponentiel lorsque n tend vers l'infini :*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = e$$

Cette convergence est illustrée sur la figure 1.6 où sont représentés les premiers termes de la suite.

Exemple 11 *La suite définie par récurrence suivante :*

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{r}{u_{n-1}}\right)$$

admet pour limite $\sqrt{r}$. Cette convergence est illustrée sur la figure 1.7 où sont représentés les premiers termes de la suite avec r=2. On constate que la convergence est très rapide.

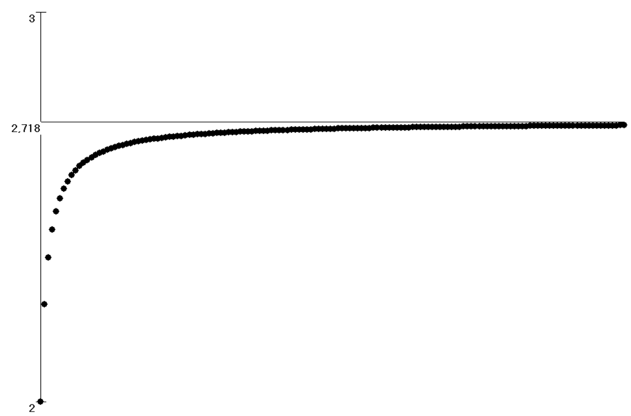

FIG. 1.6 – Suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

FIG. 1.7 – Suite $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right)$

1.2.2 Limite infinie

Certaines suites prennent des valeurs de plus en plus élevées. On dit qu'elles tendent vers plus l'infini (ou vers moins l'infini). On parle alors de limite infinie.

Définition 6 *La suite (u_n) converge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N. On note $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.*

On définit de la même manière une suite qui tend vers $-\infty$.

Exemple 12 *La suite $(u_n) = (1,2,3,\ldots)$ définie par $u_n = n$ vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 13 *La suite $(u_n) = (-2,-4,-6,\ldots)$ définie par $u_n = -2n$ vérifie :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

1.2.3 Unicité de la limite

Propriété 1 *Si une suite admet une limite, cette limite est unique.*

Il est évidemment impossible en général de montrer à l'aide d'un ordinateur qu'une suite admet une limite. Par contre, celui-ci peut nous aider à prévoir certains résultats (qu'il faut confirmer rigoureusement) ou à calculer des valeurs approchées de limites.

1.3 Comportement d'une suite

1.3.1 Convergence

En fait, pour une suite numérique (u_n), il y a quatre possibilités :

1. (u_n) converge vers un réel fini l,
2. (u_n) admet pour limite $+\infty$,
3. (u_n) admet pour limite $-\infty$,
4. (u_n) n'admet pas de limite.

Lorsque la suite admet une limite finie, on dit qu'elle est **convergente**. Lorsque la suite n'admet pas de limite finie, on dit que la suite est **divergente**.

1.3.2 Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite qui peut être définie de la façon suivante :

$$u_n = u_{n-1} \times q$$

où q est une constante fixée appelée raison de la suite. On en déduit que l'on a la formule suivante :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Pour étudier le comportement d'une suite géométrique, on dispose du théorème suivant :

Théorème 1 *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle. On a les quatre possibilités suivantes :*

$$\begin{array}{lll} si\ |q| < 1 & alors & (q^n) \rightarrow 0 \\ si\ q = 1 & alors & (q^n) \rightarrow 1 \\ si\ q > 1 & alors & (q^n) \rightarrow +\infty \\ si\ q \leq -1 & alors & (q^n)\ \text{n'admet pas de limite} \end{array}$$

Exemple 14 *Voici quelques exemples de suites géométriques :*

$$\begin{array}{ll} u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \\ u_n = 1^n & \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \\ u_n = 2^n & \lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \\ u_n = (-1)^n & (u_n)\ \text{n'admet pas de limite} \end{array}$$

Une suite géométrique de raison q négative est dite suite géométrique alternée. Si q>-1 alors la suite est convergente sinon elle diverge. Ceci est illustré sur les figures 1.8 et 1.9.

1.3.3 Propriétés des valeurs limites

Souvent, on parvient à trouver les limites de certaines suites déjà étudiées. Pour cela on peut utiliser les propriétés ci-après.

Propriété 2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers des limites finies. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n . v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \ . \lim_{n\to\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} \qquad si \lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$$

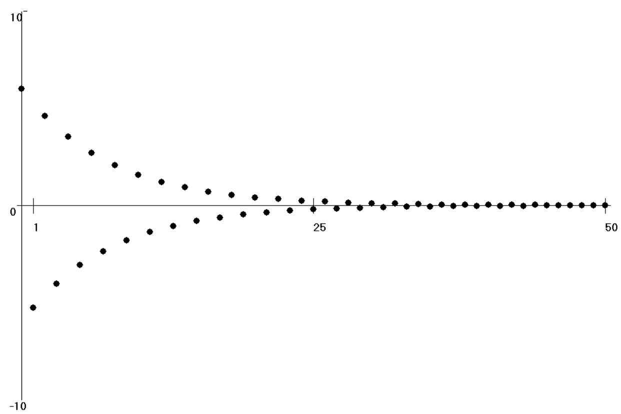

Fig. 1.8 – Suite géométrique alternée convergente

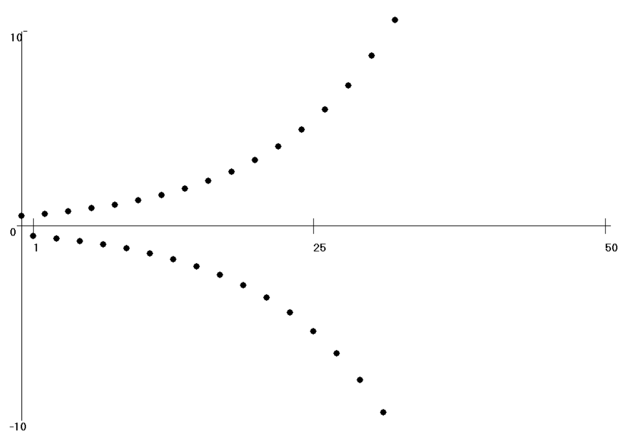

Fig. 1.9 – Suite géométrique alternée divergente

Exemple 15 *Les suites* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ *convergent vers 0. On a donc :* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2} = 0.$

1.3.4 Formes indéterminées

Pour les limites de suites, il existe des formes indéterminées qui sont les quatre suivantes :

$$\infty - \infty \qquad 0.\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Par exemple, considérons un produit $u_n.v_n$ quand n tend vers l'infini, si $u_n \to 0$ et $v_n \to +\infty$, alors on a une forme indéterminée $0.\infty$.

Exemple 16 *L'expression* $\dfrac{n+1}{n^2}$ *est une forme indéterminée de la forme* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1.4 Critères de convergence

1.4.1 Critère de monotonie

Théorème 2 *Toute suite croissante majorée est convergente.*

Exemple 17 *La suite* $2 - 2^{3-n}$ *est strictement croissante et majorée, elle est donc convergente.*

Théorème 3 *Toute suite décroissante minorée est convergente.*

Exemple 18 *La suite* $\dfrac{1}{n}$ *est strictement décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.*

1.4.2 Critère de comparaison

Théorème 4 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites qui convergent toutes les deux vers une limite finie l, alors toute suite* (w_n) *qui vérifie à partir d'un certain rang* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *converge aussi vers l.*

1.5 Valeur d'adhérence d'une suite

1.5.1 Sous-suite

Définition 7 *Soit* (u_n) *une suite numérique. Soit* $(i_1,i_2,i_3,\ldots)$ *une suite d'indices telle que* $i_1 < i_2 < i_3 \ldots$ *Alors* $(u_{i_1},u_{i_2},u_{i_3},\ldots)$ *est appelée une sous-suite de* (u_n).

Exemple 19 *$(u_1,u_3,u_5,...)$ est une sous-suite de (u_n).*

Toute sous-suite d'une suite convergente vers une limite l, converge également vers l. Par contre, une sous-suite d'une suite divergente peut converger.

Exemple 20 *La suite (1,-1,1,-1,1,-1,...) diverge mais admet deux sous-suites constantes (1,1,1,...) et (-1,-1,-1,...).*

1.5.2 Valeur d'adhérence

Définition 8 *Une valeur réelle a est dite valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers a.*

Exemple 21 *La suite (1,-1,1,-1,1,...) admet deux valeurs d'adhérence qui sont les valeurs 1 et -1.*

Les suites convergentes possèdent ainsi une unique valeur d'adhérence qui est la limite de la suite. Les suites qui n'ont aucune valeur d'adhérence ou qui en ont plus de deux sont divergentes.

Il existe cependant des suites divergentes avec une seule valeur d'adhérence, comme par exemple la suite $(2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},4,\frac{1}{4},...)$ qui admet la valeur d'adhérence 0.

1.6 Etude d'une suite par ordinateur

On va illustrer le comportement de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } \mathrm{f(x)} = x^2 + \mathrm{c} \end{array}$$

Cette suite admet des comportements à l'infini très différents suivant les valeurs du paramètre c. La suite peut converger, avoir plusieurs valeurs d'adhérence, ne pas converger tout en restant bornée, ou tendre vers l'infini. On peut démontrer certains résultats mais d'autres restent inconnus. On a alors recours à l'ordinateur pour comprendre le comportement de la suite.

1.6.1 Suite bornée

On peut démontrer mais nous ne le ferons pas ici que la suite tend vers $+\infty$ si c<-2 ou c>$\frac{1}{4}$. Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque le paramètre c est compris dans l'intervalle [-2,$\frac{1}{4}$], la suite reste bornée. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous intéresserons au comportement de la suite lorsque c est compris dans cet intervalle.

Lorsque le paramètre c est dans l'intervalle [-2,$\frac{1}{4}$], on peut montrer que la suite reste bornée et que les termes u_n sont compris dans l'intervalle [-2,2].

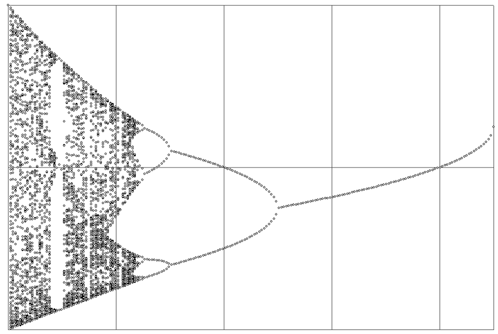

FIG. 1.10 – Schéma synthétique

1.6.2 Schéma synthétique

On utilise alors l'ordinateur pour obtenir le graphique des termes (u_n) en fonction de c. On s'intéressera aux valeurs de la suite (u_n) pour des grandes valeurs de n. On propose par exemple d'étudier les valeurs de u_n pour n compris entre 10 000 et 10 100.

L'abscisse c du graphique varie dans l'intervalle du domaine d'étude [-2,$\frac{1}{4}$]. On fait varier c par pas de 0.01 dans cet intervalle. A la verticale d'une valeur de c donnée, on trace tous les points u_n en ordonnée, pour n compris entre 10 000 et 10 100. Les points ont pour coordonnées (c,u_n) où u_n a été calculé pour la valeur de c correspondante. Le schéma synthétique obtenu est représenté sur la figure 1.10.

On distingue essentiellement trois zones sur ce schéma. Une zone à gauche où la suite reste bornée mais n'admet pas de comportement particulier. Une zone milieu où la suite semble osciller entre deux valeurs d'adhérences. Et une zone à droite où la suite semble admettre une limite.

1.6.3 Schémas détaillés

On représente alors les graphiques de la suite (u_n) en fonction de n pour une valeur de c fixée. En abscisse des schémas, les valeurs de n variant de 10 000 à 10 100. En ordonnée, les valeurs de u_n dans la fourchette de valeurs [-2,2]. On choisit trois valeurs de c caractéristiques dans chacune des trois zones :

c = -1.9	zone de gauche	figure 1.11
c = -0.9	zone milieu	figure 1.12
c = -0.5	zone de droite	figure 1.13

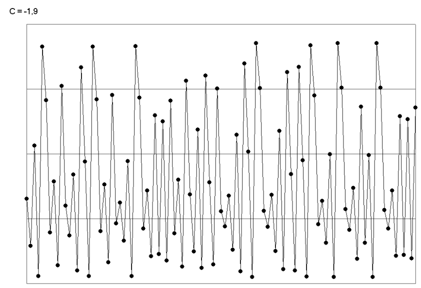

Fig. 1.11 – c = -1.9 / La suite reste bornée

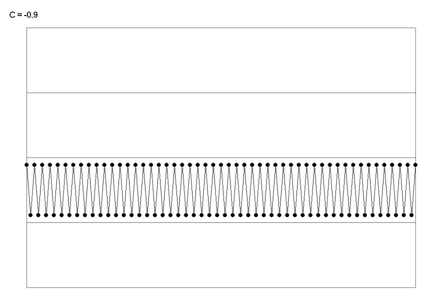

Fig. 1.12 – c = -0.9 / Deux valeurs d'adhérences

Fig. 1.13 – c = -0.5 / Une limite