EPITECH
OUTILS MATHEMATIQUES
Cours110
Intégration

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Introduction

La notion d'intégrale de fonction est fondamentale en analyse. Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel (dérivation). C'est un outil mathématique tellement utilisé qu'il est pratiquement impossible de dresser une liste complète de ses domaines d'application.

Résumé du cours

Ce cours est destiné à présenter la notion d'intégrale pour une fonction continue et à donner plusieurs méthodes de calcul numérique d'intégrales par ordinateur.

On s'intéresse d'abord à un type simple de fonctions : les fonctions en escalier. Celles-ci sont définies sur des subdivisions d'intervalles. On donne toutes les définitions nécessaires. L'intégrale d'une fonction en escalier donne une première approche de la notion d'intégrale grâce à l'interprétation géométrique correspondante.

On étend alors la notion d'intégrale aux fonctions dites continues ou continues par morceaux. On traite le cas général, non plus de fonction bornée sur un intervalle borné, mais on examine le cas de l'intervalle non borné et de la fonction non bornée. Enfin, on cite quelques propriétés vérifiées par les intégrales.

Les méthodes de calculs d'intégrales par ordinateur sont nombreuses. Il faut prendre garde au fait que l'intégrale que l'on souhaite calculer doit être définie, c'est à dire égale à un nombre fini. On décrit deux méthodes simples, couramment citées mais peu efficaces : la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes. Puis, on aborde la méthode de Simpson et la méthode de Gauss qui sont deux méthodes très performantes.

Chapitre 1

Intégration

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

1.1.1 Subdivision d'un intervalle borné

Soit [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on choisit par exemple fermé. On appelle subdivision de l'intervalle [a,b], une suite croissante (x_0, x_1, ..., x_n) de nombres telle que :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ x_i \leq x_{i+1}, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

Il existe un cas particulier de subdivision qui s'appelle **subdivision à pas constant**. Dans ce cas, les nombres x_i sont régulièrement répartis entre a et b. On note généralement h le pas de la subdivision. On a alors :

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

1.1.2 Fonction en escalier

Définition 1 *Soit f une fonction réelle définie dans un intervalle borné I d'origine a et d'extrémité b. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision (x_0, x_1, ..., x_n) de [a,b] telle que f prenne une valeur constante c_i dans chaque intervalle de la subdivision]x_i, x_{i+1}[.*

Exemple 1 *La fonction partie entière E est une fonction en escalier. Sur l'intervalle [-2,2], on a :*

$$\begin{cases} E(x) = -2 & si\ x \in [-2, -1[\\ E(x) = -1 & si\ x \in [-1, 0[\\ E(x) = 0 & si\ x \in [0, 1[\\ E(x) = 1 & si\ x \in [1, 2[\end{cases}$$

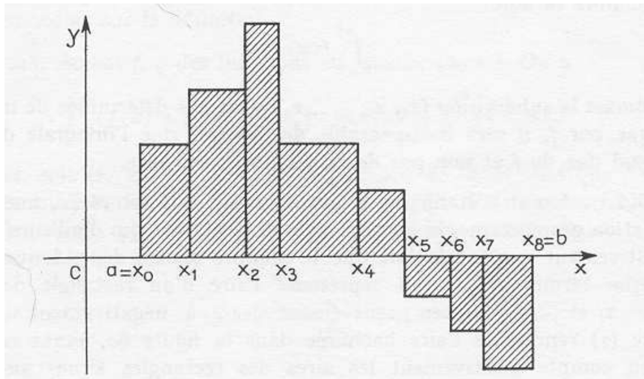

FIG. 1.1 – Fonction en escalier

1.1.3 Intégrale

Soit f une fonction en escalier dans l'intervalle borné I = [a,b]. Soit $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision de [a,b] telle que f ait une valeur constante c_i dans chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Définition 2 *On appelle intégrale de f le nombre réel :*

$$c_0.(x_1 - x_0) + c_1.(x_2 - x_1) + ... + c_{n-1}.(x_n - x_{n-1})$$

Ce nombre se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie.

Interprétation géométrique Chaque terme $c_i(x_{i+1}\ \text{-}x_i)$ représente l'aire d'un rectangle de côtés x_{i+1} - x_i et $|c_i|$, comptée positivement si $c_i \geq 0$ et négativement si $c_i < 0$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire hachurée dans la figure, comprise entre la fonction f et l'axe des x, noté O_x. Il est entendu que l'on compte positivement les aires des rectangles situés au dessus de O_x, négativement les aires des rectangles situés au dessous de O_x.

L'aire hachurée sur la figure 1.1 représente l'intégrale d'une fonction en escalier.

La lettre x figure dans la notation , mais en fait l'intégrale est un nombre fixe, indépendant de x :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \textstyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du...$$

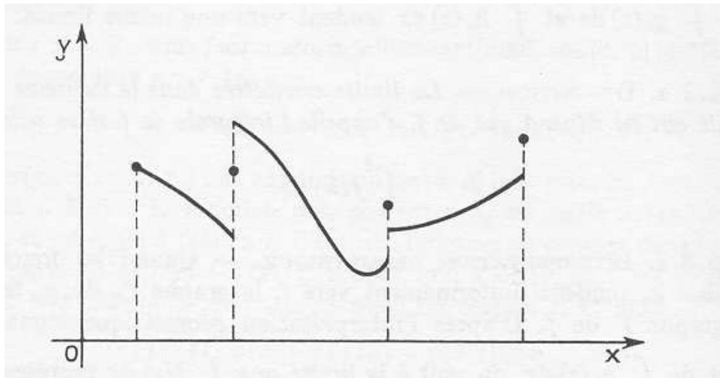

FIG. 1.2 – Fonction continue par morceaux

1.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

1.2.1 Fonctions continues par morceaux

Une fonction continue est une fonction dont on peut tracer le graphe "sans lever le crayon". La courbe représentant f ne présente pas de saut ou point de discontinuité.

Il existe aussi des fonctions dites continues par morceaux. C'est à dire n'admettant que quelques points de discontinuité.

Définition 3 *Une fonction réelle définie dans [a,b] est continue par morceaux si il existe une subdivision (x_0, x_1, ..., x_n) de [a,b] telle que f est continue dans]x_i,x_{i+1}[et reste finie en x_i et en x_{i+1}.*

La figure 1.2 représente une fonction continue par morceaux.

Exemple 2 *les fonctions x, x^2, x^5 sont des fonctions continues sur la droite réelle. La fonction partie entière est une fonction continue par morceaux sur la droite réelle.*

1.2.2 Intégrale

On peut généraliser la définition de l'intégrale des fonctions en escalier à celle d'intégrale des fonctions continues ou continues par morceaux. Soit f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle borné [a,b], on note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

l'intégrale de f sur [a,b]. L'interprétation géométrique de ce nombre est la même que pour les fonctions en escalier (voir figure 1.3).

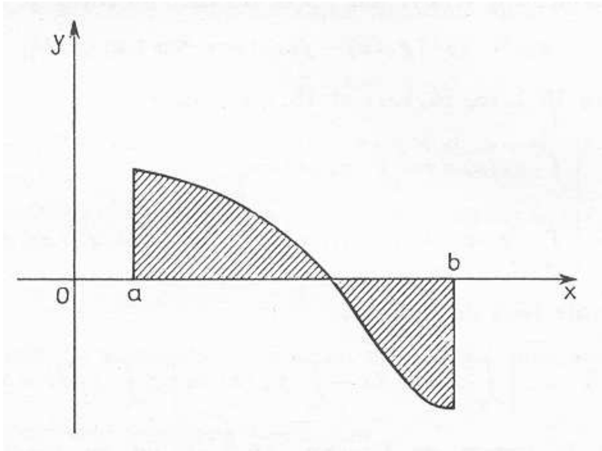

FIG. 1.3 – Intégrale d'une fonction continue

Interprétation géométrique L'intégrale de f représente l'aire hachurée sur la figure, étant entendu que l'on compte positivement les aires situées au dessus de O_x, négativement les aires situées au dessous.

Exemple 3 *La fonction valeur absolue, la fonction partie entière sont intégrables sur tout intervalle borné.*

1.2.3 Intégrales impropres

Il y a deux types d'intégrales impropres, suivant que l'intervalle d'intégration est non borné ou que ce soit la fonction qui ne soit pas bornée.

Intégrale sur un intervalle non borné

Si une borne d'intégration est infinie, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^a f(x)\,dx$$

On calcule d'abord l'intégrale entre des bornes finies, puis on détermine la limite. On dit que l'intégrale est convergente si la limite est finie.

Intégrale de fonction non bornée

Il s'agit des intégrales avec des points de discontinuité de la fonction à intégrer, en lesquels celle-ci prend les valeurs impropres $+\infty$ ou $-\infty$. Si la fonction à intégrer a un point de discontinuité au point c, alors on calcule l'intégrale à gauche et à droite de ce point :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

Si les deux limites sont finies, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.

1.2.4 Calcul théorique des intégrales

Beaucoup d'intégrales peuvent se calculer "à la main". Les nombreuses méthodes pour y arriver sont données par la théorie. Nous ne les abordons pas ici, notre but étant simplement de décrire ce que représente la notion d'intégrale.

Au paragraphe suivant, nous décrivons les plus célèbres des nombreuses méthodes qui permettent de calculer les intégrales numériquement par ordinateur. On se souviendra simplement que toute intégrale n'est pas forcément calculable, si l'intégrale n'est pas un nombre fini ce qui arrive souvent.

1.3 Propriétés de l'intégrale

Les intégrales de fonctions continues (ou continues par morceaux) vérifient de nombreuses propriétés dont nous citons les principales.

1.3.1 Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration

On a les propriétés suivantes :

∗	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	intégration en un point
∗	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$	inversion des bornes
∗	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	partage de l'intervalle

Cette dernière propriété de partage de l'intervalle est particulièrement utile lorsque l'on veut intégrer des fonctions continues par morceaux. En effet, les méthodes de calcul d'intégrales sont données pour des fonctions continues sur tout l'intervalle d'intégration. Si, par exemple, une fonction continue par morceaux sur un intervalle [a,b] présentant un seul point de discontinuité en c, avec a $\leq$ c $\leq$ b, alors on utilise la propriété de partage :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

et on calcule chacune des intégrales de la droite de l'égalité séparément, car ce sont des intégrales de fonctions entièrement continues.

1.3.2 Propriétés relatives à l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues par morceaux dans l'intervalle [a,b]. On a les propriétés suivantes :

* $\int_a^b \lambda.f(x)\,dx = \lambda.\int_a^b f(x)\,dx$	produit par un nombre
* $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$	addition
* $\lvert\int_a^b f(x)\,dx\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$	valeur absolue
* Si f $\leq$ g, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$	ordre
* Si m $\leq$ f(x) $\leq$ M dans [a,b], alors m.(b-a) $\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq$ M.(b-a)	propriété du min-max

1.4 Intégration numérique

1.4.1 Présentation

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Le but de ce paragraphe est de décrire des méthodes qui permettent de calculer numériquement l'intégrale de la fonction :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Les intégrales peuvent être calculées numériquement en décomposant l'intégrale en somme de termes qui font intervenir des valeurs de la fonction en plusieurs points bien choisis de l'intervalle d'intégration.

On se rappellera que le nombre que l'on veut calculer qui est l'intégrale de la fonction doit être un nombre fini. Ceci n'est pas toujours le cas (dans certains cas si la fonction n'est pas bornée, par exemple).

1.4.2 Méthode des rectangles

On choisit une subdivision à pas constant noté h de l'intervalle [a,b]. Le pas h est égal à :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Les (n+1) points de la subdivision sont notés x_i et vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

On écrit alors l'intégrale sur [a,b] comme somme d'intégrales sur chacun des sous intervalles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Si le pas h de la subdivision est suffisamment petit (n grand), alors on peut supposer que la fonction f(x) est quasiment constante sur chaque sous intervalle. On remplace alors la valeur de f(x) par une valeur constante. Plusieurs choix sont possibles. Soit $]x_i, x_{i+1}[$ un intervalle de la subdivision, on peut choisir :

$$\begin{cases} \text{soit } f(x) = f(x_i) & \text{valeur à gauche} \\ \\ \text{soit } f(x) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} & \text{valeur milieu} \\ \\ \text{soit } f(x) = f(x_{i+1}) & \text{valeur à droite} \\ \\ ... \end{cases}$$

Dans la méthode que nous décrivons ici, ou méthode des rectangles, le choix se porte sur la valeur à gauche de la fonction. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i) \\ &\simeq h.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h) \\ &\simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h) \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu :

Méthode des rectangles
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h)}$$

Cette formule n'est exacte que pour les fonctions constantes. L'erreur d'approximation commise est en $\frac{1}{n}$. En réalité, cette méthode ne donne pas de très bons résultats. Dans la pratique, on est souvent obligé de choisir n très grand ce qui conduit à beaucoup de calculs. De plus, si n est trop grand, des erreurs d'arrondi peuvent fausser le résultat. Nous la citons pour sa simplicité de mise en oeuvre, mais elle est peu utilisée.

1.4.3 Méthode des trapèzes

Citons une variante de la méthode des rectangles ou méthode des trapèzes. Cette méthode suit le même principe, mais cette fois, on remplace la valeur de f(x) sur chaque sous intervalle par la valeur milieu. Comme précédemment, effectuons le calcul d'approximation :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h.\frac{f(a+i.h)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} h.\frac{f(a+(i+1).h)}{2} \\
&\simeq \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h) + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(a+i.h) \\
&\simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h)\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu :

Méthode des trapèzes
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h)\right)}$$

Cette formule est exacte pour les fonctions linéaires. L'erreur d'approximation commise est en $\frac{1}{n^2}$. La méthode des trapèzes est donc un peu meilleure que la méthode des rectangles.

1.4.4 Méthode de Simpson

Comme dans les méthodes précédentes, on subdivise l'intervalle [a,b] en n sous intervalles de longueur h. Sur chaque sous intervalle, on utilise une formule obtenue par intégration d'un polynôme de degré 2. Cette formule est la suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4.f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right)$$

On utilise alors une somme de cette formule pour l'intervalle [a,b]. On obtient l'approximation suivante :

Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2.\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h) + 4.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h+\frac{h}{2})\right)$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3. L'erreur d'approximation commise est en $\frac{1}{n^4}$. C'est une méthode qui donne de très bons résultats sans que l'on soit obligé de choisir une valeur élevée pour n.

1.4.5 Méthode de Gauss

On choisit n points de l'intervalle [a,b] notés z_i et n coefficients notés h_i de sorte que l'on utilise la formule de Gauss suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} h_i.f(z_i)$$

Dans la formule de Gauss, les points z_i sont appelés points de Gauss, les coefficients h_i sont les poids de Gauss et le nombre de points utilisés n est appelé ordre de la formule. Cette formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2n-1.

On donne ci-dessous le tableau des points et poids de Gauss sur l'intervalle [-1,1].

n	i	y_i	g_i
1	i	0	2
2	1	$\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$	$\dfrac{5}{9}$
	2	0	$\dfrac{8}{9}$
	3	$+\sqrt{\dfrac{3}{5}}$	$\dfrac{5}{9}$

Dans le cas général d'un intervalle quelconque [a,b], on peut transformer l'intervalle [-1,1] au moyen de la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}.\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}.y+\frac{a+b}{2}\right)\,dy$$

On a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}.\sum_{i=1}^{n} g_i.f\left(\frac{b-a}{2}.y_i+\frac{a+b}{2}\right)$$

Exemple 4 *Sur l'intervalle [-1,1], la formule de Gauss d'ordre 1 s'écrit :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 2.f(0)$$

La formule sur l'intervalle [0,1] est donc :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{2}{2}.f\left(\frac{1}{2}.0+\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exemple 5 *Sur l'intervalle [-1,1], la formule de Gauss d'ordre 3 s'écrit :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{5}{9}.f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}.f\,(0)+\frac{5}{9}.f\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

La formule sur l'intervalle [0,1] est donc :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{5}{18}.f\left(\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right).\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{18}.f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{18}.f\left(\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right).\frac{1}{2}\right)$$

Comme pour les méthodes précédentes, lorsqu'on applique la méthode de Gauss, on subdivise l'intervalle de départ [a,b] en sous-intervalles et on applique la formule de Gauss sur chaque sous-intervalle de la subdivision.