2024학년도 수리논술 대비

대학별 파이널 특강

수업일자: 11월 17일(금)

[1강: 증명의 도구와 서술]

경북대학교

모집단위	경쟁률			실질경쟁률		합격평균점수		추합	모집인원	
학년도	2022	2023	2024	2022	2023	2022	2023	2023	2023	2024
합계 및 평균	20.88	19.87	15.48	5.73 27.4%	7.62 38.3%	122.54	128.26	70명	292명	329명
수학과	9.67	9.33	8.00	2.3	3.3	116.25	110.29	7	12	12
물리학과	9.82	14.33	7.70	1.8	4.1	62.75	113.61	3	9	10
화학과	12.88	14.50	14.67	3.5	5.2	95.35	95.42	2	6	6
통계학과	14.50	14.88	10.00	3.0	4.9	104.06	132.94	4	8	8
지구시스템학부	22.80	17.60	16.40	4.4	4.4	92.50	113.20	1	5	5
금속재료공학과			11.11							9
신소재공학부	21.00	19.44	21.43	5.8	7.8	112.34	129.00	2	16	7
기계공학부	19.50	17.90	16.30	5.7	7.4	135.00	137.55	1	20	20
건축학전공	18.70	20.80	18.00	4.0	5.6	101.25	126.55	3	10	11
건축공학전공	16.50	16.00	14.40	2.5	4.0	101.25	101.39	0	9	10
토목공학과	18.33	20.42	13.18	2.8	5.3	77.05	105.13	4	12	11
응용화학과	15.80	18.80	11.25	3.2	7.6	98.50	131.88	0	5	4
화학공학과	28.60	32.20	25.80	12.0	13.6	204.0	143.67	2	5	5
고분자공학과	16.50	15.50	14.67	6.0	3.2	120.0	85.92	2	6	6
섬유시스템공학과	17.40	17.00	13.80	2.2	4.0	64.50	95.31	7	8	10
환경공학과	19.83	22.83	12.17	3.3	7.0	77.92	136.25	1	6	6
에너지공학부	16.60	16.00	14.92	5.6	5.6	116.5	103.00	2	5	12
수학교육과	27.75	22.50	10.50	9.8	13.5	202.5	147.92	0	6	6
자연과학자율전공	25.20	17.92	13.72	8.1	6.4	145.5	145.19	2	13	25
전자공학부	20.33	20.04	14.05	8.5	11.1	175.05	155.55	10	54	62
전자공학부- 인공지능전공		16.50	12.38		7.2		144.15	4	10	8
컴퓨터학부	33.13			11.0		145.83				
컴퓨터학부- 인공지능컴퓨팅		20.60	15.20		10.8		165.50	0	5	5
컴퓨터학부- 플랫폼소프트웨어		27.50	13.70		13.1		167.75	6	10	10
글로벌소프트웨어 융합전공	25.30	27.30	15.17	8.2	12.6	157.08	163.06	1	10	12
전기공학과	16.29	15.07	11.14	4.9	5.7	139.64	126.93	3	14	14
전자공학부 모바일공학전공	54.27	33.80	36.40	10.3	2.2	222.83	120.28	0	15	15
스마트모빌리티 공학전공			9.90							10
간호학과	53.77	41.77	37.50	13.3	17.0	173.75	172.16	3	13	10

■ 경북대학교 자연계열 논술 분석

1. 경북대학교는 올해(2024학년도)부터 출제형식을 바꿨다. 이전엔 수학문제 3개(110점+120점+120점)으로 출제하였으나 올해부터는 수학문제 2개와 과학문제 1개(130점+150점+70점)으로 바뀌었다. 총점은 350점으로 변화가 없으나 과학문제가 출제되고 수학문제에 비해 과학문제 난이도가 낮기때문에 과학문제 70점을 맞추는 것이 상당히 중요하다. 또한 소문항의 배점은 난이도에 따라 다르며 10점에서 60점까지 다양하게 분포된다.
실제로 올해 모의논술결과 수학문제 2개의 평균점수는 각 문항의 25.3% 10.6%인 반면에 과학문제는 40%으로 득점비율이 높은 것을 알 수 있다. 올해 출제되는 문제들의 난이도에 따라 다르겠지만 일반적으로는 30점이하의 소문항들을 푸는 것을 목표로 하는 것이 좋다. 그리고 40점이상의 배점이 높은 문항은 어렵기 때문에 많은 시간을 투자하여 풀이를 시도하는 것보다는 부분점수를 얻는 것이 좋다.
아래는 올해(2024학년도) 모의논술 소문항별 배점과 220명의 평균점수다.

경북대학교 (24모의)	문제	수학1					수학2				과학1						합계
	소문항	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	350 점
	배점	30	20	40	10	30	30	40	30	50	12	12	6	10	20	10	
	합계	130					150				70						
	모의결과	33.2					16.74				27.9						77.8

2. 경북대학교의 수학문제중 하나는 교과목통합으로서 수학1,2,미적분이 혼합되어 출제될 수 있다. 그리고 나머지 수학문제는 각 소문항간의 연계성이 있는 '미적분' 문제가 출제될 가능성이 높아보인다. 수학1,2에서는 수열이 나올 가능성이 상당히 높고 다음으로는 삼각함수의 활용이다. 수2는 미적분의 하위과목이기 때문에 수2를 집중적으로 물어볼 가능성은 높지않아보인다. 미적분에서는 주로 수열의 극한, 함수의 연속성, 미분가능성, 함수의 최소와최대, 교점,실근의 개수, 함수추론등이 출제된다. 한 가지 주제만 물어보는 것보다는 다양한 제시문을 주고 해당 제시문들을 이용하여 다수의 주제에 답할 수 있는지를 평가한다.

■ 경북대학교 자연계열 논술 준비하기

1. 경북대학교는 증명문제를 꾸준히 출제하고 있다. 하지만 난이도가 높은 편은 아니기 때문에 증명문제에 대한 연습을 충분히한다면 다른 지원자들에 비해서 증명문제의 점수를 확실히 확보할 수 있으므로 이에 대한 준비가 되어야 한다. 가장 많이 출제된 주제는 '사잇값 정리' 와 '수학적 귀납법' 그리고 귀류법을 이용한 증명문제이다.

2. 경북대학교의 소문항의 개수가 많기 때문에(각 4~5개)시간 압박감 크다. 풀이를 서술할 때는 제시문을 토대로 해서 최대한 간략하게 쓰는 것이 좋다. 실제 답안지의 크기도 그리 크지 않기 때문에 많은 양을 서술하기도 힘들다. 서술에 소요되는 시간을 줄여서 소문항을 1개라도 더 푸는 것이 더 효율적으로 점수를 낼 수 있는 방법이다.

3. 올해(2024학년도) 모의논술의 수학문제의 난이도가 높았기 때문에 실제시험의 난이도는 비슷하거나 다소 낮출 것으로 예상된다. 낮추더라도 작년(2023학년도) 문제보다 더 어려워질 수 있다. 올해 과학논술을 다시 시행하며 과학논술의 비중이 20%(350점 중 70점)이지만 수학문제(280점)가 많이 어렵다면 과학논술문제에서 점수가 상당히 중요해진다. 수학이 어렵게 출제되고 과학이 모의논술정도로 출제된다면 수학실력에서 크게 차이가 나지 않는 이상 과학점수가 합격과 불합격에 영향을 충분히 줄 수 있다.

4. 수학문제가 전반적으로 어렵기 때문에 실제시험에서는 너무 급하게 문제를 풀려고하는 것 보다는 30점이하의 문제들을 정확하게 풀어내는 것이 중요하다. 그리고 소문항간의 연계가 되는 경우가 많기 때문에 각 문제의 첫 번째, 두 번째 소문항들을 정확하게 이해하고 풀도록 하자.

수학적 귀납법

문제 1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

ㄱ. [수학적 귀납법] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

ㄴ. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$은 다음과 같다.

모든 자연수 m에 대하여 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 이다.

ㄷ. 모든 실수 c에 대하여 다음의 부등식을 만족시키는 자연수 n의 집합을 A라고 하자.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx>0$$

[1-1] 제시문 (ㄴ)의 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

[1-2] 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 과정을 논술하시오.

수학적 귀납법

문제 2. 다음 물음에 답하시오.

모든 항이 0보다 크거나 같은 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 < 1$이고 다음 점화식을 만족한다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}^2 = \dfrac{1+a_n}{2}$

[2-1] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$임을 보이시오.

[2-2] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$임을 보이시오.

[2-3] $a_1 = \cos\theta \left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$를 만족할 때 일반항 a_n을 θ로 나타내시오.

[2-4] 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이고, 그 극한값을 구하시오.

수학적 귀납법+부등식의 증명

문제 3. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(a)$는 $y=x^2$ 위의 점 (a, a^2)에서 접선과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표로 주어진다. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=f(a_n), \quad b_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$$

을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오.

[3-1] a_1이 양의 실수 일 때, $a_2 \geq \sqrt{2}$이 성립함을 보이시오.

[3-2] $a_1 \geq \sqrt{2}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \sqrt{2}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[3-3] $a_1 \geq \sqrt{2}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \leq a_n$이 성립함을 보이시오.

[3-4] 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+1} \leq b_n$이 성립함을 보이시오.

부등식의 증명

문제 4. 다음 물음에 답하시오.

[4-1] x가 양수일 때, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$과 $\frac{1}{x+1}$의 대소를 비교하시오.

[4-2] $\left(1+\frac{2023}{2024}\right)^{\frac{2024}{2023}}$, $\left(1+\frac{2024}{2023}\right)^{\frac{2023}{2024}}$ 의 대소를 비교하시오.

존재성 정리

문제 5. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(ㄱ) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

(ㄴ) 양의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt=\ln x$$

(ㄷ) 명제 A는 다음과 같다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$이다.

(ㄹ) 자연수 n에 대하여 다음 집합 B의 원소 중 가장 큰 수를 a_n이라고 하자.

$$B=\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\text{는 방정식 } x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2+x-e=0\text{의 실근}\right\}\cup\{\sqrt{e}\}$$

[5-1] 제시문 (ㄱ), (ㄴ)을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 명제 A의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오.

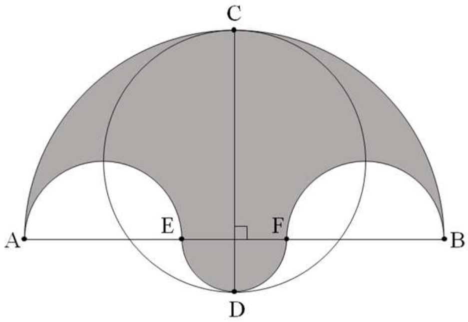
[5-2] 제시문 (ㄹ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}a_n$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

존재성 정리

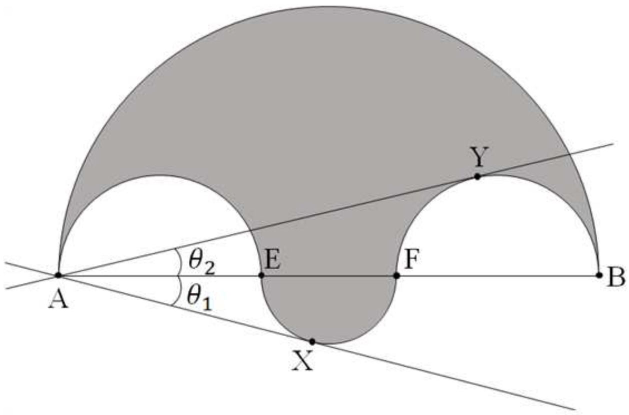
문제 6. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 연속함수의 성질을 사잇값의 정리라고 한다.

(나) 고대 그리스의 학자 아르키메데스는 "보조정리집"에서 여러 가지 도형의 성질을 설명하였다. 셀리논(Salinon)이라 이름 붙인 도형은 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 선분 AB, 선분 AE, 선분 EF, 선분 FB를 각각 지름으로 하는 네 개의 반원으로 둘러싸인 도형이며, 이때 $\overline{AE} = \overline{FB}$이다. 셀리논의 넓이는 선분 AB를 수직이등분하는 선분 CD가 지름인 원의 넓이와 같다.



아래 그림의 색칠된 도형은 제시문(나)의 셀리논이다. 점 A를 지나는 직선이 호 EF에 접할 때 그 접점을 X라 하고, 호 FB에 접할 때 그 접점을 Y라 하자. 여기서 각 XAB의 크기를 θ_1, 각 YAB의 크기를 θ_2라 하자. 그리고 $\overline{AB} = 6$ 이다. 이때 다음 질문에 답하시오.



[6-1] 다음 등식이 성립함을 논술하시오.

$$(\sin\theta_1 + 3)(\sin\theta_2 + 1) = 4$$

그리고 $\theta_1 = \theta_2$인 경우 선분 EF의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

[6-2] 임의의 양의 실수 α에 대하여 다음 방정식을 만족하는 θ_1, θ_2가 존재함을 제시문 (가)의 사잇값의 정리를 이용하여 보이고, 그 근거를 논술하시오.

$$\sin\theta_1 = \alpha \sin\theta_2$$

정적분과 부등식

문제 7. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

① 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.

② 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

[다] 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[라] 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

[마] 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족하면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

[7-1] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$이면 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

[7-2] 함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1) + \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

문항 [7-2]의 결과와 제시문 [마]를 이용하여 문항 [7-3]과 [7-4]에 답하시오.

[7-3] p가 자연수일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

[7-4] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

존재성 정리

문제 8. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 평균값의 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족하는 $c\in(a,b)$가 적어도 하나 존재한다.

(나) 정적분과 미분의 관계
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$와 같이 정의하자. 그러면 $F(x)$는 $x\in[a,b]$에서 연속이고 $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$가 $x\in(a,b)$에 대해서 성립한다.

[8-1] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$를 만족하는 c가 열린 구간 (a,b)에 존재함을 보이시오.

[8-2] 자연수 n에 대하여, 0이 아닌 실수 $a_0, a_1, \dots, a_n$이 $\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{5}+\cdots+\dfrac{a_n}{2n+1}=0$을 만족한다. 이때 방정식 $a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}=0$의 실근이 적어도 두 개임을 보이시오.

문제 9. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 사잇값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[나] 평균값 정리
함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[다] 미적분의 기본 정리
닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

시간 t일 때 수직선 위를 움직이는 점 A의 위치를 $s(t)$라고 하자. 미분가능한 함수 $s(t)$는 $s(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\cos x+\sin x}\,dx$ 를 만족한다. (단, t는 $t \geq 0$를 만족한다.)

모든 $t \geq 0$에 대하여 $\frac{1}{3} \leq s'(t) \leq 1$임을 보이고, [나]를 이용하여 $\frac{t}{3} \leq s(t) \leq t$임을 보이시오. 그리고 점 B의 위치가 $s_2(t)=10+\frac{1}{6}t$이면, $s(t)-s_2(t)=0$인 시간 t가 적어도 한 번 있음을 보이시오.

정답과 해설

1) 문제 1의 정답

[1-1]

(i) $n=1$일 때,

$$\int_0^1 x^m(1-x)dx=\int_0^1 x^m dx-\int_0^1 x^{m+1}dx=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m!1!}{(m+2)!}$$

이므로 $p(n)$은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{k+1}dx=\int_0^1 x^m(1-x)^k(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 x^m(1-x)^k-\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^k dx$$

$$=\frac{m!k!}{(m+k+1)!}-\frac{(m+1)!k!}{(m+k+2)!}=\frac{m!k!}{(m+k+2)!}(m+k+2-m-1)=\frac{m!(k+1)!}{(m+k+2)!}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 성립한다.

[1-2]

제시문 (ㄴ)의 적분식을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 적분을 계산하면

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx+2\sqrt{3}\,c\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n dx$$

$$+\frac{27}{10}c^2\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n dx$$

$$=\frac{n!n!}{(2n+1)!}+2\sqrt{3}\,\frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!}c+\frac{27}{10}\frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!}c^2$$

$$=\frac{n!n!}{(2n+1)!(2n+3)}\left(2n+3+(2n+3)\sqrt{3}\,c+\frac{27}{20}(n+2)c^2\right)$$

을 얻는다.

따라서 제시문 (ㄷ)의 부등식은 위 괄호안의 c에 대한 이차식이 양수이어야 한다는 것과 동치이다. c^2항의 계수가 양수이므로, 판별식이 음수가 되어야 한다. 판별식은

$$3(2n+3)^2-\frac{27}{5}(2n+3)(n+2)=\frac{2n+3}{5}(3n-9)$$

이므로 $n<3$이 되어야 조건을 만족시킨다.

따라서 제시문 (ㄷ)의 집합 A는 $\{1, 2\}$이다.

2) 문제 2의 정답

[2-1]

수학적 귀납법을 이용한다. $0 \le a_1 < 1$으로 주어졌고, $0 \le a_n < 1$을 만족한다고 하자. 그러면 $1+a_n < 1+1=2$ 이고 $\dfrac{1+a_n}{2}=a_{n+1}^2 < 1$ 이 성립하므로 $a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}^2}<1$ 이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$이 성립한다.

[별해]

만약 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n = \sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}} \ge 1$이 성립한다고 가정하면 $\dfrac{1+a_{n-1}}{2} \ge 1$이므로 $a_{n-1} \ge 1$도 성립하여, 이 과정을 반복하면 a_1도 1보다 같거나 크게 된다. 하지만 조건에 $a_1 < 1$으로 주어졌으므로 위의 가정은 모순이다. 따라서 $a_n > 1$인 자연수 n은 존재할 수 없다.

[2-2]

[2-1]에 의해 $a_n < 1$ 이므로 $2a_n < a_n + 1 < 2$ 이고 $a_n < \dfrac{a_n+1}{2} = a_{n+1}^2 < 1$ 이다. $0 < a_{n+1} < 1$ 이기때문에 $a_{n+1}^2 < a_{n+1}$이 참이어서 $a_n < \dfrac{a_n+1}{2} = a_{n+1}^2 < a_{n+1}$ 이 성립한다.

[2-3]

초항 a_1이 $\cos\theta$로 주어지면 삼각함수의 반각공식에 의해 $a_2^2 = \dfrac{1+a_1}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 이고 $a_2 = \pm\cos\dfrac{\theta}{2}$이다. 한편 $a_n \ge 0$ 이고 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$이므로 $\cos\dfrac{\theta}{2} \ge 0$ 이고 $a_2 = \cos\dfrac{\theta}{2}$ 이다.
그러므로
수학적 귀납법에 의해 $a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ 이다.

[2-4]

θ에 상관없이 n이 커지면 $\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$은 0으로 수렴하고 $a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$은 $\cos 0 = 1$로 수렴한다.

3) 문제 3의 정답

[3-1]

$(a,\,a^2)$에서 곡선 $y=x^2$의 접선의 방정식은

$y=2a(x-a)+a^2$

이며, 직선 $y=2$와의 교점은

$$2a(x-a)+a^2=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$$

이다. 따라서

$$f(a)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$$

이다. a_2는 정의와 산술 기하평균부등식에 의하여

$$a_2=f(a_1)=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{2}{a_1}\right)\geq\sqrt{2}$$

이다.

[3-2]

수학적귀납법에 의하여 보이면 다음과 같다.

ⅰ) $n=1$일 때, 문제의 조건에서 $a_1\geq\sqrt{2}$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때, 성립함을 가정하자.

$n=k+1$일 때, a_k가 양수이므로 산술 기하평균부등식에 의하여

$$a_{k+1}=f(a_k)=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{2}{a_k}\right)\geq\sqrt{2}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

ⅰ)ⅱ)에 의하여 자연수 n에 대해 $a_n\geq\sqrt{2}$ 이다.

[3-3]

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)=\frac{a_n}{2}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n^2-2}{2a_n}\geq 0\ (\because a_n\geq\sqrt{2})$$

따라서

$a_n\geq a_{n+1}$ 이다.

[3-4]

[3-2]에서 $a_n\geq\sqrt{2}$ 이며 [3-3]에서 $a_n\geq a_{n+1}$ 이므로

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{2}{a_{n+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)=\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_na_{n+1}-2)}{2a_na_{n+1}}\leq 0$$

즉,

$b_n\geq b_{n+1}$

[다른 풀이]

$b_n = f(a_n),\ 0 < a_{n+1} \le a_n \le \sqrt{2}$ 이고 $f(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(0 < a \le \sqrt{2}\right)$에서

$f'(a) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{a^2}\right) = \frac{a^2-2}{2a^2} < 0\ \left(0 < a < \sqrt{2}\right)$ 이다. 즉 함수 $f(a)$는 구간 $0 < a \le \sqrt{2}$에서 감소한다. 즉,

$b_n = f(a_n) \ge f(a_{n+1}) = b_{n+1}$

$b_n \ge b_{n+1}$

4) 문제 4의 정답

[4-1]

$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ 로 두자.

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$ 이므로 $f(x)$는 $x > 0$에서 감소함수이며 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ 이므로 $x > 0$에서 $f(x) > 0$ 이다. 따라서 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$

[4-2]

$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x\{\ln(x+1) - \ln x\}$라 두자. 그러면 [4-1]에 의해

$g'(x) = \ln(x+1) - \ln x + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$

이므로

$g(x)$는 $x > 0$에서 증가한다. 그리고

$0 < \frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2023}$ 이므로 $g\left(\frac{2023}{2024}\right) < g\left(\frac{2024}{2023}\right)$ 가 되고

$\ln\left(1 + \frac{2024}{2023}\right)^{\frac{2023}{2024}} < \ln\left(1 + \frac{2023}{2024}\right)^{\frac{2024}{2023}}$ 이며 $\ln x$는 증가함수이므로

$\left(1 + \frac{2024}{2023}\right)^{\frac{2023}{2024}} < \left(1 + \frac{2023}{2024}\right)^{\frac{2024}{2023}}$

5) 문제 5의 정답

[5-1]

함수 $g(t)=\frac{1}{t}$이라고 하면 함수 $g(t)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $g(t)>0$이고 감소하므로, 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 의해서

$$\frac{1}{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}dt=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\times\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n}$$

따라서

$$\frac{1}{2}\le\frac{n}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1 \Rightarrow \sqrt{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

그러므로 제시문 (ㄷ)의 명제 A는 참이다.

[5-2]

$f(x)=x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2+x-e$이라고 하자.

(a) [5-1]로부터,

$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e<0$$이고

$$f(e)=e^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^2+e-e=e^2\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)>0$$

따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,e\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(b) $x>e$인 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=3x^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x+1=x\left(3x-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)+1>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 (e,∞)에서 증가한다. 따라서 $x\ge e$인 모든 실수 x에 대하여 .

$f(x)\ge f(e)>0$

그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 (e,∞)에서 해를 갖지 않는다.

[5-1]과 (a), (b)에 의해서 제시문 (ㄹ)의 수 a_n은 다음을 만족한다.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<a_n<e.$$

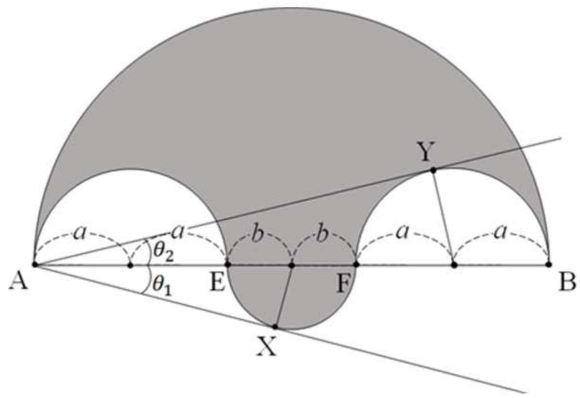
한편, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e$$

6) 문제 6의 정답

[6-1]

아래 그림과 같이 $\overline{AE}=\overline{FB}=2a,\ \overline{EF}=2b$ 라고 하자.



$\overline{AB}=4a+2b=6$ 이므로 $2a+b=3$ 이다. 그리고 삼각함수의 정의에 의해

$\sin\theta_1=\dfrac{b}{2a+b}=\dfrac{b}{3},\ \sin\theta_2=\dfrac{a}{3a+2b}$ 따라서 $(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_2+1)=\dfrac{6a+4b}{2a+b}\dfrac{4a+2b}{3a+2b}=4$

$\theta_1=\theta_2$ 이므로 $\sin\theta_1=\sin\theta_2$ 이다. 이를 등식에 대입하면

$(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_2+1)=(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_1+1)=4$ 이를 정리하면 $\sin^2\theta_1+4\sin\theta_1-1=0$ 이고, 해는

$\sin\theta_1=-2\pm\sqrt{5}$ 이다. $\sin\theta_1>0$ 이므로 $\sin\theta_1=-2+\sqrt{5}\left(=\dfrac{b}{3}\right)$ 이다. 따라서

$\overline{EF}=2b=2\times3(\sqrt{5}-2)=6(\sqrt{5}-2)$

[6-2]

$\sin\theta_1=\alpha\sin\theta_2$ 이므로 [6-1]에서 정리한 식을 대입하면 $\dfrac{3-2a}{3}=\dfrac{a\alpha}{3a+2(3-2a)}=\dfrac{a\alpha}{6-a}$ 이를 정리하면 a에 대한 2차방정식 $2a^2-(3\alpha+15)a+18=0$ 를 얻는다. a는 가운데 양쪽 반원의 반지름이므로 $0<a<\dfrac{3}{2}$이다. 따라서 모든 α에 대하여 위 방정식이 구간 $0<a<\dfrac{3}{2}$에서 해가 존재함을 보이면 된다. $f(a)=2a^2-(3\alpha+15)a+18$ 라고 하자. $f(a)$는 이차함수이므로 모든 구간에서 연속이다. $f(0)=18>0,\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9\alpha}{2}<0$ 이므로 제시문(가)의 사잇값의 정리를 적용하면 $f(a^*)=0$ 이 되는 a^*가 0과 $\dfrac{3}{2}$ 사이에 존재한다. 그러면

$\sin\theta_1=\dfrac{3-2a^*}{3},\ \sin\theta_2=\dfrac{a^*}{3a^*+2(3-2a^*)}=\dfrac{a^*}{6-a^*}$ 이고, $0<a^*<\dfrac{3}{2}$ 에서 $0<\sin\theta_1=\dfrac{3-2a^*}{3}<1,$

$0<\sin\theta_2=\dfrac{a^*}{6-a^*}<\dfrac{1}{3}$ 이므로 모든 양의 실수 α에 대하여 주어진 삼각방정식을 만족하는 θ_1,θ_2가 존재한다.

7) 문제 7의 정답

[7-1]

함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하고, $H(x)=G(x)-F(x)$라고 놓자. 그러면 함수 $H(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)의 모든 x에 대하여

$$H'(x)=G'(x)-F'(x)=g(x)-f(x)>0$$

이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $H(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 증가한다. 그러므로 제시문 [다]를 이용하면

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=[G(b)-G(a)]-[F(b)-F(a)]=H(b)-H(a)>0$$

이므로

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx$$

이다.

(마지막 부분의 다른 풀이) $H(x)$가 함수 $g(x)-f(x)$의 한 부정적분이므로

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx=H(b)-H(a)>0$$

[7-2]

k가 임의의 자연수라고 할 때, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[k,k+1]$에서 증가하므로 열린구간 $(k,k+1)$의 모든 x에 대하여 $f(k)<f(x)<f(k+1)$이다. 따라서 문항 [7-1]의 결과에 의하여

$$f(k)=\int_k^{k+1}f(k)\,dx<\int_k^{k+1}f(x)\,dx<\int_k^{k+1}f(k+1)\,dx=f(k+1)$$

이다. 임의의 자연수 n에 대하여 $k=1,2,\cdots,n$일 때의 부등식을 모두 더하면, 제시문 [라]에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)<\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n}f(k+1)=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-f(1)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_1^{n+1}f(x)\,dx$$

이고

$$f(1)+\int_1^{n+1}f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n+1}f(k)$$

이다. 그러므로 문제의 두 부등식 중에서 오른쪽 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하고, 왼쪽 부등식은 $n\geq 2$일 때 성립한다. 또한 $n=1$일 때는 왼쪽 부등식이 등식으로 성립한다.

[7-3]

자연수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^p$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 [7-2]의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n^{p+1}+p}{p+1}=1+\int_1^n x^p\,dx \le \sum_{k=1}^n k^p < \int_1^{n+1} x^p\,dx=\frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}$$

이므로

$$\frac{1}{p+1}\left(1+\frac{p}{n^{p+1}}\right) \le \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n k^p < \frac{1}{p+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-\frac{1}{n^{p+1}}\right\}$$

이다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0 \text{ 이고 } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$$

이므로 제시문 [마]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n k^p=\frac{1}{p+1}$$

[7-4]

함수 $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 [7-2]의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$(-1)+\int_1^n\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \le \sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \int_1^{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

이고

$$2(\sqrt{n+1}-1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{n}-1$$

이므로

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}} \le 2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이다. 따라서 제시문 [마]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$

8) 문제 8의 정답

[8-1]

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$는 정적분과 미분의 관계로부터, 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능한 함수이다. 따라서 평균값의 정리를 함수 $F(x)$에 적용하면,

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)$$

를 만족하는 $c\in(a,b)$가 적어도 하나 존재한다. $F(x)$의 정의에 의하여, 위 식의 좌변은

$$\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

와 같다. 우변은 정적분과 미분사이의 관계로부터 $F'(c) = f(c)$이므로 원하는 결과를 얻는다.

[8-2]

$f(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n}$으로 정의하자. 그러면 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이므로 문제 [8-1]에 의해서

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = f(c)$$

를 만족하는 $c \in (0,1)$가 적어도 하나 존재한다. 위 식의 좌변은

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1} = 0$$

이므로, $f(c) = 0$을 만족하는 c가 열린 구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. 또한 $f(c) = f(-c)$이므로 c가 근이면 $-c$ 역시 근이다. 위에서 $c \in (0,1)$이므로, $c \neq 0$이고 $c \neq -c$이다. (사실, $f(0) = a_0 \neq 0$이므로 0은 근이 될 수 없다.) 따라서 방정식 $a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n} = 0$의 실근은 적어도 두 개다.

9) 문제 9의 정답

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$이므로

$\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} + \cos x + \sin x \leq 3\sqrt{2}$이다. 따라서 역수를 취하고 $\sqrt{2}$를 곱하면, 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \cos x + \sin x} \leq 1$$

를 만족한다. 따라서 $\frac{1}{3} \leq s'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \cos t + \sin t} \leq 1$이다. $t > 0$이면

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = s'(t_0)$$

인 t_0가 존재한다. 따라서 $\frac{1}{3} \leq \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \frac{s(t)}{t} \leq 1$이므로 $\frac{t}{3} \leq s(t) \leq t$이다.

마지막으로 $h(t) = s(t) - s_2(t) = s(t) - \left(10 + \frac{1}{6}t\right)$라고 놓으면,

$$h(12) = s(12) - s_2(12) \leq 12 - s_2(12) = 0$$

이다. 즉, $h(12) \leq 0$.

$$h(60) = s(60) - \left(10 + \frac{1}{6} \times 60\right) \geq \frac{1}{3} \times 60 - 20 = 0$$

이다. 즉, $h(60) \geq 0$이다. $h(t)$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $h(t) = 0$인 t가 적어도 하나 존재한다.