I. Base d'un plan (P) – repère d'un plan (P) – coordonnées d'un point du plan (P) .

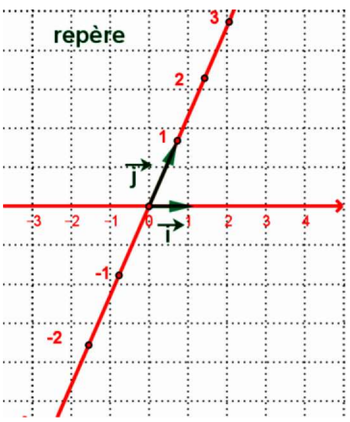
A. Base du plan - repère du plan :

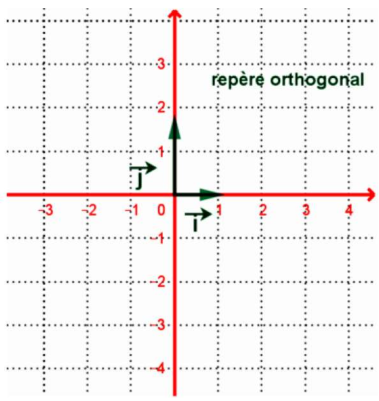
a. Définition :

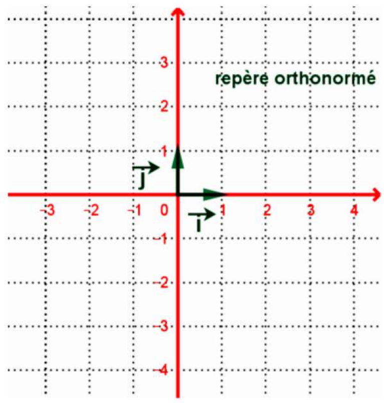
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P) .

- Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé base du plan (P) ; on dit que le plan (P) est rapporté à la base $(\vec{i},\vec{j})$. (ou le plan est muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$.
- Si on prend un point quelconque de (P) ; le triplet (O,i,j) est appelé repère du plan (P). on dit que le plan (P) est rapporté au repère (O,i,j) . (ou le plan est muni au repère (O,i,j) .
- O et I et J trois points non alignés de (P) , le couple $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est une base de (P) ; le triplet $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est un repère de (P) .
- En général on pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ on aura (O,i,j) repère du plan (P) .
- Si $(OJ)\perp(OI)$ la base $(\vec{i},\vec{j})$ est appelée base orthogonale et le repère (O,i,j) est appelé repère orthogonal .
- Si $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=1$ la base $(\vec{i},\vec{j})$ est appelée base normée et le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère normé.
- Si $(OJ)\perp(OI)$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=1$ la base $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé base orthonormée et le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère orthonormé .

b. Exemples :







B. Coordonnées d' un point du plan (P) :

a. Activité :

Le plan (P) est rapporté au repère (O,i,j). On considère :

- La droite $(D_x)=(OI)$ tel que : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$.

- La droite $(D_y)=(OJ)$ tel que : $\overrightarrow{OJ}=\vec{i}$.
- M est un point du plan (P) .
- M_x est la projection de M sur la droite (D_x) parallèlement à (D_y) .
- M_y est la projection de M sur la droite (D_y) parallèlement à (D_x) .

1. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM_x}$ en fonction de $\vec{i}$ ou $\overrightarrow{OI}$.(on utilise le réel x)
2. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM_y}$ en fonction de $\vec{j}$ ou $\overrightarrow{OJ}$ . .(on utilise le réel y)
3. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (ou bien $\overrightarrow{OI}$ ou $\overrightarrow{OJ}$) .

b. Définition et théorème :

Le plan (P) est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

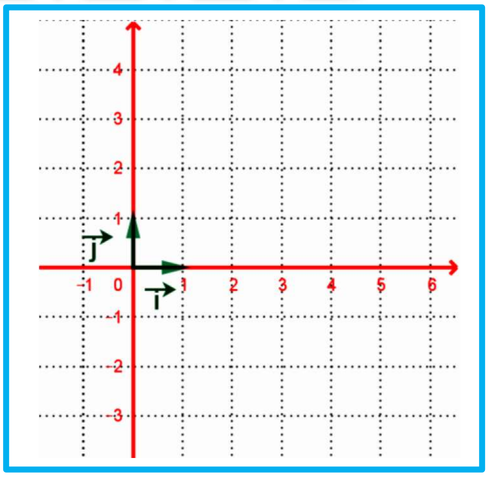
Pour tout point M du plan (P) , il existe un et un seul couple $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

- Le couple (x,y) est appelé couple des coordonnées du point M par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- On note $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$: par $M(x,y)$ ou $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; d'où : $M(x,y)$ équivaut à $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$
- Le nombre x est appelé abscisse du point M .
- Le nombre y est appelé ordonnée du point M .
- La droite $(D_x)=(OI)$ est appelée axe des abscisses .
- La droite $(D_y)=(OJ)$ est appelée axe des ordonnées .
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan (P) il existe un point unique de (P) tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ ($\overrightarrow{OM}$ est le représentant d'origine O) d'où les coordonnées du point sont aussi les coordonnées de $\vec{u}$ par suite si $M(x,y)$ et $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x,y)$.
- L'écriture $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ signifie $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
- $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$

C. Coordonnées de la somme de deux vecteurs - Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel :

a. Activité :

1. Construire les vecteurs $\vec{v}(1,-2)$ et $\vec{u}(2,3)$ à partir de O .
2. Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ puis déterminer graphiquement les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
3. Construire le vecteur $2\vec{u}$ puis déterminer graphiquement les coordonnées du vecteur $2\vec{u}$.
4. Donner la propriété .



b. Propriété :

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) .
- $B(x_B, y_B)$ et $A(x_A, y_A)$ et $I(x_I, y_I)$ sont des points de (P) .
- $\alpha \in \mathbb{R}$, On a :
  - Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ on note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
  - Le vecteur $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ on note : $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\left(\alpha\vec{u}\right)\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}=\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$.
  - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ on note :

    $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A, y_B - y_A\right)$.
  - $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment $[A,B]$ on a : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

c. Exemple :

1. donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sachant que I $B(1,2)$ et $A(3,4)$.
2. donner les coordonnées de $-5\overrightarrow{AB}+3\vec{u}$. sachant que $\vec{u}(2,0)$
3. Donner les coordonnées de $I(x_I, y_I)$ tel que $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment $[A,B]$.

II. Déterminant de deux vecteurs – condition de colinéarité de deux vecteurs :

A. Déterminant de deux vecteurs :

a. Définition :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan (P) qui est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- On note : $\det\left(\vec{u},\vec{u}'\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$.

B. Condition de colinéarité de deux vecteurs :

b. Propriété :

Soients $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan (P) qui est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'=0$) .

c. Exemple :

Etudier la colinéarité de $\vec{u}(2,3)$ et $\vec{v}(-4,-9)$ puis de $\vec{w}=-\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{u}=5\vec{i}-4\vec{j}$.

III. Norme d'un vecteur - Distance entre deux points (uniquement dans un repère orthonormé)

a. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de (P) . $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ sont de points de (P) on a :
- La norme (ou la longueur) du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
- la distance entre A et B est $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

b. Exemple :

Calculer la distance AB sachant que $A(1,4)$ et $B(1,2)$.

IV. Vecteur directeur d'une droite -représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite :

A. Vecteur directeur d'une droite :

a. Définition :

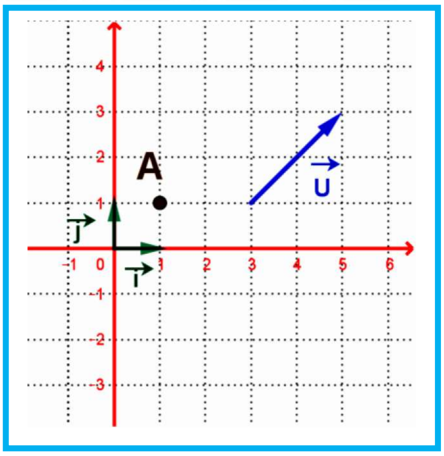
Soit (D) une droite du plan (P) qui est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. A et B sont deux points de (P) .

- Tout vecteur non nul $\vec{u}$ est colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (D) .
- La droite (D) est appelée la droite passant par A (ou B) a pour vecteur directeur $\vec{u}$.
- La droite (D) est notée par : $D(A,\vec{u})$ ou $D(B,\vec{u})$ ou $D(A,\overrightarrow{AB})$.

B. Représentation paramétrique d'une droite :

a. Activité :

Soit $D(A,\vec{u})$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (voir figure ci-contre)



1. Construire un point M de (P) tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
2. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\vec{u}$.
3. On pose : $M(x,y)$ et $A(x_A,y_A)$ et $\vec{u}(a,b)$.
   exprimer x et y en fonction de a et b et x_A et y_A .

b. Définition :

Soit $D(A,\vec{u})$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $\vec{u}(a,b)$.

L'écriture $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite $D(A,\vec{u})$.

c. Exemple :

Soit $D(A,\vec{u})$ une droite du plan (P) tel que $A(2,1)$ et $\vec{u}(-4,0)$.

On donne une représentation paramétrique de la droite $D(A,\vec{u})$.

La représentation paramétrique de la droite est : $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 1 \end{cases}$.

C. Equation cartésienne de d'une droite :

a. Activité :

On considère la droite $D\left(A(4,5);\vec{u}(2,3)\right)$ du plan (P) qui est rapporté au repère (O,i,j) et $M(x,y)$ est un point de (P) .

1. Déterminer le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $M \in (D)$ (donner deux réponses différentes)
3. En déduit que $M(x,y)$ vérifie $3x-2y-2=0$.

b. Définition et propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O,i,j) .

Toute droite $D\left(A(x_A,y_B);\vec{u}\right)$ du plan (P) a une équation de la forme $ax+by+c=0$. avec $c=-x_u y_A + y_u x_A$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D) .

L'écriture $ax+by+c=0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D) .

c. Démonstration :

Soit $D\left(A(x_A,y_B);\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}\right)$ une droite de (P) et $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (P)$.

On a :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x_u & x-x_A\\ y_u & y-y_A\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x_u(y-y_A)-y_u(x-x_A)=0$$

$$\Leftrightarrow x_u y - y_u x - x_u y_A + y_u x_A = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-y_u}_{a} x + \underbrace{x_u}_{b} y \underbrace{-x_u y_A + y_u x_A}_{+c} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax+by+c=0 \qquad \text{avec } \vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

Conclusion : la droite $D\left(A\left(x_A,y_B\right);\vec{u}\right)$ du plan (P) a pour équation de la forme $ax+by+c=0$.

avec $c=-x_u y_A+y_u x_A$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D) .

D. Etude de l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) qui vérifie $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$:

a. Activité :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O,i,j) .

On considère (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) qui vérifie $ax+by+c=0$ et $(a,b)\neq(0,0)$

1. Démontrer que le point $C\left(0,-\frac{c}{b}\right)\in(E)$ .est-ce que $(E)\neq\varnothing$? (on suppose que $b\neq0$)
2. Soit le point $A\left(x_A,y_A\right)$ de (E) , montrer que si $M(x,y)\in(E)$ on a $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$
3. On considère le vecteur $\vec{u}(-b,a)$ en déduit que :
   - $\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0$.
   - Ecrire $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\vec{u}$; puis déterminer l'ensemble des points (E) .
   - Donner la propriété :

b. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O,i,j) .

a et b et c de $\mathbb{R}$ avec $(a,b)\neq(0,0)$.

l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) qui vérifient $ax+by+c=0$ est la droite passant par le point $C\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ si $b\neq0$ (ou $C'\left(-\frac{c}{a},0\right)$ si $a\neq0$) et $\vec{u}(-b,a)$ comme vecteur directeur .

c. Exemple :

On considère (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) qui vérifie $2x+3y+5=0$.

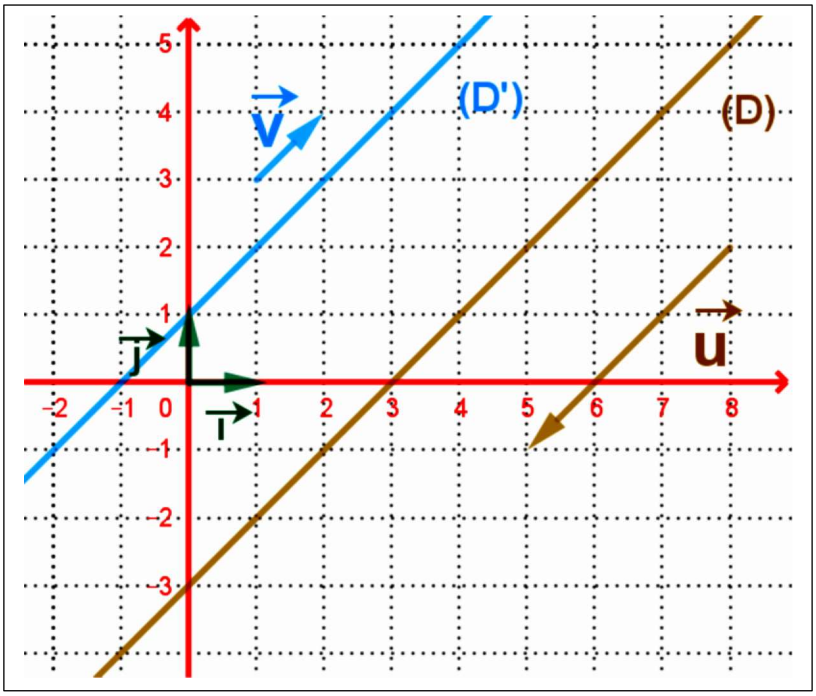
1. Donner un point A de (P) qui appartient à (E) .
2. Déterminer l'ensemble des points de (E) .

V. Droites parallèles dans le plan :

a. Activité :

❖ On considère deux droites d'équations cartésiennes : $(D):ax+by+c=0$ et $(D'):a'x+b'y+c'=0$ du plan (P) est rapporté à un repère (O,i,j) .

1. Déterminer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectivement à (D) et (D') .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante tel que (D) et (D') sont parallèles .
3. En déduit que : $ab'-a'b=0$ $\left(\text{ ou } \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\right)$.



❖ On considère les droites (D) et (D') d'équations réduites (ou simplifiées) $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante tel que (D) et (D') sont parallèles .

5. Donner la propriété .

b. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, i, j) .

- (D) et (D') sont deux droites de (P) tel que : $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$.

  $(D) \parallel (D')$ équivaut à $ab' - a'b = 0$ $\left(\text{ou } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \right)$.

- (D) et (D') sont deux droites de (P) tel que : $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

  $(D) \parallel (D')$ équivaut à $m = m'$.

c. Exercice :

1. Donner équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point $B(2,1)$ et parallèle à la droite (D) d'équation cartésienne : $(D): 3x - 5y + 7 = 0$.

2. On considère la droite (Δ') a pour coefficient directeur $m = -3$ passant par $C(-1,4)$
   - ✓ Donner un vecteur directeur de (Δ') .
   - ✓ Donner une équation d'une droite (D') qui est parallèle à (Δ') .