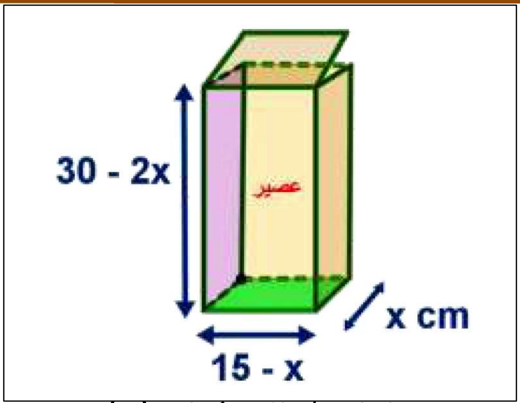
I. Approche sur les polynômes – égalité de deux polynômes :

A. Approche sur les polynômes :

a. Activité :



Une usine de carton décide de construire une boite de carton de la forme d'un parallélépipède droit pour une usine de jus d'orange dont les dimensions sont :
pour le hauteur
et pour sa base $(15-x)$ cm de longueur et x cm de largeur tel que $0<x<15$. (voir figure) .

1. Soit $V(x)$ le volume de la boite exprimer en x vérifier que : $V(x)=2x^3-60x^2+450x$.
2. Quel est le volume (exprimée en litre) de la boite si on donne à x les valeurs suivants : $x=5$; $x=10$.

b. Vocabulaire :

- L'expression : $2x^3-60x^2+450x$ est appelée polynôme de degré 3 .
- On note les polynômes par $P(x)$ ou $Q(x)$ ou $R(x)$ ….
- Pour le degré on note $d°V=3$
- Les nombres 2 et -60 et 450 sont appelés les coefficients du polynômes

c. Définition :

x variable de $\mathbb{R}$. n de $\mathbb{N}^*$.
a_0 , a_1 , a_2 , a_3 ,……, a_{n-2} , a_{n-1} et a_n sont des nombres réels donnés avec $a_n \neq 0$.

- L'expression : $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ est appelée polynôme de degré n (écrit dans le sens croisant) .
- L'expression : $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ est appelée polynôme de degré n (écrit dans le sens décroisant) .
- Chaque terme de cette somme est appelé monôme (exemple a_2x^2 est un monôme de degré 2)
- On note un polynôme par : $P(x)$ ou $Q(x)$ ou $R(x)$.
- Le degré n du polynôme est noté $d°P=n$
- Les réels a_0 , a_1 , a_2 , a_3 ,……, a_{n-2} , a_{n-1} et a_n sont appelés les coefficients du polynômes
- Si $P(x)=a_0$ et avec $a_0\neq 0$ on a $\deg(P)=0$.
- Si $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=a_1=a_0=0$ alors $P(x)=0$ d'où $P(x)$ n'a pas de degré le polynôme est appelé le polynôme nul .

d. Cas particulier :

- $P(x)=ax$ (avec $a\neq 0$) ce polynôme est appelé monôme de 1^er degré .
- $P(x)=ax^2$ (avec $a\neq 0$) ce polynôme est appelé monôme de 2^ième degré .
- $P(x)=ax+b$ (avec $a\neq 0$) ce polynôme est appelé binôme de 1^er degré .
- $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) ce polynôme est appelé trinôme de 2^ième degré .

B. Egalite de deux polynômes :

a. Activité :

On considère les deux polynômes suivants $P(x)=3x^2-4x+7$ et $Q(x)=ax^3+(b-2)x^2+3cx+d$.

1. Déterminer a et b et c et d tel que $Q(x)=P(x)$.
2. Donner la propriété.

b. Propriété :

$P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes sont égaux si et seulement si $\deg(P)=\deg(Q)$ et les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

c. Exercice :

- $P(x)$ est un trinôme de 2ième degré tel que $3x^2-5x+8$ et $P(x)$ leur coefficient de deuxième de degré sont égales.
- $P(0)=-1$ et $P(1)=0$.

Déterminer le polynôme $P(x)$.

II. La somme et le produit de deux polynômes :

a. Activité :

Calculer la somme $P(x)+Q(x)$ pour chaque cas :

- $P(x)=3x^2-5x+1$ et $Q(x)=4x^2+7x-8$.
- $P(x)=3x^2-5x+1$ et $Q(x)=-3x^2+7x-8$.

Calculer le produit $P(x)\times Q(x)$ pour chaque cas :

- $P(x)=5x+1$ et $Q(x)=7x-8$.
- $P(x)=-5x+1$ et $dQ(x)=5x^2-8$.
- Que peut-on dire pour $P(x)+Q(x)$ et de $\deg(P+Q)$.
- Même question pour $P(x)\times Q(x)$.

b. Propriété :

- La somme de deux polynôme $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté par $P(x)+Q(x)=(P+Q)(x)$ tel que le degré de $P(x)+Q(x)$ est inferieur ou égal au degré de chacun d'eux. (ou $d°(P+Q)\leq \sup(d°P;d°Q)$)
- Le produit de deux polynôme $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté par $P(x)\times Q(x)=(P\times Q)(x)$ tel que : $d°(P\times Q)=d°P\times d°Q$.

III. Racine d'un polynôme – division d'un polynôme par le binôme $x-a$ avec $a\in\mathbb{R}$:

A. Racine d'un polynôme :

a. Activité :

On considère le polynôme suivant : $P(x)=x^2-5x+6$.

1. Calculer $P(3)$ déterminer les réels a et b tel que : $P(x)=(x-3)(ax+b)$.

On considère le polynôme suivant : $Q(x)=x^3-5x+2$.

2. Calculer $Q(2)$ déterminer les réels a et b et c tel que : $Q(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.

b. Vocabulaire :

- On a $P(3)=0$ on dit que 3 est racine du polynôme $P(x)$.(ou 3 est zéro du polynôme $P(x)$.
- On a $Q(2)=0$ on dit que 2 est racine du polynôme $Q(x)$.(ou 3 est zéro du polynôme $Q(x)$.

c. Définition :

On dit un réel α est un racine (ou zéro) d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha)=0$.

B. division d'un polynôme par le binôme $x-a$ avec $a\in\mathbb{R}$.

a. Activité :

On considère le polynôme suivant : $P(x)=x^2-5$, on prend $a=2$.

1. Calculer $P(2)$.
2. Vérifier que $x^2-5=(x-2)(x+2)-1=(x-2)(x+2)+P(2)$.
3. Comparer que : $\dfrac{x^2-5}{x-2}$ et $x+2-\dfrac{1}{x-2}$.

b. Vocabulaire :

Pour l'écriture $x^2-5=(x-2)(x+2)-1$

- Le polynôme $x+2$ est appelé le quotient de la division euclidienne de x^2-5 par $x-2$.
- Le réel -1 (ou le polynôme -1) est appelé le reste de la division euclidienne de x^2-5 par $x-2$.

De même :

- Le polynôme $x-2$ est appelé le quotient de la division euclidienne de x^2-5 par $x+2$.
- Le réel -1 (ou le polynôme -1) est appelé le reste de la division euclidienne de x^2-5 par $x+2$.

c. Définition et propriété :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n $(n\in\mathbb{N}^*)$, a est un réel $(a\in\mathbb{R})$.

Le polynôme $P(x)$ s'écrit de la forme $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ avec $\deg(Q)=n-1$.

- Le polynôme $Q(x)$ le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$.
- Le réel $P(a)$ (ou le polynôme $P(a)$) est appelé le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$.

d. Cas particulier :

✓ Si $P(a)=0$ (a est un zéro ou racine du polynôme) on obtient $P(x)=(x-a)Q(x)$

dans ce cas on dit :

- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-a$.
- Le polynôme $P(x)$ est factorisé par $x-a$.

e. Exercice :

1. Montrer que : 3 est racine du polynôme $P(x)=x^2-5x+6$.
2. Est-ce que $P(x)$ est divisible par $x-2$.
3. Ecrire le polynôme $P(a)$ sous la forme de deux polynômes de 1^{er} degré .

C. Méthode pour déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $P(a)$ dans la division de $P(x)$ par $x-a$:

a. . $1^{ère}$ méthode :

On considère que : $P(x)=6x^3-5x^2+4$ et $x-2$ .donc $a=2$

D'après la propriété on a : $P(x)=(x-2)Q(x)+P(2)$ avec $d°(Q)=2$ et $P(2)=32$.

Donc : $Q(x)=ax^2+bx+c$.

Par suite :

$$
\begin{aligned}
P(x)&=6x^3-5x^2+4\\
&=(x-2)Q(x)+P(2)\\
&=(x-2)(ax^2+bx+c)+32\\
&=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+32
\end{aligned}
$$

Donc : $\begin{cases}6=a\\-5=b-2a\\0=c-2b\\4=-2c+32\end{cases}$ par suite on obtient $a=6$ et $b=7$ et $c=14$.

Conclusion : $P(x)=(x-2)(6x^2+7x+14)+32$

C. $2^{\text{ième}}$ **méthode : la division euclidienne** : de $P(x)=6x^3-5x^2+4$ par $x-2$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^3-5x^2+0x+4 & x-2 \\
\hline
- & 6x^3-12x^2 & 6x^2+7x+14 \\
\hline
 & 7x^2+0x+4 & \\
- & 7x^2-14x & \\
\hline
 & 14x+4 & \\
- & 14x-28 & \\
\hline
 & 32 &
\end{array}
$$

D. $3^{\text{ième}}$ **méthode Schéma de Horner** :

a. **Exemple :**

Prenant l'exemple précédent : $P(x)=6x^3-5x^2+4$ et $x-2$ .donc $a=2$. On utilise le tableau suivant :

	x^3	x^2	x	x^0
Coefficient de $P(x)\rightarrow$	6	-5	0	4
		$\times 2$ 12 +	$\times 2$ 14 +	$\times 2$ 28 +
Coefficient de $Q(x)\rightarrow$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{14}$	32 Le reste
$Q(x)$	$6x^2$	$7x^2$	14	
$P(x)$	$P(x)=(6x^2+7x^2+14)(x-2)+32$			
Même résultat avec la division euclidienne ($2^{\text{ième}}$ méthode)				