I. Equations de 1ère degré d'un seul inconnu – inéquation de 1ère degré d'un seul inconnu : (rappel)

A. Equations de 1ère degré d'un seul inconnu :

a. Définition :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).
Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax+b=0$ est appelée équation du 1er degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b.

b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x+3=5x-12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x+3=2x-12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2(x+3)=2x-12$

c. Vocabulaire :

Toute solution d'équation est appelée : solution de l'équation ou racine de l'équation ou zéro de l'équation .

B. – Inéquation de 1ère degré d'un seul inconnu :

a. Définition :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).
Toute inéquation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax+b \leq 0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax+b \geq 0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax+b<0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax+b>0$ est appelée inéquation du 1er degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b.

b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x+3 \leq 5x-12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x+3<2x-12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x+3>2x-12$

c. Le signe du binôme du 1er degré $ax+b$.

- 1er cas $a>0$:
  Son signe à l'aide d'un tableau

Cas $a>0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax+b$	$-$	0	$+$

- 2ième cas $a<0$:
  Son signe à l'aide d'un tableau

Cas $a<0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax+b$	$-$	0	$+$

d. Exercice :

Donner le signe des binômes suivants :

1. $2x+7$ 2. $-3x+4$ 3. $(2x+7)(-3x+4)$

II. Equations de 2ième degré d'un seul inconnu :

A. Equations de 2ième degré d'un seul inconnu

a. Définition :

Soient a et b et c de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).
Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax^2+bx+c=0$ est appelée équation du 2ième degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b et c.

b. Exemple :

$(E): x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$ est –ce que 1 est racine de l'équation (E)

B. Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

a. Activité :

On considère trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

Compléter les étapes suivantes :

$$ax^2 + bx + c = a \times [\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots]$$

$$= a \times \left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\dots}{\dots} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{\dots}{\dots} \right)^2 - \frac{\dots}{4a^2} \right]$$

b. Vocabulaire :

- L' écriture $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$. $(a \neq 0)$
- Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second $ax^2 + bx + c$.
- Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé aussi le discriminant de l'équation : $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.
- le discriminant $b^2 - 4ac$ on le note par Δ on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.
- la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ on l'écrit :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

- d'où : $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

c. Exemple :

On considère l'équation suivante $(E): x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ de l'équation (E) .
2. Ecrire l'équation on utilise la forme canonique de $2x^2 + 4x - 6$.
3. Résoudre l'équation (E) .

C. Détermination les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.

a. Activité :

On a : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ (la forme canonique de $ax^2 + bx + c$)

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\ ;\ (\text{ car } a\neq 0\ )$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\ (1)\ ;\ (\text{ car } a\neq 0\ )$$

1er cas : $\Delta<0$

Donc : $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$ d'où l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Ensemble des solution de l'équation (E) est $S=\varnothing$.

2ième cas : $\Delta=0$

Donc d'après (1) on obtient : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

d'où l'équation admet une solution dans $\mathbb{R}$.
on dit aussi l'équation admet solution double (ou deux solutions confondues) car :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a} \text{ ou } x=-\frac{b}{2a}$$

Ensemble des solution de l'équation (E) est $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

3ième cas : $\Delta>0$

Donc d'après (1) on obtient :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \qquad (\text{ car } \Delta>0\ )$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'où l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x=-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **ou** $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

b. Propriété :

Soit l'équation : $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes(ou deux racines distinctes) dans $\mathbb{R}$:
  $x_1 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution(ou deux racines) dans $\mathbb{R}$: $x = -\frac{b}{2a}$ (solution double).
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution (n'a pas de racines) dans $\mathbb{R}$. ($S = \varnothing$).

c. Exercice :

On considère l'équation suivante : $(E): x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer discriminant Δ de l'équation (E) .
2. Donner l'ensemble des solution de l'équation (E) .

D. La somme et le produit des racines de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$:

a. Activité :

On considère l'équation suivante $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ tel qu'il admet deux racines distinctes x_1 et x_2.

1. Donner x_1 et x_2 en fonction de a et b et c .
2. Calculer $x_1 + x_2$ puis $x_1 \times x_2$; puis donner la propriété .

b. Propriété :

Si l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 on a :

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

c. Exercice :

On considère l'exercice précédente $(E): x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer $x_1 + x_2$ puis $x_1 \times x_2$ par deux méthodes différentes .

E. Factorisation – signe de trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$:

❖ **Factorisation de $ax^2 + bx + c$:**

a. Activité :

On considère le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

1. Donner son discriminant Δ en fonction de a et b et c .
2. Donner la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.
3. D'après le signe de Δ donner la factorisation de $ax^2 + bx + c$ dans les cas possibles en utilisant les racines $x_1 + x_2$.

b. Propriété :

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution $x_1 = \frac{-b}{2a}$ on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$ sous forme de produit de deux polynômes de 1er degré (deux monômes).

❖ **signe de trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$:**

a. Activité :

On considère le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

1er cas : $\Delta > 0$

On a deux racines x_1 et x_2 on pose $x_1 < x_2$.

1. Donner les racines x_1 et x_2 en fonction de a et b et c
2. Factoriser $ax^2 + bx + c$.
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	Signe de a		Signe de a		Signe de a
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	....		....	0	....
$a(x - x_1)(x - x_2)$	....	0	....	0	....
$ax^2 + bx + c$	Signe de		Signe de		Signe de ....

4. En déduit le signe de $ax^2 + bx + c$.

2ième cas : $\Delta = 0$

On a une racine double x_1.

1. Donner la racine double en fonction de a et b.
2. Factoriser $ax^2 + bx + c$.
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
a	Signe de a		Signe de a
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$a(x - x_1)^2$	....	0	....
$ax^2 + bx + c$	Signe de	....	Signe de ....

4. En déduit le signe de $ax^2 + bx + c$.

5. Donner la propriété :

b. Propriété :

Δ est le discriminant du trinôme de second $P(x)=ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$ et x_1 et x_2 sont les racines distinctes du trinôme de second $P(x)$ alors :
  - ✓ à l'extérieure des racines x_1 et x_2 le signe de $P(x)$ est celui de a .
  - ✓ entre les racines x_1 et x_2 le signe de $P(x)$ est le contraire du signe de a .
  - ✓ on a : $P(x_1)=0$ et $P(x_2)=0$.
- Si $\Delta=0$ et x_1 est la racine distincte du trinôme de second $P(x)$ alors :
  - ✓ le signe de $P(x)$ est celui de a pour tout $x\neq\frac{-b}{a}$. $($c.à.d. $x\neq x_1)$
  - ✓ $P(x)$ s'annule pour $x=\frac{-b}{a}$. $\left(\text{c.à.d. } P\left(\frac{-b}{a}\right)=0\right)$.
- Si $\Delta<0$ trinôme de second $P(x)$ n' a pas de racine dans $\mathbb{R}$ on ne peut pas factoriser $P(x)$ et son signe est celui de a pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. Exercice :

On considère l'équation suivante : $(E): x\in\mathbb{R} / 2x^2+4x-6=0$.

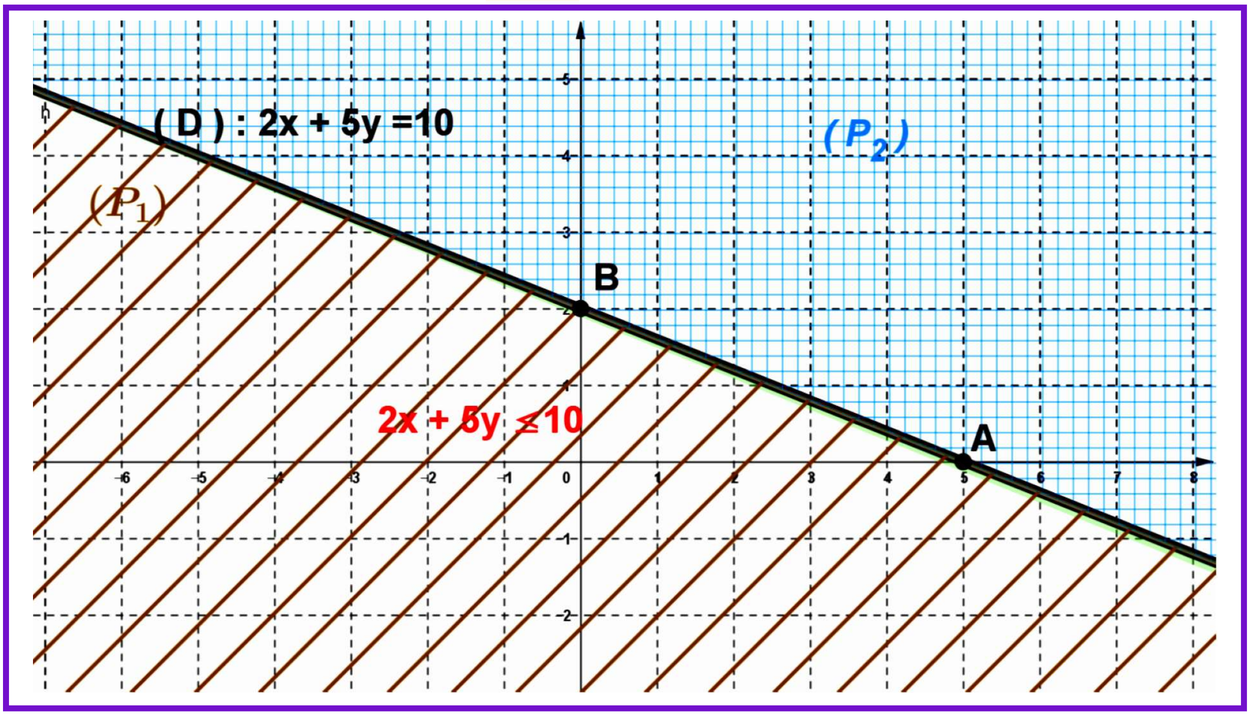
1. Résoudre l'équation (E) .
2. Factoriser $2x^2+4x-6$.
3. Donner le signe de $2x^2+4x-6$.
4. En déduit l'ensemble de solution de l'inéquation : $(E'): x\in\mathbb{R} / 2x^2+4x-6\leq 0$.

III. Equations et inéquations de 1ère degré à deux inconnues :(méthode graphique)

a. Activité :

On considère l'équation suivante : $(E):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x+5y=10$.

1. Est-ce que le couple $(5,0)$ vérifie l'équation (E) ?
2. Est-ce que le couple $(0,2)$ vérifie l'équation (E) ?
3. On considère le plan (P) est rapporté au repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ et $M(x,y)\in(P)$ et vérifie $2x+5y=10$.
   a. Que représente l'équation $2x+5y=10$ dans le plan (P) .
   b. En déduit l'ensemble des points $M(x,y)\in(P)$ qui vérifie $2x+5y=10$.
   c. Construire la droite (D) d'équation cartésienne $(D): 2x+5y=10$.
   d. noté sur la figure le demi plan $(\mathcal{P}_1)$ de bord (ou de frontière) la droite (D) qui contient le point $O(0,0)$ l'autre demi plan sera noté $(\mathcal{P}_2)$.
   e.



4. On considère l'inéquation suivante : $(\mathrm{I}):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x+5y\leq 10$.

a. Prenez plusieurs points $A(x,y)$ quelconque de $(\mathcal{P}_1)$ puis vérifier est-ce que leurs coordonnées (x,y) sont solutions de l'inéquation (I) .

b. Prenez plusieurs points $B(x,y)$ quelconque de $(\mathcal{P}_2)$ puis vérifier est-ce que leurs coordonnées (x,y) sont solutions de l'inéquation (I) .

b. Méthode graphique :

Pour résoudre graphique les inéquations :

- ✓ $(\mathrm{I}):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by+c\leq 0$ ou $(\mathrm{I}):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by+c<0$.
- ✓ $(\mathrm{I}):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by+c\geq 0$ ou $(\mathrm{I}):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by+c>0$.

On suit les étapes suivantes :

- On construit la droite d'équation : $(D): ax+by+c=0$ dans un plan (P) muni d'un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.
- On place un point $A(e,f)$ sur le plan (P) tel que : $A(e,f)\notin(D)$.
- On désigne (arbitrairement) par $(\mathcal{P}_1)$ le demi plan de bord (D) qui contient $A(e,f)$, l'autre demi plan par $(\mathcal{P}_2)$.
- Si les coordonnées (e,f) de A vérifie l'inéquation (I) donc l'ensemble des solutions de (I) toutes les coordonnées des points de ce demi plan $(\mathcal{P}_1)$ fermé (c.à.d. contient la droite (D) si l'inéquation (I) est écrit avec les symboles $\leq$ ou $\geq$ si non toutes les coordonnées des points de ce demi plan $(\mathcal{P}_1)$ ouvert .

- Si les coordonnées (e,f) de A ne vérifie pas l'inéquation (I) donc l'ensemble des solutions de (I) toutes les coordonnées des points de l'autre demi plan $(\mathcal{P}_2)$ fermé [avec bien sûr (c.à.d. contient la droite (D) si l'inéquation (I) est écrit avec les symboles $\leq$ ou $\geq$ si non toutes les coordonnées des points de ce demi plan $(\mathcal{P}_2)$ ouvert].

IV. Système de deux équations de premières degré à deux inconnues :

a. Déterminants d'un système :

❖ **Définition :**

On considère le système suivant $(S):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax+by=c \\ a'+b'y=c' \end{cases}$.

- Le nombre $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ est appelé le déterminant du système (S).
- Le nombre $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x.
- Le nombre $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer y.

❖ **propriété :**

On considère le système suivant $(S):(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax+by=c \\ a'+b'y=c' \end{cases}$.

1er cas $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b\neq 0$

Le système est appelé système de Cramer , le système admet une et une solution c'est le couple $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$, d'où l'ensemble des solutions de (S) est $S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$.

2ième cas $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$ on a :

a. si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ le système n' pas de solution , , d'où l'ensemble des solutions de (S) est $S=\varnothing$

b. si $\Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$ le système se ramène a une seule équation (on prend une par exemple $(S)\Leftrightarrow:(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by=c$) le système a une infinité de solutions . d'où l'ensemble des solutions de (S) est $S=\left\{(x,y)/y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a},x\in\mathbb{R}\right\}$ (si $a\neq 0$) (si $b\neq 0$ $S=\left\{(x,y)/y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b},x\in\mathbb{R}\right\}$).

b. Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants on utilise la méthode des déterminants

a. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -3x+10y=7 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$. c. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$