

方法精讲-数量 2

(笔记)

主讲教师：杜岩

授课时间：2020.10.01



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（笔记）

第四节 工程问题

【注意】工程和行程有相似的地方，但是考场上难度是两极分化的，工程问题是最简单的套路题，行程问题是难度最不可控、最耗时间的一类题。考场上一定要优先解决工程问题，工程问题的三量关系：总量=效率*时间。如每天搬 7 块砖（效率），搬了 10 天，一共搬了 $7*10=70$ 块。

【知识点】工程问题考查题型：

1. 给完工时间型（最简单）：给出多个完工时间。

（1）引例. 要折叠一批纸飞机，若甲单独折叠要半个小时完成，乙单独折叠需要 45 分钟完成。若两人一起折，需要多少分钟完成？

A. 10

B. 15

C. 16

D. 18

答：标准的小学应用题，小学时老师会让大家赋总量为单位 1。先按小学时的思路做：赋工作总量为 1，先统一单位，半小时=30 分钟，对于甲而言，他的效率为 $1/30$ ，乙的效率就是 $1/45$ 。现在两人合作，甲乙共同完成，用 $1 \div (1/30+1/45)$ 。虽然题目算出来了，但是很复杂，不好计算，要优化方法，不想要分数存在，要想办法解决掉分数。若总量正好是 30 和 45 的倍数，效率一定是整数，算起来一定很简单，如赋总量=90，甲效率= $90/30=3$ ，乙效率= $90/45=2$ ，两人合作的时间= $90/(3+2)=18$ 。

（2）步骤：

①赋总量（完工时间的公倍数）。不一定要最小，只要找到公倍数即可，但是数字越小，越好算。

②算效率：效率=总量/时间。

③根据工作过程列方程或式子。

（3）求公倍数：短除法。

①15、20：

方法一：画一个短除号，先提出公因子 5，还剩下 3 和 4，此时没有任何公因子了，最小公倍数=3*4*5=60。

方法二：15 和 20 找公倍数，要分析两个数字的特点，20 是整十的，故公倍数一定是整十的，将 15 变成尾数为 0 的，可以变成 30，20 和 30 找公倍数可以想到 60。

②15、20、25：

方法一：短除法，先找到公因子 5，分别剩下 3、4、5，此时剩下的数字，两两之间没有公因子，故最小公倍数=5*3*4*5。

方法二：15 和 20 的公倍数为 60，相当于找 60 和 25 的公倍数，而 25 不带 0，25 的 2 倍是 50，50 和 60 的公倍数是 300。

③15、20、24：15 和 20 的公倍数是 60，只需找 60 和 24 的关系，60 本身带 0，二者的公倍数一定是带 0 的，24*5=120，120/60=2，刚好找到倍数关系。

2. 给效率比例型：考查频率最高。

3. 给具体单位型：当作普通方程法问题即可。

4. 牛吃草：近两年最热门。

【例 1】（2019 江西法检）现有一条柏油马路需要铺设，甲、乙两施工队合作铺设 3 天可以完成，而乙施工队单独铺设需要 5 天完成。如果甲、乙合作铺设

1 天，乙施工队另有任务，剩余任务由甲单独完成需要多少天？

- A. 4
B. 5
C. 5.5
D. 6

【解析】例 1. 工程问题是套路题，通过条件分类，题干给出多个完工时间（3 天完成、5 天完成），为给完工时间型工程问题。赋总量：赋值总量为完工时间的公倍数， $3 \times 5 = 15$ 。算效率：效率 = 总量 / 时间，甲、乙效率和 = $15 / 3 = 5$ ，乙效率 = $15 / 5 = 3$ ，故甲效率 = $5 - 3 = 2$ 。列式求解：用剩余总量除以甲的效率，合作一天，干了 $2 + 3 = 5$ 份的工作量，剩余工作量 = $15 - 5 = 10$ ，甲用时 = $10 / 2 = 5$ 天。【选 B】

【注意】破题点：要么从题型分析，要么从问法入手。

【例 2】（2019 黑龙江边境）小李的耳机充满电可通话 6 小时，或者待机 210 小时。某天小李乘坐火车，上车时耳机满电，而当他下车时耳机电量刚好用光。如果小李在火车上有一半的时间在通话，其余时间耳机均为待机状态，则他乘坐火车的时长为：

- A. 9 小时 10 分钟
B. 9 小时 30 分钟
C. 10 小时 20 分钟
D. 11 小时 40 分钟

【解析】例 2. 题目不是干活，要找到题目间的相似处，有内在的工程关系，总电量 = 工作总量，给出了通话时间和待机时间，每小时的耗电量就等价于效率，总电量 = 每小时耗电量 * 时间，故本题本质上就是工程问题，且为给完工时间型工程问题（6 小时、210 小时）。赋总量为 210，因为 210 是 6 的倍数。算效率：通话效率 = $210 / 6 = 35$ ，待机效率 = $210 / 210 = 1$ 。列式计算：有一半的时间在通话，则有一半的时间在待机，设通话时间为 x ，则待机的时间也是 x ，故 $35x + x = 210$ ， x 为通话时长，求的是坐火车的时长，即 $2x = 210 / 36 \times 2$ ，结果为 11 个小时多，选 D 项。【选 D】

【知识点】给效率比例型：但凡题干中涉及效率比的，就赋值。

1. 引例. 甲和乙的效率比为 2:3，甲、乙合作完成一项工程需要 10 天，如果甲单独做这项工程需要多少天？

【注意】若 $A:B=2:3$ ，而 $A:C=3:1$ ，A 和 B 中，A 占 2 份；A 和 C 中，A 占 3 份，A 既是 2 份又是 3 份，故 $A=6$ ， $B=3 \times 3=9$ ， $C=1 \times 2=2$ 。

【例 4】（2019 黑龙江边境）某地计划修筑一条道路。如果该道路交由甲施工队先单独施工 6 天，乙施工队再单独施工 15 天即可完工；如果交由乙施工队先单独施工 6 天，那么甲施工队还需要单独施工 24 天才能修筑完成。如果这条道路交由甲施工队单独施工，道路修筑完成需要：

- A. 30 天
- B. 32 天
- C. 36 天
- D. 40 天

【解析】例 4. 修路是工程问题，有同学会认为题干给出了时间，判定题目为给完工时间型工程问题。要注意完工时间是把活完整干完的时间，而题干给出的时间不是完工时间（因为只完成部分的工作），故本题实际上给出的是工作量的关系。

方法一：根据“由甲施工队先单独施工 6 天，乙施工队再单独施工 15 天即可完工；如果交由乙施工队先单独施工 6 天，那么甲施工队还需要单独施工 24 天才能修筑完成”可知， $6 \times \text{甲} + 15 \times \text{乙} = \text{总量} = 6 \times \text{乙} + 24 \times \text{甲}$ ，化简为 $9 \times \text{乙} = 18 \times \text{甲} \rightarrow \text{甲}/\text{乙} = 1/2$ 。赋值甲的效率为 1，乙的效率为 2。工作总量 $= 6 \times \text{甲} + 15 \times \text{乙} = 36$ ，甲的完工时间 $= 36/1 = 36$ ，对应 C 项。

方法二：根据题干信息，可以找到两个人工作时间的变化。方案一：甲先做 6 天，乙做 15 天；方案二：乙做 6 天，甲做 24 天。分析两种方案间的变化，乙从 15 天变为 6 天，相当于乙少做了 $15 - 6 = 9$ 天，而甲多干 $24 - 6 = 18$ 天。乙少干 9 天，甲多干 18 天，也就是说乙每少做 1 天，甲就要多做 2 天。让甲单独做，相当于乙一天都不做，甲一共做 $24 + 6 \times 2 = 36$ 天。【选 C】

【例 5】（2018 辽宁）某工程 50 人进行施工。如连续施工 20 天，每天工作 10 小时，正好按期完成。但施工过程中遭遇原料短缺，有 5 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 15 人并加班施工。若工程队想按期完成，则平均每天需工作多少小时？

A. 12.5

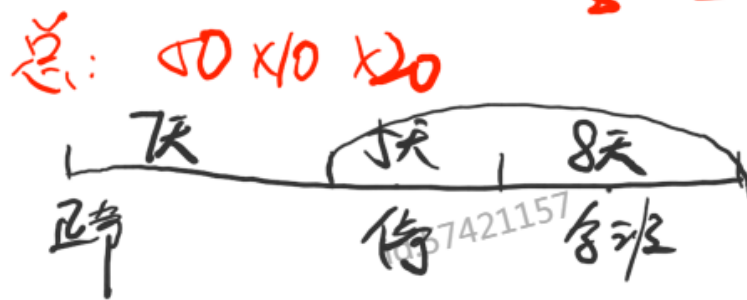
B. 11

C. 13.5

D. 11.5

【解析】例 5. 给出有 50 个人，默认每名工人的效率相同都是 1。效率是单位时间的工作量，这里的时间有天和小时，如果一道题目里出现两种时间单位，尽量以最小单位为准，故假设每名工人每小时的效率为 1，50 个工人每小时的效率就是 50，一天工作 10 小时，一共 20 天，故总量=50*10*20。

方法一：“施工过程中遭遇原料短缺，有 5 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 15 人并加班施工”，可以画时间轴来表示，时间轴代表整个工期，中间有 5 天停工，最后还剩 8 天，要想按期（20 天）完成，则前面工作了 $20-5-8=7$ 天。前面 7 天正常做，工作量=50*10*7，中间停工，工作量为 0，剩下 8 天，增派 15 人，人数变为 65，此时每天工作时间未知，设为 x ，则工作量=65*x*8。总量=50*10*7+0+65*x*8=50*10*20，解得 $x=100/8=12.5$ ，对应 A 项。



方法二：结合例子理解，上学的时候会有假期作业，国庆节老师希望大家每天都做卷子，但是实际上大家都是在假期最后一天加班加点完成，因为中间偷懒了，所以后面要补上。中间 5 天无法施工，在后面 8 天内，不仅要完成原来 8 天要做的任务，还要完成中间 5 天欠的任务，最后 8 天每天的施工时间未知，故设为 t ，则 $65*t*8=50*10*13$ ，解得 $t=12.5$ 。【选 A】

【注意】国庆节有 7 天假，要求每天做 1 张卷子，则 7 天要做 7 张卷子，但是你前 6 天没有做卷子，所以最后一天不仅要当天做 1 张卷子，还要做前面 6 天欠的 6 张卷子。

【知识点】给具体单位型（只是普通的方程法，最简单的应用题）：具体单位是指除时间之外的任何单位。如给出具体效率值，甲每天加工 7 个零件，或是

效率差值，甲每天比乙多做 2 个零件，或是给出具体的总量，甲和乙一起修了 1000 米长的路。

1. 设未知数（设小不设大或设中间量）。

2. 找等量关系列方程。

【例 6】（2020 江苏）某装配式建筑企业接到一个生产 1033 套楼板的订单。甲班组生产 5 天后，乙班组再生产 4 天，刚好完成任务。若甲班组比乙班组每天多生产 23 套，则甲班组生产楼板的套数是：

A. 625 套

B. 645 套

C. 535 套

D. 515 套

【解析】例 6. 给出了“1033 套”为给具体单位型工程问题。甲总量=甲效率*时间，甲生产 5 天，则总量一定是 5 的整数倍，结合选项看，4 个选项都是 5 的倍数，无法排除。甲效率比乙多，甲的生产时间也比乙多，故甲的量一定多， $1033/2=500^+$ ，甲>乙，故甲的量应该在 A、B 项中选。假设乙的效率为 x ，甲的效率就是 $x+23$ 。 $5*(23+x)+4x=1033$ ，解得 $x=102$ ，甲的工作量= $5*(23+102)=5*125=625$ ，对应 A 项。【选 A】

【知识点】牛吃草型：联系生活实际来分析，如晚上妈妈包饺子，先包了 100 个饺子，我一边吃，妈妈一边包，我每分钟吃 5 个，妈妈每分钟包 3 个，问经过多久能把 100 个吃完，每分钟饺子的实际消耗量为 $5-3=2$ 个， $100/2=50$ 分钟，50 分钟能吃完，这就是牛吃草的本质。因此牛吃草问题一定会有增长量和消耗量，要找到最终的实际消耗量，因为要讨论的是剩余量的关系。

1. 判定：工作总量随时间而变化（排比句）。

2. 公式： $Y=(N-X)*T$ ，Y：原有草量；牛的头数*牛吃草速度（一般设为 1），X：草生长的速度，T：时间。（消耗的-增长的）*消耗时间=原有量。

3. 引例. 一片草地，10 头牛 30 天吃完，20 头牛 10 天吃完，问 30 头牛几天吃完？

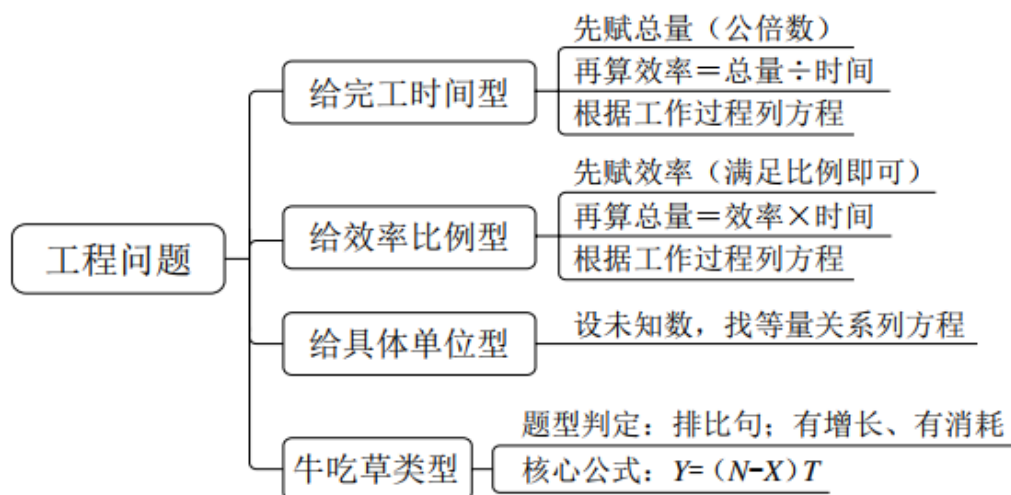
答：核心在于找到实际的消耗量，实际消耗量*时间=原来的量，草地每天都会增长，增长速度是恒定的，默认每头牛每天的效率为 1，10 头牛每天的效率就

是 10，而草每天生长的速度未知，设为 x ，则 $Y = (10 - x) * 30 = (20 - x) * 10$ ，草的生长速度始终不变，解得 $x = 5$ ， $Y = 150$ 。问 30 头牛几天吃完，假设消耗了 t 天， $150 = (30 - 5) * t$ ，解得 $t = 6$ 。

【例 7】（2020 浙江）火车站售票窗口一开始有若干乘客排队购票，且之后每分钟增加排队购票的乘客人数相同。从开始办理购票手续到没有乘客排队，若开放 3 个窗口，需耗时 90 分钟；若开放 5 个窗口，则需耗时 45 分钟。问如果开放 6 个窗口，需耗时多少分钟？

- A. 36
- B. 38
- C. 40
- D. 42

【解析】例 7. 一开始已经储存了很多排队，而每分钟都增加人排队，且增加的数量是相同的。牛吃草问题，公式： $Y = (N - x) * T$ ， N 是消耗量（窗口数）， x 是增长量（每分钟增加的排队人数）， Y 是原有排队人数，“开放 3 个窗口”，默认每个窗口的效率为 1，而人的增长量未知，设为 x ，则 $Y = (3 - x) * 90$ ；同理， $Y = (5 - x) * 45$ ，两式联立， $(3 - x) * 90 = (5 - x) * 45 \rightarrow 270 - 9x = 225 - 45x$ ，解得 $x = 1$ ， $Y = 180$ 。若开放 6 个窗口，每分钟增加 1 人，设需要的时间为 t ，则 $180 = (6 - 1) * t$ ，解得 $t = 180 / 5 = 36$ ，对应 A 项。【选 A】



第五节 行程问题

【注意】行程问题：难度偏高，希望大家能够先理解公式的推导，将讲义上

的题吃透即可。考场上千万不要和行程问题硬碰硬，能读懂就做，读不懂就直接放弃，考场上的行程问题可能需要花 3~5 分钟才能求解出来，性价比不高，一定要把时间节省下来，集中优势力量做简单题，将基础的公式理清楚即可。

1. 三量关系：路程 S =速度 V *时间 T ，行程问题围绕路程、速度和时间展开。

2. 考查题型：

(1) 基础行程。

(2) 相对行程：相遇、追及、环形相遇、环形追及、多次相遇问题、流水行船问题等，考查非常多、非常广泛，难度自然而然就提升了。

(3) 比例行程：判定较难、难度较高。

一、普通行程

【知识点】基础行程：

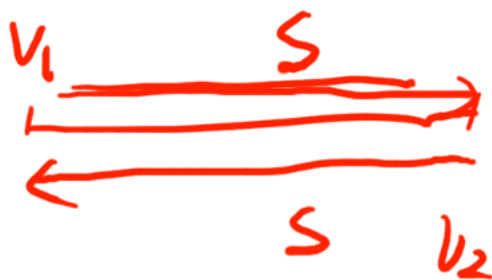
1. 基本公式考查：路程=速度*时间，给出其中任意两个量，如已知速度和时间，要会算路程；已知路程和速度，要会算时间。

2. 平均速度=总路程/总时间。

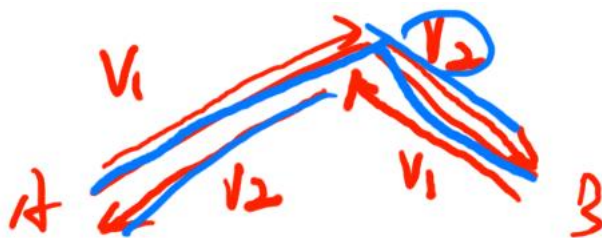
(1) 等距离平均速度公式： $\bar{v}=2*v_1*v_2/(v_1+v_2)$ 。

(2) 常适用于（不同的速度，对应的路程相等）：

①直线往返：如从家到公司，走的路程为 s ，速度为 v_1 ；从公司到家，走的路程为 s ，速度为 v_2 。 v_1 和 v_2 的速度不同，但走的距离相同，故整体可以用等距离平均速度公式求解。



②上下坡往返：如从 A 地到 B 地，先上坡后下坡，上坡速度为 v_1 ，下坡速度为 v_2 ；回来的时候，上坡变下坡，下坡变上坡，原来的下坡速度变为上坡速度，为 v_1 ，原来的上坡速度变为下坡速度，为 v_2 。 v_1 和 v_2 不同，但对应的 s 相同，故上下坡往返也可以用等距离平均速度公式求解。



(3) 推导：如老师每天从家到公司，去上班的时候很开心，所以速度快一点，为 $v_1=100\text{m/min}$ ；上完课后很疲惫，所以速度慢一点，为 $v_2=60\text{m/min}$ ，问从家到公司，再从公司回家的往返平均速度。有同学直接列式： $(100+60)/2=80\text{m/min}$ ，这种思路一定是不对的。根据公式：平均速度=总路程/总时间，不是单纯的速度相加后除以 2（这样做没有意义），假设从家到公司的路程为 s ，代入数据： $2s/(s/100+s/60)=2*v_1*v_2/(v_1+v_2)=2*60*100/(100+60)$ 。

(4) 小结： $v=2s/(s/v_1+s/v_2)=2\div[(v_1+v_2)/(v_1*v_2)]=2*v_1*v_2/(v_1+v_2)$ 。



(5) 假设 A 地和 B 地的中点为 C 点，从 $A\rightarrow C$ 的速度为 v_1 ，从 $C\rightarrow B$ 的速度为 v_2 ，要求从 A 地到 B 地整个过程的平均速度，可以用等距离平均速度计算。不同的速度对应的路程相等，在这一条件下，都可以运用等距离平均速度公式。如本题，AC 对应一半的路程，BC 对应一半的路程，故 $\bar{v}=2*v_1*v_2/(v_1+v_2)$ 。



【例】（2019 联考）小林在距家 1.5 公里的工厂上班。一天，小林出发 10 分钟后，父亲老林发现小林的手机没带，立即追出去，并在距离工厂 500 米的地方追上了他。如果老林追赶的速度比小林快 6 公里/小时，那么，下列关于小林速度 x ，求值所列方程正确的是：

A. $1/x-1/(x+6)=1/6$

B. $1/x-1/(x+6)=1/10$

C. $\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$

【解析】例. 本题读起来比较复杂，感觉不好做，其实是“纸老虎”。梳理如下：已知小林的速度为 x ，则老林的速度为 $x+6$ ，根据公式：时间=路程/速度，故分子“1”为路程，分母为速度，故所求方程为时间， $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+6}$ 的差值为二者的时间差。由题可知，小林从家到追及点为 1 公里，老李从家到追及点为 1 公里，故 $t_{\text{小林}} = \frac{1}{x}$ ， $t_{\text{老林}} = \frac{1}{x+6}$ 。同样的路程，小林先出发 10 分钟，即多消耗了 10 分钟，列式： $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = 10$ 分钟，有同学误选 B 项；注意速度的单位为“km/h”，故时间用“小时”来衡量，则 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{6h}$ ，对应 A 项。

【选 A】

【拓展】（2015 山东）从甲地到乙地 111 千米，其中有 $\frac{1}{4}$ 是平路， $\frac{1}{2}$ 是上坡路， $\frac{1}{4}$ 是下坡路。假定一辆车在平路的速度是 20 千米/小时，上坡的速度是 15 千米/小时，下坡的速度是 30 千米/小时。则该车由甲地到乙地往返一趟的平均速度是多少？

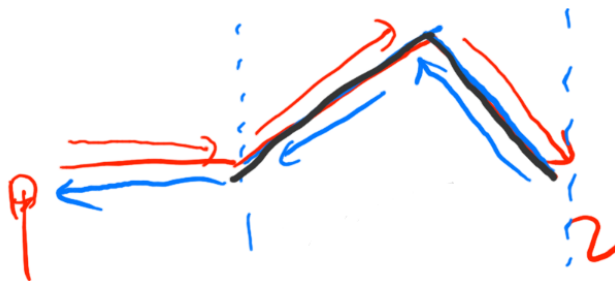
A. 19 千米/小时

B. 20 千米/小时

C. 21 千米/小时

D. 22 千米/小时

【解析】拓展. 画图进行分析，从甲地到乙地：先走平路，再走上坡，最后走下坡；从乙地到甲地：先走上坡，再走下坡，最后走平路。只分析上下坡的过程：上坡和下坡对应的路程相等，根据等距离平均速度公式： $V = \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 30}{15 + 30} = 20 \text{ km/h}$ 。已知平路的速度也为 20 km/h，则全程的平均速度为 20 km/h，对应 B 项。【选 B】



【注意】

1. 小技巧：上下坡平均速度问题，有上坡、下坡和平路，则全程的平均速度一定等于平路速度，到目前为止没有例外。出题人不可能设置平路速度为 20 km/h，

上下坡的平均速度为 25km/h 的题目，这样的题目只能分段计算，计算出每一段的时间，然后用“总路程/总时间”，这属于纯考计算量，没有意义。但凡遇到平路、上坡和下坡，上下坡的平均速度一定与平路速度相同。

2. 只要是上下坡往返即可，不一定上坡的路程要和下坡相等。往返的过程，去的时候是上坡，回来变下坡；去的时候是下坡，回来变上坡，故只要加上“往返”，就不需要“相等”。

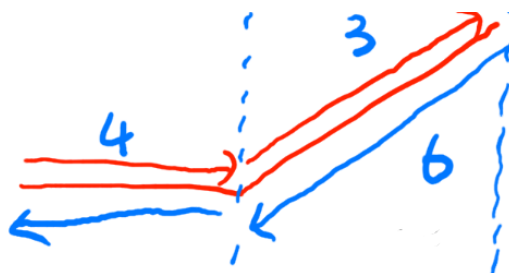


3. 关注路程即可，与坡度无关，不要把问题想复杂了。

【拓展】（2016 云南事业单位）李大夫去山里给一位病人出诊，他下午 1 点离开诊所，先走了一段平路，然后爬上了半山腰，给那里的病人看病。半小时后，半小时后，他沿原路下山回到诊所，下午 3 点半回到诊所。已知他在平路步行的速度是每小时 4 千米，上山每小时 3 千米，下山每小时 6 千米。请问李大夫出诊时共走了多少路？

- A. 5 千米
- B. 8 千米
- C. 10 千米
- D. 16 千米

【解析】拓展. 画图分析如下，先走一段平路，上坡爬到半山腰后给病人看病，看完病后原路返回，原来的上坡变下坡，然后平路返回。上下坡对应的路程相等，故上下坡的平均速度为 4km/h ，全程的平均速度一定等于平路速度，1 点出发、3 点半回来，一共走了 2.5 小时，有同学列式： $4 \times 2.5 = 10\text{km}$ ，误选 C 项。注意看病花费了 0.5 小时，故行走的过程只用了 2 小时，列式： $4 \times 2 = 8\text{km}$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】

1. 秒杀法：出现平路、上坡和下坡，全程的平均速度就等于平路速度。
2. 如果全程均为平路，必须是中点才能使用等距离平均速度公式（保证不同的速度对应的路程相等）。

二、相对行程

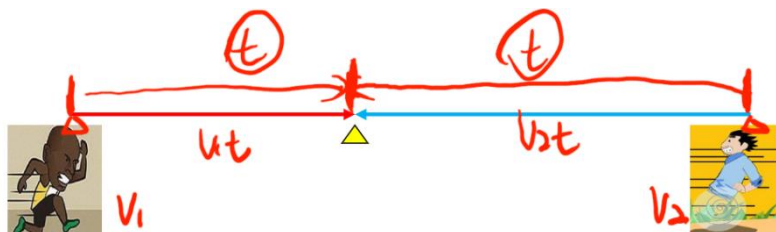
【知识点】 相对行程：

1. 直线相遇：同时相向而行。

（1）公式： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} * T_{\text{遇}}$ 。 $S_{\text{和}}$ ：就是两人走的路程之和。

（2）推导：如图，小黑和小白碰面的过程就是相遇的过程，两人方向一定是相反的。设小黑的速度为 v_1 ，小白的速度为 v_2 ，两人同时出发，往对方跑，假设经过 t 小时后两人相遇，则两人花费的时间均为 t 小时，即时间相等，列式：

$$S_{\text{和}} = v_1 * t + v_2 * t = (v_1 + v_2) * t = V_{\text{和}} * t。$$

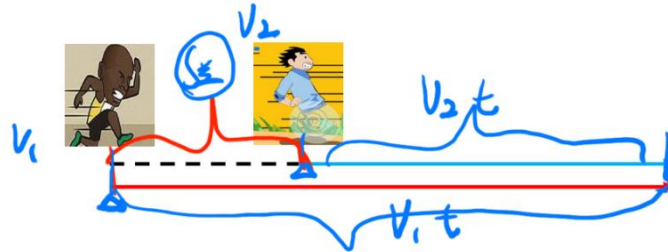


2. 直线追及：同时同向而行。

（1）公式： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * T_{\text{追}}$ 。 $S_{\text{差}}$ ：追及刚开始时两人相差的距离。

（2）推导：小黑和小白相遇之后，小白踹了小黑一脚，然后赶紧往回跑，等小白跑了一段路程后，小黑才反应过来，赶紧去追小白，故最开始时小白已经领先了一段距离，设为 $S_{\text{差}}$ 。两人同时出发，到小白被小黑追上，两人行走的时间是一模一样的，设为 t ；设小黑的速度为 v_1 ，小白的速度为 v_2 ，故小黑走的总路程为 $v_1 * t$ ，小白走的总路程为 $v_2 * t$ ，要想追上，则 $v_1 * t - v_2 * t = S_{\text{差}} = (v_1 - v_2) * t$ 。结合生活实际也可理解，如 A 学习比较差，每次只能考 60 分；B 学习比较好，每次考试都能考 100 分，A 要想追上 B，则需要弥补 40 分的差距，即比对手多考 40 分，将差距弥补上，就处于同一水平线了。追击问题看的就是什么时候将差距弥补上来。

(3) 梳理：最开始两人有一个先天的差距，小白领先了 $S_{\text{差}}$ ，要想追上，就需要将比别人差的部分追赶上（弥补上），经过 t 小时后二者处于同一水平线，列式： $S_{\text{差}} = v_1 t - v_2 t = (v_1 - v_2) * t = v_{\text{差}} * t$ 。

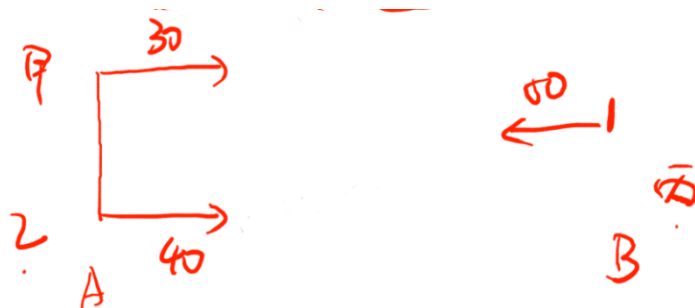


3. 相遇是路程和， $S_{\text{和}} = (v_1 + v_2) * T_{\text{遇}}$ ；追及是路程差， $S_{\text{差}} = (v_1 - v_2) * T_{\text{追}}$ 。相遇问题，两人的速度方向相反；追及问题，两人的速度方向相同。

【例 1】（2019 新疆兵团）甲、乙两车分别以 30 公里/小时和 40 公里/小时的速度同时匀速从 A 地开往 B 地，丙车以 50 公里/小时的速度匀速从 B 地开往 A 地。A、B 两地距离为 120 公里。问丙车遇到乙车后多久会遇到甲车？

- A. 8 分钟
- B. 10 分钟
- C. 12 分钟
- D. 15 分钟

【解析】例 1. 判定题型，本题为相遇问题，借助路程图分析题干。丙车和乙车的速度更快，二者先相遇，然后丙车再与甲车相遇，故一定会相遇两次，问相遇的时间差，单独计算出两次相遇时间即可。根据公式： $s_{\text{和}} = (v_1 + v_2) * t$ ，相遇距离为 A、B 两地的距离，即 120km。丙车和乙车： $120 = (40 + 50) * t_1 \rightarrow t_1 = 120 / (40 + 50) = 120 / 90 = 4/3 \text{h} = 80 \text{min}$ ，丙车和甲车： $120 = (30 + 50) * t_2 \rightarrow t_2 = 120 / (30 + 50) = 3/2 \text{h} = 90 \text{min}$ ，根据题意列式： $90 - 80 = 10 \text{min}$ ，对应 B 项。【选 B】

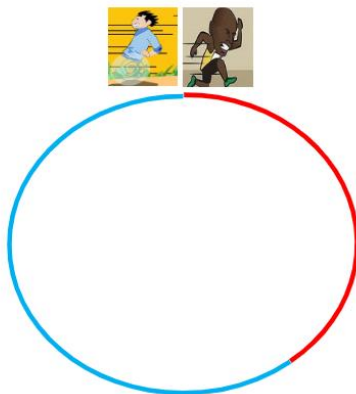


【注意】遇到行程问题，不要先放弃，把最基础的公式理解透彻，考试读题

时如果感觉思路简单、没有弯弯绕绕，就要做；如果条件给的非常复杂、繁琐，放弃即可，不需要纠结。放弃行程问题不可惜，但遇到简单题还是要做。

【知识点】环形相遇（同点相向出发）：

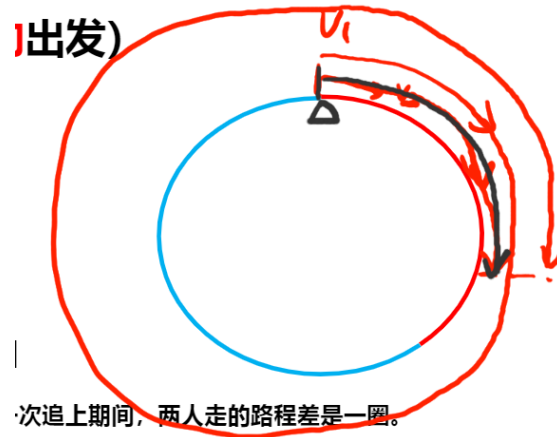
1. 公式： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} * T_{\text{遇}}$ 。
2. 相遇 1 次， $S_{\text{和}} = 1$ 圈（ $S_{\text{和}}$ 就是完整的环形跑道一圈的长度）；相遇 2 次， $S_{\text{和}} = 2$ 圈；相遇 N 次， $S_{\text{和}} = N$ 圈。
3. 本质：每一次相遇到下一次相遇期间，两人走的路程和是一圈。
4. 推导：并不一定要在圆环中，可能是椭圆、正方形、三角形，只要是封闭图形的运动均为环形运动（数学中，所有的封闭图形都默认为环形的概念）。如下图所示，从开始出发到走到相遇点，一共经过了 t 小时，设小黑的速度为 v_1 ，小白的速度为 v_2 ，则小白走的路程为蓝色部分（ $v_2 * t$ ，对应大半圈），小黑走的路程为红色部分（ $v_1 * t$ ，对应小半圈），二者路程加和为完整的一圈。



【知识点】环形追及（同点同向出发）：

1. 公式： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * T_{\text{追}}$ 。
2. 追上 1 次， $S_{\text{差}} = 1$ 圈；追上 2 次， $S_{\text{差}} = 2$ 圈；追上 N 次， $S_{\text{差}} = N$ 圈。
3. 本质：每一次追上到下一次追上期间，两人走的路程差为一圈。
4. 推导：如下图所示，两人从同一起点同向出发，小黑往右走，小白也往右走，但小黑的速度快，小白的速度慢，因此发令枪一响，小黑一马当先就跑到了前面，设小黑的速度为 v_1 ，小白的速度为 v_2 ，当小黑自己走完一圈时，小白可能才走到环形跑道的某一位置，小黑继续跑，直到将小白追上，此时小黑已经比小

白多跑了一圈。故在环形跑道中，要想从后面追上别人，意味着“套圈（从起点出发，小白从起点走到了相遇点；小黑除了从起点走到了相遇点外，还单独多走了一圈的长度）”。



5. 环形相遇和环形追及的共同要求：同点出发，如果两人出发点不同，往同一方向跑，则不为环形追及问题，而是普通的直线追及问题（可以将路程展开成直线进行分析），故一定要同点出发。如果追及过程，两人不是同点出发，第一次追上的过程不是环形追及问题，但从第一次追上到第二次追上的过程就是环形追及问题。

【例 2】（2019 青海法检）某环形跑道，两人由同一起点同时出发，异向而行，每隔 10 分钟相遇一次；如果两人由同一起点同时出发，同向而行，每隔 25 分钟相遇一次。已知环形跑道的长度是 1800 米，那么两人的速度分别是多少？

- A. 126 米/分 54 米/分 B. 138 米/分 42 米/分
C. 110 米/分 70 米/分 D. 100 米/分 80 米/分

【解析】例 2. 出题人的用词不规范，梳理题意：第一次为相遇过程（异向而行），第二次为追及过程（同向而行），一定要注意速度的方向，做题的过程中很可能会遇到类似本题的问法（用词不标准），因此重点在于对速度方向的把握。

方法一：选项为一组数，可以代入排除求解。

方法二：环形跑道相遇一次， $S_{和}$ 为一圈的长度， $s_{和}=1800=(v_1+v_2)*10$ ；环形追及过程，追上一圈的 $S_{差}$ 就是一圈， $s_{差}=1800=(v_1-v_2)*25$ ，求得： $v_1-v_2=72\text{m/min}$ ， $v_1+v_2=180\text{m/min}$ ，联立求解即可，A 项当选。验证 A 项： $126+54=180\text{m/min}$ 、

126-54=72m/min。【选 A】

【知识点】多次迎面相遇（两端出发）：用大速度-小速度计算， v_1 默认大速度， v_2 默认小速度。

1. 推导：牛郎和织女每逢七夕相遇一次，两人从两端出发，在某点相遇，设两人之间的距离为 S ，则两人出发到第一次迎面相遇时一共走 S ；若第一次相遇后没有发现对方，牛郎很着急去了织女家里，发现家里没人，于是返回，织女很着急去了牛郎家里，发现家里也没人，于是返回，在某点相遇，则第二次迎面相遇时两人一共走了 $3S$ ；如果第二次相遇后仍旧没有发现对方，回到各自的家里后继续返回，则第三次相遇时两人共走了 $5S$ 。



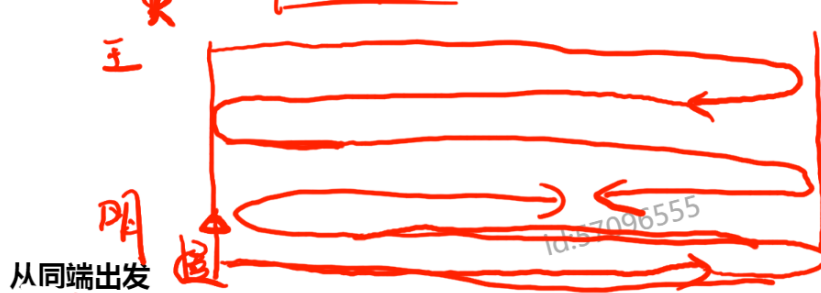
2. 从两端出发：不管是第几次相遇，永远都是奇数个 S 。

- (1) 第 1 次迎面相遇，共走 $1S$ 。
- (2) 第 2 次迎面相遇，共走 $3S$ 。
- (3) 第 3 次迎面相遇，共走 $5S$ 。
- (4) 第 n 次迎面相遇，共走 $S_{\text{和}} = (2n-1)S = V_{\text{和}} * t_{\text{遇}} = (V_1 + V_2) * t_{\text{遇}}$ 。

【知识点】多次迎面相遇（同端出发）：

1. 推导：两人从统一端点出发，小王速度快，小明速度慢，到达终点后均往回走，小王先到终点，小明只走到了全程的某一位置，小王返回后两人第一次相遇，则同端出发，第一次相遇共走了 $2S$ ；相遇后两人没有停下来，两人继续往前走，走到终点后均返回，直到再次相遇，则第二次相遇时共走了 $4S$ ；两人相遇后继续往前走，走到终点后均返回，则第三次相遇两人共走了 $6S$ 。

多次迎面相遇 (同端出发)



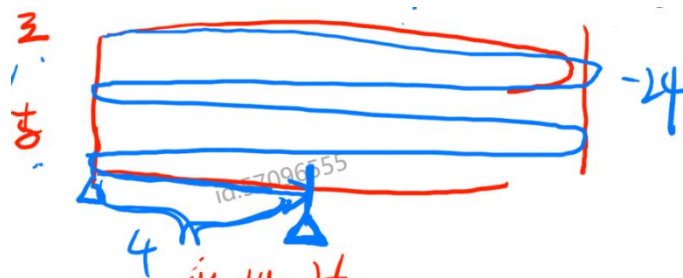
2. 从同端出发：两人一共走偶数个 S 。

- (1) 第 1 次迎面相遇，共走 $2S$ 。
- (2) 第 2 次迎面相遇，共走 $4S$ 。
- (3) 第 3 次迎面相遇，共走 $6S$ 。
- (4) 第 n 次迎面相遇，共走 $S_{\text{和}} = 2nS = (V_1 + V_2) * t_{\text{遇}}$ 。

【例 3】(2019 黑龙江边境) 小王和小李沿着绿道往返运动，绿道总长度为 6 公里。小王每小时走 4 公里，小李每小时跑 8 公里。如果两人同时从绿道的一端出发，则两人第 7 次相遇时的地点距离出发点：

- A. 0 公里
- B. 2 公里
- C. 3 公里
- D. 4 公里

【解析】例 3. 判定题型，本题为多次相遇问题，且为同端出发，根据公式： $2nS = (V_1 + V_2) * T$ ，代入数据： $2 * 7 * 6 = (4 + 8) * T \rightarrow T = 7$ 小时，即经过 7 小时，两人第 7 次相遇。问第 7 次的相遇点，可以分析小王，也可以分析小李，分析小王（小王的速度比较慢，路程比较短，分析起来比较简单）：小王走了 $7 * 4 = 28$ 公里，列式： $4 * 6 = 24$ 公里（来回走了 4 个 6 公里）， $28 - 24 = 4$ 公里，故相遇时距离两人出发地 4 公里，对应 D 项。【选 D】



【注意】

1. 只分析小王或小李其中一个人即可，两人的相遇点是相同的。
2. 若本题改为第 2 次相遇时的地点距离出发点，小王速度慢，小李速度快，小王走到终点再返回时，小王才走到全程的某一位置，然后两人继续往前走，直到第 2 次相遇。找到相遇点后，可以通过找小王走的总路程来确认相遇点的位置，也可以通过小李走的总路程来确认相遇点的位置。小王的速度慢，路程短，故分析小王，无论是分析小王还是小李，二者的相遇点都是同一位置，故分析其中一个人即可。



3. 一定不要算余数， $28=4 \times 6 + 4$ ，故相遇点距离出发点 4 公里。相遇点可能在出发点靠左，也可能在出发点靠右，如果计算余数，可能会出现余数相同的情况，如果是靠左的 4 公里，则相遇点距离出发点的距离为 4 公里；如果是靠右的 4 公里，则相遇点距离出发点的距离为 $6-4=2$ 公里。要想用余数求解，就需要分析偏向（偏左还是偏右）。



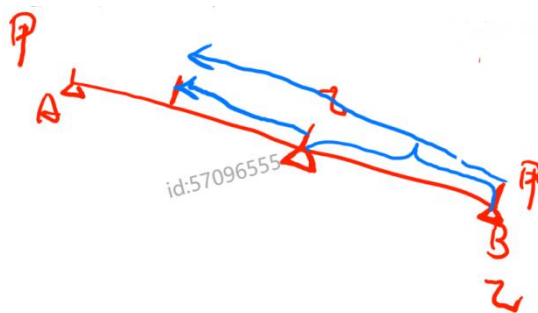
【例 4】（2019 江西法检）甲、乙两公司相距 2000 米，某日上午 8:30 小明从甲公司出发到乙公司，小华同时从乙公司出发到甲公司。两人到达对方公司后分别用 8 分钟时间办事，然后原路返回。假设小明的速度为 4km/h，小华的速度

2. 静水速度=船速（有的时候题目不会直接给出船速，而是给出静水速度，静水速度本质上就是船速，将一艘船放在平静的水面，水是不流动的，故水对船没有任何干扰）、漂流速度=水速（如坐在皮划艇上，会顺着河流顺流而下，不需要划船，水会带着大家走，水速是多少，漂流速度就是多少）。

【例 5】（2020 广东）A、B 两座港口相距 300 公里且仅有 1 条固定航道，在某一时刻甲船从 A 港顺流而下前往 B 港，同时乙船从 B 港逆流而上前往 A 港，甲船在 5 小时之后抵达了 B 港，停留 1 小时后开始返回 A 港，又过了 6 小时追上了乙船。则乙船在静水中的时速为多少公里？

- A. 20
B. 25
C. 30
D. 40

【解析】例 5. 判定题型，本题为流水行船问题，画图分析如下。A 港是上游，B 港是下游，已知甲从 A 港到 B 港一共用了 5 小时，A、B 两座港口相距 300 公里，故甲船航行的速度不但包括了本身的船速，还包括了水速，根据题意列式： $V_{甲} + V_{水} = 300/5 = 60\text{km/h}$ ；当甲船从 B 港往 A 港航行时，乙船走到了途中的某个位置，又过了 6 小时追上乙船，设两船在下图中标蓝的点完成追及过程，则乙船一共走了 $5+1=6$ 小时，在整个追及过程中，乙船最开始领先的优势（甲船、乙船的路程差） $= 6 * (V_{乙} - V_{水})$ ，代入公式： $S_{差} = (V_1 - V_2) * T$ ，代入数据： $6 * (V_{乙} - V_{水}) = (V_{甲} - V_{乙}) * 6 \rightarrow 2V_{乙} = V_{甲} + V_{水} = 60\text{km/h} \rightarrow V_{乙} = 30\text{km/h}$ ，对应 C 项。【选 C】



【注意】本题性价比较低，比较复杂，重点在于：当甲船决定追乙船时，乙船已经走了 6 小时；对于甲船而言，逆流而上的速度为 $V_{甲} - V_{水}$ ，对于乙船而言，逆流而上的速度为 $V_{乙} - V_{水}$ ，故两船的速度差 $= V_{甲} - V_{水} - (V_{乙} - V_{水}) = V_{甲} - V_{乙}$ 。

三、比例行程

【知识点】比例行程：是行程问题中最简单、也是最难的题型。但凡涉及到比例行程的问题，一定没有计算量，找到速度比、时间比、路程比，根据比例放缩求解即可秒选答案；难点在于想不到、没有任何前提/标志（不像工程问题，有类似给完工时间型、效率比例型的标志，也不像相遇问题和追及问题，也可以结合相应的标志代公式求解）。如果要找一个标志，则比例行程的标志为不变量或定值，如 $S=V \times T$ ，只有三个量中有一个不变量，就可以用比例行程求解。

1. 三量关系：路程 S =速度 V *时间 T 。

2. S 一定， V 、 T 成反比（此消彼长）：路程一定，速度快，时间短；速度慢，时间长。

3. V 一定， S 、 T 成正比：谁跑的时间越久，谁跑的路程就越远，即同增同减。

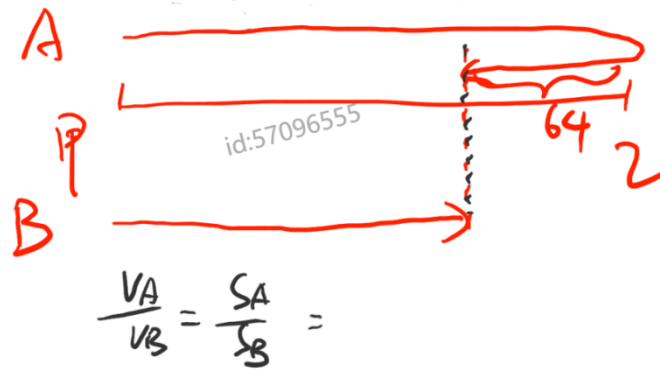
4. T 一定， S 、 V 成正比：谁的效率高、跑的速度快，谁跑的路程就远。

5. 小结：比例行程的标志就是找到不变量（定值），就可以用比例行程求解。

【例 1】（2019 青海法检）A、B 二人开车同时从甲地到乙地，A 到达乙地后立即返回，在距乙地 64 千米处与 B 相遇，已知 A 每小时行驶 40 千米，B 每小时行驶 24 千米，求甲、乙两地相距多少千米？

- A. 192
B. 256
C. 320
D. 512

【解析】例 1. 考虑用比例行程的思维求解，找到不变量，画图分析如下：同时出发，在某地相遇，故 A、B 开车的时间相同，根据公式： $S=V \times T$ ，时间相等，速度之比等于路程之比（速度越大，路程越远；速度越小，路程越近），列式： $V_A/V_B=S_A/S_B=40/24=5/3$ ，设相遇时甲走的路程为 $(S+64)$ km，B 走的路程为 $(S-64)$ km，列式： $5/3=(S+64)/(S-64) \rightarrow 5S-5 \times 64=3S+3 \times 64 \rightarrow 2S=8 \times 64 \rightarrow S=4 \times 64=256$ km，对应 B 项。【选 B】



【注意】比例行程问题没有任何计算量，根据比例、份数的特性放缩求解即可。一定要找到不变量。

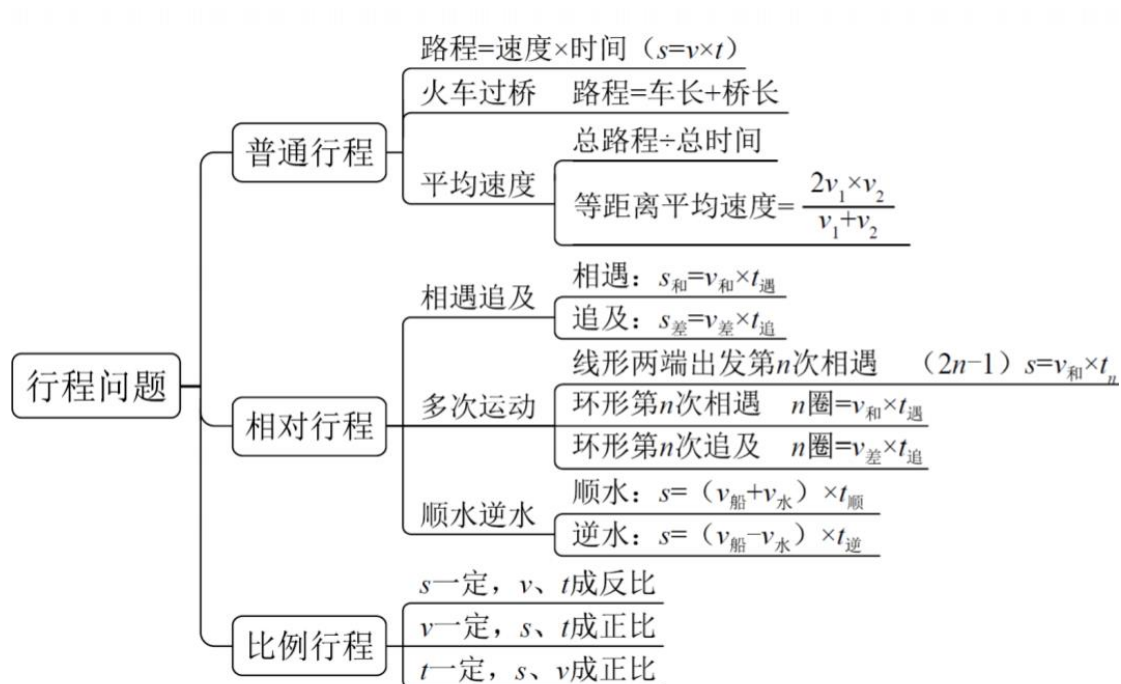
【例 2】（2020 山东）甲、乙两人在一条 400 米的环形跑道上从相距 200 米的位置出发，同向匀速跑步。当甲第三次追上乙的时候，乙跑了 2000 米。问甲的速度是乙的多少倍？

- A. 1.2 B. 1.5
C. 1.6 D. 2.0

【解析】例 2. 问速度的倍数关系，时间相等，则速度之比等于路程之比，列式： $V_{甲}/V_{乙}=S_{甲}/S_{乙}=S_{甲}/2000$ ，本题只需要求出 $S_{甲}$ 即可。画图分析：甲第一次追上乙时，为直线追击，甲比乙多跑 200 米（乙比甲领先 200 米，只要将这 200 米弥补到位，甲就能和乙“平起平坐”）；第一次追上后，甲、乙两人处于同一起点，从第一次追及到第二次追及，为环形追及问题，追上 1 次，则“套一圈”，多走 400 米；从第二次追及到第三次追及，依然是“套圈”，则甲比乙多走 400 米。故整个追及过程中，甲比乙多走了 $200+400+400=1000$ 米，即 $V_{甲}/V_{乙}=(2000+1000)/2000=3000/2000=1.5$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】只要找到了不变量，就可以通过比例关系推导结果。



【注意】行程问题：

1. 普通行程：

(1) 公式：路程=速度*时间 ($s=v*t$)。

(2) 火车过桥：路程=车长+桥长。

(3) 平均速度：

①公式：总路程/总时间。

②等距离平均速度= $2v_1*v_2 / (v_1+v_2)$ 。

2. 相对行程：

(1) 相遇追及：

①相遇： $s_{和}=v_{和}*t_{遇}$ 。

②追及： $s_{差}=v_{差}*t_{追}$ 。

(2) 多次运动：

①线形两端出发第 n 次相遇： $(2n-1)s=v_{和}*t$ 。

②环形第 n 次相遇： $n圈=v_{和}*t_{遇}$ 。

③环形第 n 次追及： $n圈=v_{差}*t_{追}$ 。

(3) 顺水逆水：

①顺水： $s = (v_{\text{船}} + v_{\text{水}}) * t_{\text{顺}}$ 。

②逆水： $s = (v_{\text{船}} - v_{\text{水}}) * t_{\text{逆}}$ 。

3. 比例行程：

(1) s 一定， v 、 t 成反比。

(2) v 一定， s 、 t 成正比。

(3) t 一定， s 、 v 成正比。

【注意】工程问题（给完工时间、给效率比例、给具体单位、牛吃草问题）务必掌握；行程问题需要记住相对行程的公式、普通行程问题中的平均速度，其余内容自行调整，精力好的再学习，精力不够的则其他内容都不是重点，行程问题一旦考到，十有八九不是没时间做，就是不会做，但简单的行程问题是可以解决的，不要全部放弃，给自己留一线生机。

【答案汇总】

工程问题：1-5：BDACA；6-7：AA

行程问题：普通行程：A；相对行程：1-5：BADAC；比例行程：1-2：BB

遇见不一样的自己

Be your better self