

方法精讲-数量 4

(笔记)

主讲教师：杜岩

授课时间：2020.10.03



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 4（笔记）

【注意】本节课程的内容比较硬核、记得公式比较复杂，但选的例题比较简单、具有代表性，重点在于学会基础理论，只要能够看懂题目的表述，能想到对应的结论即可。考场上排列组合与概率可做可不做，题目读懂了、问法比较简单、题目设置比较简单就做，但大多数情况下排列组合与概率问题的难度较高，要学会抉择。近几年排列组合与概率越考越简单，尤其是概率问题，很多都是送分题。

第八节 排列组合与概率

一、排列组合

（一）基础概念

【知识点】分类与分步：

1. 分类相加：要么……要么……。
2. 分步相乘：既……又……。
3. 例：

（1）如国庆节出去旅游，想从北京出发，去上海，结果查行程的时候发现从北京到上海一共有 2 趟飞机可供选择，还有 3 趟高铁可供选择，问所有的交通方式。要么从 2 趟飞机中随便订一个、要么从 3 趟高铁中随便订一个，选择有 $2+3=5$ 种。飞机和高铁是并列的关系，分类用加法。做题的时候建议多造句，如果能用“要么……要么……”造句，则用加法。如本题，要么坐飞机，要么坐高铁，多者任选其一均可达到目的，这种情况都属于分类，分类之间用加法。

（2）如从北京到上海，然后再去广州，从北京到上海有 2 趟高铁（A、B），从上海到广州有 3 趟高铁（1、2、3），问从北京到广州的所有选择方式。用乘法计算，列式： $2 \times 3 = 6$ 种，前两种高铁和后三种高铁有一一对应的关系，可以是 $A \rightarrow 1$ 、 $A \rightarrow 2$ 、 $A \rightarrow 3$ 、 $B \rightarrow 1$ 、 $B \rightarrow 2$ 、 $B \rightarrow 3$ 。本题为分步的过程，分步即分成多个步骤，且这些步骤必须同时发生才能达到目的。要想从北京到广州，可以从北京先到上海，然后再从上海到广州，将这个过程拆分成两个步骤，且这两个步骤必须同时发生、缺一不可，为分步的概念，用乘法计算。

【例 1】(2019 河南司法所)某市从市儿童公园到市科技馆有 6 种不同路线，从市科技馆到市少年宫有 5 种不同路线，从市儿童公园到市少年宫有 4 种不同路线，则从市儿童公园到市少年宫的路线共有：

- A. 24 种
B. 36 种
C. 34 种
D. 38 种

【解析】例 1. 要想从儿童公园到少年宫，可以一步到位（直达），共有 4 种方式；如果时间比较多，想要多转一转、玩一玩，也可以选择转乘的方式，即先到科技馆，再从科技馆到少年宫，将整个过程分成两步，有先后、两者同时发生才能达到目的，是“既……又……”的关系，故这两个步骤之间用乘法相连，为 $6 \times 5 = 30$ 种方式。要么直达，要么转乘，多者选其一，用加法计算，列式： $4 + 30 = 34$ 种，对应 C 项。【选 C】

【知识点】排列与组合（本质上概念差不多，均可以统一为从 n 个主体中选出 m 个所需的主体）：

1. 如从 10 个人中选 3 人，大数（10）写下面，小数（3）写上面，然后分析
问法：如果是“出来排队领奖”，则排名靠前的领一等奖、排名第二的领二等奖、
排名第三的领三等奖，每个人都想领一等奖，设为甲、乙、丙三人，则为甲领一
等奖、乙领二等奖、丙领三等奖；如果颠倒顺序，变为丙、乙、甲，人没有变但
顺序变了，此时丙领一等奖、乙领二等奖、甲领三等奖。每个人领的奖不一样，
结果肯定变了。先将数字写好，然后再讨论顺序，如果人和人之间的顺序变了、
结果也变了，说明与顺序有关，用 A 计算。

2. 如下课后打扫卫生，从 10 个人中选 3 人做清洁、打扫卫生，写为 10 和 3，如选了易烱千玺、王源和王俊凯三人，他们是 tfboys 这个组合，说明今天的卫生是这个组合的人完成的；如果这三个人的顺序改了，改为王源、王俊凯、易烱千玺去打扫卫生，同样是这三个人，只要这三个人绑定在一起，不管谁前谁后，这三个人永远都是 tfboys 这个组合，且打扫卫生的工作永远都是这三个人做的（不管顺序再怎么变，组合都是这三个人），即调换顺序后结果没有任何变化，故用 C 计算，为 $C(10, 3)$ 。

3. 排列 (A): 与顺序有关, $A(n, m)$ = 从 n 开始往下乘 m 个数 (下面的数决

定从几开始乘，上面的数决定连乘几个数，依次递减）。如 $A(10, 3) = 10 \times 9 \times 8$ ， $A(7, 4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4$ 。

4. 组合 (C)：与顺序无关， $C(n, m) = \text{分子 } A(n, m) / \text{分母 } A(m, m) = \text{从 } n \text{ 开始往下乘 } m \text{ 个数} / \text{从 } m \text{ 开始往下乘 } m \text{ 个数}$ ，是分数形式。如 $C(10, 3) = A(10, 3) / A(3, 3) = 10 \times 9 \times 8 / (3 \times 2 \times 1)$ ， $C(7, 4) = A(7, 4) / A(4, 4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 / (4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。

5. 判定标准：从已选的主体中任意挑出两个，调换顺序。有差别，与顺序有关 (A)；无差别，与顺序无关 (C)。

6. 引例：

(1) 从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷。

答：从 7 个葫芦娃中选 2 个，为 7 和 2，葫芦娃救爷爷的结果与顺序无关，如先选大娃再选二娃，这两人救爷爷的结果就是“送人头”；如果调换顺序，先选二娃再选大娃，顺序改变结果依然是“送人头”，故调换顺序后结果相同，列式： $C(7, 2)$ 。

(2) 从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷（第一个去探路，第二个去打架）。

答：写成 7 和 2 的形式，如果先选大娃再选二娃，则大娃探路、二娃打架，此时打架的会“送人头”，探路的可以“苟活”；如果颠倒顺序，先选二娃再选大娃，则二娃探路、大娃打架，此时结果有区别。顺序改了，对应的任务变了，最终的结果就不一样了，为 $A(7, 2)$ 。

【例 2】(2020 北京) 某家电维修公司的职工每人每天最多完成 5 次修理任务。维修工小张上个月工作了 20 天，总计完成修理任务 98 次。则他上个月每天完成的修理任务次数有多少种不同的可能？

- | | |
|--------|--------|
| A. 190 | B. 210 |
| C. 380 | D. 400 |

【解析】例 2. 本题比较怪，每人每天最多修理 5 次，小张上个月一共工作了 20 天，如果小张是满状态，则 20 天一共修理了 $5 \times 20 = 100$ 次维修任务，而上个月实际共完成 98 次维修任务，即比满状态少了 2 次，故本题的重点在于这 2 次是怎么少的：可能是其中 1 天只完成了 3 次任务，剩余 19 天每天完成 5 次任务；也可能是其中 2 天只完成了 4 次任务，剩余 18 天每天完成 5 次任务。要么

选 1 天，要么选 2 天，这二者之间用加法计算。

(1) 有 1 天修理 3 次，剩余 19 天修理 5 次：从 20 天中选 1 天只修理 3 次，为 $C(20, 1) = 20$ 种。

(2) 有 2 天修理 4 次，剩余 18 天修理 5 次：从 20 天中选 2 天只修理 4 次，假设选了 1 号和 2 号，为一种情况，先选 2 号再选 1 号和先选 1 号后选 2 号，均为前两天每天完成 4 次任务，即调换顺序后结果不变，无顺序，列式： $C(20, 2) = A(20, 2) / A(2, 2) = (20 \times 19) / 2 = 190$ 种情况。

他上个月每天完成的维修任务次数有 $20 + 190 = 210$ 种情况，对应 B 项。**【选 B】**

【注意】从 20 天中选 2 天即可，假设选了 1 号和 3 号（选 5 号和 7 号等同理），先选 1 号再选 3 号和先选 3 号再选 1 号，结果都是这两天每天做 4 次任务，故调换顺序结果不变。

【例 3】（2017 吉林）罐中有 12 颗围棋子，其中 8 颗白子，4 颗黑子。从中任取 3 颗棋子，则至少有一颗黑子的情况有：

- A. 98 种
- B. 164 种
- C. 132 种
- D. 102 种

【解析】例 3. 方法一：问至少有一颗黑子的情况，一共要取三颗棋子，分以下几种情况：

(1) 1 颗黑子、2 颗白子：从 4 颗黑子中选 1 颗，为 $C(4, 1)$ ；从 8 颗白子中选 2 颗，白子和白子是一样的，没有区别，顺序与结果无关，为 $C(8, 2)$ 。先选 1 颗黑子再选 2 颗白子，两个步骤必须同时发生，用乘法计算，列式： $C(8, 2) * C(4, 1)$ 。

(2) 2 颗黑子、1 颗白子：从 4 颗黑子中选 2 颗，为 $C(4, 2)$ ；从 8 颗白子中选 1 颗，为 $C(8, 1)$ 。分两步，用乘法计算，列式： $C(4, 2) * C(8, 1)$ 。

(3) 3 颗黑子：从 4 颗黑子中选 3 颗，为 $C(4, 3)$ 。

要么情况 1，要么情况 2，要么情况 3，用加法计算，列式： $C(8, 2) * C(4, 1) + C(4, 2) * C(8, 1) + C(4, 3) = 8 \times 7 / (2 \times 1) \times 4 + 4 \times 3 / (2 \times 1) \times 8 + 4 = 164$ 种，对应 B 项。

方法二：出现“至少一个”的问法，正面分析情况较多（有三种情况），可以用逆向思维求解，列式：总情况数-反面情况数（全部都是白子），反面情况为从 8 颗白子中选 3 颗白子，总情况为从 12 颗棋子中选 3 颗棋子，列式： $C(12, 3) - C(8, 3)$ ，对应 B 项。【选 B】

（二）经典题型

【知识点】枚举法：所有的排列组合题中，除了枚举法之外，难度可能都很高。问有多少种可能性、多少种结果，且选项非常小（十位数或个位数），往往暗示这需要枚举，穷举完所有的结果即可。这种排列组合问题一定要做，顶多也就十几种情况，思考一下就可以做出来，之前的题目不让大家枚举是因为要穷尽 164 种结果，肯定是不现实的。

【例 1】（2019 青海法检）小明计划到商店为自己购买衣服和鞋子，预算不超过 800 元。已知衣服每套的售价是 99 元，每双鞋子的售价是 67 元。如果小明至少要买 4 套衣服和 3 双鞋，那么他有多少种不同的购买方式？

- A. 5
- B. 7
- C. 8
- D. 4

【解析】例 1. 问有多少种不同的方式、结果，为排列组合问题，选项最多为 8 种方式，故用枚举法求解。一共 800 元，至少要买 4 套衣服和 3 双鞋，共计花费 $4 \times 99 + 3 \times 67 = 597$ 元，故剩余 $800 - 597 = 203$ 元可自行支配：（1）2 套衣服、0 双鞋子；（2）1 套衣服、0 双鞋子；（3）3 双鞋子、0 套衣服；（4）2 双鞋子、0 套衣服；（5）1 双鞋子、0 套衣服；（6）1 套衣服、1 双鞋子（花费了 $99 + 67 = 166$ 元，剩余的钱什么都买不了），此时共 6 种情况，无选项对应。注意还少了一种情况（什么都不额外买，如小明是个好孩子，父母让买多少东西就买多少东西，不额外多花钱）：（7）0 套衣服、0 双鞋子，故最终结果为 7 种，对应 B 项。【选 B】

【注意】

1. 一定要穷举完所有的结果，不能重复或遗漏，考场上枚举的题目一定要做。
2. 解析中列举的情况都是除了 4 套衣服、3 双鞋外多买的部分。

3. 本题考的就是枚举法。

【知识点】捆绑法：相邻。

1. 引例：甲乙丙丁戊己 6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须相邻，有（ ）种不同的站法？

答：要求“必须相邻”、挨着、不能分开，可以用绳子将 3 个人捆成 1 个大“胖子”，这就是捆绑法的运用，但凡涉及到“相邻”的概念，就用捆绑法解题。本来是 6 个人排队照相，现在将 3 个人捆成了 1 个大“胖子”，则剩余 4 个主体。4 个主体排队照相，结果与顺序有关（如果站成一排照相，谁在 C 位都是不一样的，如甲在最中间或乙在最中间拍出来的效果不同；如果站成一列照相，大家都喜欢站在最后，站在最后的拍出来脸最小、站在最前面的拍出来脸最大，所以站成一列照相也是有讲究的），故照相永远都是顺序问题，但凡涉及到照相、排队的问法，一定要参照最后的顺序。

6 个人变成 4 个元素，4 个元素站在一排，4 个空放 4 个人，与顺序有关，为 $A(4, 4)$ ；甲、乙、丙捆成了一个大“胖子”，内部需要考虑顺序（如甲乙丙、乙甲丙、丙甲乙等，需要讨论），为 $A(3, 3)$ 。先捆（先看外部顺序，再看内在顺序）再排，分步用乘法，列式： $A(4, 4) * A(3, 3)$ 。

4 个元素对应 4 个位置，写为 4 和 4，结果与顺序有关则用 A，结果与顺序无关则用 C。

2. 方法:

(1) 先捆：把必须相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。

(2) 再排: 将捆绑后的看成一个元素, 进行后续排列。

【例 2】(2019 四川) 某场科技论坛有 5G、人工智能、区块链、大数据和云计算 5 个主题，每个主题有 2 位发言嘉宾。如果要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，则共有多少种不同的发言次序？

- A. 120
B. 240
C. 1200
D. 3840

【解析】例 2. “必须相邻”用捆绑法，将 5G 的两个人捆成大“胖子”、将人

工智能的两个人捆成大“胖子”、将区块链的两个人捆成大“胖子”、将大数据的两个人捆成大“胖子”、将云计算的两个人捆成大“胖子”。一共 5 个主题，每个主题有 2 个人，则共有 10 个人，两两捆绑后最终变为 5 个元素，其外在顺序为 $A(5, 5)$ ，代表的是 5 个主题谁先谁后；每一个主题都有内部顺序，如甲、乙是 5G 部门的，甲先乙后和乙先甲后的结果不同（人的顺序改了，发言次序就不一样了），故结果与顺序有关，用 A 计算，每个主题的内部顺序均为 $A(2, 2)$ 。既外又内，全部同时发生，分步用乘法，列式： $A(5, 5) * A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2) = 5! * 2! * 2! * 2! * 2! = 120 * 32 = 3000^+$ ，对应 D 项。【选 D】

【注意】

1. 如果只乘一个 $A(2, 2)$ ，代表了只安排了其中一个主题，其余主题均未考虑。每个主题的内容顺序都需要考虑，才能完成最后的结果。
2. “ $5 * A(2, 2)$ ”代表的是 5 个 $A(2, 2)$ 相加；“ $A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2) * A(2, 2)$ ”代表的是 $[A(2, 2)]^5$ 。

【知识点】插空法：不相邻

1. 引例：甲乙丙丁戊己 6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须不相邻，有（ ）种不同的站法？

答：要想将甲、乙、丙三人隔开，如果有空隙，将甲、乙、丙安排在其余人形成的空隙中即可满足题意。丁、戊、己没有任何要求，故先排丁、戊、己，3 个人一定会形成 4 个空，将甲、乙、丙安排在这 4 个空中即可。



要想不相邻，则用插空法。丁、戊、己 3 个人站 3 个位置照相，为 $A(3, 3)$ ；3 个人形成 4 个空隙，将甲、乙、丙安排在这 4 个空隙中，为 4 和 3，排队照相与顺序有关，为 $A(4, 3) = 4 * 3 * 2$ ，如选了第一个空、第二个空、第三个空，可以是甲、乙、丙，也可以是乙、甲、丙，空永远不变，3 个人站的顺序不同，结果

就变了，故用 A 计算（甲从 4 个空中任意选 1 个空，剩余 3 个空；乙从 3 个空中任意选 1 个空，剩余 2 个空；丙从 2 个空中任意选 1 个空），列式： $A(3, 3) * A(4, 3)$ 。如果顺序变了结果不变，则用 C 计算。

2. 方法：

（1）先排：先安排可以相邻的元素，形成若干个空位；

（2）再插：将不相邻的元素插入到空位中。

【例 3】（2018 浙江事业单位）某地组织 9 名政协委员负责调研农民工子弟小学教学情况。调研结束合影前有 3 名委员因紧急工作已经离开，学校决定安排 3 名小学生代表与委员一起坐在前排。现要求每位小学生的两边都坐着政协委员，一共有多少种不同的方式？

A. 7200

B. 29600

C. 43200

D. 362880

【解析】例 3. 3 名委员离开后剩余的政协委员数为 $9-3=6$ 人，已知每位小学生的两边都坐着政协委员，说明小学生的左右两边不能是小学生，即小学生之间是完全不能相邻的，用插空法求解。委员可以相邻，先排可以相邻的 6 个委员，6 个人站 6 个位置，为 $A(6, 6)$ ，排队照相的题目默认有顺序；6 个人形成 7 个空隙，有同学考虑将 3 个学生放在 7 个空隙中，列式： $A(7, 3)$ ，注意题干说明每位小学生的两边都坐着政协委员，如果小学生坐在第一个位置，则左侧没有政协委员，不满足题意，故首尾都不能坐人，只有 5 个空隙满足题意，5 个空隙放 3 个人，为 $A(5, 3)$ 。用乘法计算，列式： $A(6, 6) * A(5, 3) = 720 * 60 = 43200$ 种，对应 C 项。【选 C】

【注意】

1. 考试不可以带计算器。

2. 本题只需要体现剩余的 6 名政协委员和新选出来的 3 个学生的关系即可。如果纠结 9 名政协委员的排法，则这道题就没法做了；且不清楚学校到底有多少学生、到底是哪 3 名学生和政协委员坐在一起等，这属于过度脑补，将现有的人进行排序即可。

【例 3】(2020 浙江) 某公司对 10 个创新项目进行评选，选出最优秀的 3 个项目投入运行。小张随机预测 3 个项目将会入选。问他至少猜对 1 个入选项目的概率在以下哪个范围内？

- A. 不到 50%
- B. 50%~60%
- C. 60%~70%
- D. 超过 70%

【解析】例 3. 判定题型，本题没有给出任何概率值，故需要结合概率公式求解，根据公式： $P = \text{满足要求的情况数} / \text{总情况数}$ 。问至少一个入选，要想做得快，则从对立面进行考虑，列式： $1 - \text{反面情况} = 1 - \text{全部都没猜对}$ ，故 $P_{\text{反面}} = \text{全部都没猜对的情况数} / \text{总情况数}$ 。

总情况数：从 10 个项目中随机选 3 个，10 写在下面、3 写在上面。设为甲、乙、丙三个项目投入运营，乙、甲、丙或丙、甲、乙的顺序虽然不同，但永远都是这 3 个项目投入运营，故顺序改变结果不变，为 $C(10, 3)$

反面情况数（全部都没猜对）：从没选的 7 个项目中任意选 3 个（就像大家买彩票，要想不中奖，则从自己没选的几个号中挑 3 个作为中奖号码），为 $C(7, 3)$ 种情况。

$P = 1 - C(7, 3) / C(10, 3) = 1 - [A(7, 3) / A(3, 3)] \div [A(10, 3) / A(3, 3)] = 1 - 7 \times 6 \times 5 / (10 \times 9 \times 8) = 17/24$ ，首位商 7，对应 D 项。【选 D】

【例 4】(2018 辽宁) 一张纸上画了 5 排共 30 个格子，每排格子数相同。小王将 1 个红色和 1 个绿色棋子随机放入任意一个格子(2 个棋子不在同一格子)，则 2 个棋子在同一排的概率：

- A. 不高于 15%
- B. 高于 15%但低于 20%
- C. 正好为 20%
- D. 高于 20%

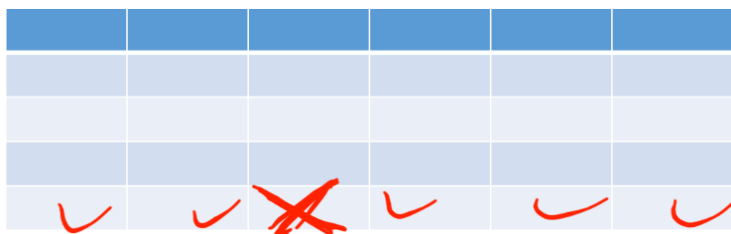
【解析】例 4. 方法一：常规逻辑。5 排共 30 个格子，则每排有 6 个格子，要求 2 个棋子在同一排，根据公式： $P = \text{满足要求的情况数} / \text{总情况数}$ 。

(1) 总情况数：1 个红色和 1 个绿色棋子随机放入任意 1 个格子 (2 个棋子不在同一格子)，需要占据 2 个格子，从 30 个格子中随机选 2 个格子，调换顺序后结果不同（如下图所示，调换后每个棋子对应的位置都不一样了），如在不同的两排看电影的体验不同，为 $A(30, 2)$ 。

(2) 满足要求的情况数：从 5 排中任选 1 排，为 $C(5, 1)$ ；假设为第 5 排，一共 6 个格子，从中任选 2 个格子，结果与顺序有关，为 $C(5, 1) * A(6, 2)$ 。
 $P = [C(5, 1) * A(6, 2)] / A(30, 2) = 5 * 6 * 5 / (30 * 29) = 5/29$ ，对应 B 项。



方法二：“跟屁虫”原理。红色棋子和绿色棋子要在同一排，红色棋子可以先从 30 个格子中选 1 个格子，绿色棋子要想和红色棋子在同一排，剩余 $30 - 1 = 29$ 个格子，满足同一排的情况为 5 个格子， $P = 5/29$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】

1. 用 A 或 C 计算虽然不影响本题的答案，但一定要按照最本质的情况进行分析入手。
2. 两个棋子在同一排、两个人在同一列、两个人要在一起，有简便技巧——“跟屁虫”原理。

【拓展 1】（2018 国考）某单位的会议室有 5 排共 40 个座位，每排座位数相同。小张和小李随机入座，则他们坐在同一排的概率：

- A. 不高于 15%
- B. 高于 15%但低于 20%
- C. 正好为 20%
- D. 高于 20%

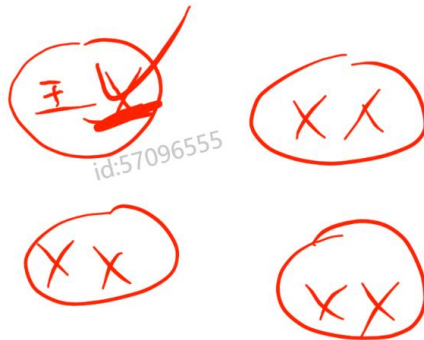
【解析】拓展 1. 已知 5 排共 40 个座位，故每排有 $40/5 = 8$ 个座位。小张和小李随机入座，两个人要在一起，一个人先选，另一个人去找他，小张先坐下去，剩余 $40 - 1 = 39$ 个座位；要想同一排，一排有 8 个座位，从剩余的 7 个座位中选 1 个座位即可， $P = 7/39$ ，对应 B 项。【选 B】

【注意】两个人要凑一起的概率题，先让一个人随便挑，再让第二个人去找他。

【拓展 2】(2018 联考) 某单位工会组织桥牌比赛，共有 8 人报名，随机组成 4 队，每队 2 人。那么，小王和小李恰好被分在同一队的概率是：

- A. $\frac{1}{7}$
B. $\frac{1}{14}$
C. $\frac{1}{21}$
D. $\frac{1}{28}$

【解析】拓展 2. 已知每队有 2 人，小王先随便选 1 个队伍，小李从剩下的 7 个“坑”中选到挨着小王的“坑”即可， $P=1/7$ ，对应 A 项。【选 A】



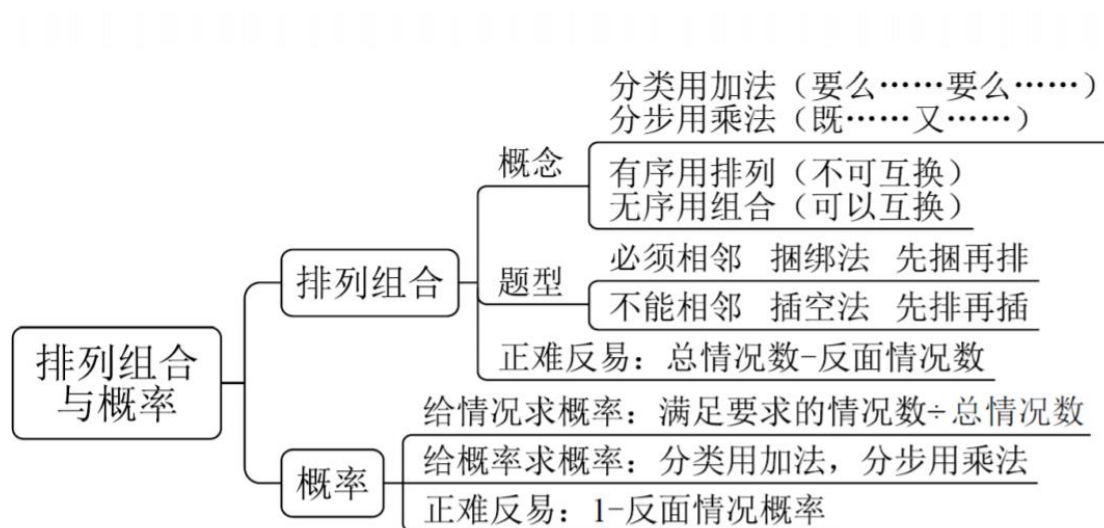
【拓展 3】(2019 联考) 某学校举行迎新篝火晚会, 100 名新生随机围坐在篝火四周, 其中, 小张与小李是同桌, 他俩坐在一起的概率为:

- A. 2/97
B. 2/98
C. 2/99
D. 2/100

【解析】拓展 3. 一共 100 个位置，小张先坐，剩余 99 个位置；要想在一起，小李挨着小张坐，要么坐在左边，要么坐在右边，2 个位置都可以， $P=2/99$ ，对应 C 项。【选 C】



【注意】此类题型的辨别方法：在一起、同一队、同一排，即两个人想尽办法在一起。



【注意】排列组合与概率：

1. 排列组合：

（1）概念：

- ①分类用加法（要么……要么……），分步用乘法（既……又……）。
- ②有序用排列（不可互换），无序用组合（可以互换）。

（2）题型：

- ①必须相邻：捆绑法，先捆再排。
- ②不能相邻：插空法，先排再插。

（3）正难反易：总情况数-反面情况数。

2. 概率：

- （1）给情况求概率：满足要求的情况数/总情况数。
- （2）给概率求概率：分类用加法，分步用乘法。
- （3）正难反易：1-反面情况概率。

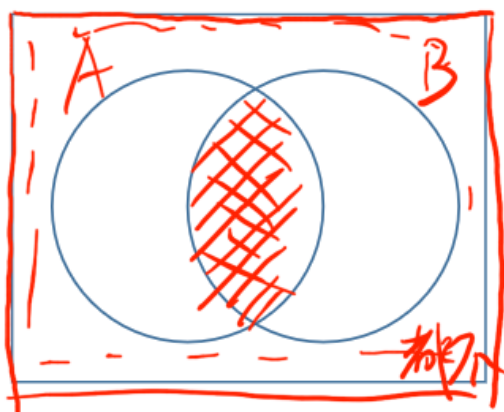
第九节 容斥原理

【知识点】容斥原理：比较简单，在中学都学过，可以用画图法也可以用常见公式解决，不管题怎么问，大部分容斥题都是送分的。容斥问题和昨天讲

的最值、函数题都差不多，有固定结论和套路模板，心态要放轻松，刚开始背公式可能有点麻烦，但做题的时候会比较简单。

1. 容斥就是在统计时会遇到重复计算或遗漏的部分，比如某班想吃火锅的有 40 人，想吃烧烤的有 42 人，但总人数 $\neq 40+42=82$ 人，想吃火锅和想吃烧烤的人一定有交叉重叠。班里还可能有 10 个什么也不想吃的同学，容斥就是解决去重补漏的问题。

2. 两集合公式推导：如下图所示，假设吃火锅为条件 A，吃烧烤为条件 B。A 和 B 先相加（最大范围覆盖）；然后减去中间重合的部分；最后加上周围都不满足的情况等于总数。



3. 两集合公式：由上述推导可推出 $A+B-A \cap B + \text{都不} = \text{全} \rightarrow A+B-A \cap B = \text{全} - \text{都不}$ 。

【例 1】（2020 联考）学校有 300 个学生选择参加地理兴趣小组、生物兴趣小组或者两个小组同时参加，如果 80% 的学生参加地理兴趣小组，50% 的学生参加生物兴趣小组。问同时参加地理和生物兴趣小组的学生人数是多少？

- A. 240
- B. 150
- C. 90
- D. 60

【解析】例 1. 出现多个条件且有交叉重叠，容斥问题，代入公式计算。根据题意，假设参加地理兴趣小组的为 A，参加生物兴趣小组的为 B，已知 300 个学生要么参加 A 要么参加 B，不存在都不参加的人，问 $A \cap B$ ，列式： $A+B-A \cap B = \text{总数} - \text{都不} \rightarrow 240+150-A \cap B = 300-0 \rightarrow A \cap B = 90$ ，对应 C 项。【选 C】

【注意】排列组合问题、概率问题、行程问题都可以放弃，但是容斥问题不可以放弃。

【知识点】画图法：容斥问题大部分题目可以用公式做，但有的题目表述很复杂，可能无法列出公式或者在考场上忘记公式，考虑画图法。

1. 若条件或问题不便于代入公式计算，则考虑画图。例如：只参加 A；参加 A、B 但不参加 C；或者缺少代公式必要的的数据。 $A+B-A\cap B$ =总数-都不，其中 A 指所有满足 A 的，B 指所有满足 B 的， $A\cap B$ 指中间的重合部分，公式中没有任何部分代表只满足 A 或只满足 B 的（下图蓝色部分），此时代入会不方便。



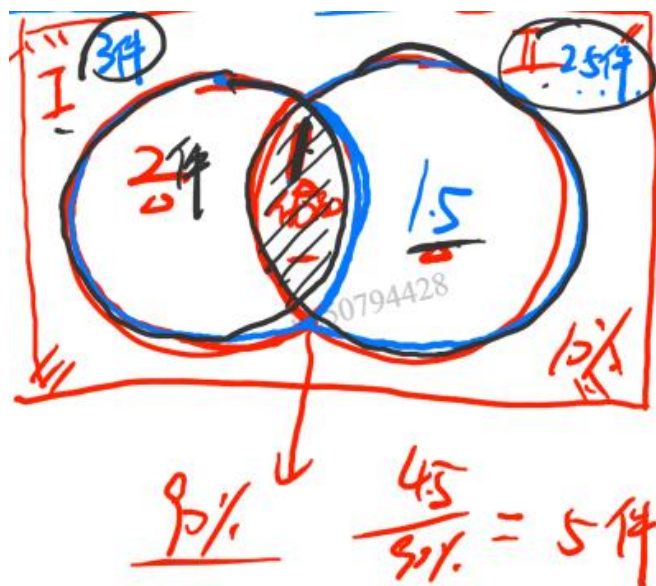
2. 先画圈，再代数；从里到外，注意去重。

【例 2※】（2018 联考）某试验室通过测评 I 和 II 来核定产品的等级：两项测评都不合格的为次品，仅一项测评合格的为中品，两项测评都合格的为优品。某批产品只有测评 I 合格的产品数是优品数的 2 倍，测评 I 合格和测评 II 合格的产品数之比为 6：5。若该批产品次品率为 10%，则该批产品的优品率为：

- A. 10%
- B. 15%
- C. 20%
- D. 25%

【解析】例 2. 本题属于历史上二集合中考查难度较高的题目，思维量大。题目没有给出任何具体值，但给出比例关系，考虑赋值。已知“测评两项产品”，所以是两集合容斥问题，题目只给出“某批产品只有测评 I 合格的产品数是优品数的 2 倍……”，没有给出只有 I 合格和只有 II 合格的数值，代公式比较麻烦，考虑画图做。如下图所示，赋优品有 1 件，已知“只有测评 I 合格的产品数是优品数的 2 倍”，则只有测评 I 合格的有 $1 \times 2 = 2$ 件，满足测评 I 合格的共有 $1 + 2 = 3$ 件；已知“测评 I 合格和测评 II 合格的产品数之比为 6：5”，则满足测评 II 合格

的有 2.5 件，只有满足测评 II 合格的有 $2.5 - 1 = 1.5$ 件；已知“该批产品次品率为 10%”，则次品/总数=10%，所以非次品占总体的 $1 - 10\% = 90\%$ ，故总数 = $(2 + 1 + 1.5) / 90\% = 5$ 件，所求 = $1/5 = 20\%$ ，对应 C 项。【选 C】

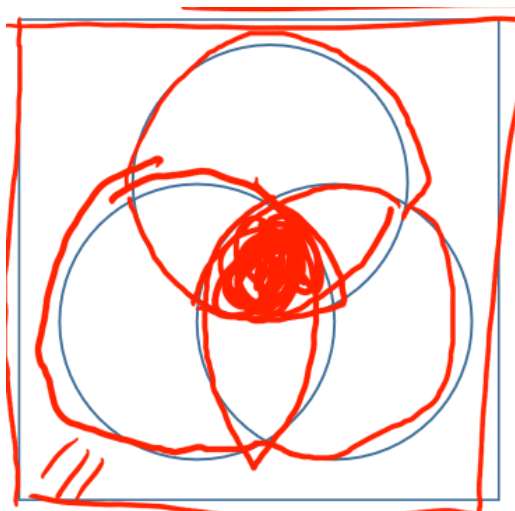


【注意】考场上此类题出现的概率比较低，掌握了这个难度的题，基本所有两集合容斥问题都能解决。

【知识点】

1. 二集合是基础类题目，但考场上考的最多的是三集合。

2. 公式推导：如下图所示，先找到总情况，三个条件相加；然后去重，重合地方的椭圆只需要加一次，所以减去每两个条件的交集；中间的部分既属于 A 同时也属于 B 和 C，相加时加了三次，去重的时候减了三次，所以要加中间的部分；最后用总数减都不等于前面的情况。



3. 三集合公式（标准型）： $A+B+C-A\cap B-B\cap C-C\cap A+A\cap B\cap C=\text{全}-\text{都不}$ 。

【例 3】（2018 陕西）有关部门对 120 种抽样食品进行化验分析，结果显示，抗氧化剂达标的有 68 种，防腐剂达标的有 77 种，漂白剂达标的有 59 种，抗氧化剂和防腐剂都达标的有 54 种，防腐剂和漂白剂都达标的有 43 种，抗氧化剂和漂白剂都达标的有 35 种，三种食品添加剂都达标的有 30 种，那么三种食品添加剂都不达标的有多少种？

- | | |
|-------|-------|
| A. 14 | B. 15 |
| C. 16 | D. 17 |
| E. 18 | F. 19 |
| G. 20 | H. 21 |

【解析】例 3. 题目给出三个条件且有交叉重叠，三集合容斥问题，代入公式计算。根据题意设抗氧化剂达标为 A，防腐剂达标为 B，漂白剂达标为 C，列式： $A+B+C-A\cap B-B\cap C-C\cap A+A\cap B\cap C=\text{全}-\text{都不}$ → $68+77+59-54-43-35+30=120-\text{都不}$ ，选项尾数各不相同，考虑尾数法，尾数 8-尾数 3-尾数 5=0，尾数 7+尾数 9-尾数 4+尾数 0=尾数 2，尾数 0-尾数 8=尾数 2，故答案尾数为 8，对应 E 项。【选 E】

【注意】本题公式和数据都不难，在考场上一定要拿下。

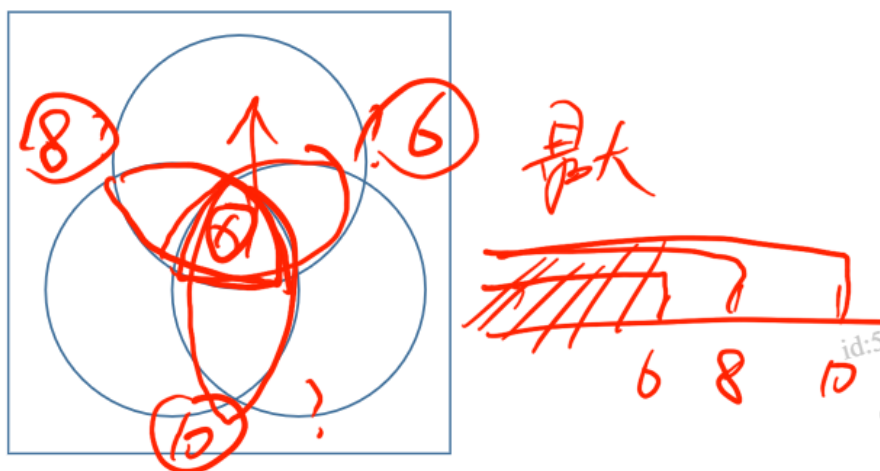
【例 4】（2019 青海法检）一次期末考试，某班同学成绩统计如下表：

数学 90 分以上	语文 90 分以上	英语 90 分以上	数学和英语 90 分以上	数学和语文 90 分以上	语文和英语 90 分以上	三门功课没有一门 90 分以上
23 人	21 人	20 人	8 人	6 人	10 人	5 人

求：这个班最多有多少人？

- A. 45 B. 51
C. 53 D. 55

【解析】例 4. 题目给了三个条件、两两交集和都不满足的情况，三集合容斥问题，代公式计算。根据题意设数学为 A，语文为 B，英语为 C，三者都满足的情况有 x 人，列式： $A+B+C-A \cap B-B \cap C-C \cap A+A \cap B \cap C=\text{总数}-\text{都不} \rightarrow 23+21+20-8-6-10+x=\text{总数}-5 \rightarrow \text{总数}=45+x$ 。问最多有多少人，所以要 x 尽可能大，画图分析，两两都满足的有 8 人、6 人、10 人，所以根据“短板效应”， x 不能大于两两都满足的情况，所以 $x \leq 6$ 人，故 x 最大取 6 人，所求 $=45+6=51$ 人，对应 B 项。【选 B】

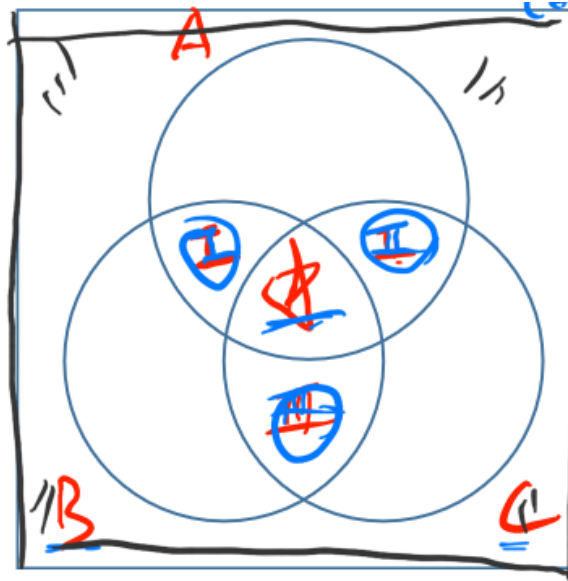


【注意】容斥问题中没有提及的量不代表为零，所以本题三者都满足的情况设为 x 人。

【知识点】

1. 非标准型公式看起来比较短是因为标准型公式去重的情况多，所以补漏的步骤多，非标准型公式去重巧妙，故看起来舒服。

2. 推导过程：所有容斥问题涉及满足两项都指的是只满足两项（只满足 AB、只满足 BC、只满足 AC）。如下图所示，A、B、C 三个条件相加，然后去重；I、II、III 号区域各重复一次，所以要减去三个区域的整体（只满足两项）；中间区域加了三次，所以需要减掉两次；最后右边为总数减去都不满足的情况。



3. 容斥问题的公式推导过程要理解，实在理解不了的同学背下来公式也可以做题。

4. 三集合公式（非标准型）： $A+B+C-\text{满足两项}-\text{满足三项} \times 2 = \text{全}-\text{都不}$ 。

5. 标准型公式和非标准型公式的区别：

（1）题目出现既 A 又 B、既 B 又 C、既 C 又 D 的情况，两两交集给得很繁琐，用标准型公式，比如例 3、例 4。

（2）除（1）中情况外其他情况全部用非标准型公式，比如例 5。

【例 5】（2019 新疆兵团）某机关开展红色教育月活动，三个时间段分别安排了三场讲座。该机关共有 139 人，有 42 人报名参加第一场讲座，51 人报名参加第二场讲座，88 人报名参加第三场讲座，三场讲座都报名的有 12 人，只报名参加两场讲座的有 30 人。问没有报名参加其中任何一场讲座的有多少人

- A. 12
- B. 14
- C. 24
- D. 28

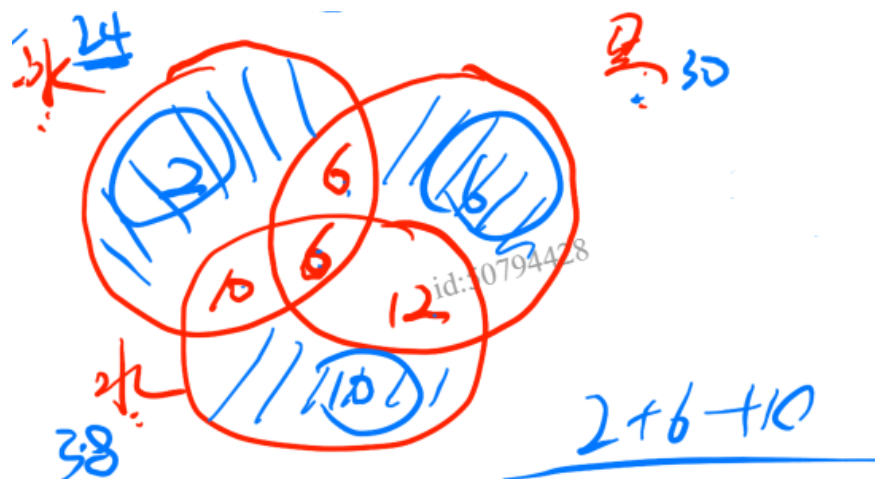
【解析】例 5. 已知“只报名参加两场讲座的有 30 人”，直接给出满足两项的条件，没有给出“既……又……”的情况，用非标准型公式。根据题意设参加第一场讲座的为 A，参加第二场讲座的为 B，参加第三场讲座的为 C，没有报名参加任何一场的有 x 人，列式： $A+B+C-\text{满足两项}-\text{满足三项} \times 2 = \text{总数}-\text{都不}$
 $\rightarrow 42+51+88-30-2 \times 12=139-x$ ，虽然 B、C 项尾数相同但可以“赌”一把，万一不是 4 即可解出答案，尾数 2+尾数 1+尾数 8-尾数 0-尾数 4=尾数 7，故尾数 9-尾数 2=尾数 7，尾数为 2 的只有 A 项。【选 A】

【注意】如果本题改为“既报名第一场又报名第二场的有 x 人，既报名第二场又报名第三场的有 y 人，既报名第一场又报名第三场的有 z 人”，此时用标准型公式；给出“只报名两场讲座的 n 个人”，此时用非标准型公式。

【例 6】（2018 联考）联欢会上，有 24 人吃冰激凌、30 人吃蛋糕、38 人吃水果，其中既吃冰激凌又吃蛋糕的有 12 人，既吃冰激凌又吃水果的有 16 人，既吃蛋糕又吃水果的有 18 人，三样都吃的则有 6 人。假设所有人都吃了东西，那么只吃一样东西的人数是多少？

- | | |
|-------|-------|
| A. 12 | B. 18 |
| C. 24 | D. 32 |

【解析】例 6. 题目给出“既……又……”的条件形式，用标准型公式计算。根据题意假设吃冰激凌、蛋糕、水果的分别为 A、B、C。列式： $A+B+C-A \cap B-B \cap C-A \cap C+A \cap B \cap C = \text{总数}-\text{都不}$ ，代入数字发现只能算出总数，和题目所问不符，画图标数据做。如下图所示，已知“既吃冰激凌又吃蛋糕的有 12 人，既吃冰激凌又吃水果的有 16 人，既吃蛋糕又吃水果的有 18 人，三样都吃的则有 6 人”，故只吃冰激凌和蛋糕、只吃蛋糕和水果、只吃冰激凌和水果的分别有 $12-6=6$ 人、 $18-6=12$ 人、 $16-6=10$ 人；已知“有 24 人吃冰激凌、30 人吃蛋糕、38 人吃水果”，故分别只吃冰激凌、只吃蛋糕、只吃水果的有 $24-10-6-6=2$ 人、 $30-6-6-12=6$ 人、 $38-10-6-12=10$ 人，所求 $=2+6+10=18$ 人，对应 B 项。【选 B】



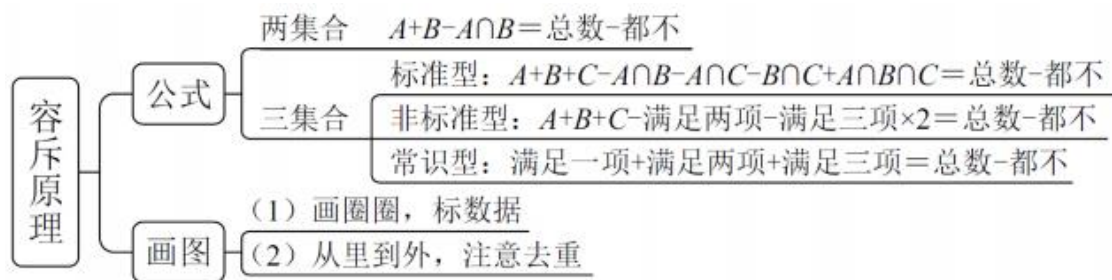
【注意】

1. 本题也可以用标准公式算出总人数 ($A+B+C-A\cap B-A\cap C-B\cap C+A\cap B\cap C$ =总数-都不), 再用非标准公式算出满足两项的人数 ($A+B+C$ -满足两项-2*满足三项=总数-都不), 最后代入常识公式算出满足一项的人数。

2. 容斥问题如果一个代入一个公式解决不了建议画图做 (更简单)。

【知识点】常识公式: 满足一项+满足两项+满足三项=全-都不。比如今天晚上聚餐, 老师点了三道菜, 有的人只吃了三道菜中的一道, 有的人吃了三道菜中的两道, 有的人三道菜都吃了, 有的人都没吃, 所以四种人的情况相加等于总数 (三种情况相加等于总数减都不的情况)。

$$\begin{aligned} & \text{①} \quad \text{②} \quad \text{③} \\ & \text{只吃1} + \text{只吃2} + \text{都吃} + \text{都不吃} \\ & = \text{总数} \end{aligned}$$



【注意】容斥原理：

1. 公式：

(1) 两集合： $A+B-A \cap B = \text{总数} - \text{都不}$ 。

(2) 三集合：

①标准型： $A+B+C-A \cap B-A \cap C-B \cap C+A \cap B \cap C = \text{总数} - \text{都不}$ 。

②非标准型： $A+B+C - \text{满足两项} - \text{满足三项} \times 2 = \text{总数} - \text{都不}$ 。

③常识型： $\text{满足一项} + \text{满足两项} + \text{满足三项} = \text{总数} - \text{都不}$ 。

2. 画图：

(1) 画圈圈，标数据。

(2) 从里到外，注意去重。

【注意】

1. 四节课学了三大方法+六大题型，最难的是行程问题、排列组合问题、经济利润问题，其他题型都要基础套路和结论。

2. 怎么复习：复习的时候要发挥长处（精益求精），基础薄弱的地方不需要花大量时间复习，数量关系是锦上添花，心态一定要把握好。

3. 怎么练习数量关系：本节课结束后把强化关系书上的题目做完，在听所有的直播课之前要先把题做一遍，后面的课除了方法精讲都是讲练结合，强化练习做完之后再去做真题。所有的方法精讲部分都掌握之后就要正式进入模考练习阶段，方法精讲、真题课、强化课讲的知识点只占了 80%，还有其他的知识点都打散到每周的模考中，有条件的一定要跟模考，听模考直播课。强化练习不是《行测思维》，把方法精讲中所有的题型都学会后可以去看《行测思维》，《行测思维》是 100%的考点，但是课上只会讲 70%~80%的高频考点。

4. 考场做题优先度：能用代入排除法的优先做，题目出现比例、倍数、分数、百分数等都指引做题方向有时也可以秒杀，工程问题、容斥问题、特有的最值问题都不要放弃，其他题型都要结合平常练习和考场发挥。

5. 溶液问题后期补充课包中会讲，其中包括线段法，线段法可以解决资料分析中的混合增长率，也可以解决数量关系中的溶液混合问题。

【答案汇总】排列组合与概率：基础概念：1-3：CBB；经典题型：1-3：BDC；
概率问题：1-4：CDD

容斥原理：1-5：CCEBA；6：B

遇见不一样的自己

Be your better self