

На правах рукописи

Останин Павел Антонович

Моделирование динамики земной ионосферы

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике

Научный руководитель: Кулямин Дмитрий Вячеславович,
кандидат физико-математических наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится «1» июня 2023 г. в 14 часов 00 минут
на заседании диссертационного совета ФПМИ.1.2.2.019, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации <https://mipt.ru>.

Автореферат разослан «____» _____ 2023 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
ФПМИ.1.2.2.019,

к.т.н., доцент

Войтиков Константин Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная работа посвящена двум задачам, связанным с моделированием ионосферы. Первая — разработка глобальной динамической модели F слоя ионосферы Земли (от 100 до 500 км), учитывающей плазмохимические процессы, амбиполярную диффузию и трёхмерный адвективный перенос нейтральным ветром и электромагнитным дрейфом. Вторая задача — построение системы усвоения данных на базе созданной модели для решения практических задач воспроизведения реальных полей в ионосфере и их прогноза.

Для решения уравнений модели в работе разработаны эффективные устойчивые численные методы. Идентификация работы полученного программного комплекса проведена на экспериментах по воспроизведению и описанию основных глобальных ионосферных структур, таких как суточный цикл и экваториальная аномалия. С помощью построенной модели исследована чувствительность электронной концентрации ко внешним параметрам системы.

Вместе с прямой моделью построена версия системы четырёхмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений, позволяющая на заданном интервале времени по наблюдаемым интегральным значениям электронной концентрации вдоль заданных прямолинейных траекторий восстанавливать поле электронной концентрации. Исследована точность такого восстановления.

Актуальность темы исследования обусловлена высоким практическим интересом к изучению и прогнозу космической погоды, играющей особую роль для систем межконтинентальной и спутниковой радиосвязи, геолокационных и навигационных систем глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС, Beidou и др.), а также для космической отрасли в целом. Информация о состоянии ионосферы необходима для определения характеристик движения низкоорбитальных спутников и космических аппаратов. Характеристики ионосферы также определяют условия распространения радиосигналов, что обуславливает практическую ценность информации о них для бесперебойной работы систем дальней радиосвязи, радиолокации.

В настоящее время в мировом научном сообществе наблюдается переход от климатических моделей к моделям Земной системы, что подразумевает включение в современные модели климата и общей циркуляции атмосферы новых областей околоземного пространства, в том числе верхних слоёв атмосферы, а также моделей ионосферы. Данная работа проводится в рамках направления деятельности ИВМ РАН по созданию комплексных моделей Земной системы, включающих в том числе термосферу и ионосферу, и является важным шагом в решении проблемы исследования и моделирования климата и атмосферы, а также в решении ряда прикладных задач. На данный момент в ИВМ РАН уже созданы модели тропосферы–стратосферы–мезосферы и D слоя ионосферы, а также модель термосферы. Представленная в данной работе новая модель F слоя разрабатывается с целью последующего использования в качестве вычислительного блока и построения совместной модели термосферы–ионосферы.

Традиционно задача описания характеристик ионосферы и термосферы решается с построением и использованием эмпирических моделей на основе имеющихся экспериментальных аэрономических, динамических, радиофизических и других типов данных. Такие модели верхней атмосферы в основном описывают климатологию глобального состояния в определенных условиях и часто не учитывают изменчивость среды, вызванную внешними или внутренними факторами (к примеру, нелинейными волновыми процессами в ионосфере и термосфере). В то же время, эти модели широко применяются для решения важных прикладных задач. Примерами подобных эмпирических моделей являются модели IRI, SIMP и др. На сегодняшний день общее количество и уровень развития численных моделей верхней атмосферы уступают аналогичным показателям моделей прогноза погоды и климата для нижних слоев атмосферы.

Основной целью работы является построение и реализация трёхмерной динамической модели F слоя ионосферы, а также системы усвоения данных для воспроизведения распределения основных характеристик ионосферы, их прогноза и проведения реанализа. Для решения уравнений модели требуется разработка новых эффективных и устойчивых численных методов, а для исследования качества аппроксимации необходима оценка точности работы модели. При этом одной из главных целей работы является создание вычислительно обоснованных технологий решения поставленных задач.

Научная новизна представленной работы состоит в разработке подходов к моделированию ионосферы с использованием методов, успешно применяемых при моделировании нижних слоёв атмосферы, а также в возможности включения разработанной модели ионосферы как отдельного вычислительного блока в разрабатываемую в ИВМ РАН комплексную модель Земной системы. При этом данная модель объединяется с уже разработанной в ИВМ РАН моделью термосферы в единую совместную модель со взаимным обменом рассчитываемыми величинами как внешними для этих моделей параметрами. Методология построения системы четырёхмерного вариационного усвоения данных о полном электронном содержании вдоль заданных траекторий в применении к моделированию ионосферы также является по существу новой.

Теоретическая ценность работы связана с получением ряда результатов:

- Разработаны новые разностные схемы для полного диффузионного оператора в уравнении амбиполярной диффузии, приведено доказательство их устойчивости и корректного воспроизведения соотношений, характеризующих геометрические особенности задачи;
- Сформулирована новая задача вариационного усвоения данных для модели F слоя ионосферы по информации о полном электронном содержании вдоль заданных траекторий;
- Исследована сходимость численных методов для системы прямых и сопряжённых уравнений в задаче усвоения данных, доказана устойчивость предложенных разностных схем.

Практическая ценность работы обусловлена реализацией предложенных алгоритмов и численных методов, исследованием точности и эффективности разработанных подходов к моделированию F слоя ионосферы и ассимиляции данных о полном электронном содержании. В частности, для диффузионного уравнения, решаемого в трёхмерной модели на одном из шагов расщепления, построено несколько схем, включая абсолютно устойчивую схему первого порядка, что позволяет выбирать достаточно большие шаги по времени. Эта же схема используется и для аппроксимации сопряжённого уравнения при решении обратной задачи при усвоении данных. Точность разработанных методов исследована на модельных аналитических решениях, а работа модели в целом проверена на экспериментах по воспроизведению глобальных структур ионосферы. Непосредственное практическое использование результатов данной работы имеет большое значение для повышения надежности и достоверности работы систем радио- и спутниковой связи, совершенствования управления космическими системами и снижения рисков, развития технологий спутниковой навигации и других прикладных задач.

В работе были использованы следующие методы и подходы: конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений, метод расщепления, метод сумматорных тождеств, схема «кабаре» для решения трёхмерного уравнения переноса в сферической системе координат, методы теории сопряжённых уравнений, обратных и некорректных задач. Теоретической базой исследования является трёхмерное уравнение, описывающее динамику электронной концентрации в ионосфере¹. При построении модели использовались методы теории параболических и гиперболических задач, расщепление по физическим процессам, а также исследовались свойства операторов уравнений, решаемых на отдельных шагах расщепления. При непосредственной реализации разработанных алгоритмов использованы современные инструменты для численного решения систем линейных уравнений, а также инструменты для обработки и визуализации результатов расчётов.

Положения, выносимые на публичное представление

1. Модель F слоя ионосферы Земли в сферической системе координат на основе разработанных экономичных и устойчивых алгоритмов, учитывающих особенности дифференциальной задачи.
2. Исследование геометрических характеристик диффузионных процессов построенной модели, метод аппроксимации диффузионного оператора, корректно отображающий эти характеристики.
3. Модельный расчёт основных глобальных структур F слоя невозмущённой ионосферы: дневное стационарное распределение электронной концентрации, её динамика в суточном ходе. Исследование механизма возникновения и поддержания экваториальной ионизационной аномалии на основе прямого моделирования.

¹*Schunk R. W., Nagy A. F. IONOSPHERES Physics, Plasma Physics, and Chemistry. — New York, United States: Cambridge University Press, 2009, 628 p.*

4. Система вариационной ассимиляции данных наблюдений о полном электронном содержании для диффузионной версии модели, в том числе алгоритмы для численной реализации системы. Исследование точности восстановления решения при использовании полученной системы.

Степень достоверности полученных результатов обосновывается строгостью математических обоснований свойств разработанных численных методов, а также результатами численных экспериментов, показывающих, что модель корректно воспроизводит основные глобальные характеристики и структуры ионосферы. Это же относится и к системе усвоения данных, где получены и доказаны теоретические результаты об исследуемой задаче и изучено качество восстановления возмущённого решения по наблюдаемым данным.

Апробация результатов

Основные результаты и положения диссертации докладывались автором и обсуждались на научных семинарах ИВМ РАН, ИВМиМГ СО РАН, МФТИ, а также на следующих конференциях:

- XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред, (ИМСС УрО РАН, Пермь, 13-17 февраля, 2023).
- 18-я ежегодная конференция «Физика плазмы в солнечной системе», (ИКИ РАН, Москва, 6-10 февраля, 2023).
- Международная конференция «Вычислительная математика и её приложения» (Сочи; доклады делались дважды: 1-5 августа в 2022 г. и 2-6 августа в 2021 г.).
- Международная конференция «Математическое моделирование» (МАИ, Москва, 21-22 июля, 2021).
- Международная конференция «32nd IUGG Conference on Mathematical Geophysics» (Нижний Новгород, 23-28 июня, 2018).
- 62-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, ноябрь, 2018).
- Международная конференция «Вычислительная математика и математическая геофизика» (Академгородок, Новосибирск, 2018).
- Конференция «CITES 2017» (Звенигород, август, 2017).
- 61-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, ноябрь, 2017).
- Международный симпозиум «МСАРД 2017» (Санкт-Петербург, 27-30 июня, 2017).

Публикации автора по теме НКР

По результатам работы опубликовано 6 статей, среди которых 6 входят в международные системы цитирования Web Of Science, Scopus, 2 опубликовано в журналах, входящих в список RSCI, 5 в журналах, включенных в списки ВАК.

Разработанная автором система усвоения данных для построенной модели ионосферы зарегистрирована и имеет свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [13].

Личный вклад автора

В работах с соавторами соискатель принимал равное участие в постановке задач и в формулировке методов их решения. При этом автор самостоятельно разработал и реализовал численные схемы для диффузионного оператора модели, а также провёл исследование задачи усвоения данных и сформулировал алгоритм её решения.

Программная реализация модели ионосферы и системы усвоения данных, а также проведение всех численных экспериментов и расчётов осуществлены автором лично. При подготовке к публикации полученных результатов автор внёс вклад, равный с соавторами.

Структура и объём диссертации.

Диссертационная работа включает введение, 6 глав, заключение и список использованной литературы из 114 наименований. Работа содержит 145 страниц, включая 41 рисунок.

Благодарности. Автор выражает благодарность Дмитрию Вячеславовичу Кулямину и Валентину Павловичу Дымникову за постановки задач и плодотворные обсуждения результатов, Сергею Владимировичу Кострыкину за консультирование по использованию разработанного им кода для трёхмерной адвекции, а также Виктору Петровичу Шутяеву за ценные советы по разработке системы усвоения данных.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении к диссертации приведена базовая характеристика работы: обоснована актуальность проблемы, обозначены цели, описаны научная новизна и практическая значимость результатов диссертации, а также представлены положения, выносимые на защиту.

Вторая глава посвящена обзору информационных источников по проблеме моделирования ионосферы Земли. **Раздел 2.1** посвящён описанию основных характеристик ионосферы (в качестве основной характеристики, имеющей прикладное значение, рассматривается электронная концентрация), а также главных физических процессов, отвечающих за их формирование и динамику. **В разделе 2.2** рассмотрены основные разработанные модели ионосферы, а предметом **раздела 2.3** являются системы усвоения данных наблюдений за ионосферой. Наиболее развитые модели ионосферы (NCAR TIEGCM, UCL STIP-CMAT, UAM, GCM-TIP и др.), которые применяются и для прогностических целей, в основном разрабатываются в консорциумах и крупных центрах различных институтов. Даже в ведущих мировых центрах разработка таких моделей фактически находится на начальных этапах, а возможность их использования для решения прикладных задач при этом оказывается ограниченной. При этом большинство моделей и систем усвоения данных используются в основном их разработчиками и недоступны для широкого использования.

Отдельное внимание требуется уделить изучению способов дискретизации уравнений модели и свойствам используемых разностных схем. Для электронной плотности в динамических моделях решается уравнение неразрывности с учётом амбиполярной диффузии, плазмохимических процессов и трёхмерной адвекции. Другой важной геометрической особенностью динамики плазмы в верхней ионосфере является диффузия электронов вдоль силовых линий магнитного поля Земли. При выборе системы координат с использованием магнитных трубок геометрия диффузионных процессов отображается корректно, построение разностных схем несколько упрощается (требуется численное решение одномерных задач), однако такой подход связан с дополнительными трудностями, в основном обусловленными способами задания параметров модели в указанной системе (большинство параметров модели, включая распределения всех характеристик нейтральной термосферы, температуры ионов и электронов, заданы функциями от сферических координат) и корректным вычислением коэффициентов Ламе. При выборе сферической системы координат геометрические свойства дискретизованных диффузионных операторов требуют отдельного рассмотрения. Ключевая особенность уравнения динамики электронной плотности F слоя в этой системе — наличие смешанных производных и связь эффективных коэффициентов диффузии с направлением геомагнитных силовых линий. Насколько известно автору, для существующих моделей, использующих сферическую систему, корректность аппроксимации диффузионной части динамических уравнений с геометрической точки зрения не изучалась. Автор не располагает сведениями, проводилось ли для большинства рассмотренных моделей исследование консервативности и монотонности выбранных схем, а также их аппроксимационных свойств.

В третьей главе приведено описание уравнений разрабатываемой модели ионосферы, а также рассматриваются свойства дифференциальной постановки задачи, которые необходимо корректно отражать при аппроксимации. В работе моделируется эволюция концентрации n_e электронов во времени и пространстве в верхней ионосфере (в F слое). Основным уравнением модели является уравнение неразрывности для глобального поля концентрации свободных зарядов в области высот (100-500 км):

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla (n_i \vec{u}_i) = \frac{\delta n_i}{\delta t} = R_i. \quad (1)$$

Здесь n_i — концентрация ионов, \vec{u}_i — средняя скорость переноса ионов. В правой части учитываются столкновительные члены, ионизация под влиянием солнечного излучения и стоки.

Представленная модель базируется на следующих приближениях: рассматривается только F слой земной ионосферы как область максимальной по величине электронной и ионной концентрации в атмосфере и как важная с практической точки зрения область; используется одноионная формулировка

модели в силу фотохимического преобладания ионизации атомарного кислорода O и рекомбинации его иона O^+ с основными составляющими O_2 и N_2 ; плазма предполагается локально квазинейтральной ($n_e = n_i$, поэтому далее электронная концентрация обозначена через n); считается, что движение электронов и ионов происходит совместно вдоль силовых линий магнитного поля Земли; предполагается преобладание в динамике ионосферной плазмы амбиполярной диффузии вдоль силовых линий; используется дипольное приближения формы магнитного поля Земли.

В разделе 3.1 выводится уравнение, описывающее эволюцию электронной концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = & P_i - R_i - \operatorname{div}(n\vec{u}_{n\parallel}) - \operatorname{div}\left(n\frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2}\right) + \\ & + \operatorname{div}\left(D\left[\vec{\nabla}_{\parallel}n + n\frac{1}{T_p}\vec{\nabla}_{\parallel}T_p - \frac{nm_i}{2kT_p}\vec{g}_{\parallel}\right]\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $D = \frac{2kT_p}{m_i\nu_{in}}$ — коэффициент амбиполярной диффузии, $\nu_{in} \approx 10^{-14} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(T_i + T_n)} \cdot n_O$ [с⁻¹] — частота столкновений O^+ с нейтралами, m_i — атомная масса иона, \vec{g} — гравитационное поле Земли, \vec{E} — электрическое поле внешней природы (поля магнитосферной конвекции и т. п.), \vec{B} — магнитное поле Земли, \vec{u}_n — скорость нейтрального ветра, T_n — температура нейтралов, $T_p = \frac{1}{2}(T_e + T_i)$ — полусумма электронной и ионной температур. Индекс \parallel соответствует составляющим векторов вдоль вектора \vec{B} .

В разделе 3.2 обосновывается выбор сферической системы координат в приближении тонкого сферического слоя и проводится преобразование уравнения 2 к этой системе. В результате выписывается основное уравнение модели в географических координатах (λ, φ, z) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = DY Z(n) + DTr(n) + Tr(n) + [P - kn], \quad (3)$$

где k — коэффициент рекомбинации, а слагаемые в правой части уравнения (3) имеют следующий вид ($I = \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$ — угол магнитного наклонения, φ — широта):

$$\begin{aligned} Tr(n) = & \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \frac{1}{B} (E_y \sin I + E_z \cos I) \right] + \\ & + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(u_z \sin I \cos I - u_y \cos^2 I - \frac{E_x}{B} \sin I \right) n \cos \varphi \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I - \frac{E_x}{B} \cos I \right) n \right] \quad (4)$$

(гиперболические слагаемые, связанные с электромагнитным полем и нейтральным ветром);

$$DY Z(n) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D \cos \varphi \left[\frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial n}{\partial z} \cos I \sin I \right] \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \left[\frac{\partial n}{\partial z} \sin^2 I - \frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cos I \sin I \right] \right) \quad (5)$$

(параболическая часть, отвечающая двумерной диффузии вдоль широты и высоты);

$$DTr(n) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos I \sin I - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H} \sin I \cos I \right) Dn \cos \varphi \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(- \frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 I + \frac{1}{H} \sin^2 I \right) Dn \right] \quad (6)$$

(оставшиеся гиперболические слагаемые, связанные с гравитационным полем Земли и градиентами температур).

При таком подходе выбор системы координат согласован с уже разработанной в ИВМ РАН моделью циркуляции термосферы для последующего объединения этих моделей в единую совместную модель термосферы-ионосферы.

В разделе 3.3 описываются внешние параметры модели, а **раздел 3.4** посвящён ключевым особенностям выписанного уравнения:

1. Основное уравнение модели фактически отражает баланс массы для заряженных частиц, и поэтому для искомого распределения выполняются соответствующие балансные интегральные соотношения. Это обуславливает необходимость использования консервативных разностных схем при численном моделировании.
2. С физической точки зрения рассматриваемые уравнения содержат описание процесса амбиполярной диффузии вдоль магнитных силовых линий в проекции на координатные направления, что обуславливает наличие геометрических особенностей, связанных с выделенным направлением движения.
3. Для указанной высотной области значения коэффициента диффузии, а также многих других параметров, входящих в уравнение, меняются при изменении высоты экспоненциально (в частности, изменение параметров

фотоионизации, рекомбинации и коэффициента диффузии достигает 6 порядков), что необходимо учитывать при построении методов решения в интересующей области.

4. Характерные времена плазмохимических процессов (скорости ионизации и рекомбинации в правой части уравнения (3)) малы (порядка секунд).
5. В силу своего физического смысла (как концентрации электронов) решение дифференциальной задачи неотрицательно.

Особенности 3 и 4 обуславливают существенную жесткость рассматриваемой задачи.

Ключевыми физическими процессами в задаче являются процессы амбиполярной диффузии и адвективного переноса. Поскольку в основу метода решения уравнения модели положен метод расщепления по физическим процессам (первому шагу соответствуют процессы амбиполярной диффузии и плазмохимии, а второй шаг соответствует адвекции), уравнение (3) без учёта адвективных процессов определяет самостоятельную приближённую модель. Подробное исследование этой модели проводится в **подразделе 3.4.1**. Такая приближённая модель достаточно хорошо описывает состояние ионосферы средних и низких широт в спокойных условиях. Отметим, что правильный учет вклада переноса ионов нейтральным ветром в рамках модели ионосферы является одной из ключевых задач при согласовании моделей ионосферы и термосферы.

Поскольку амбиполярная диффузия вдоль магнитных силовых линий — основной динамический процесс для модели, учёт свойств диффузионного оператора, включая его геометрические особенности, представляет собой ключевую задачу при построении аппроксимации уравнений модели. Отбросим в уравнении (3) все гиперболические слагаемые, оставив лишь диффузионный оператор, а также члены P и kn , отвечающие за плазмохимические процессы. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + kn - P &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K_1^2 \frac{\partial n}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_2^2 \frac{\partial n}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_1 K_2 \frac{\partial n}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K_1 K_2 \frac{\partial n}{\partial z} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \partial/\partial z \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_1^2 & -K_1 K_2 \\ -K_1 K_2 & K_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial z \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} n = \nabla \cdot (K \cdot \nabla n), \end{aligned} \quad (7)$$

где $K_1^2 = D \sin^2 I$, $K_2^2 = D \cos^2 I \cos^2 \varphi$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и $\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial z \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$.

Уравнение рассматривается в области $\Omega = [z_b, z_t] \times [-\pi/2, \pi/2]$ ($z_b = 100$ км, $z_t = 500$ км), в которой естественные краевые условия на границах по высоте z нужно ставить как потоки вдоль магнитных силовых линий. Эти потоки, вообще говоря, неизвестны. В данной работе мы будем считать, что поток $\left(K_1^2 \frac{\partial n}{\partial z} - K_1 K_2 \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) \Big|_{z=z_t} = F_{ub}(\varphi)$ на верхней границе расчётной

области известен, и в физических экспериментах будем полагать его равным нулю. На нижней же границе можно ставить как аналогичное потоковое условие, так и условие Дирихле $n|_{z=z_b} = P(z_b)/k(z_b)$, поскольку асимптотически вблизи нижней границы можно считать решение равным $P(z)/k(z)$ (фотохимические процессы преобладают над диффузионными).

Диффузия, описываемая уравнением (7), идёт вдоль магнитных силовых линий. Это следует из самой постановки задачи и эквивалентно вырожденности в каждой точке тензора «коэффициентов диффузии»

$$\begin{pmatrix} K_1^2 & -K_1 K_2 \\ -K_1 K_2 & K_2^2 \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения скалярно на n и проинтегрировав по всей расчётной области, можно получить (при однородных краевых условиях и нулевых функциях P и k) интегральное соотношение:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\varphi, z} n^2 \cos \varphi d\varphi dz = - \iint_{\varphi, z} \left(K_1 \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{K_2}{a \cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right)^2 \cos \varphi d\varphi dz \leq 0. \quad (8)$$

Данное интегральное соотношение (8) будем называть *основным*. Из выполнения разностного аналога такого соотношения (и соответствующей диссипативности) для разностной схемы следовала бы её устойчивость. Это соотношение имеет вполне конкретный геометрический смысл. В правой части соотношения (8) под знаком двойного интеграла стоит квадрат величины производной концентрации вдоль направления магнитной силовой линии (знак минус связан с тем, что увеличения широты φ и угла магнитного наклона I происходят «в разные стороны»). Этот факт является следствием наличия выделенных геометрических направлений: выполнение соотношения (8) эквивалентно тому обстоятельству, что диффузия электронов идёт лишь вдоль магнитных силовых линий. Данную физически важную особенность основного динамического процесса модели необходимо корректно отражать при дискретизации.

Далее нам потребуется обобщённая постановка для данного уравнения. Введём скалярное произведение формулой

$$\langle u, v \rangle = \iint_{\Omega} u(z, \varphi) v(z, \varphi) a \cos \varphi d\varphi dz.$$

Умножим исходное уравнение (7) на пробную функцию $\psi = \psi(z, \varphi)$ и проинтегрируем по $\Omega = [z_b, z_t] \times [-\pi/2, \pi/2]$. После интегрирования по частям получим следующую обобщённую формулировку двумерного уравнения амбиполярной диффузии-плазмохимии: найти функцию $n = n(t, z, \varphi)$, такую, что почти при всех t функция $n(t, \cdot, \cdot)$ лежит в $W_2^1(\Omega)$, а по всей расчётной области $[0, T] \times \Omega$ функция $n \in \mathbb{L}_2([0, T] \times \Omega)$, причём её след $n|_{z=z_b}$ на нижней границе равен

$P(z_b)/k(z_b)$ и для этой функции n выполнено соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n, \psi \rangle &= \langle P - kn, \psi \rangle - \iint_{\Omega} \left(K_1^2 \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + K_2^2 \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \right. \\ &\quad \left. - K_1 K_2 \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - K_1 K_2 \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) a \cos \varphi dz d\varphi + \\ &+ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F_{ub}(\varphi) \psi(z_t, \varphi) a \cos \varphi d\varphi \quad \forall \psi \in W_2^1(\Omega) \text{ таких, что след } \psi|_{z=z_b} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что если $F_{ub} = 0$, а на нижней границе поставлено однородное условие Дирихле, то при подстановке пробной функции $\psi = n$ в фиксированный момент t_0 мы получим соотношение (8).

В разделе 3.5 приводится анализ процессов трёхмерного переноса и оценка их вклада в формирование вертикального распределения электронной плотности в F слое.

Четвёртая глава содержит описание и обсуждение разностных схем, разработанных и используемых для численного решения уравнения (3).

В разделе 4.1 формулируются требования к аппроксимации уравнений модели на основе их ключевых свойств: необходимо использование консервативных схем, подходящих для решения жёстких задач, причём на разностном уровне требуется корректно отражать геометрию диффузионных процессов модели.

В разделе 4.2 описывается метод расщепления по физическим процессам. При расщеплении в полученном трёхмерном уравнении последовательно выбираются ключевые процессы, формирующие поле скоростей. Затем модель реализуется поэтапно, каждый раз с учётом новых поправок и сравнения нового решения с предыдущим. В предложенном алгоритме на первом этапе расщепления рассматривается процесс амбиполярной диффузии с включением плазмохимических преобразований, а также процессов гравитационного оседания (слагаемое $DTr(n)$ в уравнении (3)). На втором этапе решается задача, описывающая трехмерный адвективный перенос ионов, вызванный электромагнитным дрейфом и нейтральным ветром.

Раздел 4.3 полностью посвящён методам аппроксимации задачи первого шага расщепления. Для аппроксимации оператора $DTr(n_i)$ используются дивергентные схемы второго порядка точности (схема центральных разностей). Разностная схема уравнения (7) реализуется на девятиточечном шаблоне. При её построении следует учитывать, что диффузия идет вдоль магнитных силовых линий. С целью корректной передачи этого геометрического свойства на разностном уровне требуется получить аналог основного интегрального соотношения (8). Для двумерной задачи (7) в работе построено несколько разностных схем:

I. В подразделе 4.3.1 получена схема первого порядка точности по пространственным переменным, абсолютно устойчивая при неявной и полунеявной дискретизациях по времени, обладающая разностным аналогом соотношения (8).

II. В подразделе 4.3.2 рассматривается схема второго порядка точности по пространственным переменным, обладающая разностным аналогом соотношения (8) при постоянных эффективных коэффициентах диффузии.

Для схемы второго порядка точности в подразделе 4.3.3 рассмотрен также ранее применявшийся вариант дополнительного расщепления по геометрическим переменным, сводящий численное решение задачи к одномерным прогонкам. На текущий момент основными используемыми схемами являются схемы I и II, поскольку дополнительное расщепление (несмотря на эффективность расчётов) показало себя хуже с точки зрения точности.

Схема I строится с помощью метода сумматорных тождеств: интегралы, входящие в обобщённую постановку, заменяются на частичные суммы с тем, чтобы автоматически получить аналог основного интегрального соотношения (8). Полудискретная схема (без дискретизации производной по времени) получается, исходя из соотношения, представляющего интегральные суммы Римана для обобщённой постановки (9) (*основного сумматорного соотношения*):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left[\frac{\partial n_{ij}}{\partial t} + k_i n_{ij} - P_i \right] \psi_{ij} a \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta z = \sum_{j=1}^{N_\varphi} F_{ub}(\varphi_j) \psi_{N_z+1,j} a \cos \varphi_j \Delta \varphi - \\ - \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left[(K_1^2)_{i+1/2,j} \frac{n_{i+1,j} - n_{i,j}}{\Delta z} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta z} + \right. \\ + \frac{(K_2^2)_{i,j+1/2}}{a^2 \cos^2 \varphi_{j+1/2}} \frac{n_{i,j+1} - n_{i,j}}{\Delta \varphi} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta \varphi} - \\ - \frac{(K_1)_{i+1/2,j} (K_2)_{i,j+1/2}}{a \cos \varphi_{j+1/2}} \frac{n_{i+1,j} - n_{i,j}}{\Delta z} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta \varphi} - \\ \left. - \frac{(K_1)_{i+1/2,j} (K_2)_{i,j+1/2}}{a \cos \varphi_{j+1/2}} \frac{n_{i,j+1} - n_{i,j}}{\Delta \varphi} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta z} \right] a \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta z. \quad (10) \end{aligned}$$

Сеточная функция ψ_{ij} — пробная, аналог функции ψ в обобщённой постановке (9). Считаем её равной нулю на нижней границе по высоте: $\psi_{0j} = 0 \quad \forall j$.

В соотношении (10) при подстановке $\psi_{ij} = n_{ij}$ получаем в квадратных скобках полный квадрат разности:

$$\sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left[\frac{\partial n_{ij}}{\partial t} + k_i n_{ij} - P_i \right] n_{ij} a \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta z = \sum_{j=1}^{N_\varphi} F_{ub}(\varphi_j) n_{N_z+1,j} a \cos \varphi_j \Delta \varphi -$$

$$- \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left[(K_1)_{i+1/2,j} \frac{n_{i+1,j} - n_{i,j}}{\Delta z} - \frac{(K_2)_{i,j+1/2}}{a \cos \varphi_{j+1/2}} \frac{n_{i,j+1} - n_{i,j}}{\Delta \varphi} \right]^2 a \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta z. \quad (11)$$

Разностные уравнения из сумматорного тождества получаются с помощью перегруппировки всех слагаемых в правой части таким образом, чтобы привести выражение к виду $\sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_\varphi} f_{ij} \psi_{i,j} = 0$, где f_{ij} — коэффициент при $\psi_{i,j}$.

В силу произвольности сеточной функции ψ все коэффициенты f_{ij} должны равняться нулю. При этом коэффициенты при $\psi_{N_z+1,j}$ естественным образом аппроксимируют и верхнее краевое условие.

Выбор направленных разностей при аппроксимации подынтегральных слагаемых обусловлен тем, что итоговая схема оказывается реализована на девятиточечном шаблоне. Таким же способом можно построить на том же девятиточечном шаблоне схему, «направленную в противоположную сторону», т. е. использовать направленные разности по широте, сдвинутые на один шаг сетки к южному полюсу. Непосредственно в экваториальных точках (при $\varphi = 0^\circ$) от пространственного оператора в уравнении остаётся лишь горизонтальная диффузия, а вертикальная диффузия и обе смешанные производные равны нулю. При использовании предложенной разностной схемы на верхней границе с одной стороны от экватора в силу однородного краевого условия (нулевого потока вдоль магнитной силовой линии) оказывается равна нулю и горизонтальная диффузия, что приводит к нефизичному решению. Проблема, однако, может быть решена, если использовать полусумму обеих разностных схем, построение которых симметрично относительно экватора. При решении уравнения первого шага расщепления используется именно такая «симметризованная» схема, и далее под схемой I мы будем понимать именно её.

Исключим узлы на верхней и нижней границах, выразив явно необходимые значения сеточной функции из уравнений, аппроксимирующих краевые условия. После этого рассмотрим возникающую в результате аппроксимации по пространству систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial n_h}{\partial t} = L_h n_h + [P_h - k_h n_h], \quad (12)$$

где n_h — вектор-столбец искомого сеточного решения. Определим скалярное произведение в сферической метрике по аналогии со введённым интегральным: оно вычисляется с весом $a \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta z$.

В работе доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *Разностный оператор L_h является неположительно определённым и симметричным в сферической метрике.*

Предложение 2. Для уравнения (12) схема Кранка-Николсон и неявная схема Эйлера 1 порядка абсолютно устойчивы.

Приведём краткое описание схемы II, имеющей второй порядок аппроксимации по пространственным переменным.

Указанная аппроксимация имеет следующий вид: двумерный оператор Лапласа аппроксимируется стандартным образом со вторым порядком точности на пятиточечном шаблоне с помощью двукратного применения формулы центральной разности; аппроксимация смешанных производных узле (i, j) записывается как полусумма аппроксимаций смешанных производных второго порядка точности в центрах квадратов I, II, III, IV на рис. 1 — в точках с дробными индексами.

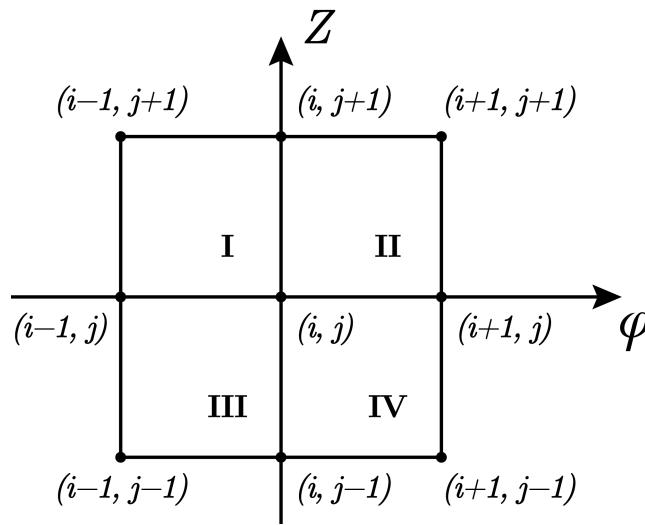


Рис. 1 Девятиточечный шаблон, на котором реализуется разностная схема.

Для наглядности рассмотрим смешанную производную $\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial n}{\partial z} \right)$ со знакопеременной функцией $a(y)$ (переменная y соответствует широте). Для аппроксимаций такой смешанной производной в центрах квадратов I, II, III, IV запишем выражения (с точностью до множителей, зависящих от шагов сетки):

$$\begin{aligned} \text{для точки } (i + 1/2, j - 1/2) : & a_j n_{i+1,j} - a_j n_{i,j} - a_{j-1} n_{i+1,j-1} + a_{j-1} n_{i,j-1}; \\ \text{для точки } (i + 1/2, j + 1/2) : & a_{j+1} n_{i+1,j+1} - a_{j+1} n_{i,j+1} - a_j n_{i+1,j} + a_j n_{i,j}; \\ \text{для точки } (i - 1/2, j - 1/2) : & a_j n_{i,j} - a_j n_{i-1,j} - a_{j-1} n_{i,j-1} + a_{j-1} n_{i-1,j-1}; \\ \text{для точки } (i - 1/2, j + 1/2) : & a_{j+1} n_{i,j+1} - a_{j+1} n_{i-1,j+1} - a_j n_{i,j} + a_j n_{i-1,j}. \end{aligned} \quad (13)$$

При положительных a_j используется полусумма первой и четвертой аппроксимаций, а при отрицательных — второй и третьей аппроксимаций.

Можно показать, что при постоянных эффективных коэффициентах диффузии и подходящих граничных условиях будет иметь место следующий конеч-

номерный аналог соотношения (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} (n_{i,j})^2 = & -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(K_1 \frac{n_{i,j} - n_{i-1,j}}{\Delta z} + K_2 \frac{n_{i,j} - n_{i,j-1}}{a\Delta\varphi} \right)^2 - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(K_1 \frac{n_{i+1,j} - n_{i,j}}{\Delta z} + K_2 \frac{n_{i,j+1} - n_{i,j}}{a\Delta\varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

В качестве метода интегрирования по времени при данной аппроксимации по пространственным переменным использована неявная схема первого порядка (являющаяся схемой естественного фильтра), выбор которой даёт возможность проводить расчеты с шагами по времени, соответствующими шагам по времени, используемым в модели термосферы (2-4 мин).

В разделе 4.4 приведены ключевые отличия схем I и II.

1. В схеме II в северном и южном полушариях для смешанных производных используются различные аппроксимации, отличающиеся направлениями. В схеме I аппроксимация одинакова во всей области.
2. Схема I абсолютно устойчива.
3. Аппроксимация верхнего краевого условия в схеме I имеет более простую структуру и позволяет легко исключить соответствующее уравнение из общей линейной системы, причём шаблон после исключения остаётся девятиточечным. Этого преимущества схема второго порядка лишена. Для сохранения использования девятиточечного шаблона в схеме II можно включить аппроксимацию краевого условия в качестве отдельного линейного уравнения в общую решаемую систему (это позволяет сохранить общую структуру разреженности матрицы).
4. Схема I задаётся симметричным и неположительно определённым в сферической метрике конечномерным оператором L_h , и поэтому (при использовании схемы Кранка-Николсон) обладает разностным аналогом интегрального соотношения (8). Для схемы II наличие подобного аналога доказано лишь при условии независимости коэффициентов уравнения от пространственных переменных.

Сравнение аппроксимационных свойств исследуемых схем проводится как на модельном аналитическом решении (**в разделе 4.5**), так и в экспериментах с реалистичной правой частью (в следующей главе, **в разделе 5.4**).

Ошибка расчётов по обеим схемам в основном сосредоточена в приэкваториальной области, причём имеет разный знак для различных схем. При этом по абсолютной величине ошибка схемы II в этой области примерно в 2,5 раза ниже, чем для схемы I. В средних широтах различие ошибок слабее, схема I даёт приблизительно в 1,5 раза меньшую точность.

Раздел 4.6 посвящён решению уравнения переноса. В рамках применяемого поэтапного решения системы (3) учёт адвекции включен в качестве

отдельного шага расщепления. Для решения уравнения переноса использовалась схема «кабаре», являющаяся схемой второго порядка по пространству и времени на гладких решениях и при решении однородного уравнения переноса. Схема использует свойства адвективного переноса вдоль характеристик, реализуется на компактном шаблоне и является консервативной. В модели F слоя ионосферы используется трёхмерный вариант схемы «кабаре», разработанный С. В. Кострыкиным и содержащий ряд модификаций, относящихся к выбору сферической системы как основной системы координат, а также к использованному монотонизатору.

Пятая глава посвящена воспроизведению глобального состояния и изменчивости ионосферы. В разделе 5.1 приведены результаты численных экспериментов по воспроизведению дневного стационарного распределения электронной концентрации при фиксированной функции фотоионизации P , а также суточного хода (раздел 5.2) в соответствии с изменением зенитного угла Солнца. На рис. 2 приведены результаты расчётов суточного хода на фиксированных широтах 60° и 0° :

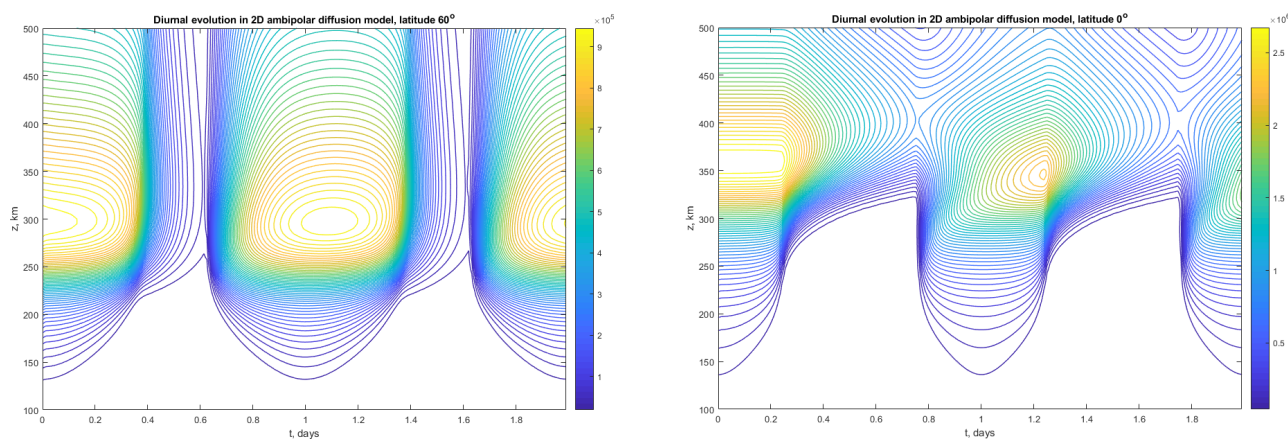


Рис. 2 Результаты экспериментов по вычислению электронной концентрации (см^{-3}) при моделировании суточного хода на фиксированных широтах: $\varphi = 60^\circ$ (а), $\varphi = 0^\circ$ (б), $\varphi = 0^\circ$ (в); по горизонтальной оси отложено время в сутках, по вертикальной — высота z от 100 км до 500 км; расчет проведен на двое суток.

С помощью одной из упрощенных версий модели в разделах 5.5 и 5.6 для условий средних широт исследована важнейшая с физической точки зрения проблема чувствительности к изменению внешних для ионосферы параметров. В ходе эксперимента проводилось сравнение получающихся стационарных вертикальных профилей при изменении параметров, входящих в уравнение, на $\pm 10\%$ и $\pm 20\%$. Результаты показывают, что наибольшую чувствительность профиль электронной концентрации имеет к температуре нейтральных молекул, уровню ионизации P , а также потоку на верхней границе расчётной области. Чувствительность к вариации концентрации атомарного кислорода также относительно высока. Остальные параметры модели оказывают минимальное влияние.

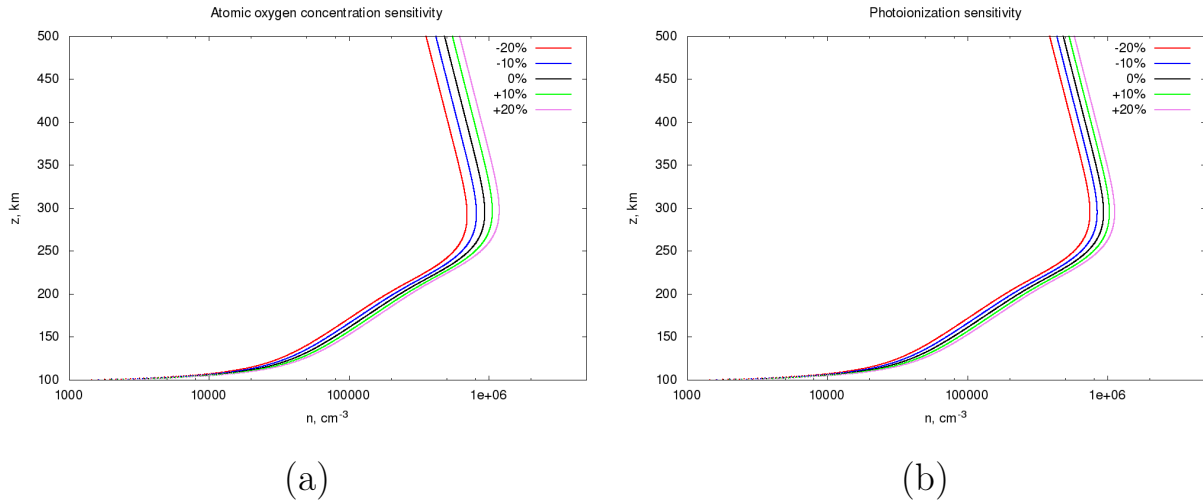


Рис. 3 Вертикальные профили электронной концентраций (cm^{-3} , в логарифмическом масштабе), полученные при вариации внешних параметров для модели ионосферы (10) на 10% и 20% в обе стороны: (а) концентрации атомарного кислорода, (б) фотоионизации P .

Раздел 5.7 посвящён воспроизведению ключевых глобальных структур ионосферы.

С помощью разработанной модели ионосферы в **подразделе 5.7.1** исследован механизм возникновения экваториальной ионизационной аномалии — явления, при котором максимум электронной плотности в окрестности экватора разделяется на два отдельных почти симметричных относительно экватора максимума и минимума на экваторе (т. е. возникает «двухгорбая структура»).

Для воспроизведения аномалии модель должна корректно описывать следующие процессы:

- ионизационные и плазмохимические процессы, отвечающие за формирование ионосферы в целом,
- процессы диффузии плазмы, и, в частности, — амбиполярную диффузию вдоль магнитных силовых линий в приэкваториальной области,
- процессы переноса ионов посредством электромагнитного дрейфа $\vec{E} \times \vec{B}$, для корректного включения которого в модель необходимо адекватное описание электромагнитного поля Земли,
- процессы переноса ионов нейтральным ветром, в особенности в направлении геомагнитных силовых линий.

Для учета ключевого для формирования аномалии электромагнитного поперечного дрейфа в модель введена специальная параметризация скорости дрейфа в области экватора на основе данных наблюдений экваториальной ионосферной динамики.

С помощью численных экспериментов по воспроизведению аномалии были получены следующие выводы.

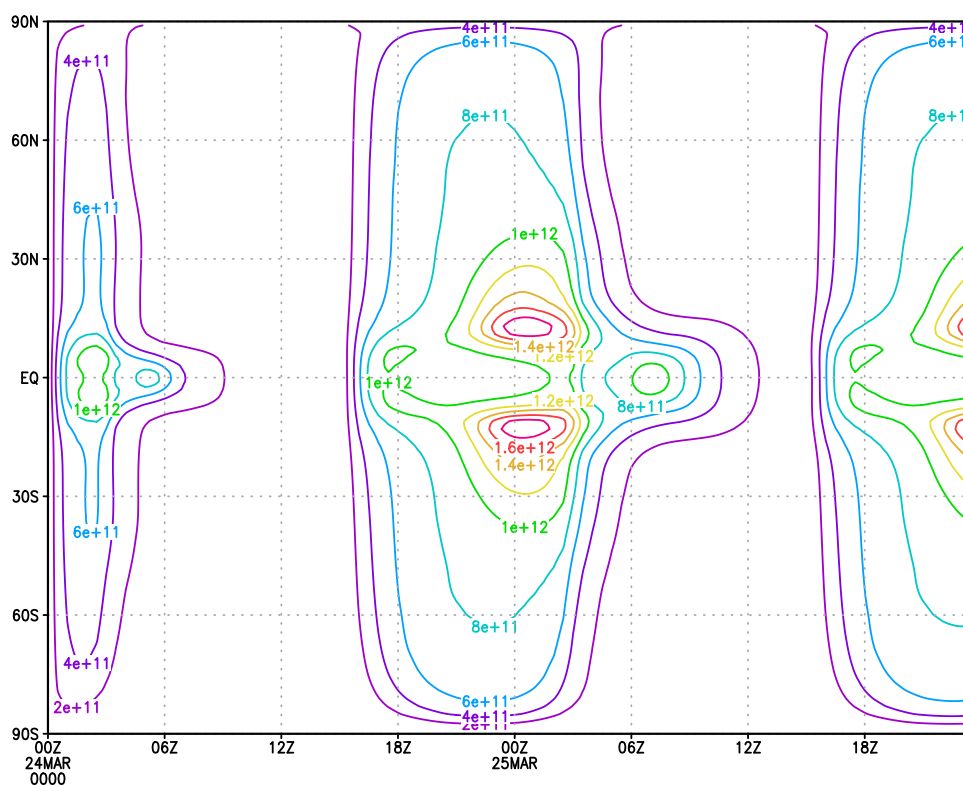


Рис. 4 Временной ход широтного распределения электронной плотности n (м^{-3}) на высоте 300 км по данным контрольного эксперимента 1.

1. Формирование явления экваториальной аномалии в рассматриваемой модели практически полностью обусловлено выносом плазмы с экватора в верхние слои за счет электромагнитного дрейфа, при этом не происходит добавочного притока электронов в области горбов аномалии. Таким образом, возникновение аномалии фактически обусловлено возникновением экваториального провала.
2. Диффузионные процессы в ионосфере не могут сформировать структуру аномалии без наличия дополнительных переносов плазмы в районе экватора и создания стока электронов из этой области, однако они играют существенную роль в формировании структуры аномалии при наличии экваториального провала; структура горбов аномалии и величины максимумов электронной плотности по большей части определяются диффузией вдоль геомагнитных линий.
3. Термосферный ветер вносит существенный вклад в приток электронов в субэкваториальной области в дневное время, обеспечивая 20-25% прироста электронной концентрации и таким образом усиливая глубину аномалии.

В подразделе 5.7.2 кратко охарактеризован эксперимент по воспроизведению эффектов добавления учёта электромагнитного дрейфа в полярной шапке.

В шестой главе рассматривается постановка, алгоритм реализации и

результаты модельных экспериментов для системы вариационной ассимиляции данных наблюдений. Особенностью подхода к созданию системы усвоения данных для модели ионосферы, излагаемой в данной работе, является использование алгоритма четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений на основе разработанной глобальной динамической модели F слоя ионосферы. Рассматривается задача ассимиляции данных на основе двумерной модели динамики F слоя, учитывающей процессы ионизации, плазмохимии, а также амбиполярной диффузии и гравитационного оседания. Отметим, что в перспективе рассмотренный подход позволит построить системы усвоения данных для совместных моделей термосферы–ионосферы.

Раздел 6.1 содержит постановку задачи вариационного усвоения данных для двумерной модели. Пусть $\Omega = \{(z, \varphi) \mid z_b \leq z \leq z_t; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\} \subset \mathbb{R}^2$ — сферический слой, $Q_T = (0, T) \times \Omega$. Рассматривается уравнение амбиполярной диффузии-плазмохимии с учётом процессов гравитационного оседания в приближении тонкого сферического слоя:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K \nabla(\cdot)) - \frac{\partial}{\partial z}(u \cdot (\cdot)) - \frac{\partial}{\partial y}(v \cos \varphi \cdot (\cdot)) + k \right) n = P_0 + U, \\ \left(K_1^2 \frac{\partial n}{\partial z} - K_1 K_2 \frac{\partial n}{\partial y} - un \right) \Big|_{z=z_t, z=z_b} = 0, \quad n|_{t=0} = n_0, \\ \int_{\Omega_k} n(z, \varphi, t) d\Omega = Tec_k(t) \quad \forall t \in (0, T), k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (15)$$

Правая часть P полагается равной $P_0 + U$, где P_0 — известная функция фотоионизации, а U — добавочное слагаемое, рассматриваемое в данной постановке задачи в качестве управления. Считается также, что известны данные наблюдений — конечный набор интегралов от решения вдоль заданных прямолинейных траекторий ℓ_k , соединяющих спутник с точкой на поверхности Земли (ТЕС — total electron content). Для простоты интегрирование ведётся по тонким прямоугольникам Ω_k (аппроксимирующим прямые ℓ_k , вдоль которых рассчитывается сигнал для вычисления ТЕС):

$$\int_{\Omega_k} n(z, \varphi, t) a \cos \varphi d\varphi dz = Tec_k(t) \quad \forall t \in (0, T), k = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Значения интегралов с течением времени меняются: поскольку функция $n(z, \varphi, t)$ зависит от времени, $Tec_k(t)$ также зависят от времени. Эти зависимости полагаются известными.

Рассматривается задача восстановления профилей по наблюдаемым ТЕС следующего вида: требуется найти функцию $n(z, \varphi, t)$ и управление $U(z, \varphi, t)$, определённые в Q_T , такие, что n является решением уравнения амбиполярной диффузии с известным начальным условием и удовлетворяет данным наблю-

дений (16).

В подразделе 6.1.1 приведена обобщённая постановка этой задачи:

$$\begin{cases} \langle Ln, \psi \rangle = \langle P_0 + U, \psi \rangle_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \quad \forall \psi \in W_2^1(\Omega) \text{ для п. в. } t \in [0, T]; \\ Cn = \vec{Tec}(t). \end{cases} \quad (17)$$

или её эквивалентная операторная форма:

$$\begin{cases} Ln = P_0 + U; \\ Cn = \vec{Tec}(t). \end{cases} \quad (18)$$

К оператору L отнесены производная по времени, диффузионный оператор и гиперболические слагаемые, отвечающие гравитационному оседанию, а C — оператор наблюдения, сопоставляющий электронной концентрации набор ТЕС, зависящих от времени.

Подраздел 6.1.2 целиком посвящён исследованию разрешимости сформулированной задачи, её регуляризованной версии, а также итерационному процессу, приводящему к псевдорешению исходной задачи.

Вводится регуляризация по Тихонову: исходная задача (18) включается в семейство задач оптимального управления вида:

$$\begin{cases} Ln_\alpha = P_\alpha; \\ J_\alpha(P_\alpha, n(P_\alpha)) = \inf_U J_\alpha(U, n(U)), \end{cases} \quad (19)$$

где $P_\alpha = P_0 + U$, U — управление, а

$$J_\alpha(U, n(U)) = \alpha \|U\|_{\mathbb{L}_2(Q_T)}^2 + \|Cn(U) - \vec{Tec}\|_{\mathbb{L}_2(0,T)}^2.$$

Если исключить из системы (18) переменную n , оставив только управление U , то останется задача вида $\mathcal{A}U = f$, где $\mathcal{A} = CL^{-1}$, $f = \vec{Tec} - CL^{-1}P_0$. Соответствующее регуляризованное уравнение имеет вид $\alpha U + \mathcal{A}^* \mathcal{A}U = \mathcal{A}^* f$. Задача $\mathcal{A}U = f$ не является однозначно разрешимой, но в работе доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Имеет место плотная разрешимость задачи $\mathcal{A}U = f$.*

Условия оптимальности функционала J_α имеют вид:

$$\begin{cases} Ln_\alpha = P_\alpha; \\ L^* q_\alpha = C^*(Cn_\alpha - \vec{Tec}); \\ \alpha P_\alpha + q_\alpha = 0. \end{cases}$$

Система прямых и сопряжённых уравнений решается итерационно: рассматривается последовательность n_α^m , q_α^m и P_α^m , удовлетворяющая системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K\nabla(\cdot)) - \frac{\partial}{\partial z}(u \cdot (\cdot)) - \frac{\partial}{\partial y}(v \cos \varphi \cdot (\cdot)) + k \right) n_{\alpha}^m = P_{\alpha}^m, \\ \left(K_1^2 \frac{\partial n_{\alpha}^m}{\partial z} - K_1 K_2 \frac{\partial n_{\alpha}^m}{\partial y} - u n_{\alpha}^m \right) \Big|_{z=z_b, z=z_t} = 0, \quad n_{\alpha}^m|_{t=0} = n_0; \\ \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K\nabla(\cdot)) + u \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a} v \frac{\partial}{\partial \varphi} + k \right) q_{\alpha}^m = \\ = \sum_{k=1}^N \chi_{\Omega_k}(z, \varphi) \left(\int_{\Omega_k} n_{\alpha}^m d\Omega - Tec_k(t) \right), \\ \left(K_1^2 \frac{\partial q_{\alpha}^m}{\partial z} - K_1 K_2 \frac{\partial q_{\alpha}^m}{\partial y} \right) \Big|_{z=z_b, z=z_t} = 0, \quad q_{\alpha}^m|_{t=T} = 0; \\ P_{\alpha}^{m+1} = P_{\alpha}^m - \tau_m(\alpha P_{\alpha}^m + q_{\alpha}^m). \end{array} \right. \quad (20)$$

Параметр τ_m в текущей постановке выбран постоянным. Известно, что при положительном параметре регуляризации $\alpha > 0$ итерационный процесс сходится при $\tau_m \leq \tau_{\text{opt}} = \frac{2}{2\alpha + C_0 + C_1}$, где отрезок $[C_0, C_1]$ содержит спектр оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$.

В разделе 6.2 рассмотрена конечно-разностная аппроксимация диффузионных операторов для прямого и сопряжённого уравнения. Дискретизация операторов задачи проводится по абсолютно устойчивой схеме I первого порядка, предложенной в главе 4. Это позволяет доказать следующие утверждения.

Предложение 4. Разностная схема для системы оптимальности устойчива при условии $\frac{T^2}{\alpha} \|C^h\|^2 < 1$.

Предложение 5. Сеточные решения $(n_{\alpha}^h, P_{\alpha}^h)$ при $\alpha \rightarrow +0$ сходятся, причём P_{α}^h сходится к псевдорешению $P^{h,+}$ конечно-разностной задачи $\mathcal{A}^h P^h = f^h$.

На практике сходимость итерационного процесса для конечно-разностной задачи наблюдается и при $\alpha = 0$, но параметр τ_m приходится выбирать на порядок меньше, чем в регуляризованном случае, даже при достаточно малых α .

Для исследования качества восстановления распределения электронной концентрации в разделе 6.3 проведены контрольные численные эксперименты, использующие в качестве данных наблюдений тестовые значения ТЕС с заданным относительным отклонением от решения прямой задачи. В подразделе 6.3.1 проводится модельный эксперимент следующего вида. Ищется численное решение невозмущённой прямой задачи на всём отрезке времени при фиксированной правой части, отвечающей дневному невозмущённому состоянию ионосферы. Вычисленное решение изменяется заданным относительно малым возмущением (умножением на функцию $(1 + 0,1 \cdot \sin(\pi(z - 100)/400))$), а

затем вычисляются интегралы по выбранным траекториям. В ходе эксперимента решение восстанавливается по построенным возмущённым данным. В качестве траекторий интегрирования рассмотрены случаи отдельных вертикальных ТЭС и непрерывного заполнения части расчётной области наклонными ТЭС.

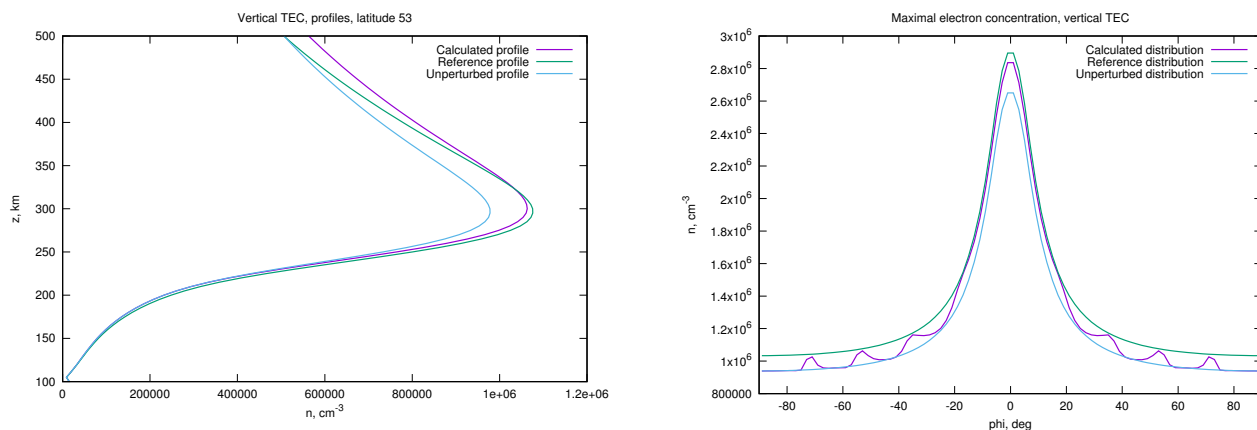


Рис. 5 Вертикальные профили электронной концентрации в см^{-3} (слева), полученные решением только прямой задачи (голубая линия), решением задачи восстановления (фиолетовая линия) и ожидаемое по восстановлению тестовое «точное» решение (зеленая линия), а также широтные распределения максимума электронной концентрации в см^{-3} по высоте (справа), полученные решением только прямой задачи (голубая линия), решением задачи восстановления (фиолетовая линия) и ожидаемое по восстановлению тестовое «точное» решение (зеленая линия).

На рис. 5 представлены результаты восстановления стационарного вертикального профиля для области средних широт и распределение по широтам величины максимума (по высоте z) электронной концентрации в случае, когда известны данные наблюдений о вертикальных ПЭС на широтах -71° , -53° , -35° , -17° , 0° , 17° , 35° , 53° и 71° . Для всех широт интегральная ошибка много меньше (на 3 порядка), чем интеграл от восстановленного профиля. Отметим, что ассимиляция смещает положение максимума электронной концентрации вверх, а форма профиля в целом немного изменяется. Наибольшая ошибка восстановления вблизи верхней границы связана с выбором вида функции возмущения, на которую было умножено решение при подсчёте модельных данных наблюдений. Приведённые в диссертации результаты восстановления при использовании данных об интегралах вдоль наклонных траекторий имеют схожую структуру и величины ошибок со случаем вертикальных профилей.

Для более реалистичного эксперимента в **подразделе 6.3.2** рассматривается суточный ход на отрезке времени 48 ч, в котором начальные условия выбираются в соответствии с установившимся суточным циклом, фотоионизация P_0 меняется в зависимости от времени в соответствии с изменением зенитного угла Солнца, а остальные внешние параметры модели остаются фиксированными. Такая постановка позволяет изучить характеристики восстановления

в динамике. На рис. 6 приведены результаты восстановления величины максимальной по высоте электронной концентрации для случаев вертикальных и наклонных траекторий интегрирования: слева приведены результаты расчёта максимума по высоте для обоих случаев, а справа приведены разности максимумов восстановленных решений и «истинного» распределения.

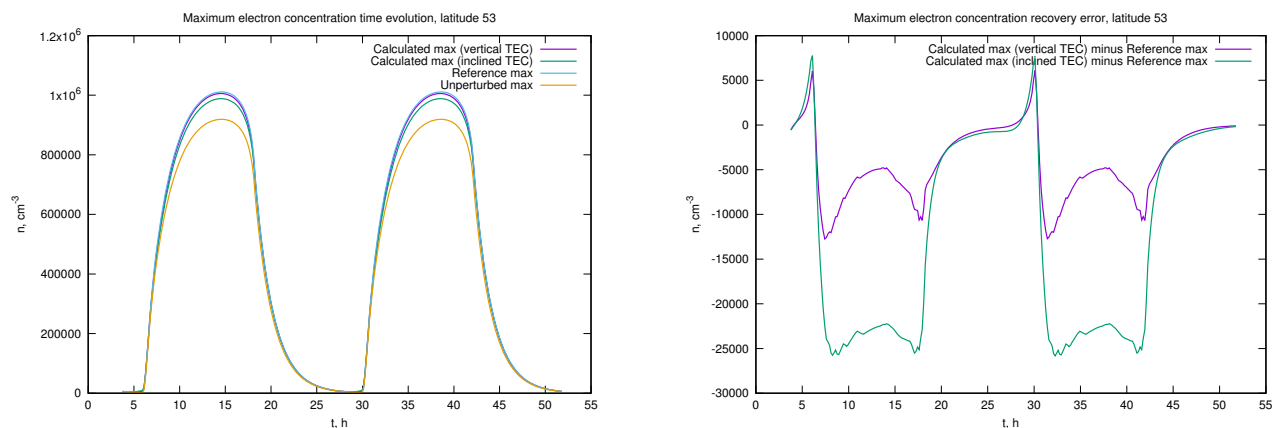


Рис. 6 Временной ход максимума электронной концентрации (слева), полученный решением задачи восстановления для случаев вертикальных (фиолетовая линия) и наклонных траекторий (зелёная линия), ожидаемая «точная» зависимость (голубая линия) и зависимость максимума для невозмущённого решения (жёлтая линия), а также профиль абсолютной разницы восстановленного и точного значения максимума (справа) для вертикальных (фиолетовая линия) и наклонных траекторий (зелёная линия). Представлена широта 53° .

Из представленных графиков видно, что ассимиляция существенно приближает максимальное значение электронной концентрации к «истинному» (ошибка составляет не более 2% для вертикальных ТЕС и 3% для наклонных ТЕС соответственно по сравнению с ошибкой в 10% для невозмущённого решения). Отметим, что более качественное восстановление решения при вертикальных ТЕС было связано, в том числе, с конкретным видом возмущения. В диссертации рассмотрен также другой вариант возмущения, при котором информация о наклонных ТЕС даёт существенно лучший результат.

В подразделе 6.3.3 разработанная система усвоения данных наблюдений успешно применена и в экспериментах с трёхмерной версией модели, не включающей трёхмерный адвективный перенос. Поскольку в уравнение амбиполярной диффузии (15) долгота λ входит лишь неявно в качестве одного из аргументов функций n , P , k и коэффициентов уравнения, задача распадается на семейство независимых уравнений на различных долготах. При этом данные о полном электронном содержании имеют трёхмерную природу: прямолинейная траектория, соединяющая точку со спутником, пересекает различные долготы.

Результаты расчёта показывают, что при восстановлении решения вклад от каждой траектории оказывается «расщеплен» на вклады в усвоение данных

на различных долготах, причём это влияние на заданной долготе тем сильнее, чем большая часть траектории на этой долготе попадает в верхнюю часть расчётной области. Поэтому для задачи усвоения данных о ТЕС в модели, не включающей трёхмерный перенос, результаты о качестве восстановления неизвестного поля электронной концентрации для двумерной версии модели являются основными.

В заключении перечислены основные результаты диссертации и возможные направления дальнейшей работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Разработана новая модель ионосферы Земли в сферической системе координат в приближении тонкого сферического слоя, включающая описание динамики электронной плотности в F слое.
2. Для двумерной подзадачи, включающей описание амбиполярной диффузии и плазмохимии, получено интегральное соотношение, характеризующее направление диффузионных процессов. Разработаны способы аппроксимации диффузионного оператора: схема второго порядка по пространственным переменным, более точная вблизи экватора, а также схема первого порядка, для которой справедлив разностный аналог указанного интегрального соотношения, абсолютно устойчивая при неявной и полунеявной дискретизациях по времени.
3. В задаче с реалистичными параметрами показано близкое к реальному распределение электронной концентрации при дневных условиях и в условиях суточного хода в средних широтах. Представлен анализ механизма экваториальной аномалии, показано, что аномалия возникает за счет выноса плазмы из экваториальной области поперечным электромагнитным дрейфом и формирования экваториального провала на высотах максимума F слоя, а термосферный ветер усиливает проявление аномалии.
4. Поставлена и решена задача вариационной ассимиляции данных наблюдений для разработанной модели F слоя ионосферы в диффузионной постановке с управлением по правой части. В качестве основного типа данных рассмотрены интегралы электронной плотности. Показана устойчивость предложенных численных методов и сходимость построенного итерационного процесса к псевдорешению дифференциальной задачи. На основе контрольных численных экспериментов по восстановлению профилей для возмущений, максимум которых скоррелирован с максимумом невозмущённого распределения электронной плотности, показано высокое качество восстановления распределения электронной концентрации в областях, где имеются данные наблюдений.

Представленная в работе первая версия модели ионосферы является существенным шагом к реализации ионосферного блока модели Земной системы. В

разработанной версии модели решается полное уравнение динамики электронной концентрации F слоя. Построенная модель включает вариант совместной модели термосферы-ионосферы, а также систему усвоения информации о полном электронном содержании для модели в диффузионном приближении, протестированную в модельном эксперименте. Разработаны новые алгоритмы, удовлетворяющие априорным требованиям, связанным с особенностями решаемой задачи, включая интегральные особенности и геометрию основных физических процессов в F слое ионосферы, а также получены оценки точности разработанных разностных схем, что, насколько известно автору, ранее для моделей ионосферы не проводилось. Перечисленные особенности представленной модели обосновывают её перспективность с точки зрения последующего использования в качестве вычислительного ядра указанных комплексных и совместных моделей.

Дальнейшее развитие предложенной модели планируется в нескольких направлениях. Для системы ассимиляции данных необходимо рассмотрение полной версии модели со включением адвективных процессов и переход к усвоению реальных данных наблюдений. Требуется также более глубокий анализ физических процессов, учитываемых в модели: добавление электродинамического и термодинамического блоков, описание возмущений различной природы и т. д. В перспективе планируется также разработка версии модели ионосферы для многопроцессорной системы с последующим включением в комплексную модель Земной системы.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Kulyamin D. V., Dymnikov V. P., Ostanin P. A.* INM-IM: INM RAS Earth ionosphere F region dynamical model // *Rus. J. of Num. Analys. and Math. Model.* 2022. V. 37. N. 6. P. 349–362.
2. *Ostanin P. A.* On the approximation of the diffusion operator in the ionosphere model with conserving the direction of geomagnetic field // *Rus. J. of Num. Analys. and Math. Model.* 2022. Vol. 37. No. 1. P. 25-39.
3. *Дымников В. П., Кулямин Д. В., Останин П. А.* Совместная модель глобальной динамики термосферы и ионосферы Земли // *Изв. РАН Физика атмосферы и океана.* 2020. Т. 56. № 3. С. 280–292.
4. *Kulyamin D. V., Ostanin P. A.* Modelling of Equatorial Ionospheric Anomaly in INM RAS coupled thermosphere-ionosphere model // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2020. V. 35. No. 1. P. 1–9.
5. *Кулямин Д. В., Останин П. А., Дымников В. П.,* Моделирование F слоя земной ионосферы. Решение уравнений амбиполярной диффузии // *Матем. моделирование.* 2019. Т. 31. № 4. С. 57–74.
6. *Ostanin P. A., Kulyamin D. V., Dymnikov V. P.* Numerical modelling of the Earth's ionosphere F region // *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 2017. V. 96. №1. P.012011(1)-012011(11).

7. *Останин П. А.* Вариационная ассимиляция данных о полном электронном содержании для трёхмерной диффузионной модели ионосферы // Тезисы конференции «Физика плазмы в солнечной системе». 2023. Москва. С. 263.
8. *Останин П. А.* Задача ассимиляции данных для уравнения амбиполярной диффузии в модели F слоя ионосферы // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: ПФИЦ УрО РАН. 2023 С. 252.
9. *Останин П. А.* Моделирование F слоя ионосферы Земли // Тезисы конференции «Математическое моделирование». 2021. Москва. С. 48.
10. *Кулямин Д. В., Останин П. А., Дымников В. П.* Особенности моделирования амбиполярной диффузии F слоя земной ионосферы // Тезисы Международной конференции «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвященной 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева. Академгородок, Новосибирск. 2018. С. 49.
11. *Ostanin P. A., Kulyamin D. V., Dymnikov V. P.* Numerical modelling of the earth ionosphere f region // International Young Scientists School and Conference on Computational Information Technologies for Environmental Sciences CITES '2017. Moscow. 2017. P. 121.
12. *Kulyamin D. V., Ostanin P. A., Dymnikov V. P.* On specific features of numerical modelling of the ionosphere F region within the coupled earth ionosphere and thermosphere dynamical model // International symposium Atmospheric radiation and dynamics. Theses. Saint-Petersburg. 2017. P. 240.
13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023613975 от 21 февраля 2023 г. «Система усвоения данных о вертикальных ПЭС в двумерной диффузионной модели ионосферы» / Останин П. А. — 2023.