

Снижение размерности нелинейных динамических систем с управлением и неоднородностями методами анализа данных

Елизарьев Максим Андреевич | А01-902в

09.06.01 Информатика и вычислительная техника

1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научный руководитель

Хлюпин Алексей Николаевич | кандидат физ.-мат. наук

- Общая характеристика работы
- Определяющие уравнения
- Снижение размерности с помощью данных
- Обратные задачи нефтегазового моделирования
- Заключение

Общая характеристика работы

Актуальность

Нефтегазовое моделирование

- Высокая вычислительная сложность
- Решение обратных задач

Прокси-моделирование

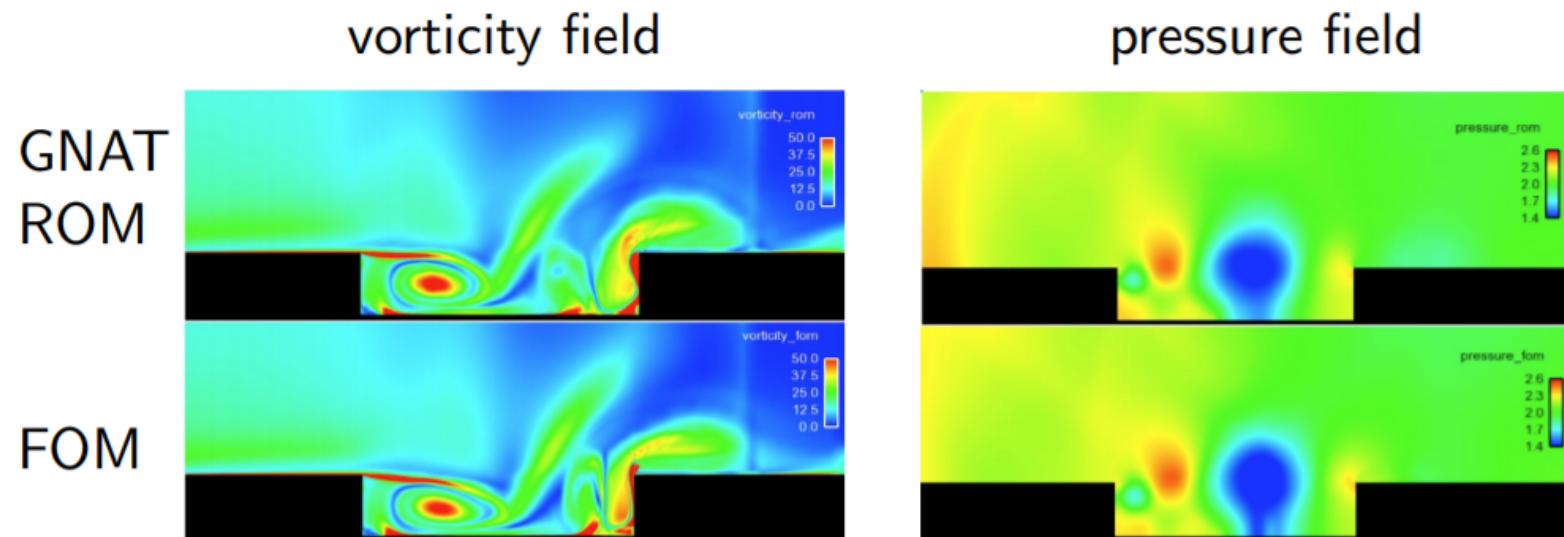
- Скорость построения и расчётов
- Детализация
- Следование определяющим уравнениям
- Область применимости
- Закономерности в данных

Анализ данных в моделировании

- Суррогатные модели
 - Обобщающая способность
 - Предсказуемость точности
- Доступность и качество данных

Предмет исследования

**Методы эмпирического снижения размерности
нелинейных динамических моделей**



- + < 1% error in time-averaged drag
- + 229x CPU-hour savings
 - FOM: 5 hour x 48 CPU
 - GNAT ROM: 32 min x 2 CPU

Эмпирическое снижение размерности в вычислительной гидродинамике
(Kevin Carlberg)

Цели

Развитие методов и подходов к эмпирическому снижению размерности для эффективного нефтегазового моделирования.

Задачи

- Анализ существующих исследований и разработок, определение проблематики
- Анализ применимости методов для моделирования фильтрации
- Разработка алгоритмов с большей обобщающей способностью
- Сформулировать подход к дизайну прикладного ПО

Основные положения

- Иерархический метод построения низкоразмерных моделей многофазной нелинейной фильтрации
- Подход к выбору нелинейных функций для эмпирической аппроксимации
- Сопоставимый критерий сходимости для полноразмерных и низкоразмерных моделей.
- Метод кусочных инвариантных преобразований координат для низкоразмерного представления нелинейных фундаментальных решений

Научная новизна

- Проведён аналитический обзор существующих методов
- Сформулирована проблематика пространства параметров в обратном нефтегазовом моделировании
- Расширена применимость существующих методов на с использованием свойств преобразований координат и фундаментальных решений

Практическая значимость

- Предлагается подход к работе с данными в реальных сценариях
- Метрика сходимости переиспользует критерии для полноразмерных моделей
- Разработаны модули для **MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST)**

Публикации и конференции

1. Elizarev, M. (2019, September). **Numerical Simulation of Multiphase Non-Darcy Flows: Generalized Approach.** In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition. OnePetro*.
2. Mukhin, A., Elizarev, M., Voskresenskiy, N., & Khlyupin, A. (2020). **Application of dynamic parametrization algorithm for non-intrusive history matching approaches.** *ECMOR XVII*, 2020(1), 1-13.
3. Elizarev, M., Mukhin, A., & Khlyupin, A. (2021). **Objective-sensitive principal component analysis for high-dimensional inverse problems.** *Computational Geosciences*, 25, 2019-2031.
4. Elizarev, M., & Khlyupin, A. (2022). **Efficient Dimensionality Reduction of Nonlinear Fundamental Solution for Well Placement Optimization.** *ECMOR 2022*, 2022(1), 1-15.

Определяющие уравнения и их свойства

Система уравнений чёрной нефти

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi R_{\alpha A} \frac{s_A}{b_A} \right) - \vec{\nabla} \left[R_{\alpha A} \left(K \frac{\kappa_A}{\mu_A b_A} \nabla p \right) \right] = R_{\alpha A} \frac{2\pi K \kappa_A}{\mu_A b_A \ln(r_c r_{\text{well}}^{-1})} (p - p_{\text{well}})$$

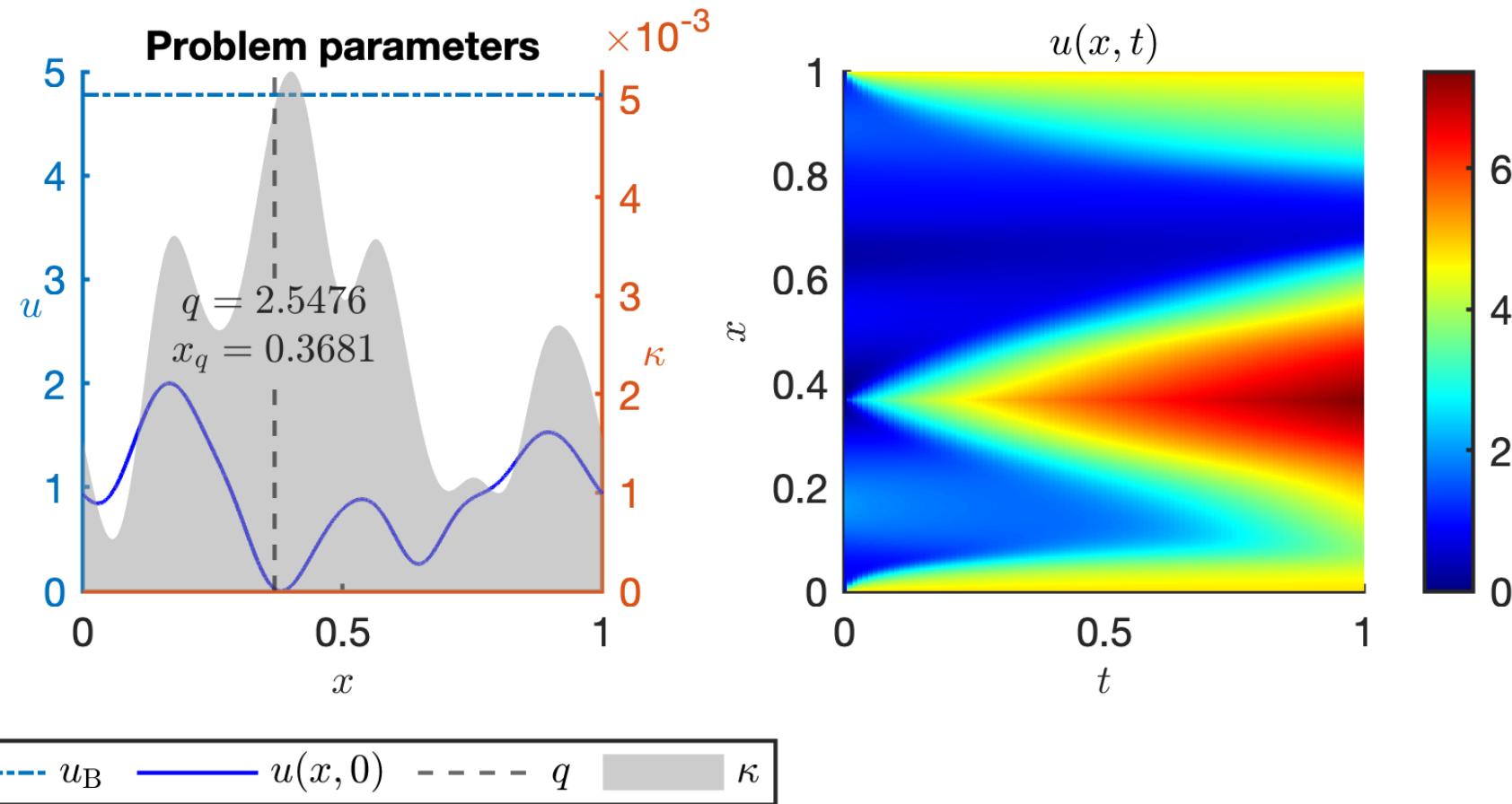
$$\sum_A s_A = 1$$

- нелинейная динамика
- неоднородная среда
- точечное управляющее воздействие

Нелинейная диффузия

$$u(x, t) : \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa(x) \eta(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q \delta(x - x_q)$$

- нелинейная динамика
- неоднородная среда
- точечное управляющее воздействие



Постановка и решение характерной задачи

Абстрактная нелинейная задача

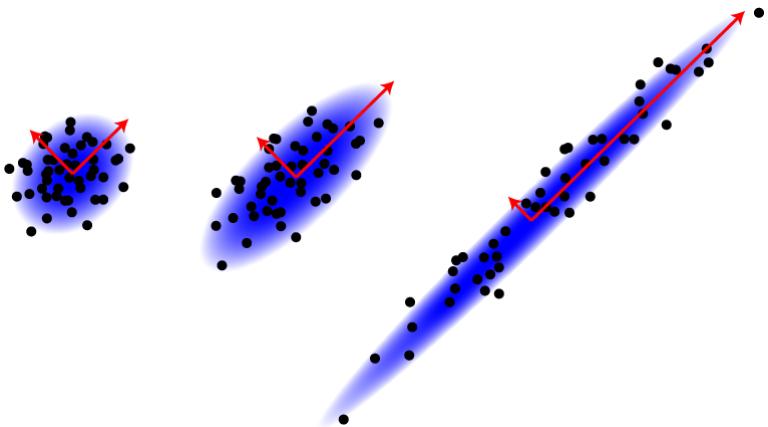
Конечно-разностная динамическая задача
с параметрами μ и начальным условием \mathbf{u}_0

$$\mathbf{u}_n = \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{r}_n(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{n-1}; \mu)\|$$

Итерация метода Ньютона дискретизованной задачи

$$\Delta \mathbf{u}_* = \arg \min_{\Delta \mathbf{u}} \|\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\Delta \mathbf{u}\|$$

Снижение размерности с помощью данных



Правильное ортогональное разложение

Сингулярное разложение матрицы данных

$$\mathbf{U}(\mu) = [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N_t}] = \Phi \Sigma \Upsilon^T$$

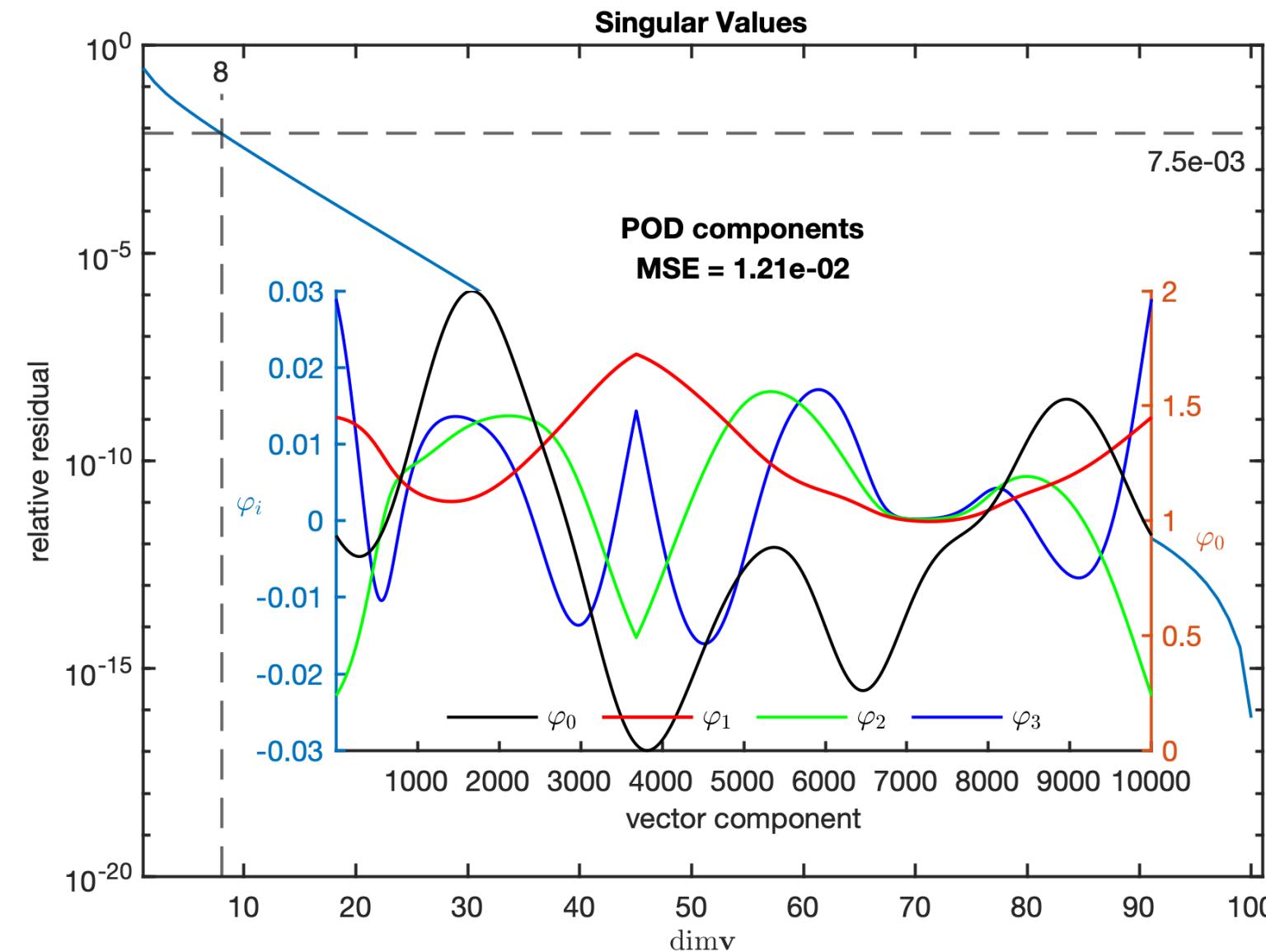
Главные компоненты (корреляции) в пространстве

$$\Phi = [\tilde{\Phi}, \dots]$$

Низкоранговая аппроксимация исходных переменных

$$\mathbf{u}_{\tilde{\Phi}} = \tilde{\Phi} \mathbf{v}, \dim \mathbf{v} \ll \dim \mathbf{u}$$

Снижение размерности нелинейных динамических систем с управлением и неоднородностями методами анализа данных



Главные компоненты
нелинейной диффузии
с источником

Сходимость низкоразмерных моделей

Эмпирически-аппроксимированная нелинейная задача

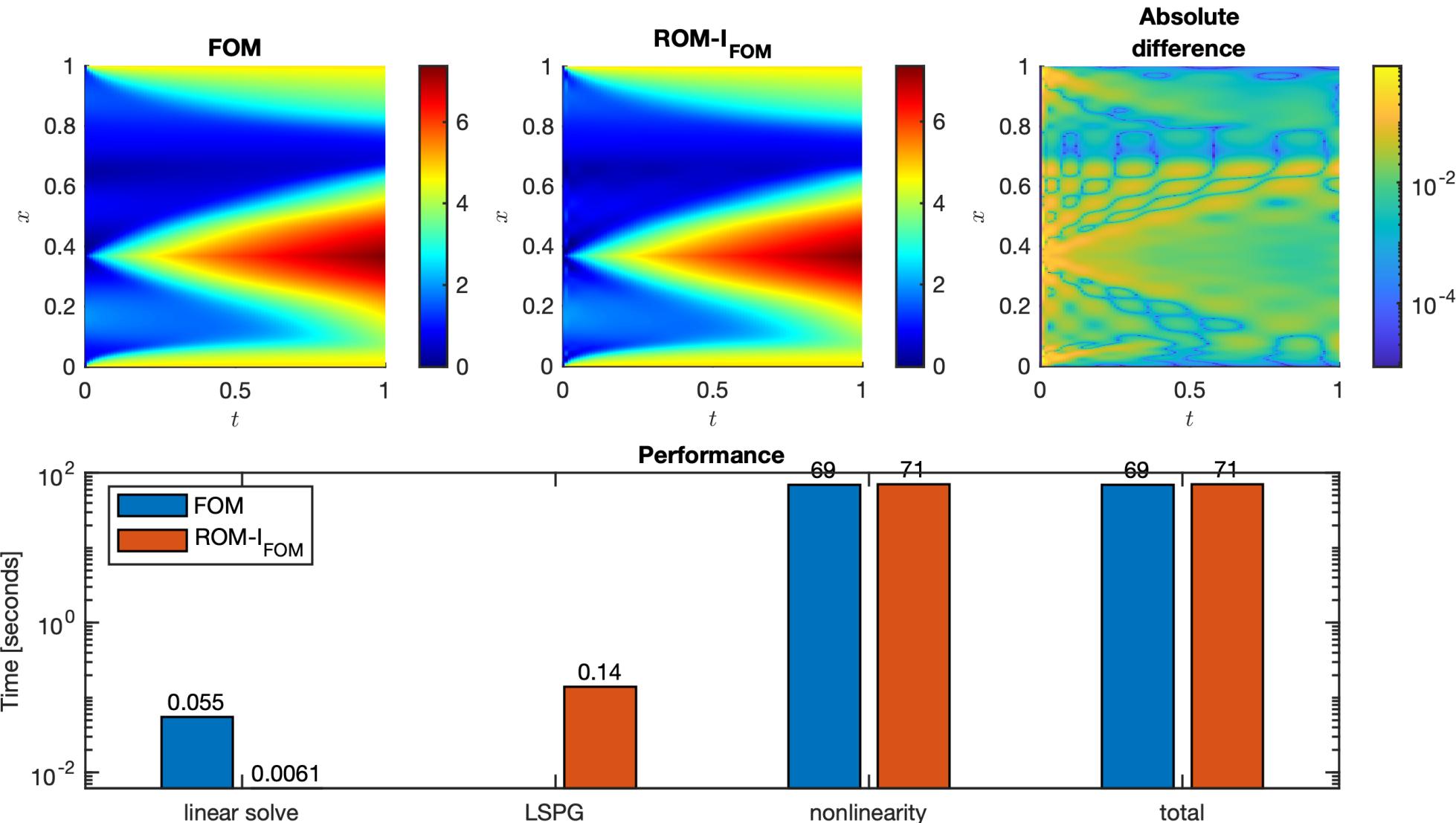
$$\Delta \mathbf{v}_* = \arg \min_{\Delta \mathbf{v}} \| \mathbf{r}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) \tilde{\Phi} \Delta \mathbf{v} \|$$

Проекция переопределённой задачи на подпространство P

$$P^T \mathbf{J} \tilde{\Phi} \Delta \mathbf{v} = -P^T \mathbf{r}$$

Основные виды проекций

- Галеркина: $P_G = \tilde{\Phi}$
- Линейно-регрессионная (LSPG): $P_{LS} = \mathbf{J} \tilde{\Phi}$



Качество и производительность низкоразмерного представления

Измерение сходимости

Сходящийся регрессионный процесс

$$\|P^T \mathbf{r}\| \rightarrow 0 \quad \|\mathbf{r}\| \rightarrow \varepsilon_{\min} \geqslant 0$$

Исходная метрика сходимости с точностью ε

$$\|\mathbf{r} / \dim \mathbf{r}\| = \varepsilon_{\text{FOM}} \leqslant \varepsilon$$

Адаптированная сопоставимая метрика ε

$$\|P_G^T \mathbf{r} / \dim \mathbf{v}\| = \varepsilon_{\text{ROM}} \leqslant \varepsilon$$

Эмпирическая интерполяция нелинейных функций

Вычисление полноразмерных нелинейных функций

$$\Delta \mathbf{v}_* = \arg \min_{\Delta \mathbf{v}} \| \mathbf{r}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) \tilde{\Phi} \Delta \mathbf{v} \|$$

Главные компоненты нелинейной функции $\mathbf{g}(\mathbf{u})$

$$\mathcal{F} = [\mathbf{f}_1, \dots] \rightarrow \tilde{\Phi}_{\mathcal{F}}$$

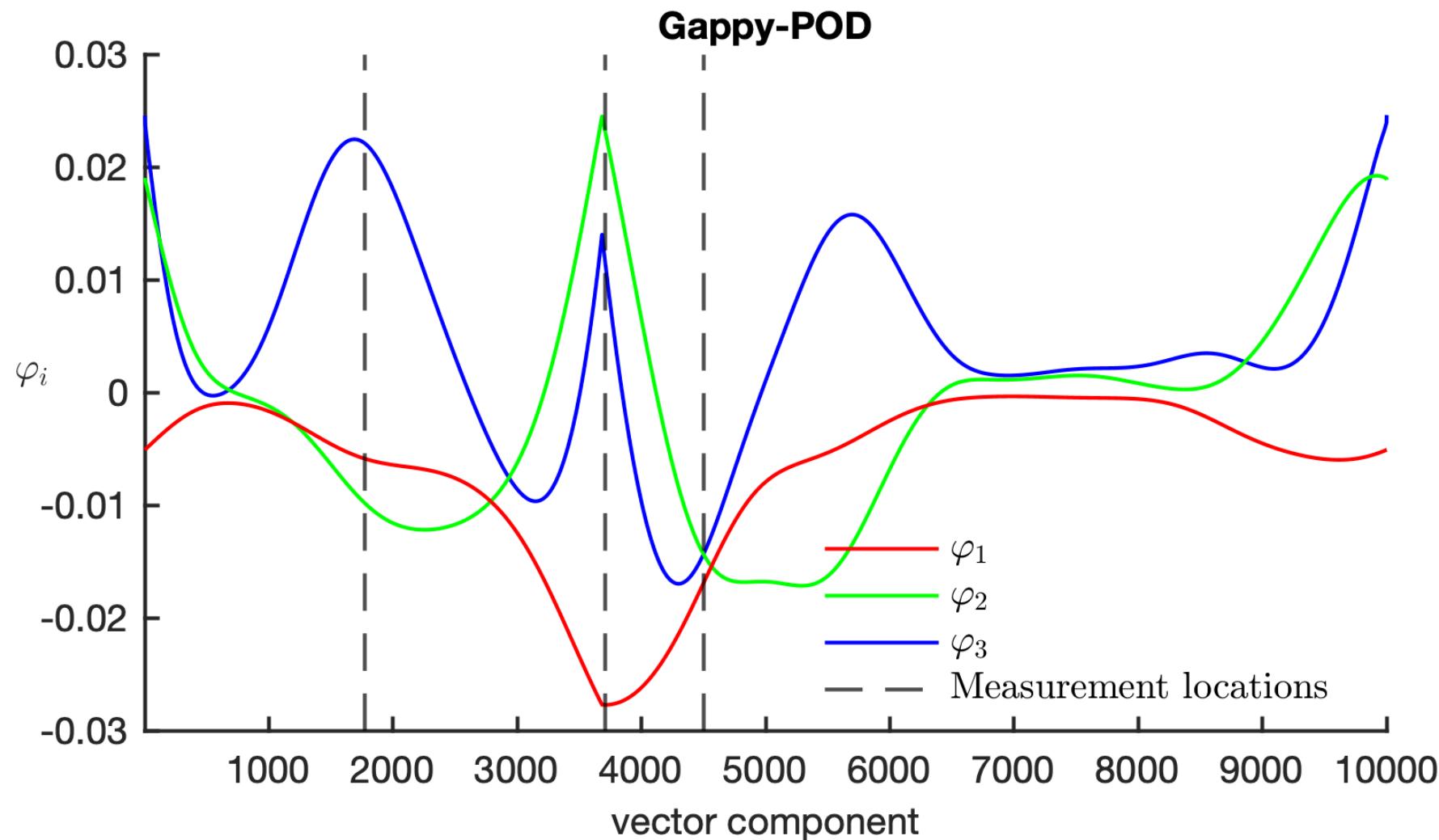
Подпространство нелинейных измерений P

Подмножество компонент вектора \mathbf{g} , вычисляемых *непосредственно*.

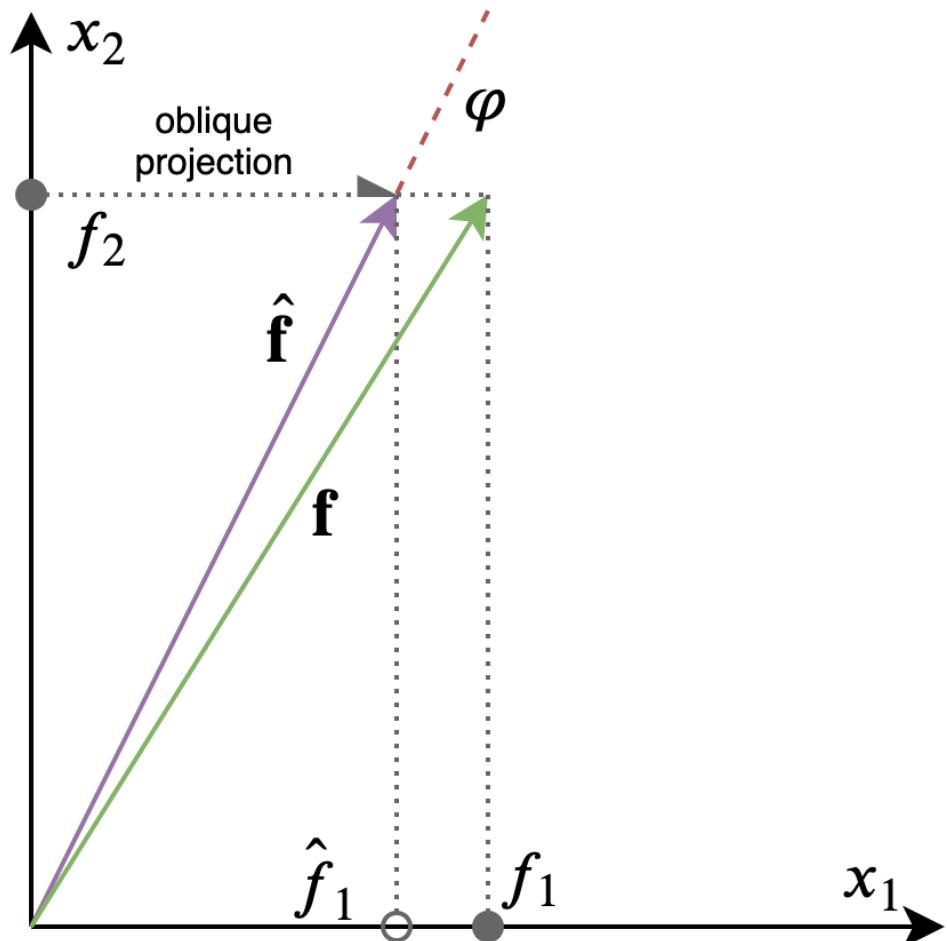
P — подмножество соответствующих базисных векторов.

Проекция на подпространство — применение маски

$$\bar{\mathbf{f}} = P^T \mathbf{f}$$



Пример подпространства нелинейных измерений



**Эмпирическая интерполяция косыми
проекциями**

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg \min_{\mathbf{g}} \| \mathbf{P}^T \tilde{\Phi}_{\mathcal{F}} \mathbf{g} - \bar{\mathbf{f}} \|$$

Косая проекция из $\tilde{\Phi}_{\mathcal{F}}$ ортогонально на \mathbf{P}

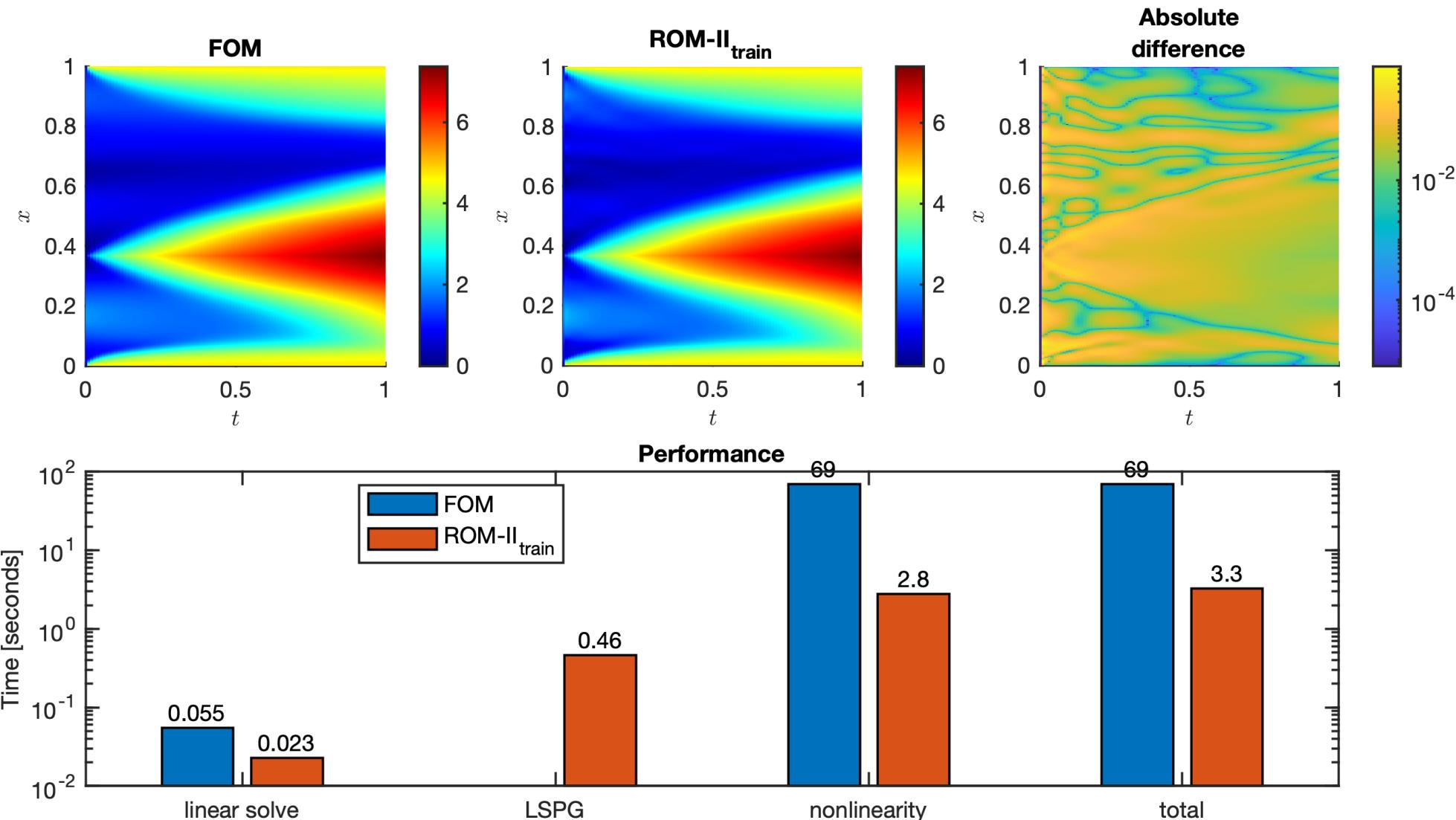
$$\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{f}}) = \tilde{\Phi}_{\mathcal{F}} (\mathbf{P}^T \tilde{\Phi}_{\mathcal{F}})^{\dagger} \bar{\mathbf{f}} = \Pi \bar{\mathbf{f}}$$

Низкоразмерная модель с эмпирической аппроксимацией нелинейностей

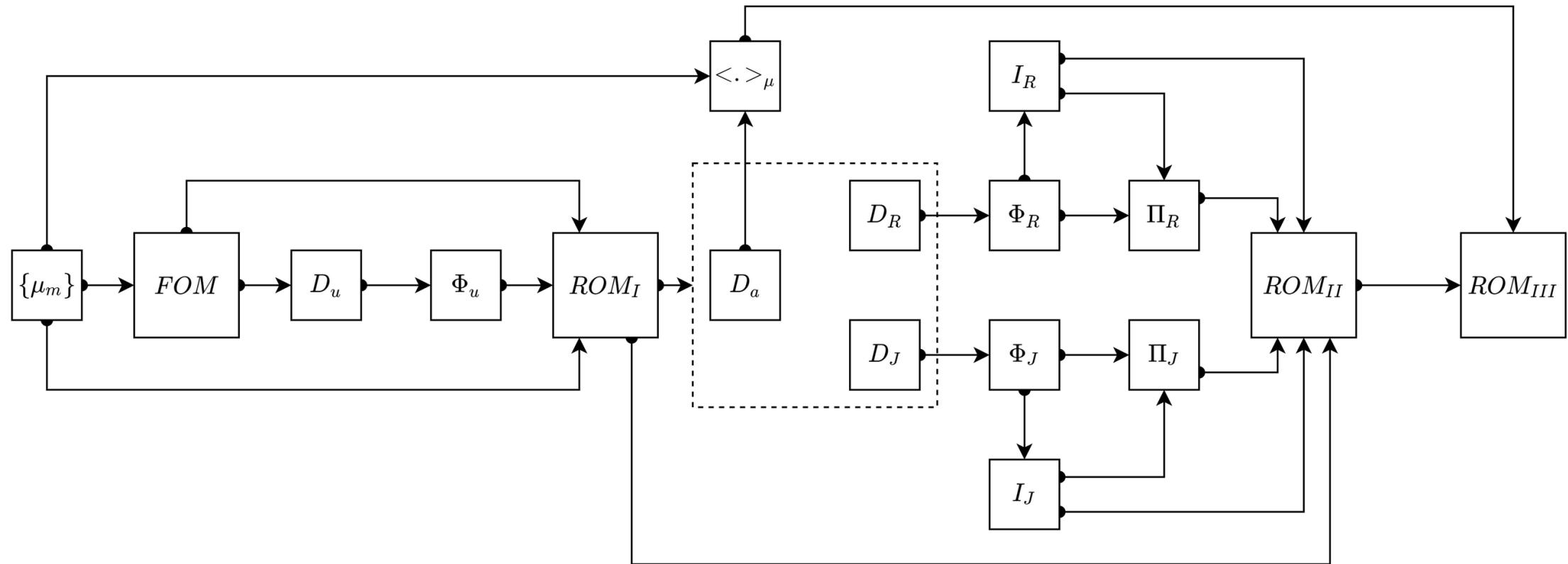
$$\Delta \mathbf{v}_* = \arg \min_{\Delta \mathbf{v}} \left\| \hat{\mathbf{r}}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) + \hat{\mathbf{J}}(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) \tilde{\Phi} \Delta \mathbf{v} \right\|$$

Предварительная свёртка линейных операций

$$L\mathbf{f} \rightarrow L\Pi\bar{\mathbf{f}} \rightarrow \hat{L}\bar{\mathbf{f}}$$



Качество и производительность эмпирической интерполяции нелинейных функций

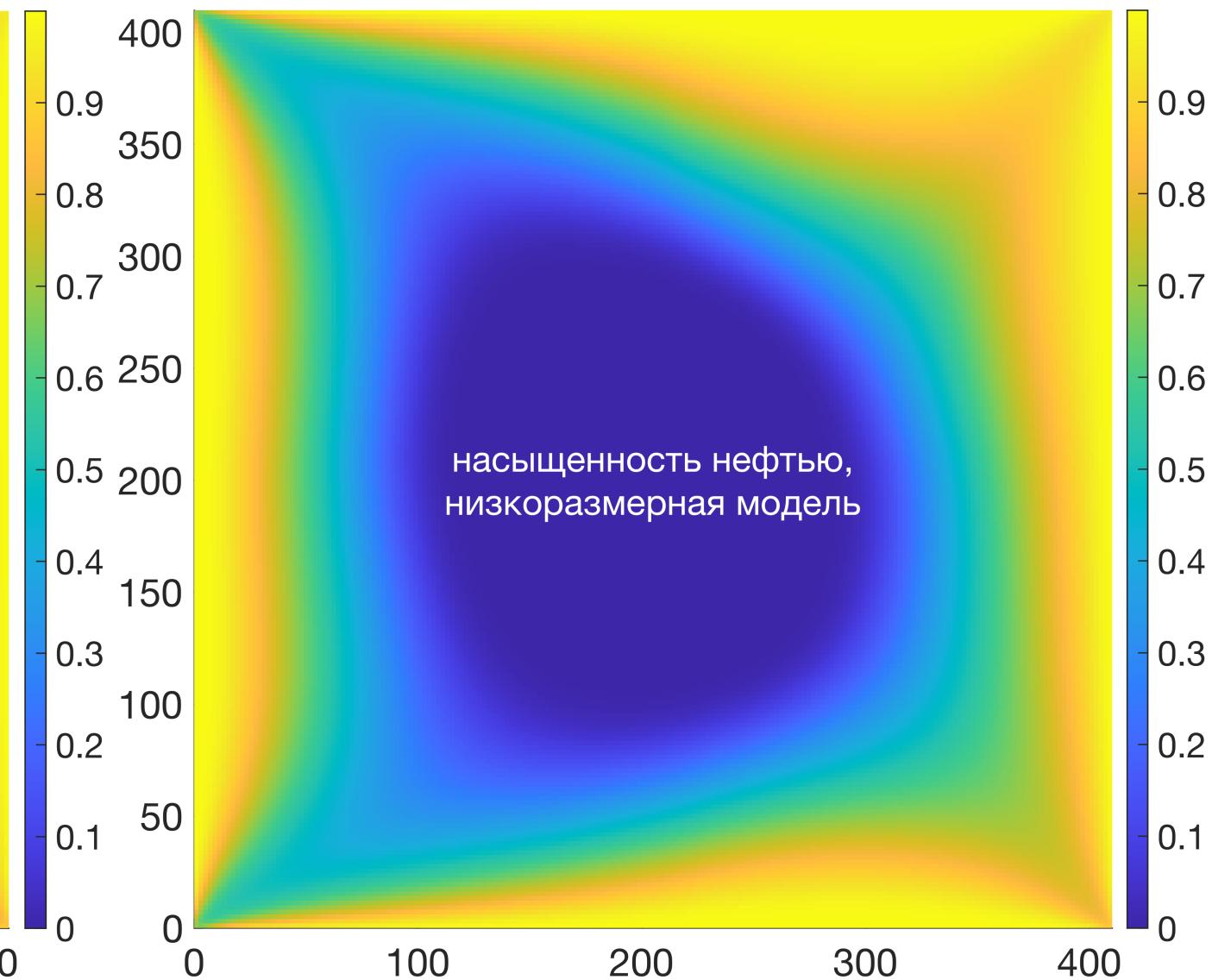
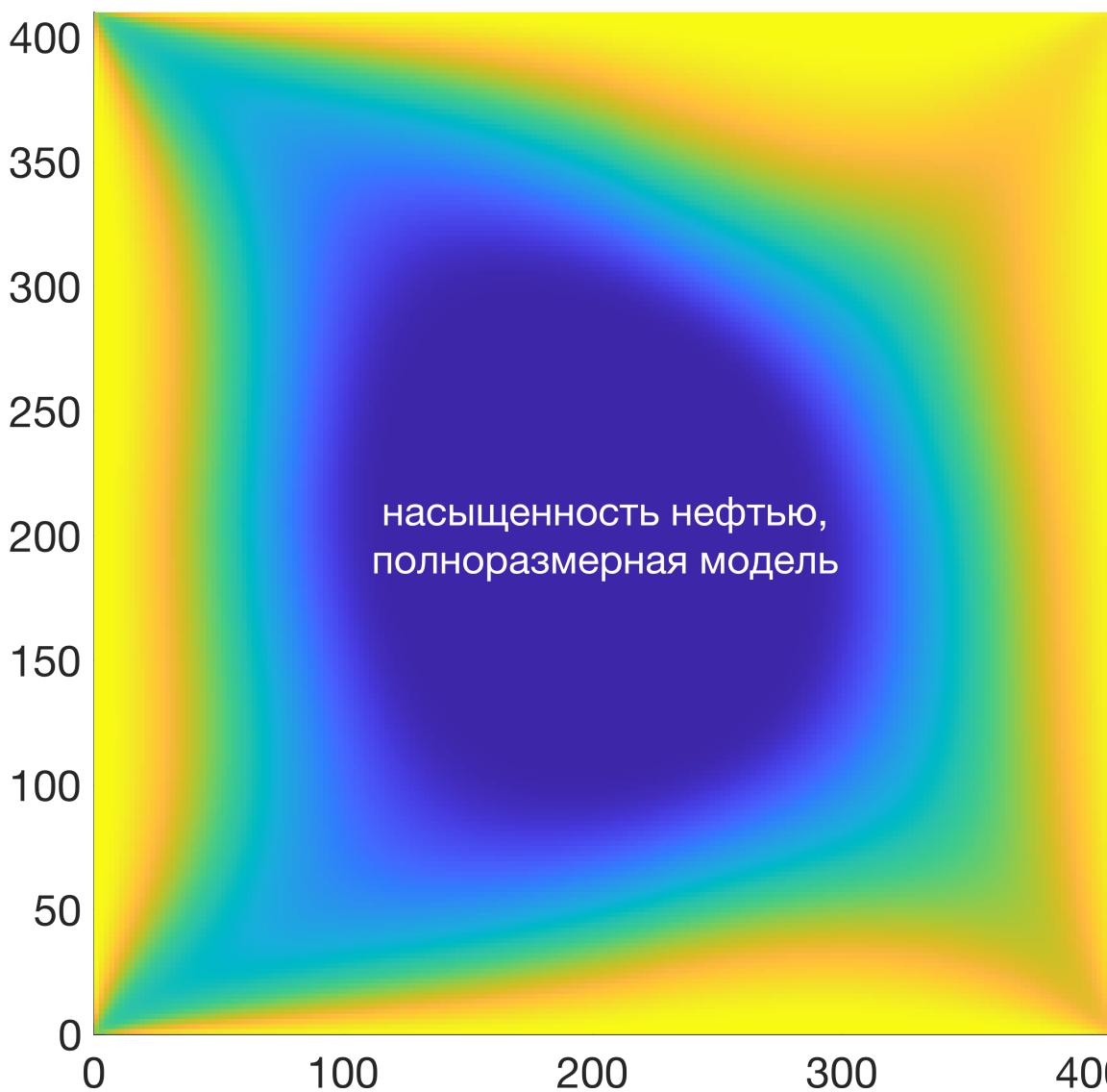


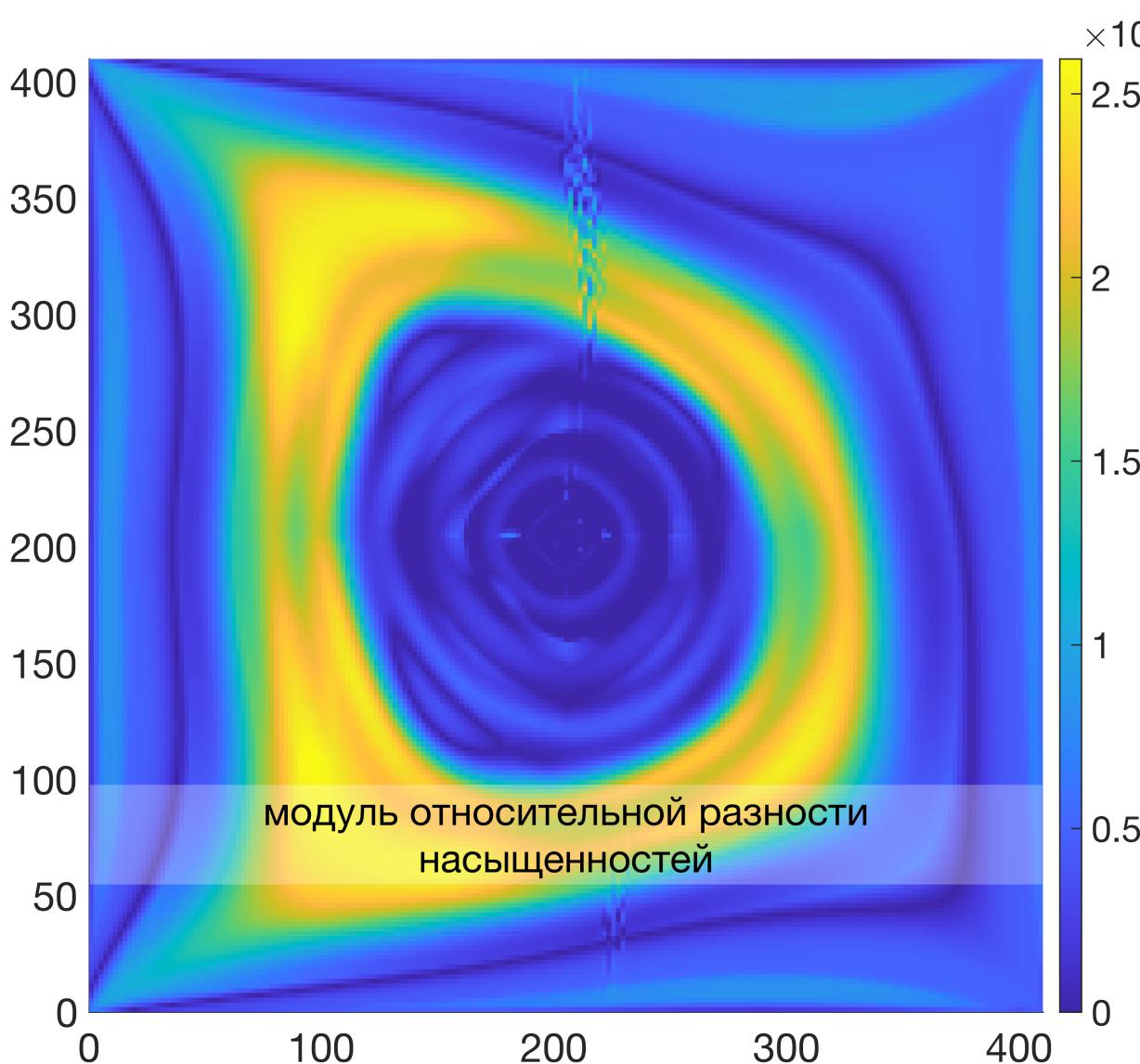
Иерархическая схема эмпирического низкоразмерного моделирования

Модуль для MRST

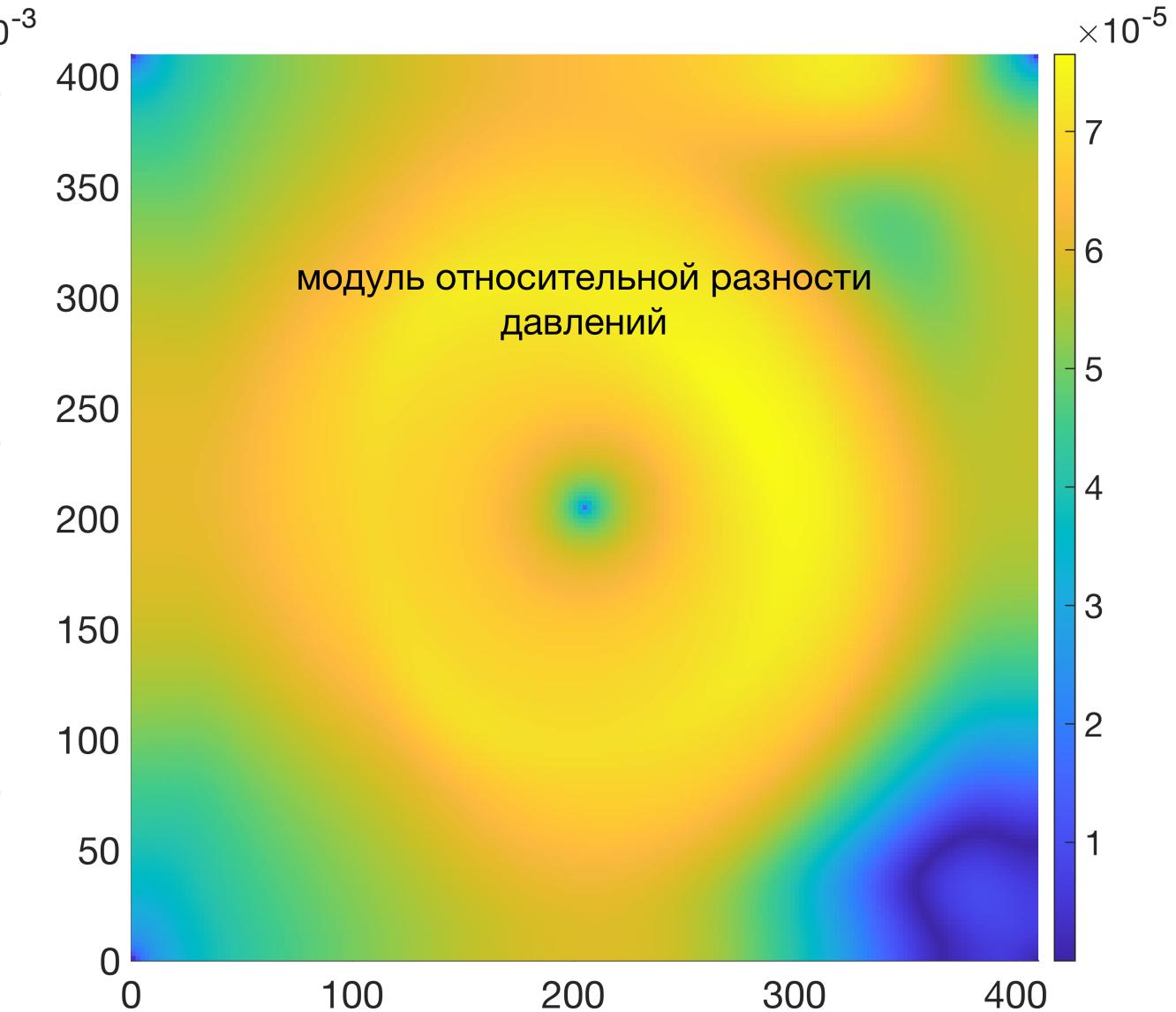
MATLAB Reservoir Simulation Toolbox

Пример: моделирование пятиточечной системы разработки



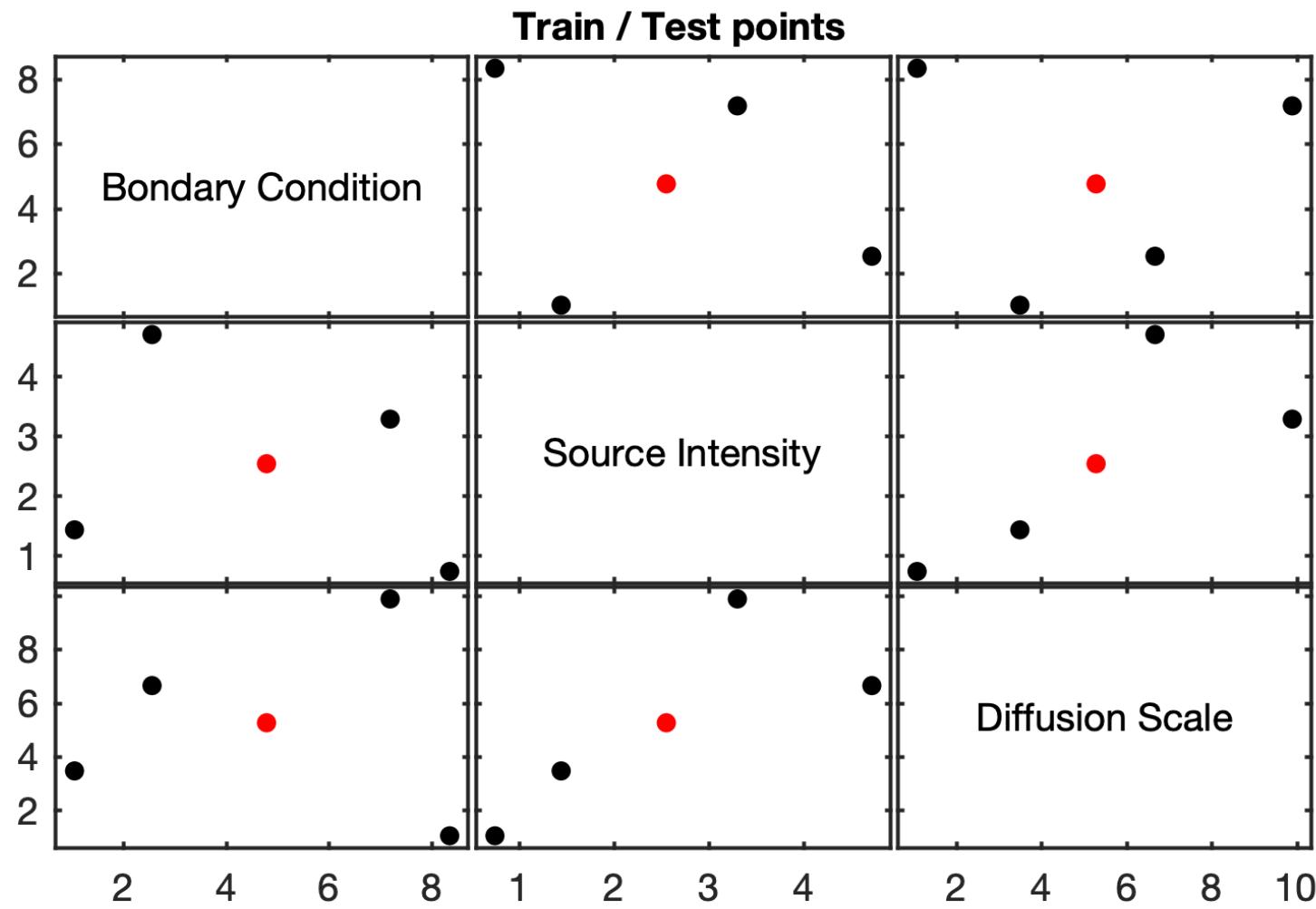


модуль относительной разности
насыщенностей

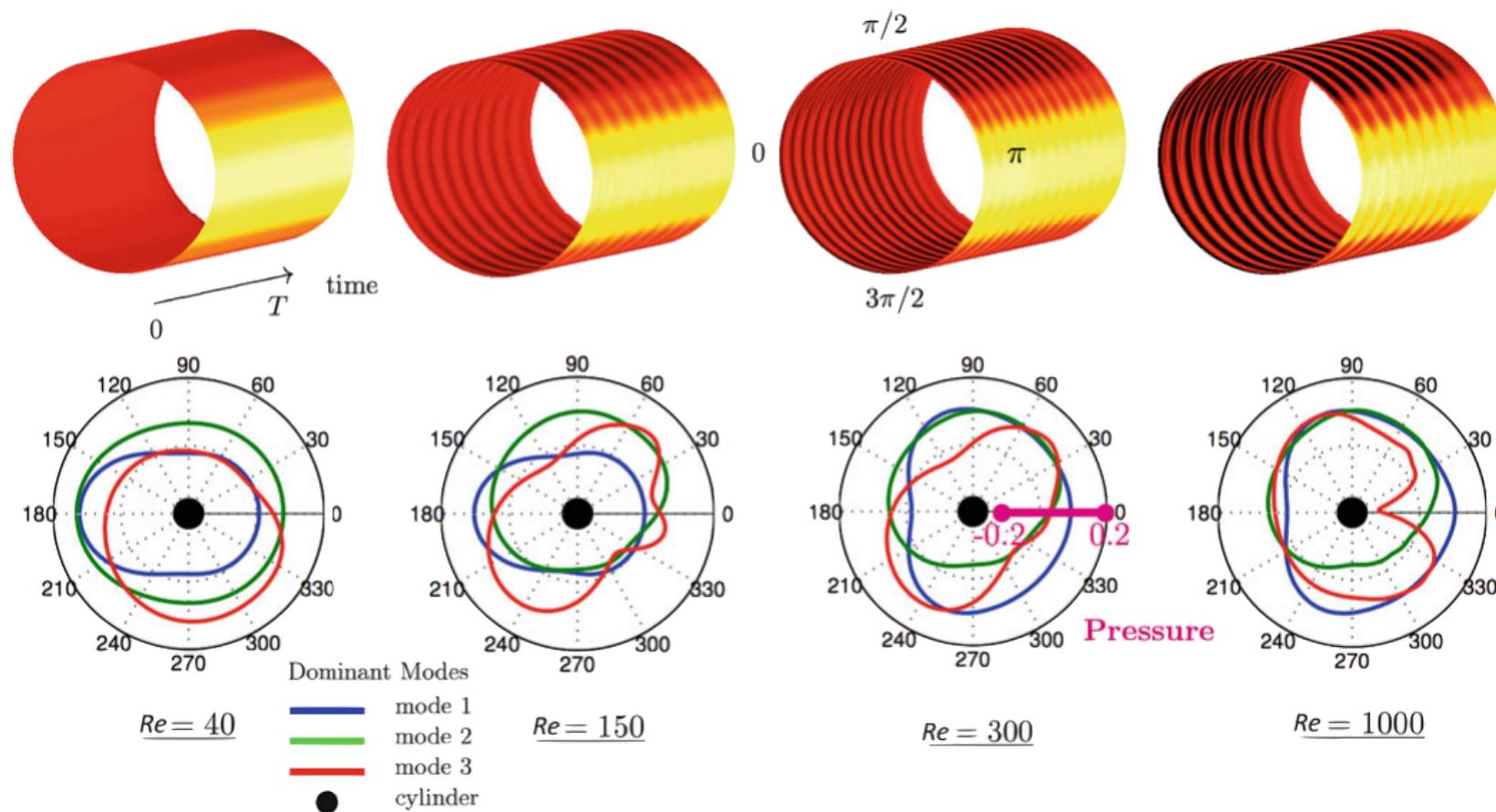


модуль относительной разности
давлений

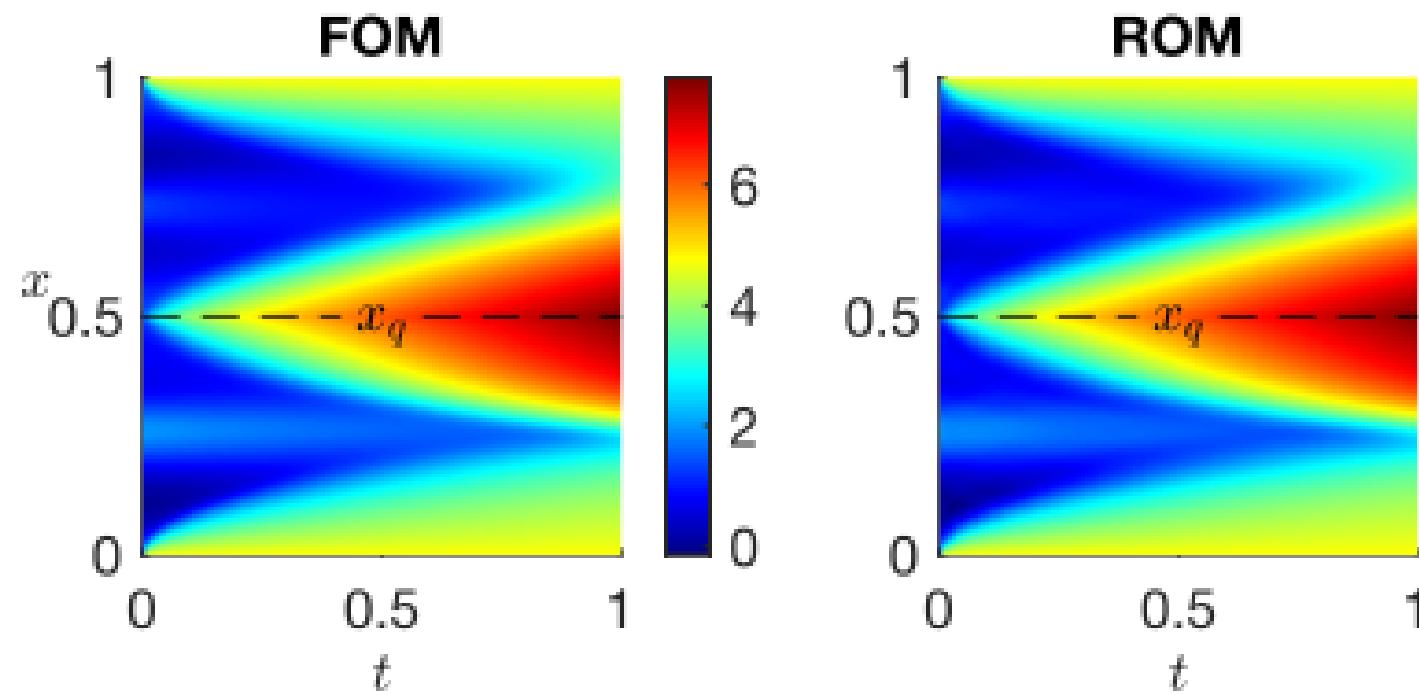
Обратные задачи нефтегазового моделирования



Фиксированная пространственная конфигурация: параметры

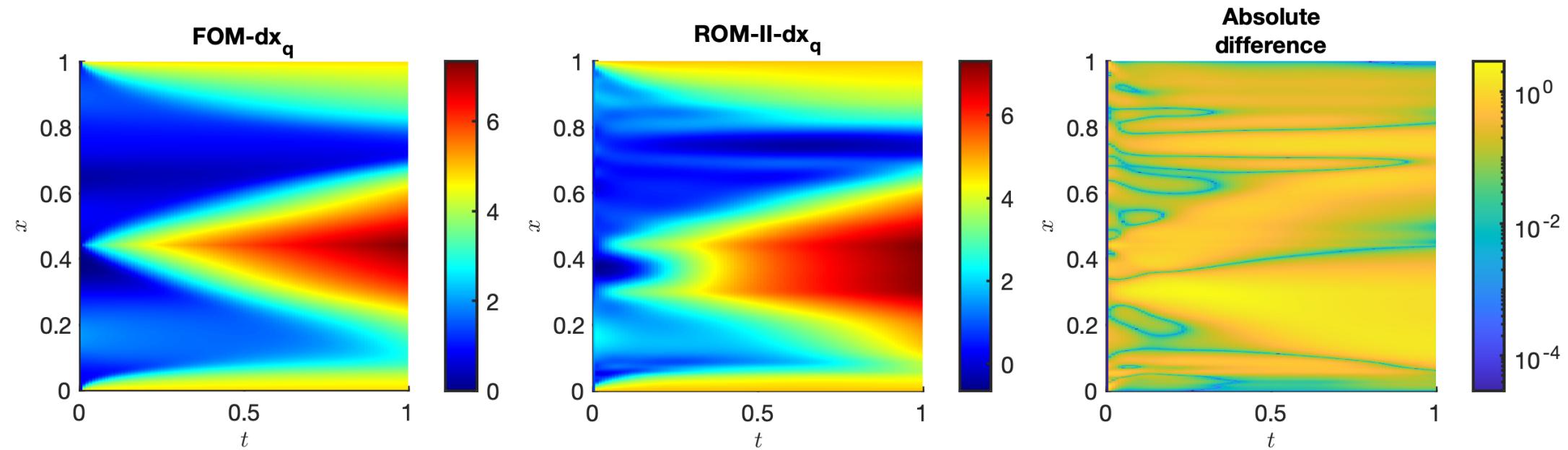


Библиотека главных компонент для параметрических задач
(Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz)



Фиксированная пространственная конфигурация:
качество низкоразмерного моделирования

Поиск оптимального расположения скважин



Применимость извлеченных паттернов при смещении источника

Ведущая линейная динамика

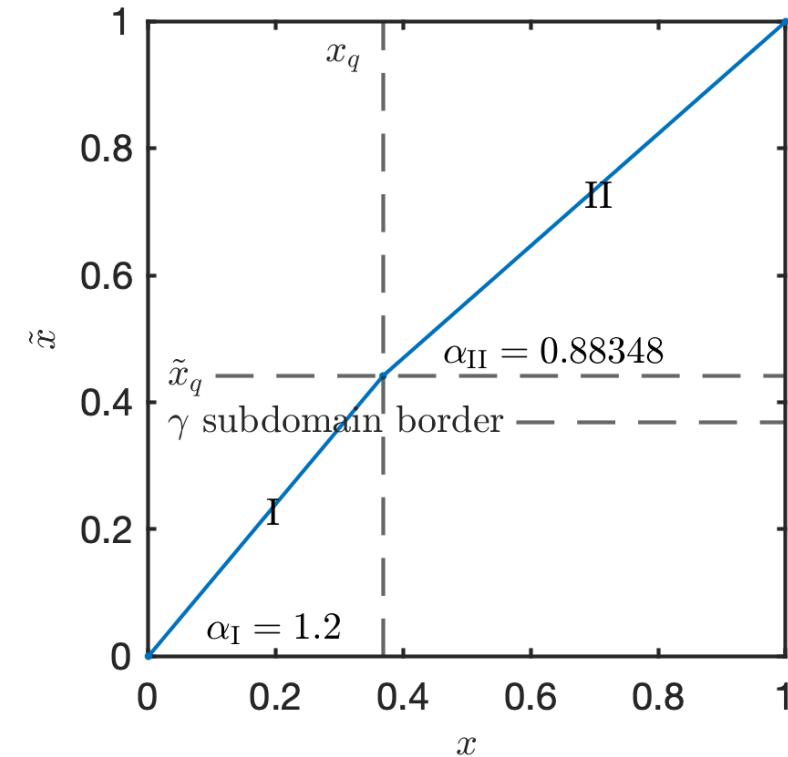
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q$$

Линейное преобразование координат

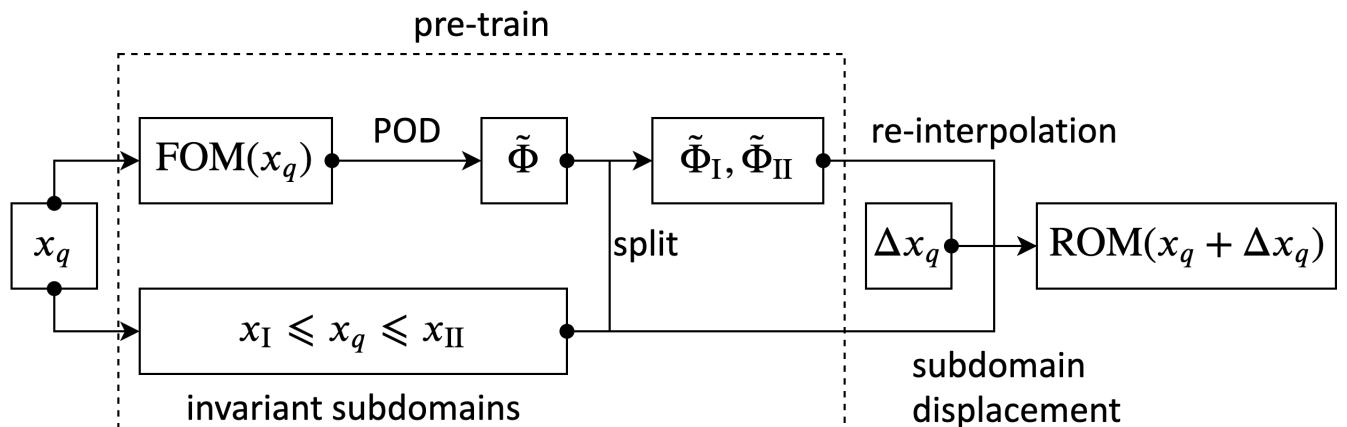
$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \alpha \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \beta$$

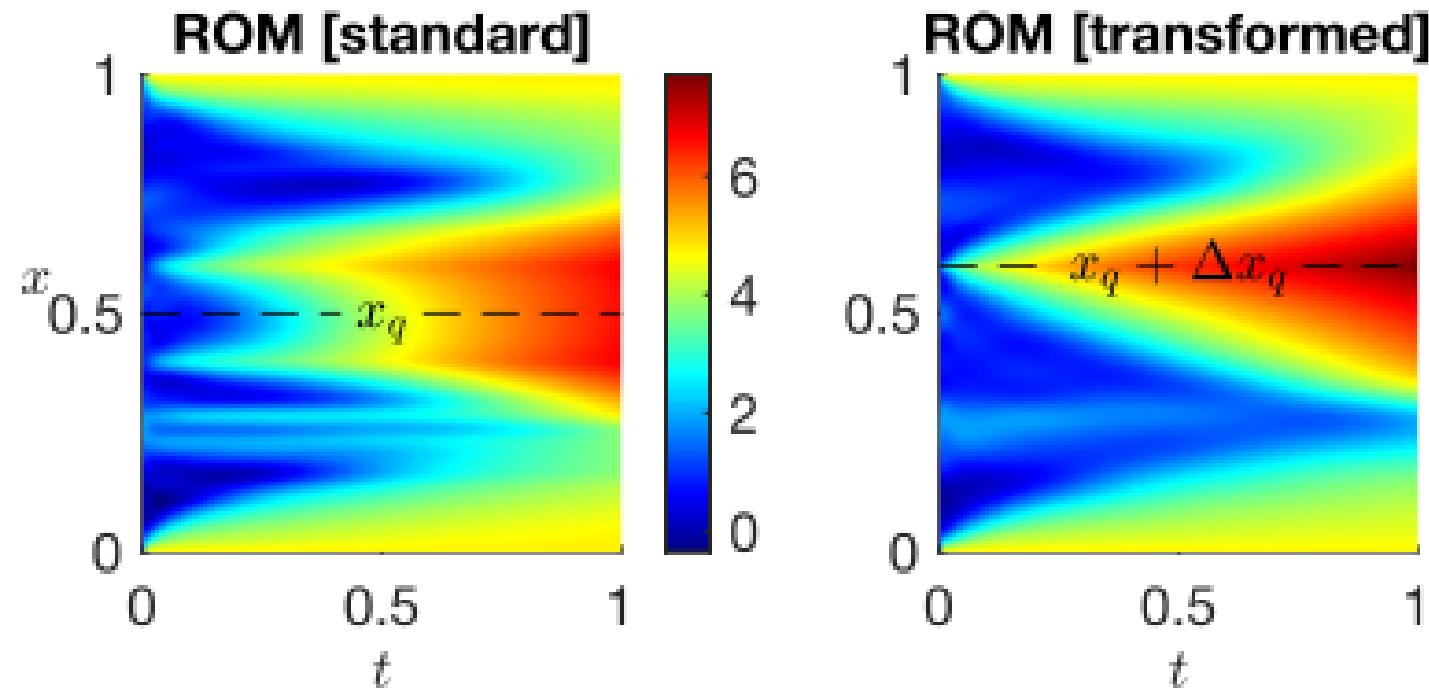
Инвариантность определяющего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta^2}{\alpha} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{q}{\alpha}$$



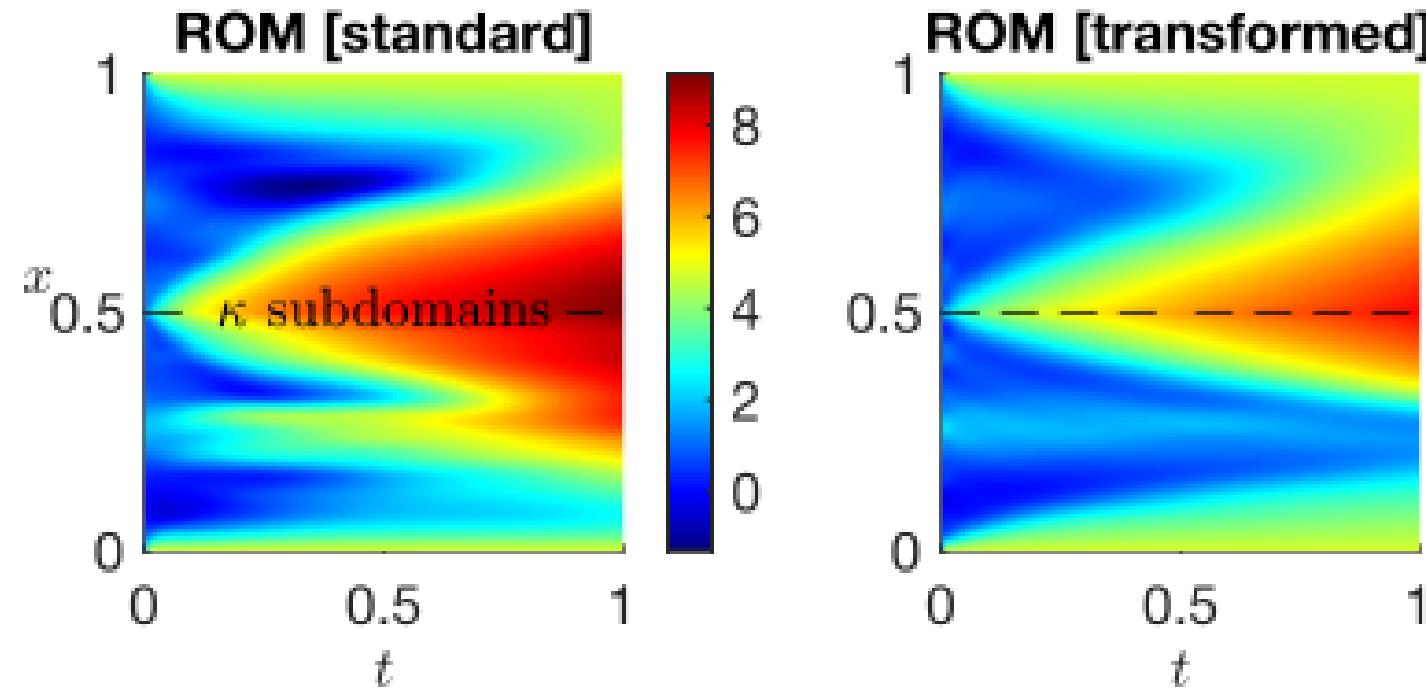
Кусочно-инвариантные преобразования координат





Кусочно-инвариантное преобразование главных компонент
при смещении источника

Определение пространственных свойств



Применение инвариантных преобразований
при кусочно-неоднородных вариациях

Заключение

1. Изучены особенности эмпирического низкоразмерного моделирования в приложении к характерным особенностям моделей пластовых течений
2. Разработан структурированный подход к эмпирическому снижению размерности с интерполяцией нелинейных функций
3. Разработана метрика сходимости низкоразмерных моделей для переиспользования оригинальных критериев сходимости
4. Разработан и реализован принцип кусочно-инвариантных преобразований координат для обобщения извлечённых данных при смещении источниковых членов и неоднородных преобразованиях пространственных свойств

Направления развития исследований

- Совместное снижение размерности полей переноса вещества
- Углубленный анализ нелинейных фундаментальных решений:
поиск глобального нелинейного преобразования координат
- Уточнение подхода к сбору данных в реальных сценариях
- Использование аппарата эмпирической линеаризации
- Использование данных для дополнительного предобуславливания

Спасибо!

**Снижение размерности нелинейных динамических систем
с управлением и неоднородностями методами анализа данных**

Елизарьев Максим Андреевич | А01-902в