

# Parking de Page-Rényi

AHMED SAID Djouhoud  
ESCANDE Florian  
PIVETTA Mattis  
RAVANAT Kélian

16 mai 2025

## Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème du parking de Page, un parking organisé sur une ligne se remplissant aléatoirement de camions prenant deux places consécutives. Nous démontrons que la proportion du nombre de places occupées à la fin du processus converge en probabilité vers une constante. Nous illustrons cette convergence par des simulations informatiques, puis démontrons ce résultat grâce au calcul des deux premiers moments du nombre de places occupées par les camions. Pour aller plus loin, nous avons modélisé un autre problème de parking afin de comparer les résultats du parking original avec ce nouveau parking.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Résolution du Parking de Page</b>	<b>3</b>
2.1	Construction du processus . . . . .	3
2.1.1	Modélisation . . . . .	3
2.1.2	Simulation numérique et mise en évidence d'une potentielle convergence . . . . .	6
2.2	Relation de récurrence sur $M_n$ . . . . .	7
2.3	Calcul de l'espérance $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$ . . . . .	8
2.3.1	Construction et résolution d'une équation différentielle . . . . .	9
2.3.2	Caractérisation des $u_n$ et calcul de la limite de $(\frac{u_n}{n})_n$ . . . . .	11
2.4	Variance $Var[\frac{M_n}{n}]$ . . . . .	14
2.4.1	Simulation numérique et mise en évidence de la convergence . . . . .	14
2.4.2	Idée du calcul de la variance $Var[\frac{M_n}{n}]$ . . . . .	15
2.5	Conclusion sur la variance . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modélisation dans le cas du Parking de Page à deux dimensions</b>	<b>17</b>
3.1	Calculs du problème pour les premières tailles de parking . . . . .	18
3.2	Simulation numérique du problème . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>21</b>
5.1	Programmes . . . . .	21
5.1.1	Algorithme simulant le rapport entre nombre de places occupées et le nombre total de places pour le cas du Parking de Page unidimensionnel . . . . .	21
5.1.2	Algorithme simulant la loi de $M_{10}$ pour le cas du Parking de Page . . . . .	22
5.1.3	Algorithme simulant le rapport entre nombre de places occupées et le nombre total de places pour le cas du Parking de Page à deux dimensions . . . . .	22

# Chapitre 1

## Introduction

Le parking de Page peut être décrit de la manière suivante : imaginons une rue de longueur fixée  $n$ , divisée en un certain nombre de places de stationnement disposées successivement. À chaque unité de temps, un camion apparaît et tente de se garer en occupant deux places adjacentes choisies uniformément au hasard. Si l'une des deux places est déjà occupée, le camion repart sans se garer. Ce processus continue jusqu'à ce que le parking soit plein, c'est-à-dire jusqu'à ce que plus aucun camion ne puisse se garer.

Étudier ce problème revient à étudier tout problème de placements aléatoires. Qu'il s'agisse de camions ou de voitures qui ne souhaitent pas être adjacentes à une autre, de parkings en ligne droite ou de tables rondes, on peut se ramener au problème de parking de Page. Par exemple, le chercheur Dave Freedman a publié un article sous le nom de Unfriendly Seating Arrangement (Disposition des sièges peu conviviale). Il est également intéressant de modifier l'énoncé du problème afin d'étendre les résultats et le domaine d'application de ces derniers. On peut par exemple changer de géométrie et étudier un parking en deux dimensions, ou encore modifier la façon dont les camions occupent les places comme le propose le chercheur ... avec des camions en forme de triangles.

Dans toute cette étude, nous nous intéressons au nombre de places occupées à la fin du processus. Nous notons ce nombre de places occupées  $M_n$ .

Nous commençons par étudier le cas d'un parking de taille finie, constitué de  $n$  places alignées.

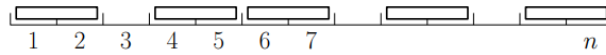


FIGURE 1.1 – Illustration représentant un parking de taille  $n$  occupé par 5 camions (source : Lucas Gerin. The Page-Rényi parking process.)

Notre objectif est de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1.0.1.** *Soit un parking de taille  $n \in \mathbb{N}$  dont les places se remplissent comme décrit ci-dessus. Soit  $M_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de places occupées à la fin du processus.*

*Alors on a :  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 1 - e^{-2}$*

Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat, une étant présentée dans l'article de Lucas Gerin, The Page-Rényi parking process. Nous souhaitons en proposer une autre.

Dans le chapitre 2, nous modéliserons le modèle afin de prouver l'existence de  $M_n$ . Puis nous validerons la convergence de la proportion  $\frac{M_n}{n}$  par des simulations numériques. Enfin, nous nous intéresserons au calcul des différents moments de cette proportion, en particulier à l'espérance et à la variance du nombre de places occupées afin de prouver la convergence en probabilité vers  $1 - e^{-2}$ .

Puis dans le chapitre 3, nous généraliserons l'étude au cas d'un parking de taille  $2 \times n$ , c'est-à-dire un parking comportant deux rangées parallèles de  $n$  places chacune. Après modélisation, nous comparerons les résultats obtenus avec ceux du modèle unidimensionnel, afin d'analyser l'impact de ce changement de géométrie sur la proportion de places occupées.

## Chapitre 2

# Résolution du Parking de Page

Dans ce chapitre, nous allons d'abord modéliser le problème afin de montrer l'existence, et l'intérêt d'étudier la convergence de  $\frac{M_n}{n}$  qui sera validée par des simulations numériques. Puis, en calculant l'espérance et la variance de  $\frac{M_n}{n}$ , nous allons démontrer la proposition 1.0.1, donc que  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 1 - e^{-2}$ .

## 2.1 Construction du processus

### 2.1.1 Modélisation

Avant de se lancer dans les calculs, il nous faut d'abord modéliser le problème et montrer que  $M_n$  est bien définie, c'est-à-dire, montrer que le problème a bien une "fin", qu'au bout d'un moment, plus aucun camion ne peut se garer.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on construit un parking de taille  $n$  de la façon suivante : soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi uniforme sur  $\{1, \dots, n-1\}$ . La variable  $U_i$  représente la paire de places  $(U_i, U_i + 1)$  sur laquelle le  $i^{\text{ème}}$  camion tente de se garer. Ainsi, l'événement  $\{U_i = k\}$  signifie "le  $i^{\text{ème}}$  camion tente de garer ses roues avant à la place  $k$ " avec  $k \in [1, \dots, n-1]$ , et si le camion parvient à se garer, les places  $k$  et  $k+1$  sont alors occupées.

Nous pouvons maintenant définir la suite de variables aléatoires  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  représentant le nombre de places occupées dans le parking après que le  $i^{\text{ème}}$  camion a tenté de se garer.

Voici un exemple avec un parking de taille 6 :

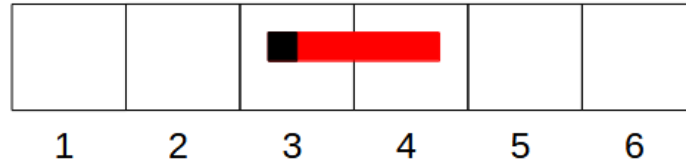


FIGURE 2.1 – Représentation d'un parking de taille 6 avec un camion garé (rectangle rouge et le carré noir représente les roues avant).

Ici, on a  $\{U_1 = 3\}$  et  $\{L_1 = 2\}$  car 2 places sont occupées. Si on a que  $\{U_2 = 4\}$ , ce camion ne peut pas se garer car la place 4 est déjà occupée, on a donc que  $\{L_2 = 2\}$ .

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 2.1.1.** *Soit un parking de taille  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soit la suite de variables aléatoires  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie si-dessus. On a alors :  $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i = M_n$*

*Démonstration.* En effet, la suite  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante car :

- Si le  $i^{\text{ème}}$  camion n'a pas pu se garer, on a  $L_i = L_{i-1}$
- Si le  $i^{\text{ème}}$  camion a pu se garer, on a  $L_i = L_{i-1} + 2$ .

De plus, il est évident que la suite  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $n$ . Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite de variables aléatoires  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est convergente vers une variable aléatoire que nous notons  $M_n$ .  $\square$

Afin de se familiariser avec cette variable aléatoire, calculons les valeurs qu'elle peut prendre pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  :

$M_0 = 0$  avec une probabilité de 1 car le parking ne possède aucune places.

$M_1 = 0$  avec une probabilité de 1 car les camions ont besoin d'au moins 2 places pour se garer.

$M_2 = 2$  avec une probabilité de 1 car la variable aléatoire  $U_1$  prend la valeur 1 de probabilité 1, puis le parking est complet.

$M_3 = 2$  avec une probabilité de 1 car la variable aléatoire  $U_1$  prend la valeur 1 de probabilité  $1/2$ , et la valeur 2 de probabilité  $1/2$

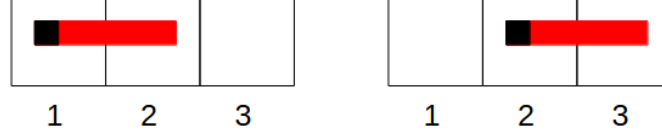


FIGURE 2.2 – Représentation des deux possibilités de  $U_1$  pour un parking de taille 3.

puis il n'y a plus assez de places libres pour qu'un camion supplémentaire puisse se garer.

$M_4$  : On a les différentes possibilités de  $U_1$ , chacune de probabilité  $1/3$  :

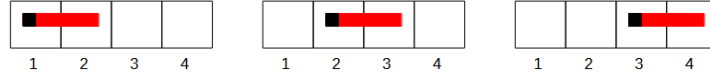


FIGURE 2.3 – Représentation des deux possibilités de  $U_1$  pour un parking de taille 4.

Pour  $U_1 = 2$ , il n'y a plus deux places adjacentes pour qu'un camion supplémentaire puisse se garer, on a donc  $M_4 = 2$ . Cependant, pour  $U_1 = 1$  et  $U_1 = 3$ , il reste 2 places adjacentes. On a, pour le cas  $U_1 = 1$ , qu'il existe  $i > 1$  telle que  $U_i = 3$ , puis le parking est complet et  $M_4 = 4$ . De même pour le cas  $U_1 = 3$ , il existe  $i > 1$  telle que  $U_i = 1$ , puis le parking est complet et  $M_4 = 4$ . Au final, on a :

$M_4 = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } 1/3 \text{ si le premier camion qui se gare place ses roues avant à la place 2} \\ 4 & \text{avec probabilité } 2/3 \text{ si le premier camion qui se gare place ses roues avant à la place 1 ou 3} \end{cases}$

$M_5$  : On a les différentes possibilités de  $U_1$ , chacune de probabilité  $1/4$  :

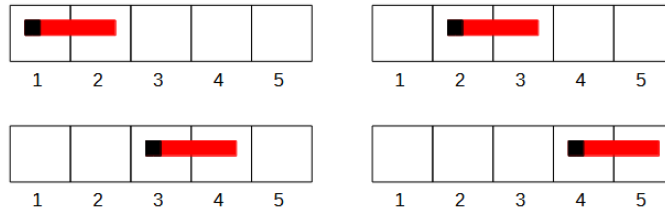


FIGURE 2.4 – Représentation des deux possibilités de  $U_1$  pour un parking de taille 5.

On remarque que, quelle que soit la valeur de  $U_1$ , il reste 2 places adjacentes dans le parking, Il existe donc  $i > 1$  telle que le  $i$ ème camion puisse se garer, puis il n'y a plus assez de places libres pour qu'un camion supplémentaire puisse se garer et  $M_5 = 4$ . D'où  $M_5 = 4$  avec une probabilité de 1

Nous pouvons même réaliser une modélisation informatique qui donne la loi de  $M_{10}$  (dont le programme complet sera fourni dans notre Chapitre 'Annexe' 5, Section 'Programme' 5.1, Sous-Section 5.1.2). Nous obtenons le résultat suivant :

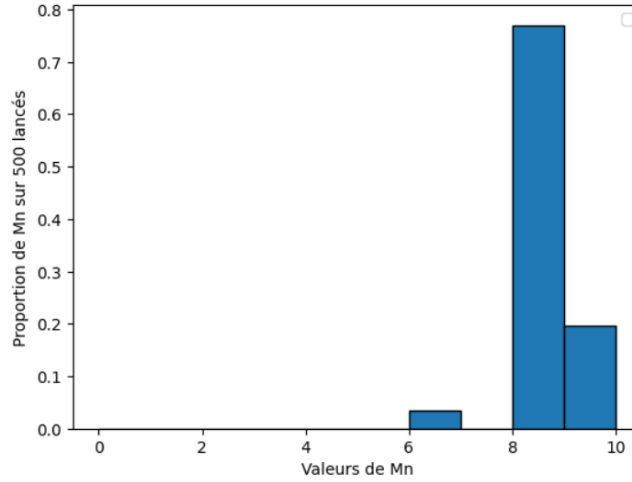


FIGURE 2.5 – Graphique représentant la proportion des valeurs de  $M_{10}$  sur 500 réalisations.

On a que  $M_{10}$  peut valoir 6, 8 ou encore 10, et ceci réparti de façon inégale, ce qui illustre la complexité du problème.

A ce stade, il est difficile de percevoir une logique sur le comportement de  $M_n$ .

Cependant, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.1.2.** *Soit un parking de taille  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $M_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de places occupées à la fin du processus. On a :  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor \leq M_n \leq n$*

*Démonstration.* Soit un parking de taille  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Il est évident que  $M_n$  soit majorée par  $n$ . Il nous reste à montrer que  $M_n$  est minorée par  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor$ .

Si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , on découpe le parking en sections de 3 places. On prend la section des places  $i, i+1$  et  $i+2$  et on regarde les différentes possibilités que ces places soient remplies :

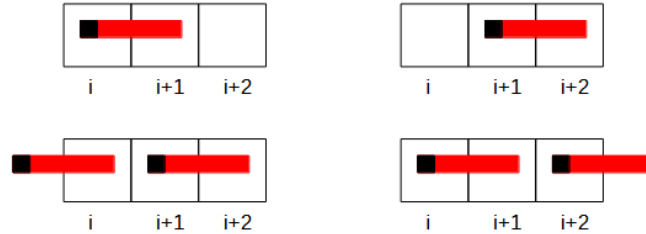


FIGURE 2.6 – Représentation des possibilités de remplissage de la section des places  $i, i+1$  et  $i+2$

On peut noter que, quelle que soit la configuration, au moins 2 places sur 3 sont occupées. Donc sur l'ensemble de notre parking de taille  $n$ , on a  $2/3 \times n \leq M_n$  et donc  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor \leq M_n$ .

Si  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , on a que  $2/3 \times (n-1) \leq M_{n-1}$ . Puis le parking de taille  $n$  possède une place supplémentaire qui, dans le pire des cas, n'est pas occupée. D'où  $M_{n-1} \leq M_n$ , et comme on a  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor = 2/3 \times (n-1)$  on retrouve  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor \leq M_n$ .

Enfin, si  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , on a que  $2/3 \times (n-2) \leq M_{n-2}$ . Puis le parking de taille  $n$  possède une section supplémentaire de deux places. On regarde les différentes possibilités de remplissage de cette section :



FIGURE 2.7 – Représentation des possibilités de remplissage de la section des places  $i$  et  $i + 1$

On peut noter que, quelle que soit la configuration, au moins 1 place sur 2 est occupée. D'où  $M_{n-2} + 1 \leq M_n$ , et comme on a  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor = 2/3 \times (n - 2) + 1$  on retrouve  $\lfloor 2/3 \times n \rfloor \leq M_n$ .  $\square$

Cela démontre alors que  $M_n$  croît linéairement par rapport à  $n$ , ce qui nous fait penser que la proportion  $\frac{M_n}{n}$  pourrait converger.

### 2.1.2 Simulation numérique et mise en évidence d'une potentielle convergence

Nous allons essayer de visualiser numériquement le problème grâce à une simulation. Celle-ci pourra alors nous permettre de visualiser la convergence de  $\frac{M_n}{n}$  et nous aiguiller sur la validité ou non de nos résultats. Pour cela, nous réalisons une première simulation de notre problème, qui, on le rappelle est de déterminer le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking, suivant les conditions décrites dans notre introduction 1. Pour ce faire, nous avons réalisé une modélisation de notre problème pour des tailles de parking allant de 5 à 1000, ( dont le programme complet sera fourni dans notre Chapitre 'Annexe' 5, Section 'Programme' 5.1, Sous-Section I 5.1.1) et nous obtenons cela :

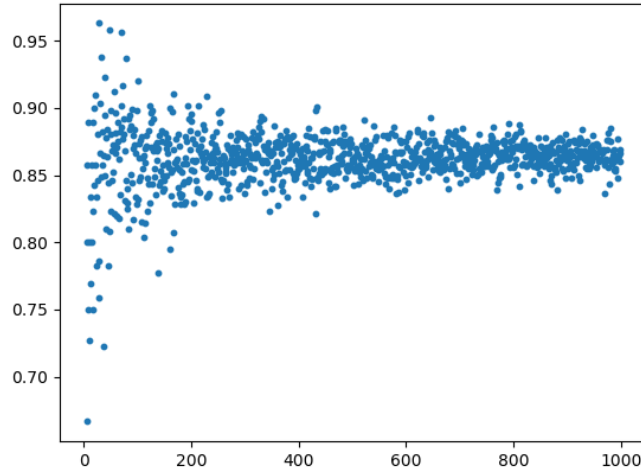


FIGURE 2.8 – Graphique représentant le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking en fonction de différentes tailles.

Nous observons clairement que le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking semble converger vers une constante.

Pour obtenir plus d'information sur la potentielle limite, nous réalisons cette fois-ci une moyenne sur 100 réalisations de notre problème pour les tailles de parking : 5, 50, 100, 500, 1000, 1250, 1500.

Ce qui nous donne :



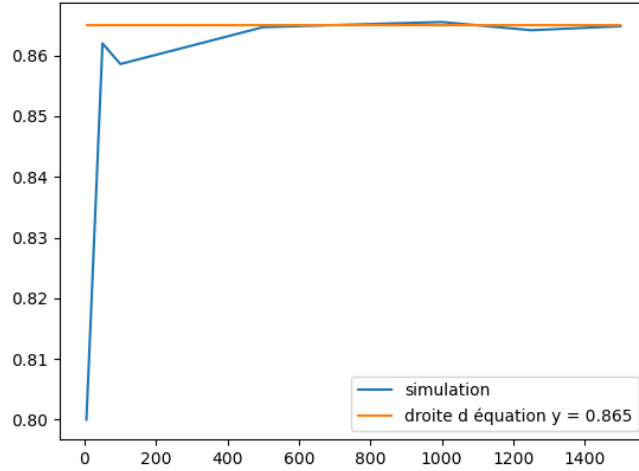


FIGURE 2.9 – Graphique représentant la moyenne de 100 réalisations du problème en fonction de la taille  $n$ .

Nous pouvons alors, grâce à cette simulation, mettre en évidence la convergence, et donc supposer que le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking converge vers  $1 - e^{-2} \approx 0,865$ , tracée ici par la droite orange.

Par la suite nous allons alors vérifier par le calcul ce que nous observons lors de la simulation numérique.

## 2.2 Relation de récurrence sur $M_n$

Afin de calculer la convergence de  $\frac{M_n}{n}$ , nous allons démontrer une relation de récurrence sur  $M_n$  qui nous permettra de calculer l'espérance et la variance de  $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$ .

Soit la suite de variables aléatoires  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  représentant les camions qui arrivent à se garer. Ainsi, l'événement  $\{I_i = k\}$  signifie "le  $i^{\text{ième}}$  camion arrive à se garer et gare ses roues avant à la place  $k$ " avec  $k \in [0, \dots, n-1]$ .

Nous allons démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1.** *Soit un parking de taille  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables i.i.d. de loi uniforme sur  $\{1, \dots, n-1\}$  représentant les camions qui tentent de se garer et  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  les variables définies ci-dessus. Soient  $(M_1, \dots, M_n)$  les variables i.i.d. des parkings de taille  $1, \dots, n$  et soient  $(M'_1, \dots, M'_n)$  d'autres variables i.i.d. de même loi que  $(M_1, \dots, M_n)$  et indépendantes avec ces derniers. On a alors :*

$$M_n = M'_{I_1-1} + M'_{n-I_1-1} + 2 \text{ avec } n \geq 2$$

*Démonstration.* Soit les suites de variables aléatoires  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définies précédemment dans cette Section et la Sous-Section 2.1.1. On rappellera que les variables aléatoires  $U_i$  sont i.i.d.

On remarque que  $I_1 = U_1$  car, le parking étant vide, le premier camion qui tente de se garer arrive à se garer. Fixons  $I_1$ , les places  $I_1$  et  $I_1 + 1$  sont donc prises.

On pose alors :

$$V_i^{I_1} = \{U_i ; U_i < I_1\}$$

$$W_i^{I_1} = \{U_i ; U_i > I_1\}$$

Les  $V_i^{I_1}$  sont donc à valeur dans  $[1, \dots, I_1 - 1]$  et les  $W_i^{I_1}$  sont à valeur dans  $[I_1 + 1, \dots, n - 1]$

On pose  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}, (V_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}}, (W_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}} \in A$ . On a alors :

$$(U_i)_{i \in \mathbb{N}} = (V_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}} + (W_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}} + U_1 \quad (2.2.1)$$

et comme les  $U_i$  sont indépendantes, par regroupements par paquets, les  $V_i^{I_1}$  et les  $W_i^{I_1}$  sont indépendantes.

Définissons une fonction qui permet de faire le lien entre les suites de variables aléatoires  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}, (V_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}}, (W_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}}$  et les variables  $(M_1, \dots, M_n)$  et  $(M'_1, \dots, M'_n)$ . Soit  $f$  la fonction de  $A$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$f(\cdot) = \sum_{i \geq 1} 2 \times 1\{\cdot = I_i\}$$

$$\text{Ainsi } f((U_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \geq 1} 2 \times 1\{U_i = I_i\}$$

On admettra que  $1\{\cdot = I_i\}$  est mesurable pour  $U_i, V_i^{I_1}$  et  $W_i^{I_1}$ , d'où  $f$  est une fonction mesurable par somme

de fonctions mesurables.

Comme les  $U_i$  sont à valeur dans  $[1, \dots, n-1]$ , on a que  $f((U_i)_{i \in \mathbb{N}}) = M_n$ .

Les  $V_i^{I_1}$  étant à valeur dans  $[1, \dots, I_1-1]$ , on a que  $f((V_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}})$  représente un autre remplissage de parking, d'où  $f((V_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}}) = M'_{I_1-1}$ .

De même, les  $W_i^{I_1}$  étant à valeur dans  $[I_1+1, \dots, n-1]$ , on a que  $f((W_i^{I_1})_{i \in \mathbb{N}}) = M'_{n-(I_1+1)} = M'_{n-I_1-1}$ .

Comme  $f$  est mesurable, et que les  $V_i^{I_1}$  et les  $W_i^{I_1}$  sont indépendantes, on a bien que  $M'_{I_1-1}$  et  $M'_{n-I_1-1}$  sont indépendantes.

La décomposition 2.2.1 nous donne donc la récurrence qu'il fallait démontrer.

□

## 2.3 Calcul de l'espérance $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$

Afin de calculer la convergence de  $\frac{M_n}{n}$ , nous allons calculer son espérance  $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$ , ce qui revient à calculer  $\frac{\mathbb{E}[M_n]}{n}$ . Toute cette section va démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[M_n]}{n} = 1 - e^{-2}$ .

**Proposition 2.3.1.** *Soit un parking de taille  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $M_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de places occupées à la fin du processus. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite correspondant à l'espérance de  $M_n$ . On a :*

$$u_n = 2 + \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} u_k$$

*Démonstration.* Soit la variable aléatoire  $I_1$  représentant le premier camion qui arrive à se garer comme définie dans la section 2.2. On rappelle que  $I_1 = U_1$  qui est défini dans la Sous-Section 2.1.1 et que donc  $I_1$  suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n-1\}$ . On a en décomposant par les possibilités de placement du premier camion :

$$\mathbb{P}(M_n = m) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(M_n = m \cap I_1 = k),$$

La formule de probabilité conditionnelle et l'indépendance du problème trouvé dans la Section 2.2, nous permet d'écrire que  $\mathbb{P}(M_n = m \mid I_1 = k) = \mathbb{P}(M'_{k-1} + M'_{n-k-1} + 2 = m)$  et donc :

$$\mathbb{P}(M_n = m) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(M'_{k-1} + M'_{n-k-1} + 2 = m) \times \frac{1}{n-1} \quad (2.3.1)$$

On a d'après la définition de l'espérance que :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{m=0}^n m \times \mathbb{P}(M_n = m)$$

En remplaçant par la relation 2.3.1, on fait apparaître deux sommes finies qu'on peut échanger.

$$\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=0}^n m \mathbb{P}(M'_{k-1} + M'_{n-k-1} + 2 = m)$$

On reconnaît alors l'espérance de la variable aléatoire  $M'_{k-1} + M'_{n-k-1} + 2$  qu'on peut remplacer par l'espérance de  $M_{k-1} + M_{n-k-1} + 2$ . Et par linéarité de l'espérance on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(M_{k-1}) + \mathbb{E}(M_{n-k-1}) + 2 \\ \mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(M_{k-1}) + \mathbb{E}(M_{n-k-1}) \right) \\ \mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n-1} \left( 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(M_{k-1}) + \mathbb{E}(M_{n-k-1}) \right) \\ \mathbb{E}(M_n) &= 2 + \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{E}(M_k) \end{aligned}$$

En posant la suite  $u_n = \mathbb{E}(M_n)$  on a bien la relation sur  $u_n$ .

□

Par un petit changement d'indice  $i = k + 1$  on obtient :

$$u_{n+1} = 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1 Construction et résolution d'une équation différentielle

Dans la partie précédente, nous avons réussi à passer d'une formule dépendante de probabilité à une formule sous la forme d'une suite :  $u_{n+1} = 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ .

Nous rappelons que notre but est de trouver une expression de la suite  $u_{n+1}$  plus facile à manipuler pour pouvoir en déduire une limite en plus l'infini. C'est pourquoi nous allons maintenant essayer de développer cette expression sous la forme d'une fonction qui sera plus facile à traiter.

Nous posons :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 1} u_n x^{n-1}, \quad \forall x \in ]-1, 1[ \quad (2.3.3)$$

Nous savons que  $F$  est bien définie, en effet on sait qu'un parking de taille  $n$  contient au maximum  $n$  places, donc nous pouvons majorer le nombre de places effectivement occupées ( $u_{n+1}$ ) par  $n$ . Nous pouvons ensuite calculer le rayon de convergence de cette nouvelle série par le Critère de d'Alembert pour le rayon de convergence. On obtient ainsi que ce rayon est 1. Et donc par critère de comparaison, nous pouvons dire que  $F(x) = \sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^n$  est bien définie pour tout  $x$  appartenant à  $[-1, 1]$ .

Nous allons maintenant essayer de travailler sur cette égalité pour obtenir plus d'information. Nous pouvons par exemple dériver  $F$  pour obtenir à la fin une relation qui lie  $F$  et  $F'$ , ce qui nous permettra, grâce à la résolution de cette équation différentielle d'obtenir plus d'information sur la suite  $(u_n)_n$ .

Nous rappelons tout de même que nous avons bien le droit de dériver  $F$  sur tout le domaine  $] - R, R[$  où  $R$  correspond au rayon de convergence de notre série entière ( dans notre cas ce sera sur  $] - 1, 1[$  )

Avant de commencer, on rappelle que  $F(0) = 0$  ainsi que  $F'(0) = 0$ .

#### Construction de l'équation différentielle

Après ces petites précisions, nous pouvons nous attaquer à la construction de notre équation différentielle.

**Lemme 2.3.2.** *Nous avons la relation suivante qui lie  $F'$  et  $F$  au sein d'une équation différentielle :*

$$F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} F(x) \quad (2.3.4)$$

*Démonstration.* Pour cette preuve, nous allons simplement dériver  $F$  pour obtenir la relation escomptée. Pour cela, nous dérivons  $F$  :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n \geq 1} u_n (n-1) x^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} n u_{n+1} x^{n-1} \end{aligned}$$

Nous remplaçons ensuite  $u_{n+1}$  par sa formule trouvée précédemment (2.3.2)  $u_{n+1} = 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ , ce qui nous donne :

$$F'(x) = \sum_{n \geq 0} n \left( 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i \right) x^{n-1}$$

Après avoir fait-cela, nous séparons la somme en deux parties, pour obtenir :

$$F'(x) = \sum_{n \geq 0} 2n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} 2 \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^{n-1}$$

Nous allons maintenant travailler sur chacune des deux séries pour pouvoir en déduire leur limite.

Nous commençons par la première. On rappelle que la série  $\sum_{n \geq 0} x^n$  a pour rayon de convergence 1, et vérifie

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ pour tout } x \in ]-1, 1[.$$

En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient

$$\sum_{n \geq 0} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ pour tout } x \in ]-1, 1[$$

ce qui permet d'obtenir le premier terme de la formule (2.3.4), en n'oubliant pas le facteur 2 devant.

Pour la deuxième partie, nous commençons par faire apparaître une fonction indicatrice dans la somme dépendant de  $i$ . Cela nous permet d'avoir  $i$  qui varie de 0 à plus l'infini dans la somme, et donc notre indicatrice qui vaut 0 lorsque  $i$  est strictement plus grand que  $n-1$ , ce qui ne change strictement rien au calcul de la limite, mais nous permet par la suite d'effectuer plus facilement certaines transformations.

Après avoir fait cela, nous proposons de permuter les deux sommes, possible grâce au théorème de Fubini. Nous rappelons que le théorème de Fubini, qui nous permet de permuter deux sommes s'applique dans notre cas, car l'on travaille sur des sommes à terme positif. En effet, la suite  $u_{n+1}$  correspond au nombre de places occupées dans notre parking, qui ne peut donc être négatif, et la fonction indicatrice rajoutée précédemment est elle aussi positive par définition.

Ce qui donne pour l'instant :

$$\sum_{n \geq 0} 2 \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^{n-1} = 2 \sum_{i \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_i 1_{n-1 \geq i} x^{n-1}$$

Nous pouvons ainsi déplacer les termes dépendant seulement de  $i$  dans la première somme. Par la suite, à l'inverse de ce qui a été fait précédemment, nous allons faire rentrer la fonction indicatrice dans la somme dépendant de  $n$ , de manière à avoir  $n$  qui varie de  $i+1$  à plus l'infini. Nous obtenons ainsi :

$$2 \sum_{i \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_i 1_{n-1 \geq i} x^{n-1} = 2 \sum_{i \geq 0} u_i \sum_{n \geq i+1} x^{n-1}$$

Nous reconnaissons ainsi une suite géométrique de raison  $x$  strictement comprise entre  $] -1, 1[$ , ce qui nous permet de trouver la limite recherchée :

$$\sum_{n \geq 0} 2 \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^{n-1} = 2 \sum_{i \geq 0} u_i \frac{x^i}{1-x}$$

Et qui en faisant sortir un  $x$  de la somme, nous permet de retrouver l'expression de  $F$  déterminée en début de section (2.3.3).

En rassemblant ces deux résultats, nous avons ainsi démontré la conclusion de ce lemme :

$$F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} F(x)$$

□

En résumé, nous sommes partis de l'expression de la suite  $(u_n)$ , que nous avons transformée et écrite sous une autre forme grâce la fonction  $F$ , ce qui nous a permis d'obtenir une équation différentielle d'ordre 1 :

$$F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} F(x) \quad (2.3.5)$$

### Résolution de l'équation différentielle

Dans cette partie, nous allons maintenant résoudre le problème de Cauchy dont l'équation a été trouvée et démontrée dans le lemme précédent 2.3.4 :

$$F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} F(x),$$

avec comme condition initiale  $F(0) = 0$

Grâce à cela, nous aurons une expression explicite de la fonction  $F$ , qui après un développement en série entière nous permettra d'identifier une expression explicite de la suite  $(u_n)_n$ , et ainsi trouver sa limite en plus l'infini. Cela se fera dans la sous-section suivante, pour l'instant nous allons résoudre notre problème de Cauchy.

**Corollaire 2.3.3.** *L'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x}F(x), & \forall x \in ]-1, 1[ \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

est :

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}(1 - e^{-2x}) \quad (2.3.7)$$

*Démonstration.* Nous commençons par observer que ce problème de Cauchy admet bien une unique solution sur  $I = ]-1, 1[$ , en effet les fonctions  $a : x \mapsto \frac{2x}{1-x}$  et  $b : x \mapsto \frac{2}{(1-x)^2}$  sont continues sur  $] - 1, 1[$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ , donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, notre système de Cauchy admet bien une unique solution sur  $I$ .

Nous allons maintenant résoudre l'équation homogène :

$$F'_h(x) = \frac{2x}{1-x}F_h(x) \quad (2.3.8)$$

Pour cela, nous trouvons une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ , et ainsi nous pouvons déduire la solution homogène :

$$F_h(x) = Ce^{-2x-2\log(1-x)}, \text{ où } C \in \mathbb{R} \quad (2.3.9)$$

Nous allons maintenant trouver une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. Nous posons  $F(x) = C(x)e^{-2x-2\log(1-x)}$ , où  $C$  est une fonction à valeur réelle. Nous appliquons alors la méthode, nous avons alors :

$$F'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x}F(x)$$

On remplace ensuite l'expression de  $F'$  par la dérivée de  $F$  énoncé juste au-dessus, ce qui nous permet ensuite de simplifier l'expression. Nous obtenons ainsi :

$$C'(x)e^{-2x-2\log(1-x)} = \frac{2}{(1-x)^2},$$

c'est à dire :  $C'(x) = 2e^{2x}$

Nous pouvons ainsi déterminer facilement  $C'$  et ainsi obtenir  $C$  en primitivant  $C'$ , nous trouvons alors :

$$C(x) = e^{2x}$$

Suite à ça, nous obtenons ainsi l'expression globale de  $F$  :

$$F(x) = Ce^{-2x-2\log(1-x)} + e^{2x}e^{-2x-2\log(1-x)}, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre le problème de Cauchy énoncé, c'est à dire, il nous faut déterminer la constante  $C$  en fonction de la condition initiale. Pour ce faire, on calcule simplement  $F(0)$  grâce à l'expression de  $F$  déterminée précédemment, ce qui nous permet alors d'obtenir  $C = 1$ . Nous pouvons alors conclure que l'unique solution à notre problème de Cauchy est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}(1 - e^{-2x}), \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

□

### 2.3.2 Caractérisation des $u_n$ et calcul de la limite de $(\frac{u_n}{n})_n$

Dans la sous-section précédente 2.3.1, nous avons résolu le problème de Cauchy pour exprimer  $F$ . Nous allons maintenant développer  $F$  en série entière et par l'unicité de ce développement, nous pourrions exprimer la suite  $(u_n)_n$  grâce à la relation trouvée précédemment 2.3.3 :

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} u_n x^{n-1} \quad (2.3.10)$$

Et ainsi, dans un second temps, nous pourrions calculer la limite de la suite  $(\frac{u_n}{n})_n$

### Caractérisation des $u_n$

Nous commençons par développer  $F$  en série entière pour obtenir une expression de la suite  $(u_n)_n$ .

**Lemme 2.3.4.** *Le développement en série entière de  $F$  est donné par :*

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n+1-k) \right) x^n,$$

*Démonstration.* Pour cela, nous commençons par rappeler les développements en séries entières de  $\frac{1}{(1-x)^2}$  et  $(1 - e^{-2x})$  :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

et

$$1 - e^{-2x} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n$$

Nous pouvons maintenant calculer le produit  $\frac{1}{(1-x)^2} (1 - e^{-2x}) = F(x)$ , c'est à dire :

$$S = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \right) \times \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n \right)$$

Nous utilisons pour cela le produit de Cauchy qu'on rappelle ici et qui va nous être utile dans tout le reste du développement.

**Proposition 2.3.5.** *Soient  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  deux séries entières, nous définissons alors le produit de Cauchy de ces deux séries comme étant la série*

$$\sum c_n x^n$$

*où la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pour ce faire, nous posons  $(b_n)_n = (n+1)$ ,  $(a_n)_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ , nous pouvons alors développer  $S$ . Nous commençons par distribuer la série entière de terme général  $b_n$  avec le deuxième terme de  $S$ , ce qui nous permet alors d'avoir une soustraction de deux objets : la série de terme général  $b_n$  est un produit de Cauchy entre une somme de terme général  $b_n$  et une autre de terme général  $a_n$ . C'est à dire, nous obtenons :

$$S = \sum_{n \geq 0} b_n x^n - \sum_{n \geq 0} b_n x^n \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Nous développons, grâce au rappel sur le produit de Cauchy, le deuxième terme de  $S$ . Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\sum_{n \geq 0} b_n x^n \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$$

Après avoir fait cela, nous pouvons effectuer une factorisation. En effet, nous avons deux sommes pour  $n$  variant de 0 à l'infini, nous pouvons ainsi tout rassembler sous la même somme. C'est à dire, nous obtenons :

$$S = \sum_{n \geq 0} \left( b_n - \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Après avoir fait cela, nous allons effectuer une manipulation astucieuse, qui nous permettra au final, d'éliminer le terme  $b_n$  qui nous dérange.

Pour ce faire, nous faisons sortir le terme  $k=0$  de la somme sur  $k$ , c'est à dire,  $a_0 b_n$ . Nous obtenons ainsi :

$$S = \sum_{n \geq 0} \left( b_n - a_0 b_n - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Nous pouvons ensuite factoriser  $b_n - a_0 b_n$  pour obtenir  $b_n(1 - a_n)$ . Et ainsi, en remplaçant  $b_n$  et  $a_0$  par leurs valeurs respectives ( $n+1$  et  $1$ ), ça nous annule le terme qui nous gênait. Et ainsi, pour finir, en remplaçant  $a_k$  et  $b_{n-k}$  par leurs expressions, et en se rappelant que  $F(x) = S$ , nous avons le résultat qu'il fallait démontrer, c'est à dire :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n+1-k) \right) x^n$$

□

**Corollaire 2.3.6.** *Nous avons la formule explicite de  $u_n$  :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n-k)$$

*Démonstration.* En se servant du lemme 2.3.4 précédent, de la définition (2.3.10) de  $F$ , et de l'unicité du développement en série entière, la preuve en découle.

En effet, nous avons défini  $F$  par  $F(x) = \sum_{n \geq 1} u_n x^{n-1}$  et par le lemme précédent, nous avons obtenu  $F(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n+1-k) \right) x^n$ , ainsi par l'unicité du développement et un simple changement d'indice, nous obtenons  $u_{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n+1-k)$ , c'est à dire :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} (n-k)$$

□

### Calcul de la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$

Dans cette partie, nous allons essayer de déterminer vers quoi converge la suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Grâce au corollaire 2.3.6 précédent, nous avons obtenu l'expression explicite de la suite  $(u_n)_n$ , nous pouvons alors calculer la limite du rapport de cette suite avec  $n$ .

**Lemme 2.3.7.** *La suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)_n$  définie par :*

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \frac{(-2)^k}{k!}$$

*Converge vers  $1 - e^{-2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Autrement dit :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} = 1 - e^{-2}$$

*Remarque 2.3.8.* Dans notre preuve ainsi que dans la reste du rapport, nous avons décidé d'utiliser la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)_n$  et non  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ , car nous trouvons que l'expression du terme  $u_{n+1}$  est plus facile à manipuler. Cependant, quand on passe à la limite, cela n'aura pas d'importance qu'on utilise l'expression en  $n+1$  ou en  $n$ .

*Démonstration.* Nous commençons par étudier le caractère asymptotique de notre suite  $(u_{n+1})_n$ . Pour cela, nous décomposons la somme en deux sommes :

$$u_{n+1} = -(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k!} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Nous pouvons maintenant étudier chaque partie séparément.

Nous commençons par faire l'étude de la deuxième somme.

Grâce à un simple changement d'indice, pour faire commencer la somme à 0, nous reconnaissons, lorsque  $n$  tend vers l'infini, le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto e^{-2}$ . En multipliant ce résultat par un facteur 2, nous trouvons ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!} = 2e^{-2}.$$

Pour la première somme, la démarche est exactement la même, cependant nous anticipons pour la suite et nous étudions seulement la limite de la somme :  $-\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k!}$ , en effet notre objectif est d'observer la limite de la suite  $(\frac{u_{n+1}}{n+1})_n$ , c'est pourquoi nous étudions seulement cette partie de la première somme car le facteur  $(n+1)$  devant s'annulera lorsqu'on divisera par  $(n+1)$ .

Pour revenir à la limite de notre somme, nous reconnaissons, comme pour la partie précédente, le développement en série entière de  $e^{-2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cependant notre somme démarre pour  $k=1$ , c'est pourquoi nous trouvons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k!} = 1 - e^{-2}.$$

Après avoir fait ces précisions, nous pouvons étudier la limite que l'on cherchait, c'est à dire, la limite de la suite  $(\frac{u_{n+1}}{n+1})_n$ .

Grâce aux précisions effectuées, il nous suffit seulement de distribuer  $\frac{1}{n+1}$  à notre somme, nous obtenons ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = -\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k!} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Pour la première partie de la somme, nous avons déjà vu que ce facteur va s'annuler, et ainsi nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n+1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k!} = 1 - e^{-2}.$$

Pour la deuxième partie, nous devons prendre un peu plus de précaution en passant à la limite.

En effet, quand nous étudions cette limite, nous avons le produit de deux limites, cependant nous avons obtenu précédemment que la limite quand  $n$  tend vers l'infini de la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!}$  convergeait vers la constante  $e^{-2}$ . Il existe donc un moment où cette limite sera encadrée, bornée par une constante, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall k > K_\varepsilon, \left| \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leq \varepsilon$$

De plus, nous savons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc par encadrement, nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!} = 0$$

En rassemblant les deux résultats, nous obtenons ce qu'il fallait démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} = 1 - e^{-2}.$$

□

## 2.4 Variance $Var\left[\frac{M_n}{n}\right]$

Dans cette section, on se propose maintenant d'étudier la variance de notre problème.

Pour confirmer la convergence en loi de  $\frac{M_n}{n}$ , nous souhaitons montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var\left(\frac{M_n}{n}\right) = 0$ .

### 2.4.1 Simulation numérique et mise en évidence de la convergence

Pour se donner une idée de cette variance, nous la simulons grâce à l'algorithme utilisé précédemment dans la Sous-Section 2.1.2 pour modéliser l'espérance, en l'adaptant à notre problème.



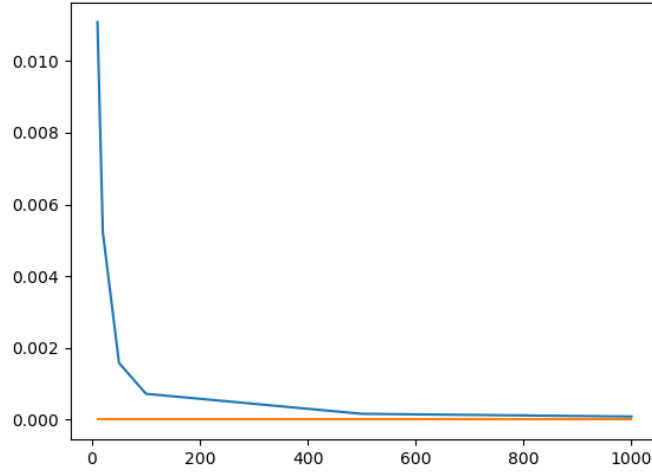


FIGURE 2.10 – Simulation de la variance du problème en fonction de la taille  $n$  du parking

Nous observons très clairement que celle-ci converge vers 0 lorsque la taille  $n$  du parking augmente. Cela nous semble cohérent avec les résultats obtenus précédemment. En effet, nous avons observé que l'espérance du rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking convergeait vers  $1 - e^{-2}$  lorsque la taille du parking augmentait. C'est pourquoi il nous semble logique que la variance, donc l'écart à la moyenne diminue aussi lorsque la taille de notre parking augmente.

#### 2.4.2 Idée du calcul de la variance $Var[\frac{M_n}{n}]$

Dans cette partie nous allons donner la démarche du calcul de  $Var[\frac{M_n}{n}]$ , en utilisant certains résultats, dont nous traiterons pas la preuve. Nous utilisons la relation suivante :

$$Var[\frac{M_n}{n}] = \mathbb{E}[(\frac{M_n}{n})^2] - \mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]^2$$

Comme on a calculé  $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$  dans la Section 2.3, il ne nous reste plus qu'à calculer le moment d'ordre 2 de  $\frac{M_n}{n}$ .

Le calcul de ce dernier suit les mêmes étapes de calcul que  $\mathbb{E}[\frac{M_n}{n}]$  dans la Section 2.3 : en s'appuyant sur la relation de récurrence de la Section 2.3, nous pouvons écrire  $\mathbb{E}(M_n^2)$  comme une suite  $(v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , en effet :

**Proposition 2.4.1.** *Nous avons :*

$$\mathbb{E}(M_n^2) = v_{n+1},$$

où

$$v_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i + 4(u_{n+1} - 1) + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i u_{n-i-1},$$

où  $u_i$  a été déterminé dans le corollaire 2.3.6.

Et comme pour le calcul de l'espérance, on définit une fonction  $G$ , qui est une série entière de terme général notre suite  $v_n$ .

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} v_{n+1} x^n \quad (2.4.1)$$

On peut ainsi, comme dans la section 2.3.1, construire une équation différentielle sur  $G$ , on trouve en effet :

**Proposition 2.4.2.** *Nous avons la relation suivante qui lie  $G'$  et  $G$  au sein d'une équation différentielle :*

$$G'(x) - \frac{2x}{1-x} G(x) = \frac{4 - 2x^2 + (-8x + 4x^2)e^{-2x} + 2x^2 e^{-4x}}{(1-x)^4}$$

Suite à cela, nous effectuons quelques transformation sur cette équation différentielle pour qu'elle soit plus facile à manipuler, ce qui nous permet ensuite de trouver une expression pour  $G$  :

**Proposition 2.4.3.** *Nous avons que l'expression de  $G$  est donnée par :*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} \right) x^n,$$

$$\text{où } a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{2^j}{j!} (k+1-j), \text{ et } b_n = -4 - \frac{2^n}{n!} - (-1)^n \frac{2^n}{n!} + 4 \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l}}{(2l)!}$$

Nous pouvons, grâce à cette expression de  $G$ , et par l'unicité du développement en série entière, comme pour le cas de l'espérance, déterminer notre suite  $(v_n)_n$ , qui est :

**Corollaire 2.4.4.** *Nous avons l'expression explicite de la suite  $(v_n)_n$ , qui est donnée par :*

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k},$$

$$\text{où } a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{2^j}{j!} (k+1-j), \text{ et } b_n = -4 - \frac{2^n}{n!} - (-1)^n \frac{2^n}{n!} + 4 \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l}}{(2l)!}$$

Et enfin, nous déterminons la convergence à l'aide du lemme de Cesàro.

Au final, on arrive à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(M_n^2)}{n^2} = (1 - e^{-2})^2$  ce qui nous donne bien que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{M_n}{n}\right) = 0$ .

## 2.5 Conclusion sur la variance

Le calcul de la convergence de  $\mathbb{E}\left[\frac{M_n}{n}\right]$  dans la Section 2.3 nous a donné le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(M_n)}{n} = 1 - e^{-2}$$

La convergence en loi est renforcée par le calcul de la convergence de  $\text{Var}\left(\frac{M_n}{n}\right)$  dans la Section 2.4 qui nous donne le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{M_n}{n}\right) = 0$$

Ainsi, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne le résultat suivant :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{M_n}{n}\right]\right| \geq a\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{M_n}{n}\right)}{a^2}$$

Ce qui permet de démontrer la convergence en loi  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1 - e^{-2}$ .

## Chapitre 3

# Modélisation dans le cas du Parking de Page à deux dimensions

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème du rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places, pour le cas d'un parking à deux dimensions, c'est à dire, un parking qui comporte deux rangées de places parallèles de  $n$  places chacune.

Nous ne traiterons pas les calculs de ce problème, car comme on l'a vu dans le cas d'un parking à une dimension, les calculs deviennent très vite compliqués à résoudre. Car un camion a maintenant trois possibilités pour se garer.

Nous avons pris comme modèle le suivant :

A un instant  $I$ , un camion arrive et décide de se garer, pour cela on tire aléatoirement un nombre entre 1 et  $n$  selon une loi uniforme, qui correspond à l'abscisse de la place, indépendamment de cela, nous tirons aléatoirement un second nombre suivant une loi uniforme entre 1, 2 et 3. Ce nombre correspondra à l'orientation du camion. Pour ce modèle nous avons choisi les orientations suivantes :

1. en position horizontale sur la rangée du haut
2. en position verticale
3. en position horizontale sur la rangée du bas

Pour mieux comprendre le processus, nous avons représenté un schéma : Un camion arrive et tente de se garer sur notre parking (de taille  $n$ ), il décide alors de s'avancer vers l'abscisse  $i$  (tiré uniformément entre 1 et  $n$ ), tout en s'avancant, il réfléchit à comment se stationner (horizontalement sur la rangée du haut, en position verticale ou en position horizontale sur la rangée du bas), il décide alors de choisir la position "2", c'est à dire à se stationner verticalement (dont la position a été choisi uniformément entre 1, 2 et 3). Ainsi, si la place est libre, il se gare, mais s'il n'a pas la place de se garer (un autre camion est déjà stationné sur une (ou deux) place nécessaire au stationnement de notre camion), alors il repart. Après cela, un autre camion arrive (à l'instant  $I + 1$ ) et répète le même processus, et ainsi de suite jusqu'à ce que le parking ne puisse plus accueillir aucun camion.

Nous avons réalisé une figure pour illustrer les différentes possibilités de se garer sur un parking de taille  $n$  dont on a zoomé sur les places  $i$ ,  $i + 1$  et  $i + 2$ .

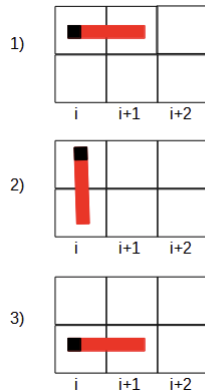


FIGURE 3.1 – Schéma représentant les différentes possibilités de se stationner sur l'abscisse  $i$  pour un camion.

*Remarque 3.0.1.* Nous avons, en plus de cela choisi que chaque camion se gare dans une certaine orientation.

1. Si le camion veut se garer en position horizontale ( situation 1) et 3) ), alors il garera toujours ses roues avant sur l'abscisse  $i$  de la place choisie et ses roues arrière sur l'abscisse  $i + 1$ . Sur notre schéma on a bien que sur l'abscisse  $i$ , chaque camion en position horizontale a ses roues avant dessus (représenté par les carrés noir ), les roues arrière sont donc en position  $i + 1$ .
2. Si le camion veut se stationner en position verticale ( situation 2) ) sur l'abscisse  $i$ , alors celui-ci placera ses roues avant (représentées par un carré noir) sur la rangée la plus haute et donc ses roues arrière sur la rangée la plus basse.

Cependant, ce modèle n'est pas unique, on pourrait par exemple envisager un autre modèle où les camions garent leurs roues avant sur l'abscisse  $i$  et les roues arrière sur la position  $i - 1$  et non  $i + 1$  comme nous l'avons défini.

C'est pourquoi nous nous contenterons d'analyser une simulation réalisée par un algorithme pour essayer d'en tirer une conclusion.

### 3.1 Calculs du problème pour les premières tailles de parking

Comme dans le cas de la dimension 1, nous pouvons regarder pour des petits nombres  $n$  quel est le résultat de notre problème pour des parkings de taille  $n$ , c'est à dire le rapport entre le nombre de places occupées par nos camions et le nombre total de places du parking.

Nous posons  $M_n$  le nombre de places occupées dans notre parking,  $n$  la taille de notre parking.

Pour  $n = 0$  : comme dans le cas de dimension 1, cela correspond à un parking vide, c'est pourquoi nous admettons que le nombre de camions stationnés est 0

Pour  $n = 1$  : contrairement à la dimension 1, où  $M_1$  était égal à 0, dans le cas de la dimension 2, nous avons que  $M_1 = 2$ . En effet un camion peut se garer en position verticale.

Pour  $n = 2$  : nous avons alors plusieurs possibilités :

1. le premier camion se gare horizontalement sur la ligne du haut
2. le premier camion se gare horizontalement sur la ligne du bas
3. le premier camion se gare verticalement sur la première colonne
4. le premier camion se gare verticalement sur la deuxième colonne

Cependant, dans tous les cas,  $M_2 = 4$ . En effet, si le premier camion se gare horizontalement sur la ligne du haut, il ne restera que deux places vides en position horizontale sur la ligne du bas. Un camion pourra alors s'y garer. Si deux camions occupent ces deux "dispositions", le parking est alors plein, d'où  $M_2 = 4$ . C'est le même principe pour les autres possibilités.

Nous nous arrêtons au cas  $n = 2$ , car après, pour  $n = 3$  cela se complique.

### 3.2 Simulation numérique du problème

A défaut de faire les calculs, nous faisons une simulation, comme dans le cas de la dimension 1 pour visualiser le problème. Pour cela, nous réalisons une moyenne de 100 simulations pour des parkings de différentes tailles. Nous traçons ainsi la figure suivante :

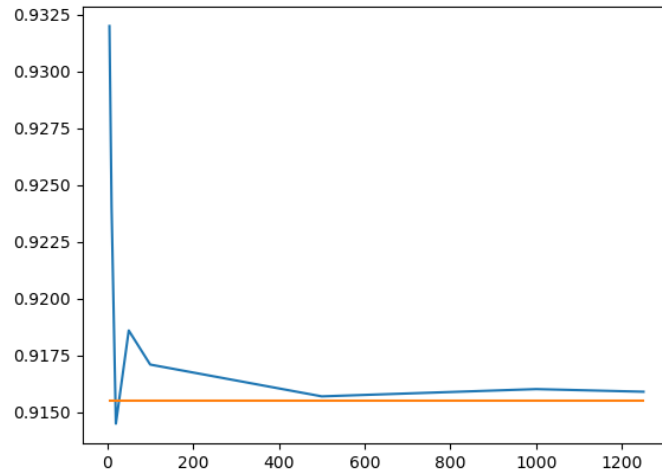


FIGURE 3.2 – Graphique représentant le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places de notre parking en fonction de différentes tailles.

Grâce à cette simulation, nous observons clairement qu'il y a une convergence du rapport entre le nombre de places occupées et le nombre de places totales. Comme nous nous y attendions, cette limite qui semble être environ 0,916 (la droite orange a pour équation  $y = 0.9155$ ) est supérieure à celle du cas du parking de Page unidimensionnel.

En effet, notre raisonnement est le suivant :

On pourrait se dire que vu que nous avons maintenant une ligne de plus que la dimension 1, le rapport entre le nombre de places occupées et le nombre total de places serait inférieur à  $1 - e^{-2}$ , or il ne faut pas oublier que nous avons maintenant une autre possibilité pour le stationnement d'un camion, la position verticale. C'est pourquoi, nous pouvons penser que le rapport est plus élevé, puisqu'un camion pourrait alors se stationner là où dans le cas de la dimension 1, il ne pouvait pas, ce qui fait donc augmenter le taux de remplissage du parking.

## Chapitre 4

# Conclusion

En résumé, on a vu grâce à la modélisation de la Sous-Section 2.1.1 que  $M_n$  est bien définie et qu'elle croît linéairement avec  $n$ , ce qui montre l'intérêt d'étudier la potentielle convergence de la proportion  $\frac{M_n}{n}$ . Puis dans la Sous-Section 2.1.2, les simulations numériques ont validé la convergence vers  $1 - e^{-2}$ . Le calcul de l'espérance de  $Mn/n$  dans la Section 2.3 converge vers  $1 - e^{-2}$ . Ceci ajouté avec la convergence de la variance en 0, calculé dans la Section 2.4 permet de conclure sur la convergence en probabilité de  $\frac{M_n}{n}$ . Nous pouvons noter que cette convergence pouvait être démontrée différemment. L'article de Lucas Gerin propose par exemple de modéliser l'arrivée des camions en introduisant une variable aléatoire à chaque emplacement représentant le temps d'arrivée du camion sur cette place, puis de vérifier si ce camion peut se garer en comparant les valeurs des variables des places voisines, ce qui donne lieu à l'apparition de paternes. Enfin, la modélisation du problème du Parking de Page en deux dimensions effectuées dans le Chapitre 3 ainsi que la simulation numérique de la Section 3.2 nous a permis d'observer que le remplissage du parking est influencé par la géométrie de ce dernier. En particulier pour un parking de forme  $2 \times n$ , le remplissage est augmenté. Notre approche pour calculer la convergence en dimension 1, la récurrence sur  $M_n$ , ne pouvait pas s'appliquer en dimension 2. A noter que d'autres modélisations du Parking de Page en dimension 2 pouvait se résoudre en utilisant notre approche (cf l'article de Stjepan Šebek. Parking triangles on a continuous ladder.). Il peut être intéressant d'étudier le même problème sur d'autres géométries de parking comme un parking de taille  $n \times n$  ou un parking en dimension 3 afin de voir si on pourrait trouver une formule de convergence pouvant se généraliser pour toute géométrie de parking.

# Chapitre 5

## Annexe

### 5.1 Programmes

#### 5.1.1 Algorithme simulant le rapport entre nombre de places occupées et le nombre total de places pour le cas du Parking de Page unidimensionnel

Voici le programme réalisant la simulation 2.8 Nous le détaillons car celui-ci se place au centre de notre projet, et nous semble intéressant à expliquer.

```
def capacite_a_accueillir_un_nouveau_camion(L):
    for j in range(len(L)-1):
        #on parcourt tous les indices de notre liste (=parking)
        if L[j] + L[j+1] == 0:
            # on renvoie 0 si il y a deux places de libre consecutives
            return 0
    return 1
    # on renvoie 1 si il n'y a plus de places de libre pour pouvoir accueillir un camion.
    # Autrement dit, le parking ne peut plus accueillir de nouveaux camions
```

Nous commençons par détailler notre sous-programme "capacite\_a\_accueillir\_un\_nouveau\_camion" qui, comme son nom l'indique, analyse un objet (ici notre parking) et nous permet de savoir si notre liste (notre parking) contient encore des places valides pour nos camions, c'est à dire si il existe encore deux places de libre consécutives (en retournant 0) ou non (en retournant 1).

```
def nb_place_occupe(n):
    #creation du parking/liste (0 = place vide, 1 = place occupee)
    L = []
    for i in range(n):
        L.append(0)
    x = 0 #initialisation (parking vide)
    while x == 0: #tant que notre parking peu accueillir un nouveau camion
        b = random.randint(0, n-2) #on choisit au hazard la potentielle place du camion
        if L[b]+L[b+1]==0: #verifie si les places choisies sont libres
            L[b]=1
            L[b+1]=1
            #on place le camion en position b et b+1 (represente par des "1")

        #on verifie si notre parking est apte a accueillir un nouveau camion
        x = capacite_a_accueillir_un_nouveau_camion(L)
    Mn = 0
    for e in L:
        #On compte le nombre de places occupees
        if e == 1:
            Mn += 1
    return Mn
```

Notre programme principal "nb\_place\_occupe" prend en indice  $n$  qui sera la longueur de notre parking, et qui, tant que celui-ci est apte à recevoir un camion (déterminé par notre fonction "capacite\_a\_accueillir\_un\_nouveau\_camion"), le place aléatoirement (position déterminée par  $b$ ) sur notre parking, en tenant compte bien sûr si les places indicées par  $b$  et  $b + 1$  sont libres (on a choisi de mettre des zéros là où les places sont vides et des uns codant une place occupée). Nous terminons ensuite notre programme par introduire un compteur "Mn" qui comme son nom l'indique, "compte" le nombre de places occupées dans notre liste (parking).

### 5.1.2 Algorithme simulant la loi de $M_{10}$ pour le cas du Parking de Page

Voici le programme réalisant l'histogramme 2.5.

```
X=[]
#500 simulations de M10
for i in range(500):
    Mn=nb_place_occupe(10) #on reutilise l'algorithme precedent
    X.append(Mn)

#on affiche l'histogramme
plt.hist(X,range(11),edgecolor='black',density=True)
plt.xlabel("Valeurs de Mn")
plt.ylabel("Proportion de Mn sur 500 simulations")
plt.legend()
```

Ce programme effectue 500 simulations de  $M_{10}$  et renvoie l'histogramme de la répartition de  $M_{10}$  afin d'avoir une idée de sa loi.

### 5.1.3 Algorithme simulant le rapport entre nombre de places occupées et le nombre total de places pour le cas du Parking de Page à deux dimensions

Voici le programme réalisant la simulation 3.2

```
def capacite_a_accueillir_un_nouveau_camion2(L):
    for j in range(len(L[0])-1):
        #on verifie si pour chaque indice, un camion peut se garer en position horizontale
        #sur chacune des deux lignes
        if L[0][j] + L[0][j+1] == 0:
            return 0
        if L[1][j] + L[1][j+1] == 0:
            return 0
    for j in range(len(L[0])):
        #on verifie si pour chaque indice, un camion peut se garer en position verticale
        if L[1][j] + L[0][j] == 0:
            return 0
    return 1
```

Nous commençons par détailler notre sous-programme "capacite\_a\_accueillir\_un\_nouveau\_camion2" qui, nous permet de savoir si un nouveau camion peut se garer sur le parking. Pour cela, nous analysons notre parking en deux parties, une première partie qui nous retourne 0 si un camion est apte à se garer en position horizontale sur une des deux lignes de notre parking, et une deuxième partie, où on vérifie si un nouveau camion peut se garer en position verticale, en renvoyant 0 (on a séparé les cas horizontaux et verticaux pour des soucis d'indices). Si le parking ne peut plus accueillir aucun camion, autrement dit, s'il est plein, on retourne 1

```
def nb_place_occupe2(n):
    #creation du parking de taille 2*n (0 = place vide, 1 = place occupee)
    L = [[0],[0]]
    for i in range(n-1):
        L[0].append(0)
        L[1].append(0)
    L[0].append(99) #ajout d'un nombre en derniere position pour une question d'indice
```



```

L[1].append(99)
x = 0 #initialisation
while x == 0: #tant que notre parking peut accueillir un nouveau camion
    emplacement = random.randint(0, n-1) #on choisit aleatoirement notre abscisse
    position = random.randint(0,2) #on choisit aleatoirement une position
    #0 = position horizontale ligne bas,
    #1 = position verticale,
    #2 = position horizontale ligne haut

    #on verifie si notre camion peut se garer a l'emplacement/position obtenu,
    #si oui, on le place (represente par des "1")
    if position == 0:
        if L[1][emplacement] + L[1][emplacement+1] == 0:
            L[1][emplacement]=1
            L[1][emplacement+1]=1
    if position == 1:
        if L[1][emplacement] + L[0][emplacement] == 0:
            L[1][emplacement] = 1
            L[0][emplacement] = 1
    if position == 2:
        if L[0][emplacement] + L[0][emplacement+1] == 0:
            L[0][emplacement] = 1
            L[0][emplacement+1] = 1

    #on verifie si notre parking est apte a accueillir un nouveau camion
    x = capacite_a_aceuillir_un_nouveau_camion2(L)

#On compte le nombre de places occupees
Mn = 0
for i in range(2):
    for j in range(n):
        if L[i][j] == 1:
            Mn += 1
return Mn

```

# Bibliographie

Lucas Gerin. The Page-Rényi parking process

Dave Freedman. Unfriendly Seating Arrangement

Stjepan Šebek. Parking triangles on a continuous ladder