Análise

J. P. S. de Sousa

Contents

Part I

Números Reais

Chapter 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Naturais e Inteiros

1.1.1 Axiomas de Peano

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, é tradicionalmente definido por um esquema de axiomas que especificam sua estrutura e natureza: os Axiomas de Peano, propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1889. Os axiomas podem ser divididos em duas coleções, aqueles que definem o comportamento de relação de igualdade, estebelecendo suas propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, e aqueles que falam sobre os naturais em si, postulando que:

1. o número 0 é um natural.
2. Existe uma função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a ser denominada sucessor.
3. Não existe natural cujo sucessor é 0.
4. Naturais com os mesmos sucessores são iguais
5. Se um subconjunto $\mathfrak{M}$ dos naturais inclui o 0, e presumindo que $x \in \mathfrak{M}$, pode-se concluir que $S(x) \in \mathfrak{M}$, então $\mathfrak{M}$ inclui todos os naturais.

O primeiro axioma diz que os Naturais são um conjunto não vazio, pois possuem ao menos um elemento. Os axiomas de 2 a 4, afirmam a existência de uma aplicação injetora S cuja imagem não inclui o 0. O axioma 5 também é conhecido como Princípio de Indução, afirmando que, se dado conjunto inclui o 0, e é possível aplicar a função S sucessivamente de modo que os novos elementos também estejam nele, então o conjunto trata-se do próprio conjunto dos naturais.

A partir dos axiomas, é possível demonstrar a existência e unicidade das operações de adição e multplicação dos naturais, satisfazendo as propriedades típicas, como associatividade e comutatividade. A partir deles também define-se uma ordenação por meio da relação de "maior que", representada por $<$, que satisfaz a definição de relação de ordem estrita total, isto é

- Assimétrica – $\forall x, y,\ (x < y \to y \not< x)$
- Totalidade – $\forall x, y,\ (x < y \lor y < x)$

- Não-Reflexiva – $\forall x,\ (x \not< x)$
- Transitiva – $\forall x, y, z,\ (x < y \land y < z \rightarrow x < z)$

Outras ordens também podem ser definidas, como a parcial, que exclui a propriedade de assimetria e inclui a reflexiva, isto é, todo elemento está relacionado consigo mesmo. Uma vez que os naturais possuem uma ordem total e, nessa ordem, há um menor elemento – o número 0 – então dizemos que os naturais estão bem ordenados. Formalmente, um conjunto é bem ordenado se para ele existe uma ordem total e qualquer um de seus subconjuntos possui um menor elemento nessa ordem.

1.1.2 Princípio de Indução

O axioma 5, como mencinado, define o famoso Princípio de Indução. No entanto, esse enunciado possuem outras formulações que tornam mais prático o seu uso como uma técnica de demonstração para provar propreidades sobre elementos que satisfazem uma definição recursiva.

Recursão é uma forma de definição que envolve uma coleção de casos bases e regras de construção para criar novos casos, chamados de recursivos. Por exemplo, nos Axiomas de Peano o único caso base é o 0, e os casos recursivos são aqueles aplicando-se a função sucessor sucessivamente: $S(0) = 1$, $S(S(0)) = 2$, e assim em diante. Uma recursão bem definida é aquela que, para qualquer caso recursivo, é possível retornar aos casos bases com base nas regras de construção. Logo, definições que precisam passar por infinitos casos antes de chegar num caso base ou circulares não são recursões bem definidas.

O Princípio de Indução Finita, por sua vez, é normalmente aplicado sobre uma definição recursiva para provar uma propriedade φ que vale para todos os casos. Para usá-la, deve-se provar que φ vale para todos os casos bases e, em seguida, supondo que vale para um caso recursivo, mostra que deve ser verdade para o próximo caso obtido pelas regras de construção. Essa formulação do princípio é mais geral (mas não mais forte) que a dada pelo axioma 5, pois pode ser mais facilmente apicada a qualquer conjunto que possa ter seus elementos definidos recursivamente em função de alguns elementos ditos base.

1.1.3 Números Inteiros

A primeira extensão dos naturais é a dos chamados números inteiros, denotados por $\mathbb{Z}$. A necessidade desses números surge no fato de que os naturais não são fechados sobre subtração; temos que $5 - 3$ é um natural, mas $3 - 5$ não é, por exemplo. Com isso, uma construção comum para os inteiros consiste em definí-los enquanto pares ordenados (a, b), com a e b naturais, denotando

$$a - b.$$

Repare que infinitos pares podem representar o mesmo inteiro, e, por isso, dizemos que cada inteiro é uma classe de equivalência desses pares. Exemplo: o inteiro 3 pode ser rperesentado como $5 - 2$, $7 - 4$ e $10 - 7$, enquanto que o inteiro -2 possui as representações equivalentes de $0 - 2$, $4 - 6$ e $8 - 10$.

Para os inteiros também estão bem definidas as operações de adição, subtração e multiplicação. O conjunto $\mathbb{Z}$ também possui uma ordem total – tanto parcial quanto estrita – mas não são bem ordenados, pois nem todo subconjunto possui um menor elemento, como por exemplo

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 2\}$$

o qual incluirá o 1, 0 e todos os números negativos.

1.2 Racionais

1.2.1 Frações

Uma extensão dos naturais e inteiros são os números racionais. A sua construção se dá de maneira análoga aos dos inteiros, tal que todo racional é uma classe de equivalência de um par (a, b), com a e b inteiros, e b não nulo, sendo representado pela fração

$$\frac{a}{b}.$$

Disso, temos que o racional 3 pode tem como representantes $3/1$, $15/5$ ou $-6/(-2)$, enquanto o racional $1/2$ tem como representantes $2/4$ ou $\frac{-10}{-20}$.

A motivação para os racionais está no fato que a operação de divisão não é fechada nos inteiros, pois $4 \div 2$ é inteiro, mas $9 \div 4$ não. Para eles, também estão bem definidas as quatro operações básicas: adição, multiplicação, subtração e divisão. Além disso, os racionais são dotados de um propriedade fundamental, tal que, sejam a/b e c/d racionais e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

então

$$ad = bc$$

1.2.2 Representação Decimal

Os racionais admitem uma representação em termos posicionais, isto é, a cada algarismo é atribuído um valor relativamente a sua posição no número. Acontece que o mesmo já ocorria para os naturais e inteiros, pois cada posição à esquerda siginifica um aumeto de dez vez no valor absoluto do algarismo. Por exemplo

$$321 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

a representação decimal dos recionais é análoga, com a diferença que os algarismos podem ter seus valores diminuidos por potências cada vez maiores de dez. Exemplo:

$$24,35 = 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

A partir da representação em fração de um racional, pode-se obter sua presentação decimal através de uma versão adaptada do algoritmo de divisão. No entanto, vale ressaltar que essa representação pode não ser finita e, especificamente nos casos de representação infinita, resulta nas chamadas dízimas periódicas. Nelas, os algarismos nas casas relativas às potências negativas, possuem um padrão de repetição previsível.

1.3 Conjuntos Enumeráveis

1.3.1 Boa Ordenação

Como citado brevemente quando discutimos os números naturais, para alguns conjuntos é possível explicitar uma ordenação total de seus elementos de modo que qualquer subconjunto possua um menor elemento. Essas estruturas – o conjunto dotado da relação de ordem – são chamadas de boas ordenações, ou conjuntos bem-ordenados.

Na Teoria Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC), toda boa ordem está associada a um número ordinal, que caracteriza a ordem do conjunto. Os números 1, 2, 3, etc., são números ordinais finitos, pois caracterizam a ordem de conjuntos finitos; por exemplo: a classe dos conjuntos de ordem 3 são aqueles que, uma vez ordenados, terão um primeiro, um segundo e um terceiro elemento. No entanto, conjuntos infinitos também estão associados a ordinais, a exemplo de $\mathbb{N}$ associado ao ordinal ω, dito o primeiro ordinal transifnito.

Por mais contra-intuitivo que seja, ainda podemos contruir ordens maiores do que ω. Por exemplo, se ordenamos os naturais de modo que primeiro listamos todos os pares e todos os ímpares em seguida, então o ordinal dessa ordenação é $\omega + \omega$. Seguindo esse raciocínio, ainda seria possível definir ordens cada vez maiores com ordinais ω^2, ω^ω, ou ω^{ω^ω}.

O Axioma de Escolha da ZFC pode provar o Teorema da Boa Ordenação, o qual diz que qualquer conjunto pode ser bem ordenado. Todavia, o resultado apenas enuncia a existência de uma boa ordenação, mas não induz qualquer método para a obter.

1.3.2 Conjuntos Finitos e Enumeráveis

A grandeza de uma ordem não implica na quantidade de elementos que há originalmente nos conjuntos. Como visto, a depender da ordenação que damos aos naturais, podemos obter ordens com ordinais ω ou $\omega+\omega$, no entato, os naturais continuam tendo a mesma quantidade de elementos nos dois casos. A quantidade de membros num conjunto é formalizada pela ideia de cardinal, definida como o menor ordinal ao qual um conjunto pode ser associado por uma boa ordenação. Dois conjuntos terão mesma cardinalidade (ditos equipotentes) se entre eles existe uma bijeção.

Conjuntos finitos são aqueles que possuem uma bijeção com algum subconjunto próprio dos naturais. Desse modo, há uma função bijetora f denominada função de contagem que associa cada elemento deles a um termo numa sequência de naturais de 1 até n, em que n é identificado como a cardinalidade do cojunto.

Uma classe de conjuntos que inclui os finitos são os conjuntos enumeráveis. Esses conjuntos consistem naqueles para os quais existe uma bijeção entre eles e qualquer subconjunto dos naturais (incluindo o próprio). Dessa forma, um conjunto é enumerável é menor ou tão grande quanto o conjunto dos naturais.

1.3.3 Conjuntos Não Enumeráveis e os Reais

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemão que inaugurou a Teoria dos Conjuntos, provou que a cardinalidade dos naturais, dos inteiros e dos racionais são iguais, ou seja, são todos enumeráveis. Ademais, provou que existem conjuntos maiores do que os naturais, Seu argumento era simples, mas elegante: crie uma lista de todos os números entre 0 e 1 com suas respresentação decimais, e construa um número no mesmo intervalo tal que o enésimo decimal do número seja diferente do decimal na mesma posição do enésimo termo na lista. Conclui-se que o número construído não fora listado, e não possível listar todos os números entre 0 e 1. Esse argumento é conhecido como argumento da diagonalização. Tais conjuntos que não podem ser colocados em correspondência um para um com os naturais são chamados de não enumeráveis.

Na história da matmática, um dos problemas mais famosos foram os dos Incomensuráveis, que eram números que não podiam ser medidos, isto é, não poeria ser dados na forma de uma razão entre inteiros a/b, como por exemplo a a diagonal do quadrado de lado unitário. Modernamente, os Incumensuráveis foram rebatizados de irracionais, e, ao longo do tempo, mostrou-se que diversos números são irracionais, como $\sqrt{2}$, π e a constante euleriana e. São justamente os números irracionais que completam as lacunas deixadas pelos racionais, e, juntos, foram o conjunto dos números Reais. Como visto, os reais possuem cardinalidade maior do que dos números naturais.

Chapter 2

Corpo dos Números Reais

2.1 Propriedades Algébricas

2.1.1 Propriedades Primitivas

Assumiremos como primitva a existência de um conjunto $\mathbb{R}$ denominado de conjunto dos números reais e dotado das operações de adição e multiplicação, as quais satisfazem as propriedades de corpo algébrico. Isso significa que, para quaisuquer elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$, é suposto que as operações de $+$ e $\cdot$ são fechadas em $\mathbb{R}$ e satisfazem:

1. Associatividade

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Comutatividade

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

3. Existência do Elemento neutro

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

4. Existência do Elemento Inverso

$$a + (-a) = 0 \qquad a \neq 0 \wedge a \cdot \tfrac{1}{a} = 1$$

5. Distribuição da Multiplicação sobre Adição

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad a \cdot (b - c) = ab - ac$$

6. Princípio de Igualdade: se $a = b$, então

$$a + c = b + c \qquad a - c = b - c$$

$$a \cdot c = b \cdot c \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Em $\mathbb{R}$ também definiremos os subconjuntos dos naturais $\mathbb{N}$, dos inteiros $\mathbb{Z}$ e dos racionais $\mathbb{Q}$. Primeiramente, o conjunto $\mathbb{N}$ satisfaz que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. $x \in \mathbb{N} \to x + 1 \in \mathbb{N}$.

O conjunto dos inteiros é definido como:

$$\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x, y \in \mathbb{N},\ z = x - y\}$$

Por fim, os racionais são dados são definidos de tal modo que:

$$\mathbb{Q} = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists p, q \in \mathbb{Z},\ a = \frac{p}{q} \wedge q \neq 0\}$$

Dado que todo natural $x = x - 0$, então $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Outrossim, temos que todo inteiro $z = \frac{z}{1}$, de sorte que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Portanto,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2.1.2 Consequências das Propriedades

A seguir, provaremos alguns dos comportamentos esperados para as operações de adição e multiplicação com números reais. A primeira delas trata-se do 0 ser um elemento absorvente na multiplicação.

Proposição 2.1. *Para todo real a tem-se $a \cdot 0 = 0$*

Demonstração. Presuma que $a \cdot 0 = k$. Com efeito

$$\begin{gathered} a(0+0) = a \cdot 0 \\ k + k = k \\ k + k - k = k - k \\ k = 0 \end{gathered}$$

Conclui-se que $a \cdot 0 = 0$ ■

A seguir, veremos que um número real multiplicado por -1 deve ser igual ao seu oposto.

Proposição 2.2. *Para todo real a vale que $a \cdot (-1) = -a$*

Demonstração. É verdade que $a \cdot (1 + (-1)) = 0$, donde segue

$$\begin{gathered} a + a \cdot (-1) = 0 \\ a + a \cdot (-1) - a = 0 - a \\ a \cdot (-1) = -a \end{gathered}$$

■

Com o que foi mostrado na proposição 2.2 segue que: (1) o oposto do oposto de um número real é a identidade desse número, e que somar um número com seu oposto significa subtrair dele próprio e, consequentemente, a operação de subtração $a - b$ equivale a $a + (-b)$.

Corolário 2.1. *Para todo real b, tem-se que* $-(-b) = b$

Demonstração. Na proposição 2.2, substitua a por $-b$, obtendo

$$(-b) \cdot (-1) = -(-b)$$

Mas pelo elemento neutro da adição temos que

$$(-b) + (-(-b)) = 0$$

do que segue

$$\begin{gathered} b + (-b) + (-(-b)) = b \\ -(-b) = b \end{gathered}$$

∎

Corolário 2.2. *Para todo real a conclui-se que* $a + (-a) = a - a = 0$

Demonstração.

$$\begin{gathered} (-1) \cdot a = -a \\ a + (-1) \cdot a = a - a \\ a + (-a) = a - a \end{gathered}$$

Logo, $a - a = 0$ ∎

A seguir, mostraremos a regra de sinais da multiplicação.

Corolário 2.3. *Para todos reais a e b tem-se* $a \cdot (-b) = -(ab)$

Demonstração. Segue da proposição 2.2, da associatividade e comutatividade da multiplicação. ∎

Corolário 2.4. *Para quaisquer reais a e b tem-se que* $(-a)(-b) = ab$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= \\ (-1)(-1)(ab) &= \\ -(-1)(ab) &= ab \end{aligned}$$

∎

Uma propriedade útil em alguns contextos é que, dado que o produto de dois números é nulo, então pelo menos um dos fatores era nulo.

Proposição 2.3. *Para quaisquer reais a e b, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$*

Demonstração. Suponha por contradição que $ab = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então

$$\frac{ab}{b} = \frac{0}{b}$$
$$a = 0$$

o que é absurdo, logo a proposição vale. ■

Da proposição 2.3 podemos mostrar que quando dois quadrados são iguais, então as bases são iguais ou opostas.

Corolário 2.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a^2 = b^2$, então $a = \pm b$*

Demonstração. Uma vez que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = 0$$

então

$$(a+b) = 0 \quad \text{ou} \quad (a-b) = 0$$

donde se conclui que $a = -b$ ou $a = b$ respectivamente. ■

2.2 Ordenação e Desigualdades

2.2.1 Ordem

Presumiremos daqui em diante a existência de um conjunto $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ dotado das seguintes propriedades, supondo a, b e $c \in \mathbb{P}$:

1. Fechamaento sob $+$ e $\cdot$

$$\forall a, b \in \mathbb{P}, \; (\, a + b \in P \text{ e } a \cdot b \in P\,)$$

2. Tricotomia

$$\forall a \in \mathbb{R}, \; (\, a \in \mathbb{P} \vee -a \in \mathbb{P} \vee a = 0\,)$$

Proposição 2.4. *O quadrado de um número real não nulo é membro de $\mathbb{P}$.*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \; (\, a \neq 0 \rightarrow a^2 \in \mathbb{P}\,)$$

Demonstração. Se $a \in \mathbb{P}$, então $a^2 \in \mathbb{P}$ por fechamento da multiplicação. Se $a \notin \mathbb{P}$, então $-a \in \mathbb{P}$ por hipótese e tricotomia. Por fechamento, teremos $a^2 \in \mathbb{P}$. ■

Definição 2.1. *Dizemos que $a > b$ se, e somente, se, $a - b \in \mathbb{P}$. Ademais, $a < b$ se, e somente se, $b > a$.*

Proposição 2.5. *Todo real $a > 0$ é membro de $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Por definição, $a - 0 \in \mathbb{P}$, logo $a \in \mathbb{P}$. ■

Proposição 2.6. *A relação $<$ é uma relação de ordem total estrita em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Devemos demonstrar que a relação satisfaz irreflexividade, totalidade e transitividade.

1. A relação é irreflexiva, pois $a - a = 0$, e, por tricotomia, $0 \notin \mathbb{P}$.

2. Para totalidade, suponha que $a \not< b$, o que significa que $b - a \notin \mathbb{P}$, e, por tricotomia, $a - b \in \mathbb{P}$, logo $b < a$. O caso de $b \not< a$ é análogo, em que se concluirá que $a < b$.

3. É verdade que a relação é transitiva. Suponha que $a < b$ e $b < c$, e por definição

$$b - a \in \mathbb{P} \wedge c - b \in \mathbb{P}.$$

Visto que

$$(c - b) + (b - a) = c - a$$

então conclui-se que $c - a \in \mathbb{P}$ por fechamento, e $a < c$. ■

Proposição 2.7. *A relação $<$ é monótona sob adição e multiplicação por elemento em $\mathbb{P}$. Logo, para quaisquer reais a, b e c*

$$a < b \to a + c < b + c \qquad\qquad a < b \wedge c > 0 \to a \cdot c < b \cdot c$$

Demonstração. Com efeito, $b - a \in \mathbb{P}$, mas tabmém temos que

$$b - a = b + c - a - c = (b - c) - (a + c)$$

donde se conclui que $a + c < b + c$. Ademais, se $c \in \mathbb{P}$, então

$$c(b - a) \in \mathbb{P}$$

por fechamento, porém

$$c(b - a) = bc - ac$$

e $ac < bc$. ■

Corolário 2.6. *Para quaisquer reais x, y e z*

$$a < b \wedge c < 0 \to bc < ac$$

Demonstração. Por tricotomia, $-c > 0$, e, por fechamento, $-c(b - a) \in \mathbb{P}$. Logo,

$$-c(b - a) = ac - bc$$

implica que $bc < ac$. ■

2.2.2 Módulo

Definição 2.2. *O módulo, ou valor absoluto, de um número real a é definido como*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{se } 0 \leq x \\ -x, & \textit{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposição 2.8. *Para quaisquer reais x e y vale que*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

Demonstração. 1. Temos que $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$, donde segue que $|x| + |y| \geq x + y$. Da mesma forma, $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$, do qual se conclui que $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Dos dois casos segue que
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

2. Para a segunda expressão, basta mostrar ambos os membros da igualdade possuem o mesmo quadrado, já que são ambos maiores que 0. Temos que $(|xy|)^2 = x^2y^2$ independente se xy está em $\mathbb{P}$ ou não. Pelo mesmo argumento, temos que

$$|x|^2 \cdot |y|^2 = x^2y^2$$

do qual segue a igualdade que queríamos mostrar. ∎

Proposição 2.9. *Para quaisquer reais x, a e δ, temos que*

$$|x - a| \leq \delta \Longrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$$

Demonstração. Com efeito, temos que $x - a \leq \delta$ e $-(x - a) \leq \delta$. Da primeira desigualdade, segue que
$$x \leq a + \delta$$

enquanto que, da segunda,

$$-\delta \leq x - a$$
$$a - \delta \leq x$$

∎

2.2.3 A Reta Real

O conjunto denotado por $\mathbb{R}$ até então equivale ao conjunto dos números reais positivos, representado por $\mathbb{R}^+$. O complemento de $\mathbb{R}^+$ menos o conjunto dos reais nulos, ou seja, o conjunto unitário $\{0\}$, equivale ao conjunto dos reais negativos, representado por $\mathbb{R}^-$. Dessa forma, temos que
$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+.$$

Iremos admitir também uma notação para definir subconjuntos dos reais, chamada de intervalos reais, de modo que

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \qquad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

Os intervalos que incluem os seus extremos – o primeiro listado – são chamados de de fechados, enquanto que os que não incluem pelo menos um de seus extremos são abertos (o caso de todos os outros listados).

Uma forma de ilustrar geometricamente os números reais é por meio da reta real. Nesta reta vale que, se a e b são reais atribuídos aos pontos P e Q respectivamente e $a < b$, então P está à esquerda de Q. O segmento de reta que tem P e Q como extremos equivale ao intervalo real $[a, b]$. Tomando um ponto O que seja atribuído ao 0, ponto esse chamado de origem, teremos que todos os pontos à direita de O constituem os reais positivos, ou seja, $\mathbb{R}^+$ ou $(0, \infty)$. Os pontos à esquerda são os reais negativos: $\mathbb{R}^-$ ou $(-\infty, 0)$.

Todavia, nada nos garante que é possível associar um número real a **todo** ponto da reta; noutras palavras, que essa reta não possui "buracos". Algebricamente, isso equivale ao fato de que nenhumas das propriedades mostradas até então diferencia o conjunto dos reais dos números racionais [1]. Explicitar que $\mathbb{Q}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$ será a motivação da próxima seção.

2.3 Completude

2.3.1 Axioma do Supremo

Definição 2.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente caso exista um real b, chamado de majorante ou cota superior, tal que*

$$\forall x \in X, x \leq b.$$

O conjunto X será limitado inferiormente se existe real a, denominado minorante ou cota inferior, satisfazendo

$$\forall x \in X, a \leq x.$$

Definição 2.4. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado superiormente, então o seu supremo, denotado por $\sup X$, será o elemento que satisfaz*

1. $\sup X$ *é majorante de* X.
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ (a$ *é majorante de* $X \to \sup X \leq a)$

Alternativamente, se X é limitado inferiormente, então o seu ínfimo, representado por $\inf X$, é o elemento em $\mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\inf X$ *é minorante de* X.
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ (a$ *é minorante de* $X \to a \leq \inf X)$

Sinteticamente, o supremo é o menor dos majorantes, enquanto que o ínfimo é o maior dos minorantes. Esses conceitos também são usados para definir formalmente as ideias usuais de elemento máximo ou mínimo de um conjunto.

[1] A equivalência entre a noção algébrica de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ com a noção geométrica da reta real não ter "buracos" advém da suposição que toda grandeza mensurável pode ser representada como comprimento de algum segmento na reta. Algumas medidas, chamadas na história da matemática de incomensuráveis, não admitem ser medidas por um segmento que seja dado como uma razão, cujo comprimento seria um número racional. Exemplo de um incomensurável, que foi descoberto pelos Pitagóricos, é a diagonal do quadrado de lado unitário, pois foi provado que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Dessa forma, para que a reta não tenha "buracos", é necessário que ela seja capaz de medir incomensuráveis, que são modernamente designados como números irracionais.

Definição 2.5. *Se $X \subset \mathbb{R}$ possui um supremo a, ele será o máximo de X, denotado por $\max X$, se, e somente se, for membro de X. Se b for o ínfimo de X, então ele será o mínimo de X, com notação $\min X$, caso também seja elemento de X.*

Enunciaremos, finalmente, a propriedade que difere os racionais dos reais. Ela é conhecida como Axioma da Completude ou do Supremo, o qual define $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Axioma 2.1. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui um supremo.*

Com base nesse axioma, vamos provar um resultado análogo ao enunciado: todo conjunto com uma cota inferior deve ter um ínfimo.

Proposição 2.10. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente possui um ínfimo.*

Demonstração. Sendo X um subconjunto dos reais não vazio e com um minorante, digamos que o conjunto X' seja aquele tal que:

$$X' = \{x' \in \mathbb{R} \mid x' = -x \wedge x \in X\}.$$

Da hipótese segue que X' é não vazio e possui, pois, um supremo s pelo Axioma da Completude. Sendo satisfeito que

$$\forall x' \in X', \ (\, x' \leq s\,)$$

então deve ser válido que

$$\forall x \in X, \ (\, -s \leq x\,)$$

e $-s$ é um minorante de X. Ademais, $-s$ deve ser ínfimo, já que, caso contrário, haveria $m \in \mathbb{R}$ tal que $-s < m < x$ para todo $x \in X$, implicando que $x' < -m < s$ para todo $x' \in \mathbb{X}'$, e s não seria supremo. ∎

2.3.2 Propriedade Arquimediana

A propriedade arquimediana é simples em seu enunciado, mas detém um significado mais profundo. Em essência, ela enuncia que não existem elementos "infinitesimais" ou "infinitos" no conjunto dos reais, isto é, elementos infinitamente pequenos ou grandes, respectivamente, no conjunto dos números reais. Qualquer número real positivo a que tomarmos, por mais pequeno em magnitude que seja, podemos sempre multiplicá-lo por algum outro número positivo cujo resultado será maior que um outro positivo b dado. Inversamente, podemos dividir qualquer positivo b, por maior que seja, de tal forma que o quociente será menor do que um segundo positivo a dado.

Há três modos formais mais comuns de enunciar essa proprieade, e iremos mostrar que todas elas são equivalentes.

Teorema 2.1. *São equivalentes as afirmações:*

1. *O conjuntos dos naturais não possui supremo.*
2. *O ínfimo do conjunto $X = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ é 0.*
3. *para quaisquer reais positivos a e b, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$.*

Demonstração. (1 → 2) Se os naturais não possuem supremo, então, para todo $c \in \mathbb{R}^+$, temos que $\frac{1}{c}$ não pode ser majorante de $\mathbb{N}$. Existe, desse modo, um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &< n \\ \frac{1}{n} &< c. \end{aligned}$$

Como consequência dos fatos que X tem 0 como minorante e nenhum real positivo pode ser minorante de X, então $\inf X = 0$.

(2 → 3) Suponha (2) e, por contradição, que existem a e b reais positivos tal que, para todo natural n, tenha-se $na < b$. Dessa desigualdade obtemos que

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{n}.$$

isso implicaria que o lado esquerdo da desigualdade seria um minorante de X. Contudo, pela hipótse, teríamos $\frac{a}{b} < 0$, o que contradiz o fechamento dos reais positivos, provando que da afirmação 2 segue a terceira.

(3 → 1) Suponha (3) e que os naturais possuam um supremo s. Seria verdade então que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (\, m < s\,)$$

No entanto, da hipótse segue que

$$\exists n \in \mathbb{N},\ (\, s < nm\,)$$

e $m < s < nm$. Como $n \cdot m \in \mathbb{N}$, s não é supremo, chegando a uma contradição. ■

Teorema 2.2. *O conjunto $\mathbb{N}$ não possui um supremo.*

Demonstração. Suponha por contradição que $s = \sup \mathbb{N}$. Com efeito, $s - 1$ não será supremo de $\mathbb{N}$, o que equivale a dizer que

$$\exists n \in \mathbb{N},\ (\, s - 1 < n\,).$$

o que nos leva a $s < n + 1$, mas o lado direito da desigualdade é um natural, contradizendo a suposição de que s é o supremo dos naturais. ■

Sendo o Teorema 2.2 válido e equivalente as demais afirmações no teorema 2.1, então todas as afirmações são válidas. Concluimos que os números reais são um conjunto arquimediano.

2.3.3 Outras Consequências do Axioma da Completude

Teorema 2.3. *Uma sequência descrescente de intervalos reais $I_1, I_2, \ldots$ encaixados, isto é,*

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots,$$

possui pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

Demonstração. Seja $I_k = [a_k, b_k]$, temos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto dos extremos inferiores $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, pelo Axioma de Completude, possui um supremo c. Esse supremo, por definição, será menor que qualquer majorante b_k, para $k \in \mathbb{N}^*$. Por consequência, $c \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.4. *Toda função $f : \mathbb{N} \to (a, b)$ admite uma sequência decrescente de intervalos encaixados satisfazendo $f(k) \notin I_k$.*

Demonstração. Para isso, começe fazendo $I_0 = [a_0, b_0]$ tal que

$$a < a_0 < b_0 < b$$

e $f(0) < a_0$. Depois, com o intervalo $I = [a_k, b_k]$ construído, para $k \in \mathbb{N}^*$, construa I_{k+1} de tal modo que, se $f(k+1) \notin I_n$, então I_{n+1}, senão, $f(n+1)$ terá de ser diferente de pelo meno um dos extremos de I_k, digamos a_k. Desse modo, como $a_k < f(k+1)$, faça $a_{k+1} = a_k$ e

$$b_{k+1} = \frac{a_k + f(n+1)}{2}.$$

■

Teorema 2.5. *Todo intervalo real (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$, é não enumerável.*

Demonstração. Provemos que uma função $f : \mathbb{N} \to (a, b)$ não pode ser sobrejetiva. Com efeito, essa função admite uma sequência decrescente de intervalos encaixados

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots$$

satisfazendo $f(k) \notin I_k$. Pelo Teorema 2.3, existe $c \in \mathbb{R}$ que pertence a todos esses intervalos e, por construção, não poderia ser imagem de nenhum $n \in \mathbb{N}$. Logo, toda função f de naturais para um intervalo real não pode ser sobrejetora. ■

Corolário 2.7. *O conjunto dos números reais é não enumerável.*

Demonstração. Caso fosse, todo subconjunto seu seria enumerável, o que é absurdo, pois itervalos não o são. ■

Sendo o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais enumerável e $\mathbb{R}$ não enumerável, então há um número infinito de elementos, infinito esse maior que dos números naturais, que não são racionais. Esses números são chamados de irracionais, pois não podem ser escritos como uma fração com numerador e denominador inteiros, e seu conjunto é denotado por $\mathbb{I}$. Portanto, conseguimos mostrar que o axioma do supremo garante que os números racionais é subconjunto próprio dos números reais

2.4 Topologia dos Números Reais

2.4.1 Conjuntos Abertos

Os pontos num intervalo real na forma (α, β) possuem a propriedade de que qualquer ponto está envolto por infinitos pontos ainda dentro do intervalo nos dois sentidos. É essa noção que iremos formalizar como **pontos interiores**.

Definição 2.6. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. O conjunto dos pontos interiores de X, denotado por $\text{int}X$, é aquele que reúne todos os pontos $a \in \mathbb{R}$ para os quais existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$I = (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X.$$

Chamaremos um conjunto de aberto quando ele for igual ao conjunto dos seus pontos interiores. Dessa forma, qualquer ponto do conjunto está envolto, nos dois sentidos, de infinitos outros pontos também interiores ao conjunto.

Definição 2.7. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito aberto se, e somente se, $X = \text{int}X$.*

Uma nota importante é que, por não ter elementos, o conjunto vazio é aberto por vacuidade.

A vizinhança V de um ponto a é qualquer aberto $A \subset V$ que tenha o a como membro.

Definição 2.8. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}$. Diz-se que V é vizinhança para a se existe aberto $A \subset V$ tal que $x \in A$.*

Uma consequência direta dessa definição é que todo conjunto aberto é uma vizinhança para todos os seus pontos.

Mostremos, agora, que a interseção de quaisquer abertos é um aberto, e que a reunião de uma família potencialmente infinita de abertos também é um aberto.

Proposição 2.11. *Seja $\mathscr{F}$ uma família de conjuntos abertos. É verdade que*

1. $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{F},\ (A_1 \cap A_2$ *é aberto*$)$
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A$ *é aberto*

Demonstração. (1) A conclusão é direta se $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Do contrário, existem $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ tais que

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \subset A_1 \quad \text{e} \quad (a - \epsilon_2, a + \epsilon_2) \subset A_2.$$

Sem perda de generalidade, considere que $\epsilon_1 < \epsilon_2$, levando a que

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \subset (a - \epsilon_2, a + \epsilon_2)$$

Visto que o intervalo $(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1)$ está contido tanto em A_1 quanto em A_2, então esse intervalo está contido em $A_1 \cap A_2$, e a é, pois, um ponto interior desse último.

(2) Se $a \in A$ e $A \in \mathscr{F}$, então A é vizinhança de a. Desse modo, na reunião dos abertos de $\mathscr{F}$, A permanecerá uma vizinhança de a. Como vale para todo ponto em algum aberto na reunião, a reunião de abertos também será um aberto. ■

Uma sutileza na proposição é que somente a interseção de um número finito de abertos foi demonstrada ser aberto, o que não necessariamente vale quando é feita a interseção de infinitos abertos. Por outro lado, a união de um número potencialmente infinito de abertos é sim um aberto.

2.4.2 Conjuntos Fechados

Um ponto a é de aderência no conjunto X se ele qualquer intervalo centrado nele posssui pontos em comum com X.

Definição 2.9. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$. O ponto a é aderente a X, ou é ponto de aderência do conjunto, se, e somente se, para todo intervalo I centrado em a é satisfeito que*

$$I \cap X \neq \varnothing.$$

A noção de fecho dum conjunto é dada como a reunião de todos os seus pontos de aderência.

Definição 2.10. *Chamamos fecho dum conjunto $X \subset \mathbb{R}$, denotado por $\overline{X}$, o conjunto dos pontos de aderência de X.*

Como nossa definição de aderente não proibiu intervalos degenerados, então temos que qualquer ponto de x será aderente a X, de modo a implicar que $X \subset \overline{X}$. Dessa última, também conlui-se que, se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$ por transitividade da relação de inclusão. O conceito de fecho também serve para definir conjuntos fechados.

Definição 2.11. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$.*

Part II

Sequências, Limites e Continuidade

Chapter 3

Sequências Numéricas

Chapter 4

Séries Numéricas

Chapter 5

Limites de Funções

Chapter 6

Continuidade

Part III

Cálculo de uma Variável

Chapter 7

Diferenciação

Chapter 8

Aplicações de Derivada

Chapter 9

Integração de Riemann

Chapter 10

Integrais Impróprias

Chapter 11

Sequências e Séries de Funções

Part IV

Cĺaculo de Várias Variáveis

Chapter 12

Estrutura do $\mathbb{R}^n$

Chapter 13

Limites e Continuidade

Chapter 14

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

Chapter 15

Teoremas da Função Inversa e Implícita

Chapter 16

Integração em $\mathbb{R}^n$

Part V

Análise Vatorial

Chapter 17

Funções Vetoriais

Chapter 18

Campos Vetoriais

Chapter 19

Integrais de Linha e Superfície

Chapter 20

Teoremas Integrais

Part VI

Análise Complexa

Chapter 21

Números Complexos

Chapter 22

Funções Complexas

Chapter 23

Séries Complexas

Chapter 24

Integrais Complexas