Análise

J. P. S. de Sousa

Contents

Part I

Números Reais

Chapter 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Naturais e Inteiros

1.1.1 Axiomas de Peano

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, é tradicionalmente definido por um esquema de axiomas que especificam sua estrutura e natureza: os Axiomas de Peano, propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1889. Os axiomas podem ser divididos em duas coleções, aqueles que definem o comportamento de relação de igualdade, estebelecendo suas propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, e aqueles que falam sobre os naturais em si, postulando que:

1. o número 0 é um natural.
2. Existe uma função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a ser denominada sucessor.
3. Não existe natural cujo sucessor é 0.
4. Naturais com os mesmos sucessores são iguais
5. Se um subconjunto $\mathfrak{M}$ dos naturais inclui o 0, e presumindo que $x \in \mathfrak{M}$, pode-se concluir que $S(x) \in \mathfrak{M}$, então $\mathfrak{M}$ inclui todos os naturais.

O primeiro axioma diz que os Naturais são um conjunto não vazio, pois possuem ao menos um elemento. Os axiomas de 2 a 4, afirmam a existência de uma aplicação injetora S cuja imagem não inclui o 0. O axioma 5 também é conhecido como Princípio de Indução, afirmando que, se dado conjunto inclui o 0, e é possível aplicar a função S sucessivamente de modo que os novos elementos também estejam nele, então o conjunto trata-se do próprio conjunto dos naturais.

A partir dos axiomas, é possível demonstrar a existência e unicidade das operações de adição e multplicação dos naturais, satisfazendo as propriedades típicas, como associatividade e comutatividade. A partir deles também define-se uma ordenação por meio da relação de "maior que", representada por $<$, que satisfaz a definição de relação de ordem estrita total, isto é

- Assimétrica – $\forall x, y,\ (x < y \to y \not< x)$
- Totalidade – $\forall x, y,\ (x < y \lor y < x)$

- Não-Reflexiva – $\forall x,\ (x \not< x)$
- Transitiva – $\forall x, y, z,\ (x < y \land y < z \to x < z)$

Outras ordens também podem ser definidas, como a parcial, que exclui a propriedade de assimetria e inclui a reflexiva, isto é, todo elemento está relacionado consigo mesmo. Uma vez que os naturais possuem uma ordem total e, nessa ordem, há um menor elemento – o número 0 – então dizemos que os naturais estão bem ordenados. Formalmente, um conjunto é bem ordenado se para ele existe uma ordem total e qualquer um de seus subconjuntos possui um menor elemento nessa ordem.

1.1.2 Princípio de Indução

O axioma 5, como mencinado, define o famoso Princípio de Indução. No entanto, esse enunciado possuem outras formulações que tornam mais prático o seu uso como uma técnica de demonstração para provar propreidades sobre elementos que satisfazem uma definição recursiva.

Recursão é uma forma de definição que envolve uma coleção de casos bases e regras de construção para criar novos casos, chamados de recursivos. Por exemplo, nos Axiomas de Peano o único caso base é o 0, e os casos recursivos são aqueles aplicando-se a função sucessor sucessivamente: $S(0) = 1$, $S(S(0)) = 2$, e assim em diante. Uma recursão bem definida é aquela que, para qualquer caso recursivo, é possível retornar aos casos bases com base nas regras de construção. Logo, definições que precisam passar por infinitos casos antes de chegar num caso base ou circulares não são recursões bem definidas.

O Princípio de Indução Finita, por sua vez, é normalmente aplicado sobre uma definição recursiva para provar uma propriedade φ que vale para todos os casos. Para usá-la, deve-se provar que φ vale para todos os casos bases e, em seguida, supondo que vale para um caso recursivo, mostra que deve ser verdade para o próximo caso obtido pelas regras de construção. Essa formulação do princípio é mais geral (mas não mais forte) que a dada pelo axioma 5, pois pode ser mais facilmente apicada a qualquer conjunto que possa ter seus elementos definidos recursivamente em função de alguns elementos ditos base.

1.1.3 Números Inteiros

A primeira extensão dos naturais é a dos chamados números inteiros, denotados por $\mathbb{Z}$. A necessidade desses números surge no fato de que os naturais não são fechados sobre subtração; temos que $5 - 3$ é um natural, mas $3 - 5$ não é, por exemplo. Com isso, uma construção comum para os inteiros consiste em definí-los enquanto pares ordenados (a, b), com a e b naturais, denotando

$$a - b.$$

Repare que infinitos pares podem representar o mesmo inteiro, e, por isso, dizemos que cada inteiro é uma classe de equivalência desses pares. Exemplo: o inteiro 3 pode ser rperesentado como $5 - 2$, $7 - 4$ e $10 - 7$, enquanto que o inteiro -2 possui as representações equivalentes de $0 - 2$, $4 - 6$ e $8 - 10$.

Para os inteiros também estão bem definidas as operações de adição, subtração e multiplicação. O conjunto $\mathbb{Z}$ também possui uma ordem total – tanto parcial quanto estrita – mas não são bem ordenados, pois nem todo subconjunto possui um menor elemento, como por

exemplo
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 2\}$$
o qual incluirá o 1, 0 e todos os números negativos.

1.2 Racionais

1.2.1 Frações

Uma nova extensão dos naturais e inteiros são os números racionais. A sua construção se dá de maneira análoga aos dos inteiros, tal que todo racional é uma classe de equivalência de um par (a, b), com a e b inteiros, e b não nulo, sendo representado pela fração
$$\frac{a}{b}.$$
Disso, temos que o racional 3 pode tem como representantes $3/1$, $15/5$ ou $-6/(-2)$, enquanto o racional $1/2$ tem como representantes $2/4$ ou $\frac{-10}{-20}$.

A motivação para os racionais está no fato que a operação de divisão não é fechada nos inteiros, pois $4 \div 2$ é inteiro, mas $9 \div 4$ não. Para eles, também estão bem definidas as quatro operações básicas: adição, multiplicação, subtração e divisão. Além disso, os racionais são dotados de um propriedade fundamental, tal que, sejam a/b e c/d racionais e
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$
então
$$ad = bc$$

1.2.2 Representação Decimal

Os racionais admitem uma representação em termos posicionais, isto é, a cada algarismo é atribuído um valor relativamente a sua posição no número. Acontece que o mesmo já ocorria para os naturais e inteiros, pois cada posição à esquerda siginifica um aumeto de dez vez no valor absoluto do algarismo. Por exemplo
$$321 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$
a representação decimal dos recionais é análoga, com a diferença que os algarismos podem ter seus valores diminuidos por potências cada vez maiores de dez. Exemplo:
$$24,35 = 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

A partir da representação em fração de um racional, pode-se obter sua presentação decimal através de uma versão adaptada do algoritmo de divisão. No entanto, vale ressaltar que essa representação pode não ser finita e, especificamente nos casos de representação infinita, resulta nas chamadas dízimas periódicas. Nelas, os algarismos nas casas relativas às potências negativas, possuem um padrão de repetição previsível.

1.3 Conjuntos Enumeráveis

1.3.1 Boa Ordenação

Como citado brevemente quando discutimos os números naturais, para alguns conjuntos é possível explicitar uma ordenação total de seus elementos de modo que qualquer subconjunto possua um menor elemento. Essas estruturas – o conjunto dotado da relação de ordem – são chamadas de boas ordenações, ou conjuntos bem-ordenados.

Na Teoria Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC), toda boa ordem está associada a um número ordinal, que caracteriza a ordem do conjunto. Os números 1, 2, 3, etc., são números ordinais finitos, pois caracterizam a ordem de conjuntos finitos; por exemplo: a classe dos conjuntos de ordem 3 são aqueles que, uma vez ordenados, terão um primeiro, um segundo e um terceiro elemento. No entanto, conjuntos infinitos também estão associados a ordinais, a exemplo de $\mathbb{N}$ associado ao ordinal ω, dito o primeiro ordinal transifnito.

Por mais contra-intuitivo que seja, ainda podemos contruir ordens maiores do que ω. Por exemplo, se ordenamos os naturais de modo que primeiro listamos todos os pares e todos os ímpares em seguida, então o ordinal dessa ordenação é $\omega + \omega$. Seguindo esse raciocínio, ainda seria possível definir ordens cada vez maiores com ordinais ω^2, ω^ω, ou ω^{ω^ω}.

O Axioma de Escolha da ZFC pode provar o Teorema da Boa Ordenação, o qual diz que qualquer conjunto pode ser bem ordenado. Todavia, o resultado apenas enuncia a existência de uma boa ordenação, mas não induz qualquer método para a obter.

1.3.2 Conjuntos Finitos e Enumeráveis

A grandeza de uma ordem não implica na quantidade de elementos que há originalmente nos conjuntos. Como visto, a depender da ordenação que damos aos naturais, podemos obter ordens com ordinais ω ou $\omega+\omega$, no entato, os naturais continuam tendo a mesma quantidade de elementos nos dois casos. A quantidade de membros num conjunto é formalizada pela ideia de cardinal, definida como o menor ordinal ao qual um conjunto pode ser associado por uma boa ordenação. Dois conjuntos terão mesma cardinalidade (ditos equipotentes) se entre eles existe uma bijeção.

Conjuntos finitos são aqueles que possuem uma bijeção com algum subconjunto próprio dos naturais. Desse modo, há uma função bijetora f denominada função de contagem que associa cada elemento deles a um termo numa sequência de naturais de 1 até n, em que n é identificado como a cardinalidade do cojunto.

Uma classe de conjuntos que inclui os finitos são os conjuntos enumeráveis. Esses conjuntos consistem naqueles para os quais existe uma bijeção entre eles e qualquer subconjunto dos naturais (incluindo o próprio). Dessa forma, um conjunto é enumerável é menor ou tão grande quanto o conjunto dos naturais.

1.3.3 Conjuntos Não Enumeráveis e os Reais

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemão que inaugurou a Teoria dos Conjuntos, provou que a cardinalidade dos naturais, dos inteiros e dos racionais são iguais, ou seja, são todos enumeráveis. Ademais, provou que existem conjuntos maiores do que os naturais, Seu argumento era simples, mas elegante: crie uma lista de todos os números entre 0 e 1 com suas respresentação decimais, e construa um número no mesmo intervalo tal que o enésimo decimal do número seja diferente do decimal na mesma posição do enésimo termo na lista. Conclui-se que o número construído não fora listado, e não possível listar todos os números entre 0 e 1. Esse argumento é conhecido como argumento da diagonalização. Tais conjuntos que não podem ser colocados em correspondência um para um com os naturais são chamados de não enumeráveis.

Na história da matmática, um dos problemas mais famosos foram os dos Incomensuráveis, que eram números que não podiam ser medidos, isto é, não poeria ser dados na forma de uma razão entre inteiros a/b, como por exemplo a a diagonal do quadrado de lado unitário. Modernamente, os Incumensuráveis foram rebatizados de irracionais, e, ao longo do tempo, mostrou-se que diversos números são irracionais, como $\sqrt{2}$, π e a constante euleriana e. São justamente os números irracionais que completam as lacunas deixadas pelos racionais, e, juntos, foram o conjunto dos números Reais. Como visto, os reais possuem cardinalidade maior do que dos números naturais.

Chapter 2

Estrutura Algébrica dos Números Reais

2.1 Corpo dos Números Reais

2.1.1 Propriedades Algébricas Fundamentais

A seguir, presumiremos as seguintes propriedades das operações algébricas sobre os números reais a, b, c e d:

1. Associatividade

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Comutatividade

$$a+b = b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

3. Elemento neutro

$$a+0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

4. Elemento Inverso

$$a+(-a) = 0 \qquad a \neq 0 \land a \cdot \tfrac{1}{a} = 1$$

5. Distributiva

$$a \cdot (b+c) = ab+ac \qquad a \cdot (b-c) = ab-ac$$

6. Propriedades de Igualdade: se $a = b$, então

$$a+c = b+c \qquad a-c = b-c$$

$$a \cdot c = b \cdot c \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Proposição 2.1. *Para todo real a tem-se $a \cdot 0 = 0$*

Demonstração. Presuma que $a \cdot 0 = k$. Com efeito

$$
\begin{gathered}
a(0+0) = a \cdot 0 \\
k + k = k \\
k + k - k = k - k \\
k = 0
\end{gathered}
$$

Conclui-se que $a \cdot 0 = 0$ ■

Proposição 2.2. *Para todo real a vale que $a \cdot (-1) = -a$*

Demonstração. É verdade que $a \cdot (1 + (-1)) = 0$, donde segue

$$
\begin{gathered}
a + a \cdot (-1) = 0 \\
a + a \cdot (-1) - a = 0 - a \\
a \cdot (-1) = -a
\end{gathered}
$$

■

Corolário 2.1. *Para todo real b, tem-se que $-(-b) = b$*

Demonstração. Na proposição 2.2, substitua a por $-b$, obtendo

$$(-b) \cdot (-1) = -(-b)$$

Mas pelo elemento neutro da adição temos que

$$(-b) + (-(-b)) = 0$$

do que segue

$$
\begin{gathered}
b + (-b) + (-(-b)) = b \\
-(-b) = b
\end{gathered}
$$

■

Corolário 2.2. *Para todo real a conclui-se que $a + (-a) = a - a = 0$*

Demonstração.

$$
\begin{gathered}
(-1) \cdot a = -a \\
a + (-1) \cdot a = a - a \\
a + (-a) = a - a
\end{gathered}
$$

Logo, $a - a = 0$ ■

Corolário 2.3. *Para todos reais a e b tem-se $a \cdot (-b) = -(ab)$*

Demonstração. Segue da proposição 2.2, da associatividade e comutatividade da multiplicação. ■

Corolário 2.4. *Para quaisquer reais a e b tem-se que $(-a)(-b) = ab$*

Demonstração.

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= \\ (-1)(-1)(ab) &= \\ -(-1)(ab) &= ab\end{aligned}$$

■

Proposição 2.3. *Para quaisquer reais a e b, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$*

Demonstração. Suponha por contradição que $ab = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então

$$\frac{ab}{b} = \frac{0}{b}$$
$$a = 0$$

o que é absurdo, logo a proposição vale. ■

Corolário 2.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a^2 = b^2$, então $a = \pm b$*

Demonstração. Com efeito, uma vez que

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = 0$$

então

$$(a + b) = 0 \quad \text{ou} \quad (a - b) = 0$$

donde se conclui que $a = -b$ ou $a = b$ respectivamente. ■

Part II

Sequências, Limites e Continuidade

Chapter 3

Sequências Numéricas

Chapter 4

Séries Numéricas

Chapter 5

Limites de Funções

Chapter 6

Continuidade

Part III

Cálculo de uma Variável

Chapter 7

Diferenciação

Chapter 8

Aplicações de Derivada

Chapter 9

Integração de Riemann

Chapter 10

Integrais Impróprias

Chapter 11

Sequências e Séries de Funções

Part IV

CÍaculo de Várias Variáveis

Chapter 12

Estrutura do $\mathbb{R}^n$

Chapter 13

Limites e Continuidade

Chapter 14

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

Chapter 15

Teoremas da Função Inversa e Implícita

Chapter 16

Integração em $\mathbb{R}^n$

Part V

Análise Vatorial

Chapter 17

Funções Vetoriais

Chapter 18

Campos Vetoriais

Chapter 19

Integrais de Linha e Superfície

Chapter 20

Teoremas Integrais

Part VI

Análise Complexa

Chapter 21

Números Complexos

Chapter 22

Funções Complexas

Chapter 23

Séries Complexas

Chapter 24

Integrais Complexas