Fundamentos de Análise Matemática

J. P. S. de Sousa

Contents

Part I

Fundamentos de Análise

Chapter 1

Números Naturais

1.1 Axiomas

Antes de tudo, presumiremos, como princípios lógicos dados, o seguinte:

1. A relação de igualdade denotada por = que satisfaz
   - Reflexividade: $x = x$.
   - Simetria: se $x = y$, então $y = x$.
   - Transitividade: se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$

   e o seu oposto, denotada por $\neq$.

2. A existência de um conjunto de objetos denominados **Números Naturais**, denotado por $\mathbb{N}$ e que satisfaz os seguintes axiomas:

   Axioma 1.1. *O número* 0 *é um natural.*

   Axioma 1.2. *Existe uma função* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *denominada sucessor.*

   Axioma 1.3. *Não existe um natural cujo sucessor é* 0.

   $$\forall x \in \mathbb{N},\ (S(x) \neq 0)$$

   Axioma 1.4. *Dois naturais com mesmo sucessor são iguais*

   $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N},\ (S(x_1) = S(x_2) \to x_1 = x_2)$$

   Axioma 1.5. *Se* $\mathfrak{M}$ *é um conjunto de números naturais e é satisfeito que*

   (a) $1 \in \mathfrak{M}$

   (b) $\forall x \in \mathbb{N},\ (x \in \mathfrak{M} \to S(x) \in \mathfrak{M})$

   então $\mathbb{N} = \mathfrak{M}$.

O axioma 1.1 define que os naturais tem pelo menos um elemento, logo é não vazio. Em seguida, os axiomas 1.2, 1.3 e 1.4 definem uma função injetora cujo único elemento fora da imagem é o próprio 0. Por fim, o axioma 1.5 enuncia o Princípio de Indução aplicado aos números naturais.

1.2 Adição

Proposição 1.1. *Para todo x e y naturais vale que $x \neq y \to S(x) \neq S(y)$*

Demonstração. Se $S(x) = S(y)$, então pelo axioma 1.4 teríamos $x = y$. ■

Proposição 1.2. *Todo natural é diferente do seu sucessor*

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ (S(x) \neq x)$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjunto dos naturais para os quais a proposição vale. Temos que $0 \neq S(0)$ pelo axioma 1.3, logo $0 \in \mathfrak{M}$. Suponha que $x \neq S(x)$. Disso segue que $S(x) \neq S(S(x))$ pelo Teorema 1.1, e $S(x) \in \mathfrak{M}$, e pelo 1.5 temos que $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3. *Todo natural diferente de 0 tem um antecessor, isto é, um segundo elemento cujo sucessor é o primeiro.*

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ (x \neq 0 \to \exists u \in \mathbb{N}, \ (S(u) = x))$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjunto dos naturais para os quais a proposição vale. É verdade que $0 \in \mathfrak{M}$ por vacuidade. Supondo que $x \in \mathfrak{M}$, então $S(S(u)) = S(x)$, e $S(x) \in \mathfrak{M}$. Logo $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$ pelo axioma 1.5. ■

O axioma 1.4 garantirá que o antecessor de todo natural é único.

Definição 1.1. *Chamaremos de adição um operação binária $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $+(x,y) = x + y$ que satisfaz:*

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \ (x + 0 = x)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \ (x + S(y) = S(x + y))$

Proposição 1.4. *A operação de adição é associativa, isto é,*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \ (x + y) + z = x + (y + z)$$

Demonstração. Fixando x e y, seja $\mathfrak{M} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos naturais z para quais a proposição vale. Com efeito

$$(x + y) + 0 = x + y = x + (y + 0)$$

e $0 \in \mathfrak{M}$. Supondo que $z \in \mathfrak{M}$, segue então

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Consequentemente,

$$(x + y) + S(z) = S((x + y) + z) = S(x + (y + z)) = x + S(y + z) = x + (y + S(z))$$

e $S(z) \in \mathfrak{M}$. Logo a proposição vale para todos os naturais, isto é, $\mathbb{N} = \mathfrak{M}$. ■

Proposição 1.5. *A operação de adição é comutativa, isto é,*

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \ x + y = y + x$$