Matemática Discreta

J. P. S. de Sousa

Contents

Chapter 1

Introdução

1.1 O que Matmética Discreta

A definição de Matmática Discreta é difícil de se obter, pois pode-se dizer que é mais fácil a definir pelo que está de fora dela do que pelo que de fato está incluso nela. Ela estuda uma coleção ampla e heterogênea de objetos, e que dialoga com diversas outras áreas, muito pelo fato dela lidar, entre outras coisas, com princípios fundamentais da matemática, como a contagem.

Numa tentiva de a definir, podemos dizer que a Matemática Discreta não é um campo da matemática, mas sim a parte dela cujo foco está nas estruturas algébricas nas quais não há continuidade entre seus elementos. Seus objetos de estudo são estruturas, conjuntos e funções que lidam com elementos distintos e separados, tais como números inteiros, grafos e fórmulas lógicas.

1.2 Conjuntos Discretos

Relembrando, conjuntos são coleções bem definidas de objetos, chamados de elementos do conjunto. Geralmente, definimos um conjunto C a partir de uma propriedade $P(x)$ que todos os seus elementos satisfazem, o que é denotado por

$$C = \{x \mid P(x)\}$$

Na Teoria de Conjuntos, há uma relação fundamental de pertinência, denotada por $\in$, que indica que um elemento é membro de um dado conjunto.

A Teoria de Conjutnos também define uma propriedade chamada de cardinalidade do conjunto, que, intuitivamente, diz a respeito do quão "grande" um conjunto é. Se C é um conjunto, então sua cardinalidade pode ser denotada por $|C|$, ou por $\#C$, de forma que, neste texto, adotaremos a primeira opção. Dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade se há uma bijeção entre os seus elementos, i.e., existe uma correspondência de um para um entre os seus elementos. Conjuntos discretos, por definição, sempre possuem uma bijeção com um subconjunto dos números naturais, o que, em termos matemáticos, siginifica que eles podem ser enumerados.

Com essa propriedaade, podemos classificar os conjuntos discretos em dois tipos: os conjuntos finitos e os conjuntos infinitos enumeráveis. Conjuntos finitos são aqueles que tem correspondência um para um com um subconjunto dos naturais diferente de $\mathbb{N}$, e sua cardinalidade pode ser entendida como a própria quantidade de elementos do conjunto. Os infinitos enumeráveis são aqueles cuja cardinalidade é igual a de $\mathbb{N}$.

1.3 Funções Discretas

Uma função – ou aplicação – f é uma relação entre dois conjuntos A e B, denotada por

$$f : A \to B$$

O conjunto A é chamado de domínio da função, enquanto o conjunto B, é denominado de contradomínio. A função f associa todo elemento do domínio a um, e somente um, elemento do contradomínio.

$$\forall x \in A, \exists! y \in B \mid f(x) = y$$

Se x é um elemento do domínio associado a um elemento do contradomínio y, dizemos que y é a imagem de x pela função f, o que é denotado por $f(x) = y$. A notação $f(x)$ também pode ser usada para definir a lei de correspondência da função, por exemplo, se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função que associa todo número natural ao seu dobro, então a lei de correspondência pode ser dada como $f(x) = 2x$.

O conjunto imagem de f, que pode ser denotado por $\mathrm{Im}(()f)$, é formado pelos elementos do contradomínio que são imagem de algum elemento do domínio

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Funções podem ser classificadas, normalmente, em três categorias

- Injetora - uma função $f : A \to B$ é dita injetora se diferentes elementos do domínio são mapeados em diferentes elementos do contradomínio. Formalmente, f é injetora se

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

- Sobrejetora - uma função $f : A \to B$ é dita sobrejetora se o contradomínio coincide com o conjunto imagem da função

$$\mathrm{Im}(f) = B$$

- Bijetora - uma função $f : A \to B$ é dita bijetora se ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Intuitivamente, uma função bijetora estabelece uma correspondência de um para um entre os elementos do domínio e do contradomínio.

As funções discretas são aquelas cujo o domínio é um conjunto discreto. Desse modo, para o conjunto imagem, haveriam dois casos: a função é injetora, logo todo elemento da imagem é imagem de um único elemento no domínio, ou há pelo menos um elemento no contradomínio que imagem de mais de um no domínio. Em ambos os casos, a consequência é que a imagem terá caradinalidade menor ou igual à do domínio. Como o domínio é discreto, então a imagem também será um conjunto discreto.

Um dos casos mais comuns de funções discretas são as sequências, como as prograssões aritmémeticas e geométricas, cujos os termos podem ser determinados em função do índice do termo. Outros exemplos de funções discretas comuns são os fatoriais de inteiros não negativos, dado como o produto de todos os inteiros não negativos até o número dado, e também os multiconjuntos.

Apesar do nome, multiconjuntos é um artifício para representar um conjunto em que há repetição de elementos. Neste texto, um multiconjunto será uma função discreta m cujo contradomínio é $\mathbb{N}$, de modo que a imagem $m(x)$ de um elemento x do domínio será denominado multiplicidade desse elemento no multiconjunto. Logo, quando tivermos o interesse de representar uma coleção em que um elemento x se repete k vezes, definiremos um multiconjunto m com domínio ao qual x pertença tal que $m(x) = k$. Diremos que um multiconjunto trivial será aquele tal que para todo elemento no domínio, sua multiplicidade é zero, e chamaremos de suporte do multiconjunto m o conjunto $U = \{x \mid m(x) > 0\}$.

1.4 Áreas da Matemática Discreta

Neste texto, iremos explorar alguns campos que são estudados primariamente sob os olhos da Matmética Discreta. Todos os campos compartilham a propriedade fundamental de estarem lidando com objetos como conjunto e funções discretas, o que implica que eles podem distinguidos um dos outros, enumerados, ordenados e contados.

Recursão

A recursão é uma forma de definição aplicada a objetos que podem ser descritos em termos de outros objetos do mesmo tipo, porém mais simples. Em geral, uma definição recursiva é composta por casos base, que correspondem aos objetos mais simples e não dependem de outras definições, e por casos recursivos, nos quais um objeto é definido a partir de instâncias menores ou mais simples de si mesmo.

Uma definição recursiva é dita bem definida quando todo objeto que não é um caso base pode ser decomposto, em um número finito de passos, até alcançar um dos casos base, garantindo assim que o processo de definição termine.

De modo mais formal, um conjunto admite uma definição recursiva quando seus elementos podem ser descritos a partir de casos bases e de regras de construção que utilizam objetos previamente definidos. Os casos base são constituem os elementos mínimos da definição, enquanto que as regras recursivas garantem que todo objeto, pode ser reduzido, num número finito de aplicações, a esses casos.

O estudo da recursão em si não é necessariamente um campo da matemática discreta. No entanto, as definições recursivas são, sem dúvida, uma das ferramentas mais úteis para o estudo de objetos discretos pelo fato de muitos deles terem a propriedade de serem definidos a partir de objetos discretos menores.

Além do mais, as definições recursivas permitem a demonstração de resultados a partir do poderoso Princípio de Indução Matemática. A demonstração por indução, geralmente aplicada em situações em que seja-se provar que uma propriedade é satisfeita por todos os elementos de um conjunto, envolve dois passos princiapais: provar que a propriedade é verdadeira para os casos base e, supondo que a propriedade vale para um caso recursivo, provar que, ao obter um novo caso pelas regras de construção da definição recursiva, a propriedade valerá para esse novo caso.

Em resumo, a indução consiste em demonstrar que, se a propriedade vale para os casos base e que ela se mantém verdadeira sempre que aplicamos a regra de construção recursiva para um novo caso, então ela é verdadeira para todos os casos.

Combinatória

A combinatória, também chamada de Análise Combinatória em contextos mais elementares, estuda modos de contar, selecionar ou ordenar elementos de um conjunto finito sem necessariamente listar todas as possibilidades. Por sua vez, a combinatória pode ser dividida em alguns campos mais especializados, como:

- Enumerativa - busca contar o números de elementos de um conjunto que satisfazem uma determinada propriedade. É a área mais elementar da combinatória, sendo também chamada de contagem.
- Extremal - busca determinar o quão grande ou pequena uma coleção de elementos pode ser caso tenha que satisfazer determinadas restrições. Surge em problemas combinatórios relacionados a otimização.
- Algébrica - um campo que visa empregar métodos da Álgebra Abstrata, especialmente da Teoria de Grupos e da Representação, em contextos combinatórios, enquanto que, ao mesmo tempo, emprega métodos combinatórios para selecionar problema algébricos.
- Probabilística - um campo com maior grau de especialização introduzido por Paul Erdös que estuda o emprego de métodos probablísticos para demonstrar a existência de um determinado objeto combinatório. Em essência, busca-se provar que, ao selecionar aleatoriamente um objeto em dado universo, a probabilidade de que o objeto escolhido satisfaça uma propriedade desejada é estritamente menor do que zero.

Relações de Recorrência

As relações de recorrência são fórmulas que definem termos de uma sequência em função de termos anteriores. A relação de recorrência mais famosa é com certeza a Sequência de Fibonacci; nela, o termo base é $a_0 = 0$, e a fórmula de recorrência é dada por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ou seja, um termos é definido como a soma dos outros dois imediatamente anteriores. Também é comum denotar recorrências como funções dos índices dos termos da seqeência, que no mesmo exemplo dado seria $f(0) = 0$ e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

As recorrências surgem naturalmente em diversos problemas que envolvem objetos discretos, de modo que a solução do problema torna-se resolver a recorrência, isto é, achar uma fórmula não recursiva – também chamada de fórmula fechada – em termos do próprio índice para obter qualquer termo da sequência, sem precisar computar os anteriores na ordem.

Teoria dos Grafos

A Teoria dos Grafos é um grande ramo da Matemática Discreta que lida com conjuntos de objetos que estão relacionados entre si. Os objetos de um grafo são representados por pontos, enquanto que as relações entre eles são denotados por setas ou segmentos de retas, a depender do tipo da relação sendo representada.

O estudo dos grafos gera ferramentas poderosas para a modelagem de diversos problemas, que passam a poder ser solucionados por algoritmos que resolvem questões como conectividade, caminhos mínimos, fluxos, emparelhamentos e colorações. Dessa forma, problemas oriundos de áreas como ciência da computação, engenharia, logística, biologia, redes sociais e economia podem ser formalizados de maneira precisa e analisados sistematicamente por meio dessas estruturas.

Chapter 2

Recursão e Indução Matemática

Chapter 3

Contagem e Combinatória Enumerativa

3.1 Princíopios Fundamentais de Contagem

Nesta seção veremos duas técnicas elementares para realizar a contagem de elementos de um dado conjunto finitio: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, também denominado o Princípio Fundamental da Contagem.

3.1.1 Princípio Aditivo

O nosso primeiro problema de contagem será o de determinar a quantidade de elementos na união de uma família finita de conjuntos finitos disjuntos, o que nos dará nosso primeiro resultado.

Teorema 3.1. *Se $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma família de conjuntos finitos, disjuntos dois a dois, então cardinalidade de U dado como a união dos elementos dessa família é dada pela soma das cardinalidades dos conjuntos.*

Demonstração. A prova será por indução no tamanho de $\mathcal{F}$.

Base: Se $n = 1$, então $\mathcal{F} = \{A_1\}$ e a união terá a mesma cardinalidade de A_1, ou seja, $|U| = |A_1|$. Por outro lado, se $n = 2$, então $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$ e a união terá todos os elementos de ambos os conjuntos, ou seja, $|U| = |A_1| + |A_2|$.

Hipótese de Indução: Suponha que o teorema seja válido para uma familia $\mathcal{F}$ com n conjuntos, ou seja,

$$|U| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Para determinar a cardinalidade de uma união V de uma família $\mathcal{F}'$ dada por $\mathcal{F}' = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}\}$ com $n+1$ conjuntos, podemos escrever o problema como simplesmente a soma de dois conjuntos, U e A_{n+1}, caso para o qual vale a hipótese de indução. Assim, temos pelo Princíopio de Indução, que vale que a união de conjuntos disjuntos terá cardinalidade igual a soma das cardinalidades do conjuntos. ■

O teorema acima enuncia um dos princípios mais elementares de contagem: o Princípio Aditivo.

3.1.2 Princípio Multiplicativo

Um outro problema fundamental de contagem é determinar a quantidade de tuplas ordenadas que podemos formar, de forma que cada posição é ocupada por um elemento selecionado de um conjunto finito específico. Para resolvê-lo, iremos enunciar o resultado denominado o Princípio Fundamental da Contagem

Teorema 3.2. *Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos. O número de tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tais que $a_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ é dado pelo produto das cardinalidades dos conjuntos, ou seja,*

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

Demonstração. A prova será por indução no número de conjuntos n. Base: Se $n = 1$, então só há um conjunto A_1 e o número de tuplas ordenadas é simplesmente o número de elementos em A_1, ou seja, $|A_1|$. Se $n = 2$, então temos dois conjuntos A_1 e A_2. e sempre que fixarmos um elemento $a_1 \in A_1$ na primeira posição, há $|A_2|$ escolhas para a segunda. Como isso vale para toda escolha da primeira posição, então o número de pares ordenados é dado por

$$\sum_{a_1 \in A_1} |A_2| = |A_1| \times |A_2|$$

Hipótese de Indução: Suponha que o teorema seja válido para n conjuntos, ou seja, o número de tuplas ordenadas formadas por elementos dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é dado por

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

Para determinar o número de tuplas ordenadas formadas por elementos dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, podemos considerar que cada tupla ordenada pode ser vista como uma tupla ordenada dos primeiros n conjuntos seguida de um elemento do conjunto A_{n+1}. Pelo Princípio de Indução, o número de tuplas ordenadas dos primeiros n conjuntos é dado pela hipótese de indução. Multiplicando esse valor pelo número de escolhas possíveis para o elemento do conjunto A_{n+1}, obtemos, pois,

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

tuplas possíveis. ■

O Princípio Fundamental da Contagem é especial, pois ele serve como base para resolver muitos problemas de enumeração que serão vistos mais adiante.

3.2 Arranjos e Permutações

Nesta seção iremos explorar algumas estruturas combinatórias baseadas em tuplas ordenada, e determinaremos fórmulas para que consigamos enumerar quantas dessas estruturas podem ser obtidas a partir de um conjunto finito.

3.2.1 Fatoriais

O fatorial é uma função discreta que admite uma definição recursiva no domínio dos inteiros não negativos, dada como:

Definição 3.1. *Se n é um inteiro positivo, então o seu fatorial, denotado por $n!$ é definido por:*

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

A função fatorial é importante, pois ela surge naturalmente em diversos problemas combinatórios, especialmente de enumeração, como alguns que veremos a seguir.

3.2.2 Arranjos

Os arranjos são nada mais do que uma tupla ordenada obtida sem repetição a partir de um conjunto discreto.

Definição 3.2. *Seja A um conjunto discreto. Um arranjo dos elementos de A é uma tupla ordenada com elementos de A.*

Nosso problema será agora enumerar quantos arranjos são possíveis de se obter a partir de um conjunto finito de n elementos, já que para conjuntos discretos inifinitos, infinitos arranjos podem ser formados. O primeiro caso será para arranjos sem repetição, i.e., se $(a_1, \ldots, a_r)$ é um arranjo de A, então não há $a_i = a_j$ para qualquer i e j inteiros positivos menores ou iguais a r.

Teorema 3.3. *Se A é um conjunto finito com n elementos, então o número de arranjos de r elementos desse conjunto é dado por*

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Demonstração. Para provar a fórmula, iremos prover um argumento combinatório usando o Princípio Fundamental da Contagem. Sempre que escolhemos um elemento de A para ocupar a posição de índice i, não podemos repetir esse elemento, ou seja, nosso universo de escolhas se reduz em 1 cada vez que fixamos um elemento. Diante disso, representemos nossos universos de escolhas em cada passo da construção da tupla com uma definição recursiva, presumindo que $a_1 \in A$ é o primeiro elemento escolhido, $a_2 \in A$ o segundo, e assim em diante:

$$A_i = \begin{cases} A, & \text{se } i = 0 \\ A_{i-1} \backslash \{a_i\}, & \text{se } i > 1 \end{cases}$$

Dessa forma, o conjunto A_i representa os elementos que ainda podemos escolher para compor a tupla após já termos escolhido i elementos. Por coseguinte, ao preencher as r posições da tupla, teremos escolhido respectivamente, elementos da família $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$. Logo, enumerar arranjos é equivalente a enumerar quantas tuplas odenadas podem ser obtidas ao escolher, respectivamente, elementos da família citada, que pelo Princípio Fundamental da Contagem, deve ser igual ao produto das cardinalidades dos conjuntos. Uma vez que $|A_i| = |A| - i = n - i$, então o número de arranjos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r-1)$$
$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r-1) \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

que equivale a

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

■

O caso de arranjos com repetição é siginificativamente mais trivial, pois nosso universo de escolhas nunca se reduz, ou seja, para cada posição da tupla, teremos n escolhas possíveis, de forma que o número total de arranjos será dado por n^r, provando o corolário abaixo.

Corolário 3.1. *O número de arranjos de tamanho r com repetição de um conjunto A de n elementos é n^r*

Um caso especial dos arranjos são as permutações, que são arranjos tomados, com ou sem repetição, de todos os elementos de um conjunto finito.

Definição 3.3. *Uma permutação de um conjunto finito A de cardnalidade n é um arranjo de tamanho n dos elementos de A.*

Corolário 3.2. *Se A poossui n elementos, então há $n!$ permutações sem repetição de elementos de A.*

Demonstração. Caso em que $n = r$ na fórmula de contagem de arranjos.

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

■

O caso de permutações com repetição iremos adiar por um momento.

3.3 Combinações

3.3.1 Definição e Enumeração

Combinações são uma abstração da ação de selecionar elementos de um conjunto, de modo que a ordem em que os selecionamos não importa, apenas a coleção obtida ao final. Essa seleção pode ser feita sem ou com repetição de elementos: no priemeiro caso, a seleção gera um sobconjunto do conjunto original, enquanto que na segunda, obtemos um multiconjunto, cuja eliminação das redundâncias também se reduz a um subconjunto da coleção original.

Definição 3.4. *Seja A um conjunto discreto. Uma combinação C dos elementos de A é um multiconjunto não trivial dos elementos de A. Quando a imagem de C está contida em $\{0, 1\}$, então dizemos que ela é uma combinação sem reptição, do contrário, com repetição.*

Daqui em diante, iremos acordar algumas terminologias. Quando nos referimos apenas a "combinação", estaremos apenas omitindo o complemento "sem repetição", equanto que sempre iremos adicionar "com repetição" quando estivermos lidando com esse caso. Além disso, sempre que dissermos que uma combinação possui r elementos, estaremos dizendo que a soma das multiplicidades associadas pelo multiconjunto é igual a r.

Acordado a terminologia, iremos agora determinar a função de contagem de uma ombinação de r elementos.

Teorema 3.4. *Seja A um conjunto de n elementos. O número de combinações com r elementos de A será dada por*

$$\mathrm{C}_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Demonstração. Contar quantas combinações de r elementos podem ser obtidas de A equivale ao problema de contar o total de subconjuntos de r elementos que podem ser obtidos de A. Suponha que haja x subconjuntos de r elementos de A denotados por $C_1, C_2, \ldots, C_x$. Dos elementos de um subconjunto C_i, $1 \leq i \leq n$, podemos obter $r!$ arranjos dos elementos de A, e como não é possível produzir um desses arranjos a partir de outro sobconjunto C_j, então podemos afirmar que a contagem dos arranjos de r de elementos de A pode ser dada por $x \cdot r!$. Pela fórmula canônica de enumeração de arranjos, temos então:

$$x \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{3.1}$$

$$x = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{3.2}$$

■

3.3.2 Permutações com Repetição

Seções atrás, comentamos sobre os arranjos com repetição, cuja fómula de contagem poderia ser deduzida de um argumento combinatório elementar. No entanto, a mesma situação não se aplica sobre as permutações com repetição, que são tuplas em que um mesmo elemento se repete um número fixo de vezes.

Definição 3.5. *Seja A um conjunto de n elementos. Dado um multiconjunto $m : A \to \mathbb{N}$, uma permutação com repetição de elementos de A é uma tupla em que um elemento $a \in A$ ocorre em $m(a)$ posições.*

Permutações com repetição de um conjunto finito são gerada ao selecionar elementos desse conjunto zero ou mais vezes e os ordenar de diferentes maneiras. Um ponto de atenção ocorre no fato de que, se um elemento ocorre em duas ou mais posições, permutações nessas posições não geram novas ordenações, o que torna a enumeração desse tipo de estrutura um pouco mais criteriosa.

Tendo, então, definido as combinações. a tarefa de determinar uma função de contagem de permutações com repetição de conjunto finito dadas as multiplicidades de cada elemento torna-se possível por um argumento combinatório envolvendo as estruturas definidas neste capítulo.

Teorema 3.5. *Seja A um conjunto de n elementos. O número de permutações com repetição de elementos de A com multiplicidades dadas por um multiconjunto $m : A \to \mathbb{N}$, tal que $m(a_i) = r_i$, $a_i \in A$, e $1 \leq i \leq n$, é dado por*

$$\mathrm{PR}_T^{r_1 \ldots r_n} = \frac{T!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}$$

onde T é a soma das multiplicidades.

Demonstração. Dadas as multiplicidades dos elementos, podemos afirmar que a tupla terá tamanho igual a $T = r_1 + \ldots + r_n$. A construção de uma permutação poderá ser feita da seguinte maneira: para o primeiro elemento, selecionamos r_1 posições que serão ocupadas por ele na tupla dentre as T possíveis, isto é, de $\mathrm{C}_T^{r_1}$ maneiras, restando $T - r_1$ posições para alocar os demais. Para o segundo elemento, é possível escolher r_2 possições dentre $T - r_1$ de $C_{T-r_1}^{r_1}$, sobrando, por consequeência, $T - r_1 - r_2$ para os outros. Generalizando: para cada índice k, teremos $C_{T-r_1-\ldots-r_k}^{r_k}$ maneiras de escolher r_k posições de um total de $T - \sum_{j=1}^{k-1} r_j$. Dessa forma, o número de permutações com repetição que podem ser feitas, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é dado por

$$C_T^{r_1} \cdot C_{T-r_1}^{r_2} \cdot \ldots \cdot C_{T-r_1-\ldots-r_n}^{r_n}$$

expandindo os termos e cancelando os semelhantes,

$$\frac{T!}{\cancel{(T-r_1)!}\, r_1!} \cdot \frac{\cancel{(T-r_1)!}}{\cancel{(T-r_1-r_2)!}\, r_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(T-r_1-\ldots-r_{n-1})!}}{\cancelto{1}{(T-r_1-\ldots-r_n)!}\, r_n!} \tag{3.3}$$

donde segue a expressão desejada

$$\frac{T!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}$$

■

3.3.3 Soluções não Negativas de uma Equação e Combinações com Repetição

Vamos agora explorar um famoso problema elementar de combinatória antes de nos aprofundarmos mais nas combinações com repetição. O problema em questão é enumerar as soluções não negativas de uma equação na forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r$$

onde x_i são variáveis inteiras não negativas e r é uma constante não negativa dada. Como poderemos resolver esse problema?

Nossa estratégia será contruir uma representação para cada uma das soluções da equação por meio de uma string formada pelos símbolos "." e "+". Suponha que $(a_1, \ldots, a_n)$ seja uma solução da equação $x_1 + \ldots + x_n = r$. Para produzir a string que repsenta a solução, siga os passos:

1. Tome o valor da posição a_i da tupla e escreva, da esquerda para direita, tantos símbolos "." quanto for o valor de a_i.
2. Se o último a_i foi avaliado no passo anterior, termine, senão escreve um símbolo de "+" e volte ao passo anterior.

Vamos a exemplos. A equação $x_1 + x_2 = 3$ tem, entre suas soluções, as tuplas $(1, 2)$ e $(0, 3$. As strings produzidas pelos passos mencionados seriam, respectivamente, ". + .." e "+...". É fácil ver que cada tupla produz apenas uma string na forma proposta, e que não é possível que tuplas diferentes produzam a mesma string. Portanto, há uma bijeção entre uma solução da equação e uma string produzida conforme os passos especificados.

Obtemos, então, que o número de soluções inteiras não negativas de uma equação é equivalente ao número de anagramas de uma string que tenha r símbolos iguais a . e $n-1$ símbolos iguais a $+$. Isso configura um problema de permutação com repetição, que, como vimos na seção anterior, pode ser resolvido ao computar a função de contagem $\mathrm{PR}_{r+n-1}^{r,n-1}$.

$$\mathrm{PR}_{r+n-1}^{r,n-1} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Temos, pois, que essa será a função de contagem das soluções inteiras de uma equação na forma $x_1 + \ldots + x_n = r$. Com isso, estamos prontos para determinar a função de contagem das combinações com repetição.

Teorema 3.6. *Seja A um conjunto de n elementos. A função de contagem das combinações com repetição com r elementos é definida por*

$$\mathrm{CR}(n, r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Demonstração. Se C é uma combinação com repetição de r elementos de A, então, por definição, C associa cada elementos $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, a um valor $C(a_i)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} C(a_i) = r$$

Cada solução da equação acima equivale a uma associação que define uma combinação com repetição de r elementos. Logo, contar quantas combinações desse tipo podem ser feitas equivale a contar quantas soluções inteiras não negativas a equação anterior possui, que, como havíamo deduzido, será

$$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

$\blacksquare$

Chapter 4

Relações e Funções Discretas

Chapter 5

Teoria dos Grafos

Chapter 6

Combinatória Extremal e Probabilística