Análise

J. P. S. de Sousa

Contents

Part I

Fundamentos de Análise

Chapter 1

Números Naturais

1.1 Axiomas

Antes de tudo, presumiremos, como princípios lógicos dados, o seguinte:

1. A relação de igualdade denotada por $=$ que satisfaz
   - Reflexividade: $x = x$.
   - Simetria: se $x = y$, então $y = x$.
   - Transitividade: se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$

   e o seu oposto, denotada por $\neq$.

2. A existência de um conjunto de objetos denominados **Números Naturais**, denotado por $\mathbb{N}$ e que satisfaz os seguintes axiomas:

   Axioma 1.1. *O número 0 é um natural.*

   Axioma 1.2. *Existe uma função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denominada sucessor.*

   Axioma 1.3. *Não existe um natural cujo sucessor é 0.*

   $$\forall x \in \mathbb{N},\ (S(x) \neq 0)$$

   Axioma 1.4. *Dois naturais com mesmo sucessor são iguais*

   $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N},\ (S(x_1) = S(x_2) \to x_1 = x_2)$$

   Axioma 1.5. *Se $\mathfrak{M}$ é um conjunto de números naturais e é satisfeito que*

   (a) $1 \in \mathfrak{M}$

   (b) $\forall x \in \mathbb{N},\ (x \in \mathfrak{M} \to S(x) \in \mathfrak{M})$

   então $\mathbb{N} = \mathfrak{M}$.

O axioma 1.1 define que os naturais tem pelo menos um elemento, logo é não vazio. Em seguida, os axiomas 1.2, 1.3 e 1.4 definem uma função injetora cujo único elemento fora da imagem é o próprio 0. Por fim, o axioma 1.5 enuncia o Princípio de Indução aplicado aos números naturais.

1.2 Adição

Proposição 1.1. *Para todo x e y naturais vale que $x \neq y \to S(x) \neq S(y)$*

Demonstração. Se $S(x) = S(y)$, então pelo axioma 1.4 teríamos $x = y$. ■

Proposição 1.2. *Todo natural é diferente do seu sucessor*

$$\forall x \in \mathbb{N},\ (S(x) \neq x)$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjunto dos naturais para os quais a proposição vale. Temos que $0 \neq S(0)$ pelo axioma 1.3, logo $0 \in \mathfrak{M}$. Suponha que $x \neq S(x)$. Disso segue que $S(x) \neq S(S(x))$ pelo Teorema 1.1, e $S(x) \in \mathfrak{M}$, e pelo 1.5 temos que $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3. *Todo natural diferente de 0 tem um antecessor, isto é, um segundo elemento cujo sucessor é o primeiro.*

$$\forall x \in \mathbb{N},\ (x \neq 0 \to \exists u \in \mathbb{N},\ (S(u) = x))$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjunto dos naturais para os quais a proposição vale. É verdade que $0 \in \mathfrak{M}$ por vacuidade. Supondo que $x \in \mathfrak{M}$, então $S(S(u)) = S(x)$, e $S(x) \in \mathfrak{M}$. Logo $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$ pelo axioma 1.5. ■

O axioma 1.4 garantirá que o antecessor de todo natural é único.

Definição 1.1. *Chamaremos de adição um operação binária $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $+(x, y) = x+y$ que satisfaz:*

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ (x + 0 = x)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{N},\ (x + S(y) = S(x + y))$

Proposição 1.4. *A operação de adição é associativa, isto é,*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

Demonstração. Fixando x e y, seja $\mathfrak{M} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos naturais z para quais a proposição vale. Com efeito

$$(x + y) + 0 = x + y = x + (y + 0)$$

e $0 \in \mathfrak{M}$. Supondo que $z \in \mathfrak{M}$, segue então

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Consequentemente,

$$(x + y) + S(z) = S((x + y) + z) = S(x + (y + z)) = x + S(y + z) = x + (y + S(z))$$

e $S(z) \in \mathfrak{M}$. Logo a proposição vale para todos os naturais, isto é, $\mathbb{N} = \mathfrak{M}$. ■

Proposição 1.5. *O sucessor de todo natural x pode ser escrito como $S(x) = x + S(0)$.*

Demonstração.

$$x + S(0) = S(x + 0) = S(x)$$

■

Proposição 1.6. *A adição de um natural x e 0 é comutativa*

$$x + 0 = 0 + x$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjuntos dos naturais para os quais isso vale. Com efeito, se $x = 0$, então

$$x + 0 = 0 + 0 = 0 + x.$$

Supondo que vale para um natural x, então

$$S(x) + 0 = S(x) = S(x + 0) = S(0 + x) = 0 + S(x),$$

e a proposição vale para $S(x)$, logo $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ∎

Proposição 1.7. *A adição de um natural x com $S(0)$ é comutativa.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o subconjuntos dos naturais para os quais isso vale. Se $x = 0$, então

$$S(0) + x = S(0) = S(0 + 0) = 0 + S(0) = x + S(0).$$

Suponha que vale para $x \in \mathbb{N}$, ou seja, $x + S(0) = S(0) + x$. Disso temos que

$$S(x) + S(0) = x + S(0) + S(0) = S(0) + x + S(0) = S(0) + S(x)$$

Logo, a proposição vale para $S(x)$, e para todos os naturais. ∎

Proposição 1.8. *A operação de adição é comutativa, isto é,*

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x + y = y + x$$

Demonstração. Fixe y e seja $\mathfrak{M}$ o conjunto dos naturais para os quais a proposição vale. Supondo que $x = 0$, então a comutação segue de 1.6. Suponha que vale para x, e teremos então:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ S(x + y) &= S(y + x) \\ x + S(y) &= y + S(x) \\ x + y + S(0) &= y + S(x) \\ x + S(0) + y &= y + S(x) \\ S(x) + y &= y + S(x) \end{aligned}$$

Conclui-se que $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$, já que $S(x) \in \mathfrak{M}$. ∎

Proposição 1.9. *Para quaisquer x e y naturais e com $x \neq 0$, temos que*

$$y \neq x + y$$

Demonstração. Fixe x, e seja $\mathfrak{M}$ o conjuntos dos naturais para os quais a proposição vale. Se $y = 0$, então vale que $x \neq y$ por hipótese, e $0 \in \mathfrak{M}$. Suponha que a proposição vale para y, e $y \neq x + y$. Logo

$$\begin{aligned} S(y) &\neq S(x + y) \\ S(y) &\neq x + S(y) \end{aligned}$$

e $S(y) \in \mathfrak{M}$. Portanto $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ∎

Proposição 1.10. *Se*

$$y \neq z,$$

então

$$x + y \neq x + z$$

Demonstração. Fixe y e z, e seja $\mathfrak{M}$ o conjunto dos naturais para os quais a proposição vale. Com efeito

$$y \neq z$$
$$0 + y \neq 0 + z$$

e temos $0 \in \mathfrak{M}$. Agora suponha que

$$y \neq z \to x + y \neq x + z.$$

Presumindo então que $y \neq z$, segue:

$$x + y \neq x + z$$
$$S(x + y) \neq S(x + z)$$
$$S(x) + y \neq S(x) + z$$

e $S(x) \in \mathfrak{M}$. Logo $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.11. *Sejam x e y naturais com $x \neq 0$. Exatamente uma das proposições abaixo deve ocorrer:*

1. $x = y$
2. $\exists u,\ (x = y + u)$, *com x e y não ambos nulos.*
3. $\exists v,\ (y = x + v)$, *com x e y não ambos nulos.*

Demonstração. Nenhuma das proposições podem ocorrer simultaneamente dois a dois visto a proposição 1.9. Fixando x, seja então $\mathfrak{M}$ o conjunto dos naturais em que ocorre uma, e somente uma, das proposições listadas.

Se $y = 0$, então

$$x = x + 0 = x + y$$

que é o caso 2 com $u = x$, e $0 \in \mathfrak{M}$. Suponha que $y \in \mathfrak{M}$, ou seja, que exatamente uma das porposições valem. Temos três casos

1. Se $x = y$, então $S(y) = S(x)$ e $S(x) = x + S(0)$. Fazendo $v = S(0)$, temos

   $$S(y) = x + v$$

   e a proposição 3 vale para $S(y)$.

2. Se existe natural u tal que $x = y + u$, então temos outros dois casos

   (a) $u = 0$, e $x = y$, voltando ao caso 1.

(b) $u \neq 0$, e há natural w tal que $S(w) = u$. Segue então que

$$x = y + S(w) = S(y) + w$$

e a proposição 2 vale também para $S(y)$.

3. Se existe natural v tal que $y = x + v$, então

$$S(y) = S(x + v) = x + S(v)$$

e a proposição 3 vale para $S(y)$.

Visto os casos, podemos dizer então que $S(y) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = \mathbb{N}$. ■

1.3 Ordenação

Definição 1.2. *Sejam x, y e u naturais. Se*

$$x = y + u$$

com $u \neq 0$, então dizemos que x é maior que y, fato denotado por

$$x > y,$$

ou também que y é menor do que x, representado por

$$y < x.$$

Proposição 1.12. *Para quaisquer naturais x e y, uma das situações deve ocorrer:*

$$x = y \quad x < y \quad x > y$$

Demonstração. Consequência direta da definição 1.2 e do teorema 1.11. ■

Definição 1.3. *Dizemos que x é maior ou igual a y, denotado por $x \geq y$ se, e somente se, ocorre de*

$$x > y \vee x = y.$$

Alternativamente, pode-se dizer que y é menor ou igual a x, representado como $y \leq x$.

Proposição 1.13. *A relação $<$ é transitiva nos naturais*[1]*.*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x < y \wedge y < z \to x < z)$$

Demonstração. Presumindo que $x < y$ e $y < z$, então existem naturais u e v não nulos tais que

$$y = x + u \quad \text{e} \quad z = y + v.$$

Com efeito,

$$z = (x + u) + v$$
$$z = x + (u + v),$$

donde segue que $x < z$. ■

[1] A afirmação vale também para $>$, e a demonstração é análoga.

Proposição 1.14. *Para quaisquer naturais x, y ou z, se tivermos que*

$$x \leq y \wedge y < z$$

ou que

$$x < y \wedge y \leq z$$

então $x < z$

Demonstração. A demonstração é trivial se a igualdade $x = y$ ou $z = y$ valem. No contrário, a proposição 1.13 garante que a tese é válida. ■

Proposição 1.15. *A relação de $\leq$ é transitiva nos naturais.*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow y \leq z)$$

Demonstração. Se vale que $x = y$ e $y = z$, então a consequência é direta. Se não, a proposição 1.14 garante a validade da tese. ■

Proposição 1.16. *Para quaisquer naturais x e y,*

$$x + y > x$$

Demonstração. Trivial, pois $x + y = x + y$. ■

Proposição 1.17. *Sejam x, y e z naturais. Se*

$$(x > y) \vee (x = y) \vee (x < y),$$

então

$$(x + z > y + z) \vee (x + z = y + z) \vee (x + z < y + z),$$

respectivamente.

Demonstração.

1. Se $x > y$, então há um natural u não nulo tal que

   $$x = y + u,$$

   e

   $$x + z = (y + u) + z = (y + z) + u$$

   Logo $x + z > y + z$.

2. Se $x < y$, então a demonstração de que $x + z < y + z$ é análoga ao caso anterior.

3. Se $x = y$, então é trivial que $x + z = y + z$.

■

Proposição 1.18. *Sejam x, y e z naturais. Se*

$$(x + z > y + z) \vee (x + z = y + z) \vee (x + z < y + z),$$

então

$$(x > y) \vee (x = y) \vee (x < y),$$

respectivamente.

Demonstração. Para cada um dos três casos, podemos presumir a contrapositiva, e a conclusão seguirá da proposição 1.17. ■

Proposição 1.19. *Para quaisquer naturais x, y, z e u, se*

$$x > y \wedge z > u,$$

então

$$x + z > y + u$$

Demonstração. Com efeito, existem $v, w \in \mathbb{N}$ não nulos tais que

$$x = y + v \quad \text{e} \quad z = u + w.$$

Então,

$$x + z = (y + v) + (u + w) = (y + u) + (v + w)$$

donde segue $x + z > y + u$. ■

Os casos para $<$, $\leq$ e $\geq$ são análogos.

Proposição 1.20. *Para todo natural x, tem-se que $x \geq 0$*

Demonstração. Tem-se que $x = 0$ ou $x = 0 + x$. ■