

# Characterization of Space of Solution for selective Harmonic elimination problem

Carlos Esteve<sup>c,a</sup>, Deyviss Jesús Oroya<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Chair of Computational Mathematics, Fundación Deusto, Avenida de las Universidades 24, 48007 Bilbao, Basque Country, Spain.

<sup>b</sup>Universidad de Deusto, Avenida de las Universidades 24, 48007 Bilbao, Basque Country, Spain.

<sup>c</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain.

---

## Abstract

En este documento caracterizaremos el espacio de soluciones dado un problema selective harmonic elimination. Para ello utilizaremos la formulación como problema de control óptimo de SHE, para luego encontrar el conjunto de controlabilidad, de manera que en la formulación SHE se traduce a la existencia de solución.

*Key words:* Selective Harmonic Elimination; Finite Set Control, Piecewise Linear function.

---

## 1 Introduction and motivations

Selective Harmonic Elimination (SHE) [Rodríguez et al., 2002] is a well-known methodology in electrical engineering, employed to improve the performances of a converter by controlling the phase and amplitude of the harmonics in its output voltage. As a matter of fact, this technique allows to increase the power of the converter and, at the same time, to reduce its losses.

This formulation was introduced in [nuestro paper], In what follows, with the notation  $\mathcal{U}$  we will always refer to a finite set of real numbers, contained in the interval  $[-1, 1]$

$$\mathcal{U} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^L \subset [-1, 1], \quad (1.1)$$

with cardinality  $|\mathcal{U}| = L$ .

**Problem 1.1** Let  $\mathcal{U}$  be defined as in (1.1) and let  $\mathcal{E}_a = \{e_a^i\}_{i=1}^{N_a}$  and  $\mathcal{E}_b = \{e_b^j\}_{j=1}^{N_b}$  be two sets of odd numbers. Given the vectors  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  and  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , let us define  $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{a}_T, \mathbf{b}_T]^\top \in \mathbb{R}^{N_a} \times \mathbb{R}^{N_b}$ . We look for  $u : [0, \pi) \rightarrow$

$\mathcal{U}$  such that the solution of

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\tau) = -\frac{2}{\pi} \mathcal{D}(\tau) u(\tau), & \tau \in [0, \pi) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

and which satisfies  $\mathbf{x}(\pi) = \mathbf{0}$ .

Where  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{N_a+N_b}$  and

$$\mathcal{D}(\tau) = [\mathcal{D}^\alpha(\tau) \ \mathcal{D}^\beta(\tau)]^T \quad (1.3)$$

and where  $\mathcal{D}^\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^{N_a}$  and  $\mathcal{D}^\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b}$  are,

$$\mathcal{D}^\alpha(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(e_a^1 \tau) \\ \vdots \\ \cos(e_a^{N_a} \tau) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}^\beta(\tau) = \begin{bmatrix} \sin(e_b^1 \tau) \\ \vdots \\ \sin(e_b^{N_b} \tau) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Nos preguntamos cuál es el conjunto controlable  $\mathcal{R}$  de Problema 1.1, es decir para que  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{N_a+N_b}$  existe un control que sea capaz de llevar el sistema dinámico al origen.

Suponiendo que en el instante  $\tau = \pi$ , el sistema se encuentra en  $\mathbf{x}(\pi) = \mathbf{0}$ , nos podemos preguntar que posi-

---

\* This paper was not presented at any IFAC meeting.

Email addresses: carlos.esteve@uam.es (Carlos Esteve), djoroya@deusto.es (Deyviss Jesús Oroya).

ble acción nos podría haber llevado a este punto. Es decir en un instante  $\tau = \pi - \Delta\tau$ , dado que solo podemos tomar un conjunto de acciones  $\mathcal{U}$ , suponiendo que en todo el intervalo  $\Delta t$  la derivada del sistema se mantiene constante, entonces podemos afirmar que los puntos más lejanos de los cuales podemos provenir son

$$x(\pi - \Delta\tau) = \begin{cases} +\frac{2}{\pi}\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) \\ -\frac{2}{\pi}\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) \end{cases} \quad (1.5)$$

Considerando el instante de tiempo anterior  $\tau = \tau - 2\Delta\tau$ , podremos razonar de la misma manera, pero esta vez existen ya dos puntos a donde podemos llegar para que luego el sistema sea controlable. Entonces los puntos controlables serían

$$x(\pi - 2\Delta\tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( +\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) + \mathcal{D}(\pi - 2\Delta\tau) \right) \\ \frac{2}{\pi} \left( -\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) + \mathcal{D}(\pi - 2\Delta\tau) \right) \\ \frac{2}{\pi} \left( +\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) - \mathcal{D}(\pi - 2\Delta\tau) \right) \\ \frac{2}{\pi} \left( -\mathcal{D}(\pi - \Delta\tau) - \mathcal{D}(\pi - 2\Delta\tau) \right) \end{cases}$$

Viendo el ejemplo anterior, vemos que en un instante de tiempo anterior  $\Delta\tau$  el tamaño de conjunto de controlabilidad es igual a dos puntos, en el instante anterior  $2\Delta\tau$  se añaden cuatro puntos más.

Solo necesitamos analizar el borde del conjunto de controlabilidad, dado que por el Teorema XX [], este tipo de conjunto es convexo y compacto.

## 2 Projection of the real system in direction $w$

Consideramos el sistema de control proyectado en la dirección  $w \in \mathbb{R}^{N_b} / \|w\| = 1$ , cuyo estado llamaremos  $x^w(\tau) = w \cdot x(\tau) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}^w(\tau) = -\frac{2}{\pi}(\mathcal{D}(\tau) \cdot w)u(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ x^w(0) = [x_0 \cdot w] \end{cases} \quad (2.1)$$

Para esta dinámica proyectada existirá un valor máximo  $x_m^w$  para la condición inicial para el cual exista un control  $u(\tau)$  que pueda conducir el sistema al origen en tiempo  $\tau = \pi/2$ .

Para hallar el valor  $x_m^w$  podemos pensar el cómo debe ser la estrategia de control para que el estado recorra la máxima distancia posible. La dinámica proyectada es lo más grande posible cuando la derivada toma siempre valores negativos. Dado que podemos elegir  $u(\tau)$  en el intervalo  $[-1, 1]$  la elegiremos de tal manera que la derivada temporal sea siempre negativa y lo más grande posible. Entonces la ecuación diferencial del punto más

lejano en la dirección  $w$  en un instante de tiempo  $\tau$  lo denotamos como  $b^w$  que podemos alcanzar en  $\tau = \pi$  es:

$$\begin{cases} \dot{b}^w(\tau) = -\frac{2}{\pi}|\mathcal{D}(\tau) \cdot w| & \tau \in [0, \pi] \\ b^w(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Con condición final el origen de coordenadas. También podemos escribirlo en su versión integral:

$$b^w(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{\tau}^{\pi} |\mathcal{D}(\eta) \cdot w| d\eta \quad (2.3)$$

Entonces podemos integrarlo:

$$b^w(\tau) = \frac{2}{\pi} \left| \mathcal{G}_w(\eta) \operatorname{sign}(\mathcal{D}(\eta) \cdot w) \right|_{\eta=\tau}^{\eta=\pi} \quad (2.4)$$

Donde hemos utilizado  $\frac{d}{d\tau} \mathcal{G}_w(\tau) = \mathcal{D}(\tau) \cdot w$

$$\mathcal{D}(\tau) \cdot w = \sum_{i \in \mathcal{E}_a} \cos(i\tau) w_i^\alpha + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \sin(j\tau) w_j^\beta \quad (2.5)$$

La primitiva  $\mathcal{G}_w(\tau)$  que buscamos es de la forma:

$$\mathcal{G}_w(\tau) = \sum_{i \in \mathcal{E}_a} \sin(i\tau) \frac{w_i^\alpha}{i} - \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \cos(j\tau) \frac{w_j^\beta}{j} \quad (2.6)$$

Entonces la Ecuación (2.4) queda:

$$b^w(\tau) = b^w(\pi) - \frac{2}{\pi} \mathcal{G}_w(\tau) \operatorname{sign}(\mathcal{D}(\tau) \cdot w) \quad (2.7)$$

Ahora calculamos  $b(\pi)$ :

$$\mathcal{D}(\pi) \cdot w = - \sum_{i \in \mathcal{E}_a} w_i^\alpha \quad (2.8)$$

$$\mathcal{G}_w(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \frac{w_j^\beta}{j} \quad (2.9)$$

Entonces

$$x_m^w(\pi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \frac{w_j^\beta}{j} \quad (2.10)$$

**Theorem 2.1** *Entonces dados una trayectoria  $\beta(\tau) | \tau \in [0, \pi/2]$  generada mediante una estrategia  $u(\tau)$  y una dirección  $w$ , si la proyección  $x^w(\tau) = (x(\tau), w)$  es siempre tal que  $x^w(\tau) < x_m^w(\tau) | \forall \tau \in [0, \pi]$  entonces  $x^w(\pi) \leq 0$ . Es decir la proyección de  $x(\tau)$  puede alcanzar el origen de coordenadas en tiempo  $\tau = \pi$  e incluso ir más allá del origen.*

Final

$$b^w(\tau) = x_m^w(\pi) - \frac{2}{\pi} \left[ \mathcal{G}_w(\tau) \operatorname{sign}(\mathcal{D}(\tau) \cdot w) \right] \quad (2.11)$$

$$\mathcal{P}_w = \{x(t) \in \mathbb{R}^{N_a+N_b} | w \cdot x(t) + x_m^w(\tau) = 0\} \quad (2.12)$$

### 3 Obtención de estrategias $u(\tau)$

Dado una condición inicial  $x(\tau)$ , como podríamos decir si es controlable o no?

### 4 Numerical Simulations

### 5 Conclusions

### A Primitiva

$$\int |f(x)|dx = -F(x)\operatorname{sign}(f(x)) \quad (A.1)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (A.2)$$

clickar en el código latex par entrar en el link de wolframalpha <https://www.wolframalpha.com/input/?i=Int+abs%28a+sin%28+j+x+%29+++%2B+b+sin%28+k+x%29%29>

### Acknowledgements

This work has been partially funded by the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon 2020 research and innovation program (grant agreement No. 694126-DyCon).

### References

[Rodríguez et al., 2002] Rodríguez, J., Lai, J. S., and Peng, F. Z. (2002). Multilevel inverters: a survey of topologies, controls, and applications. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 49(4):724–738.