Selective Harmonic Elimination via Optimal Control Theory

Jesús Oroya
Chair of Computational Mathematics

January 8, 2021

Abstract

En este documento formularemos el problema de *Selective Harmonic Elimination pulse-width modulation*(SHE) como el problema de control óptimo, con el fin de encontrar soluciones de ondas cuadradas sin prefijar el número de ángulos de conmutación. Esta nueva perspectiva nos permite realizar un análisis sobre la continuidad de soluciones.

Contents

1 Introducción

Selective Harmonic Elimination (SHE) [1] es una metodología de modulación de señal que permite generar señales escalón con el espectro armónico deseado. Es decir, nos permite generar una función $u(\tau)$ definida en $[0, 2\pi)$ cuyos valores en todo el intervalo solo puedan estar contenida en un conjunto finito de valores reales $\mathcal{U}$, y que además, tenga ciertos coeficientes de Fourier objetivo. Nos centraremos a funciones que cumplan simetría de media onda, es decir: $u(\tau+\pi) = -u(\tau) \mid \forall\tau \in [0, \pi)$. De esta manera la función $u(\tau)$ queda determinada por sus valores en el intervalo $[0, \pi)$.

Por lo general este problema se plantea como la búsqueda de una secuencia S de números contenidos en $\mathcal{U}$ que nos defina qué valores tomará la función $u(\tau)$ y en que orden [2]. De manera que dada la secuencia S podemos centrarnos en buscar las localizaciones concretas donde se producen los cambios de valor de la función. Por otra parte, las localizaciones de cambio dado la forma de onda $\mathcal{S}$ son llamados ángulos de conmutación [3, 2, 4]; de modo que procederemos a llamarlos de la misma manera. La búsqueda de las localizaciones dada la secuencia S se puede abordar como un problema de minimización donde las variables son ángulos de conmutación mientras que el funcional de coste es la suma de la diferencia al cuadrado de los coeficientes de Fourier obtenidos y los deseados.

La búsqueda de la secuencia óptima no es evidente, este es un problema de combinatoria de los elementos de $\mathcal{U}$. Dado que *a priori* no conocemos la cardinalidad de la secuencia $\mathcal{S}$, es decir el número de cambios necesarios, el problema parece tener solo la solución de fijar el número de cambios de contar todas las posibles combinaciones para luego resolver un problema de optimización asociada a cada uno de ellas. Teniendo en cuenta que el número de posibles secuencias depende de las cardinalidades del conjunto de admisible $\mathcal{U}$ y de la secuencia S, de la siguiente manera: $|\mathcal{U}|^{|S|}$; es evidente que la complejidad de la búsqueda escala rápidamente con el tamaño de la secuencia. Este problema ha sido estudiado y abordado en [3], donde mediante tranformaciones algebráicas logran transformar el problema a un sistema de polinomos que contiene todas las posibles formas de ondas para un número fijo elementos de la secuencia S y para un conjunto $\mathcal{U}$, sin embargo el número de posibles conmutaciones es prefijado.

Por otra parte, es importante notar que la metodología SHE deberá responder a tiempo real para distintos coeficientes de Fourier objetivo con una latencia de GHz. Esto hace imposible la obtención de soluciones a tiempo real mediante optimización, por lo que es necesario el pre-calcular soluciones para que luego puedan ser interpoladas. Sin embargo es bien conocido que fijado una secuencia S la continuidad de las localizaciones de cambio con respecto a una variación continua de los coeficientes de Fourier objetivo es compleja. En la mayoría de los casos no se puede encontrar una solución continua para un intervalo largo, si no que es necesario cambiar la forma de onda S según vamos tomando regiones de soluciones [3, 5]. Esto hace complejo la interpolación de soluciones y la búsqueda de estas.

In this document we will present the SHE problem as an optimal control problem, where the optimization variable is the signal $u(\tau)$ defined in the entire interval $[0, \pi)$. Thus we will describe how in the problem of the Fourier coefficients of the function $u(\tau)$ they can be seen as the final state of a system controlled by $u(\tau)$. So the optimization is performed among all the possible functions that satisfy $|u(\tau)| < 1$ that can control the final state at the desired Fourier coefficients. Then we will show how to design a control problem so that the solution is a step function.

Estructuraremos este documento de la siguiente manera: en la sección (1) Presentaremos la aproximación clasica de problema introduciendo conceptos básicos y el problema de optimización mostrando sus ventajas y desventajas; en la sección (2) Presentaremos el problema -she como un sistema dinámico de control; en la sección (3) Presentaremos el problema de control óptimo que nos permite obtener soluciones al problema; en la sección (4) Presentaremos experimentos numéricos para distintos niveles; y por último en la sección (5) mostraremos las conclusiones.

2 Classical approach

Next, we will mention the classic formulation of the SHE problem, mentioning its strengths and limitations in order to emphasize the advantages of considering it as a control problem. It is known that the description of the function $u(\tau)$ is determined with its values in the interval $\tau \in [0, \pi)$. In this way, we will refer to a function $\{u(\tau) | \tau \in [0, \pi)\}$ whose Fourier series expansion can be written as:

$$u(\tau) = \sum_{i \in odd} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in odd} b_j \sin(j\tau) \tag{2.1}$$

Wher a_i and b_j are:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \ odd \tag{2.2}$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \ odd \tag{2.3}$$

So the SHE problem can be formulated more precisely as:

Problem 2.1 (SHE) Given two sets of odd numbers $\mathcal{E}_a$ and $\mathcal{E}_b$ with cardinalities $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectively, and given the target vectors $\boldsymbol{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ and $\boldsymbol{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$, we look for a function $\{u(\tau) \mid \tau \in [0, \pi)\}$ such that $u(\tau)$ can only take the values within $\mathcal{U}$ a finite subset of the interval $[-1, 1]$. Also whose Fourier coefficients satisfy: $a_i = (\boldsymbol{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$ and $b_j = (\boldsymbol{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$.

Dadod que la función $u(\tau)$ es una función definida a trozos, la aproximación clásica trata utilizar esta propiedad para simplificar el problema. De manera que, la función de $u(\tau)$ puede ser descrita mediante los ángulos de cambio y los valores constantes que tomar en cada sección. A continuación definimos estos dos elementos:

Definition 2.1 (Switching angles) Given a function $u : [0, \pi] \to \mathcal{U}$ the switching locations are the values of τ where the function $u(\tau)$ changes its value discontinuously. We will denote the commutation angles as $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_M, \phi_{M+1}\}$ where we have taken $\phi_0 = 0$ and $\phi_{M+1} = \pi$,

Definition 2.2 (Waveform) Given $\mathcal{U}$ a finite subset of $[-1, 1]$ we will call a waveform a finite set $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{M+1}\}$ elements of $\mathcal{U}$ with repetition.

Then a waveform S indicates the values that the function will take and in what order within the interval $[0, \pi)$, while the switching locations $\boldsymbol{\phi}$ indicates the switching locations. Considering these two elements we can rewrite the Fourier coefficients as:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\tau) \cos(i\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{M+1} \int_{\phi_{k-1}}^{\phi_k} s_k \cos(i\tau) d\tau = \frac{2}{i\pi} \sum_{k=1}^{M+1} s_k \sin(i\tau) \Big|_{\phi_{k-1}}^{\phi_k} \tag{2.4}$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\tau) \sin(j\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{M+1} \int_{\phi_{k-1}}^{\phi_k} s_k \sin(j\tau) d\tau = \frac{2}{j\pi} \sum_{k=1}^{M+1} s_k \cos(j\tau) \Big|_{\phi_{k-1}}^{\phi_k} \tag{2.5}$$

So that:

$$a_i(\boldsymbol{\phi}) = +\frac{2}{i\pi}\sum_{k=1}^{M+1} s_k\Big[\sin(i\phi_k) - \sin(i\phi_{k-1})\Big] \tag{2.6}$$

$$b_j(\boldsymbol{\phi}) = -\frac{2}{j\pi}\sum_{k=1}^{M+1} s_k\Big[\cos(j\phi_k) - \cos(j\phi_{k-1})\Big] \tag{2.7}$$

De esta manera podemos reformular el problema (2.1) de la siguiente manera:

Problem 2.2 (optimization for SHE) Then given a waveform S we look for the locations of change by means of the following minimization problem:

$$\min_{\boldsymbol{\phi}\in[0,\pi]^M}\left[\sum_{i\in\mathcal{E}_a}\|a_T^i - a_i(\boldsymbol{\phi})\|^2 + \sum_{j\in\mathcal{E}_b}\|b_T^j - b_j(\boldsymbol{\phi})\|^2\right] \tag{2.8}$$

$$\text{suject to:}$$

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{M-1} < \phi_M < \pi \tag{2.9}$$

De manera, que el problema SHE es un problema de minimización con restricciones que puede resolverse mediante técnicas conocidas. Dado que es un problema con múltiples mínimos se deberá resolver mediante optimizadores globales lo que puede hacer costosa la búsqueda.

3 Selective Harmonic Elimination as dynamical system

Inspired by the continuous nature of the optimization variable $u(\tau)$ we propose in this document the formulation from the optimal control. In this way we avoid the choice of the waveform, so that the optimization problem chooses the most convenient in each case. So we look for $\{u(\tau) \in \mathcal{U} \mid \forall\tau \in [0,\pi)]\}$ that has the desired Fourier coefficients. We will use the fundamental theorem of differential calculus to rewrite the expression of the Fourier coefficients (2.2) and (2.3) as the evolution of a dynamical system. That is to say:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau u(\tau)\cos(i\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases}\dot{\alpha}_i(\tau) & = \frac{2}{\pi}u(\tau)\cos(i\tau)\\ \alpha_i(0) & = 0\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau u(\tau)\sin(j\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases}\dot{\beta}_j(\tau) & = \frac{2}{\pi}u(\tau)\sin(j\tau)\\ \beta_j(0) & = 0\end{cases} \tag{3.2}$$

The evolution of the dynamical systems $\alpha_i(\tau)$ and $\beta_j(\tau)$ from the time $\tau = 0$ to $\tau = \pi$ gives us the coefficients a_i y b_j. We introduce notation to refer to vectors $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{E}_a}$ and $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathcal{E}_b}$. In this way, the general SHE problem (2.1) can be formulated as a control problem of a dynamic system where $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$ and $\boldsymbol{\beta}(\tau)$ are the states of the system and where $u(\tau)$ is the control variable, and whose objective will be to bring the states from the origin of coordinates to the objective vectors $\boldsymbol{a}_T$ and $\boldsymbol{b}_T$ in time $\tau = \pi$. In order to obtain a compact expression of the problem that simplifies our understanding of it, we will introduce notation. So if we consider a problem with sets of odd numbers:

$$\mathcal{E}_a = \{e_a^1, e_a^2, e_a^3, \ldots, e_a^{N_a}\} \qquad \mathcal{E}_b = \{e_b^1, e_b^2, e_b^3, \ldots, e_b^{N_b}\} \tag{3.3}$$

then we can define the vectors $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \mid \forall\tau \in (0,\pi]$ such that:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^\alpha(\tau) = \frac{2}{\pi}\begin{bmatrix} \cos(e_a^1\tau) \\ \cos(e_a^2\tau) \\ \ldots \\ \cos(e_a^{N_a}\tau) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mathcal{D}}^\beta(\tau) = \frac{2}{\pi}\begin{bmatrix} \sin(e_b^1\tau) \\ \sin(e_b^2\tau) \\ \ldots \\ \sin(e_b^{N_b}\tau) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

So the dynamical system can be written as:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\tau) = \boldsymbol{\mathcal{D}}^\alpha(\tau)u(\tau) & \tau \in [0,\pi) \\ \boldsymbol{\alpha}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}(\tau) = \boldsymbol{\mathcal{D}}^\beta(\tau)u(\tau) & \tau \in [0,\pi) \\ \boldsymbol{\beta}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Compressing the notation even more we can call the total state of the system $\boldsymbol{x}(\tau)$ to the concatenation of the states $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$ and $\boldsymbol{\beta}(\tau)$ so that:

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(\tau) \\ \boldsymbol{\beta}(\tau) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_T \\ \boldsymbol{b}_T \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}^\alpha(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}^\beta(\tau) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

So for a pair of sets $\mathcal{E}_a$ and $\mathcal{E}_b$ we have the following associated dynamical system:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)u(\tau) & \tau \in [0,\pi) \\ \boldsymbol{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Then we look for a function $u(\tau)$ such that it leads the dynamical system to the point $\boldsymbol{x}_T$, that is, the final state $\boldsymbol{x}(\pi)$ is $\boldsymbol{x}_T$. Debido a que en la teoría de control es más típico llevar el sistema dinámico al origen de coordenadas desde una condición de initical no nula, realizaremos el siguiente cambio de variables: $\boldsymbol{x}'(\tau) = \boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{x}_T$. Haciendo un abuso de notación $\boldsymbol{x}'(\tau) \to \boldsymbol{x}(\tau)$ nuestro sistema dinámico se puede escribir como:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = -\boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)u(\tau) & \tau \in [0,\pi) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_T \end{cases} \tag{3.8}$$

De manera que si el sistema dinámico en tiempo $\tau = \pi$ se encuentra en el origen de coordenadas, entonces los coeficientes de Fourier del control que $u(\tau)$ que le ha llevado allí son los los asociados a la condición inicial $\boldsymbol{x}_T$.

4 Optimal Control for SHE

Since the SHE problem is equivalent to controlling a dynamic system from the origin of coordinates to a specific point, we must formulate a control problem that solves this task but also complies with the restrictions on the values that the control can take. It is necessary to set a finite subset $\mathcal{U}$ of the interval $[-1,1]$, the optimal control is such that it can only take the values allowed in the discretization. In other words, the control problem is:

Problem 4.1 (OCP for SHE) Given two sets of odd numbers $\mathcal{E}_a$ and $\mathcal{E}_b$ and given the target vector $\boldsymbol{x}_T \in \mathbb{R}^{N_a+N_b}$, also given a set $\mathcal{U}$ of admissible controls, we look for the function $u(\tau) \mid \tau \in [0, \pi)$ such that:

$$\min_{u(\tau)\in\mathcal{U}} \frac{1}{2}||\boldsymbol{x}(\pi)||^2 \tag{4.1}$$

$$\text{suject to:}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = -\boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)u(\tau) & \tau \in [0, \pi) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_T \end{cases} \tag{4.2}$$

The solution of this control problem is complex due to the restriction on the admissible control values. In order to obtain a problem that can be solved by classical control theory we can formulate the following control problem:

Problem 4.2 (Regularized OCP for SHE) Given two sets of odd numbers $\mathcal{E}_a$ and $\mathcal{E}_b$ and given the target vector $\boldsymbol{x}_T \in \mathbb{R}^{N_a+N_b}$, we look for the function $|u(\tau)| < 1 \mid \tau \in [0, \pi)$ such that:

$$\min_{|u(\tau)|<1} \left[\frac{1}{2}||\boldsymbol{x}(\pi)||^2 + \epsilon \int_0^\pi \mathcal{L}(u(\tau))d\tau\right] \tag{4.3}$$

$$\text{suject to:}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = -\boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)u(\tau) & \tau \in [0, \pi) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_T \end{cases} \tag{4.4}$$

Where we will choose $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the optimal control u^* only takes values in the discretization $\mathcal{U}$ of the interval $[-1.1]$. Furthermore, the parameter ϵ should be small so that the solution minimizes the distance from the final state and the target. Next we will study the optimality conditions of the problem, for a general $\mathcal{L}$ function, and then specify how $\mathcal{L}$ should be so that the optimal control u^* only takes the allowed values in $\mathcal{U}$.

4.1 Optimality conditions of problem (4.2)

To write the optimility conditions of the problem we will use the principle of the Pontryagin minimum [6, Chapter 2.7]. For them it is necessary to define the Hamiltonian of the system, which in this case is:

$$H(u, \boldsymbol{p}, \tau) = \epsilon\mathcal{L}(u) - [\boldsymbol{p}^T(\tau) \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)]u(\tau) \tag{4.5}$$

Where the variable $\boldsymbol{p}(\tau)$ called adjoint state is introduced, which is associated with the restriction imposed by the system. Este tiene la misma dimensión del estado, de manera que $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{N_a+N_b}$. From the Hamiltonian, the following optimality conditions can be written:

1. **Final condition of the adjoint**: This optimiality condition is obtained from the cost in the final time $\tau = \pi$ of the control problem in this case $\Psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(\pi) - \boldsymbol{x}_T\|^2$.

$$\boldsymbol{p}(\pi) = \nabla_{\boldsymbol{x}}\Psi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}(\pi) - \boldsymbol{x}_T) \tag{4.6}$$

2. **Adjoint evolution equation**:

$$\dot{\boldsymbol{p}}(\tau) = -\nabla_x H(u(\tau), \boldsymbol{p}(\tau), \tau) = 0 \tag{4.7}$$

From where it can be deduced that $\boldsymbol{p}(\tau) = \text{cte}$ so that $\boldsymbol{p}(\tau) = \boldsymbol{x}(\pi) - \boldsymbol{x}_T \mid \forall \tau \in [0, \pi)$ so from now on we will refer to it simply as $\boldsymbol{p}$, noting that it is invariant in time.

3. **Optimal control shape**: We known that $u^* = \arg\min_{|u|<1} H(\tau, \boldsymbol{p}^*, u)$, so in this case we can write:

$$u^*(\tau) = \underset{|u|<1}{\arg\min} \left[\epsilon \mathcal{L}(u(\tau)) - [\boldsymbol{p}^{*T} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)] u(\tau)\right] \tag{4.8}$$

Therefore, this optimality condition reduces to the optimization of a function in a variable within the interval $[-1, 1]$.

4.2 Piecewise linear penalization

En esta subsección presentaremos como diseñar el término de penalización $\mathcal{L}(u)$ para que el control óptimo en cualquier caso este contenida en $\mathcal{U}$.

Definition 4.1 we build a function $\mathcal{H}_m : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ such that:

$$\mathcal{H}_m(u) = \epsilon \mathcal{L}(u) - mu \mid \forall m \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

Donde hemos remplazado el término $[\boldsymbol{p}^{*T} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)]$ por un parámetro m que puede variar en todo la recta real. Es decir, el problema para diseñar un problema de control óptimo que solo pueda tomar valores en $\mathcal{U}$ se reduce a diseñar una función unidimensional com parámertro m cuyos mínimos sean los elementos de $\mathcal{U}$ para cualquier valor de m.

De manera más concreta podemos elegir la interpolación afín de una parábola $\mathcal{L} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ como término de penalización. Es decir:

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} \left[\frac{(u_{k+1}^2 - u_k^2)}{(u_{k+1} - u_k)}(u - u_k) + u_k^2\right] & \text{if } u \in [u_k, u_{k+1}[\\ 1 & \text{if } u = u_{N_u} \end{cases} \tag{4.10}$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, N_u - 1\}$$

Esto se puede simplificar de manera que

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} \left[(u_{k+1} + u_k)(u - u_k) + u_k^2\right] & \text{if } u \in [u_k, u_{k+1}[\\ 1 & \text{if } u = u_{N_u} \end{cases} \tag{4.11}$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, N_u - 1\}$$

Entonces el Hamiltoniano queda como:

$$\mathcal{H}_m(u) = \begin{cases} \epsilon\left[(u_{k+1} + u_k)(u - u_k) + u_k^2\right] - mu & \text{if } u \in [u_k, u_{k+1}[\\ \epsilon - mu & \text{if } u = u_{N_u} \end{cases} \tag{4.12}$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, N_u - 1\}$$

De manera que para calcular el mínimo de $\mathcal{H}_m(u)$ deberemos considerar que esta función no es diferenciable por lo que la condicion de optimizalidad no puede realizarse con la difereciación típica sino con la subdiferencial.

Entonces calulremos la subdiferecial $\partial\mathcal{H}_m$ todo

$$\partial\mathcal{H}_m(u) = \begin{cases} \{\epsilon(u_1+u_2)-m\} & \text{if } u = u_1 \\ \{\epsilon(u_k+u_{k+1})-m\} & \text{if } u \in]u_k, u_{k+1}[\quad \dagger \\ [\epsilon(u_k+u_{k-1})-m\ ,\ \epsilon(u_{k+1}+u_k)-m] & \text{if } u = u_k \quad \dagger\,\dagger \\ \{\epsilon(u_{N_u}+u_{N_u-1})-m\} & \text{if } u = u_{N_u} \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\dagger\ \forall k \in \{1,\ldots,N_u-1\} \qquad \dagger\,\dagger\ \forall k \in \{2,\ldots,N_u-1\}$$

Entonces dado $m \in \mathbb{R}$ busamos $u \in [-1,1]$ que minimiza $\mathcal{H}_m(u)$. Es necesario comprobar que cero perteneca al subdiferecial $\partial\mathcal{H}_m(u)$

- **Case 1:** $m \leq \epsilon(u_1+u_2)$: Dado que m es menor que el menor de todos los subdiferenciales entonces el cero no se encuentra dentro de ninguna de los intervalos definidos para la subdiferencial. De manera que el mínimo esta en un extremo

$$\arg\min_{|u|<1} \mathcal{H}_m(u) = u_1 \tag{4.14}$$

- **Case 2:** $m = \epsilon(u_{k+1}+u_k)$: Teniendo en cuenta que $\forall k \in \{2,\ldots,N_u-1\}$.

$$\arg\min_{|u|<1} \mathcal{H}_m(u) = [u_k, u_{k+1}[\tag{4.15}$$

- **Case 3:** $\epsilon(u_k+u_{k-1}) < m < \epsilon(u_{k+1}+u_k)$: Teniendo en cuenta que $\forall k \in \{2,\ldots,N_u-1\}$.

$$\arg\min_{|u|<1} \mathcal{H}_m(u) = u_k \tag{4.16}$$

- **Case 4:** $m > \epsilon(u_{N_u}+u_{N_u-1})$:

$$\arg\min_{|u|<1} \mathcal{H}_m(u) = u_{N_u} \tag{4.17}$$

Es decir solo cuando $m = \epsilon(u_{k+1}+u_k)$ los mínimos del Hamiltoniano esta dentro de un intervalo, para otros valores de m los mínimos del Hamiltoniano están contenidos en $\mathcal{U}$. Así que ante una variación continua de m el caso 2 solo ocurrirá de manera puntal. Recordando en el problema de control óptimo $m(\tau) = [\boldsymbol{p}^T(\tau)\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau)]$, podemos notar que el caso 2 corresponde a los instantes τ de cambio de valor.

5 Experimentos numéricos

5.1 Smooth approxiation of piecewise linear penalization

Con el fin de utilizar softwre de optimización para resolver el problema de control óptimo planteado aproximaremos penalización lineal a trozos mediante con ayuda de función escalón de Heaviside h

y su aproximación suave h^η definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h^\eta(x) = (1 + \tanh(\eta x))/2 \\ \eta \to \infty \end{cases} \tag{5.1}$$

Con ayuda de h definimos la función ventana suave como

$$\Pi^\eta_{[a,b]}(x) = -1 + h^\eta(x-a) + h^\eta(-x+b) \tag{5.2}$$

De manera simplificada:

$$\Pi^\eta_{[a,b]}(x) = \frac{\tanh[\eta(x-a)] + \tanh[\eta(b-x)]}{2} \tag{5.3}$$

Para ello primero escribiremos (4.10) como:

$$\mathcal{L}^\eta(u) = \sum_{k=1}^{N_u-1} \big[(u_{k+1} + u_k)(u - u_k) + u_k^2\big]\Pi^\eta_{[u_k,u_{k+1}]}(u) \tag{5.4}$$

De manera que cuando $\eta \to \infty$ entonces $\mathcal{L}^\eta \to \mathcal{L}$

5.2 Numerical solution of OCP-SHE

To solve the optimal control problem (4.2), we use a direct method. If we consider a partition $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_T\}$ of interval $[0,T]$, we can represent a function $\{u(\tau) \mid \tau \in [0,T]\}$ as a vector $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^T$ where component $f_t = u(\tau_t)$. Then the optimal control problem (4.1) can be written as optimization problem with variable $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^T$. This problem is a nonlinear programming, for this we use CasADi software to solve. Entonces, dado una partición del intervalo $[0,\pi)$ podemos reformular el problema (4.1) como el siguiente problema en tiempo discreto:

Problem 5.1 (OCP numérico) Dados dos conjuntos de números impares $\mathcal{E}_a$ and $\mathcal{E}_b$ con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectivamente , dados los vectores objetivos $\boldsymbol{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\boldsymbol{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ y una partition $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_T\}$ of interval $[0,\pi)$. We search a vector $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^T$ that minimize the following function:

$$\min_{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^T} \left[||\boldsymbol{x}^T||\ ^2 + \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}^\eta(u_t)\Delta\tau_t \right] \tag{5.5}$$

$$\text{suject to:}$$

$$i \in \mathcal{E}_a \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t - \Delta\tau_t \boldsymbol{\mathcal{D}}(\tau_t) u_t \\ \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}_T \end{cases}$$

5.3 Resultados

Cabe mencionar que todas las simulaciones se han realizado con un ordenador de mesa con $8Gb$ de ram, y el tiempo de ejecución para la búsqueda de soluciones dado un vector objetivo es del orden del segundo. A continuación listaremos cada uno de los resultados numéricos obtenidos:

1. **OCP con simetría de cuarto de onda**: Consideraremos el problema con un conjunto de números impares $\mathcal{E}_b = \{1, 5\}$ con una discretización del intervalo $[0, \pi/2]$ de $T = 200$. Mostramos las soluciones para los vectores objetivo $b_T^1 = \{(-0.4, -0.3, \ldots, 0.3, 0.4)\}$ manteniendo $b_T^5 = 0$ para todos los casos. Mostramos las trayectorias óptimas obtenidas en la figura (**??**), donde se puede ver una continuidad en las soluciones con respecto a vector objetivo.

2. **OCP con simetría de cuarto onda para un intervalo del** b_1: Para este ejemplo consideramos el siguiente conjunto de números impares: $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$. Ademas consideramos el vector objetivo $\boldsymbol{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$, donde $m_a \in [-1, 1]$ es un parámetro. with three penalization terms: $\mathcal{L}(u) = -f$, $\mathcal{L}(u) = +f$ and $\mathcal{L}(u) = -f^2$ obtained by direct method with uniform partition of interval $[0, \pi/2]$ with $T = 400$ and penalization parameter $\epsilon = 10^{-5}$. Para cada uno de los términos de penalización utilizados la distancia entre los coeficientes de Fourier se encuentra en el orden de 10^{-4}. Sin embargo, cuando el término de penalización es $\mathcal{L}(u) = -f^2$ la solución no presenta continudad con respecto al vector objetivo. Por otra parte, es importante mencionar que las soluciones para los términos de penalización $\mathcal{L}(u) = -f$ y $\mathcal{L}(u) = f$ cumplen una simetría por lo que invirtiendo las soluciones con respecto al origen y invirtiendo el signo de las soluciones se puede ver que ambas soluciones son la misma.

3. **SHE para tres niveles**: Podemos ver que en el caso en el que el control $u(\tau)$ solo pueda tomar valores entre $[0, 1]$ obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo $[0, 2\pi]$ gracias a la simetría de cuarto de onda. Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones $|u(\tau)| < 1$ por $\{0 < u(\tau) < 1\}$. Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo soluciones para los mismo términos de penalización obteniendo la figura (**??**). Allí se muestra la continudad de las soluciones y que estas se encuentran en el orden de 10^{-4}.

4. **Cambio en el número de conmunationes**: Gracias a la formulación de control óptimo para el problema SHE podemos variar el número de ángulos de conmuntación. Este es el cado del siguientes ejemplo, donde hemos tomado como conjunto de números pares $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 9, 13, 17\}$, además consideramos el vector objetivo $\boldsymbol{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$, donde $m_a \in [0, 1]$ es un parámetro. En este problema hemos utilizado una penalización tipo $\mathcal{L} = f$ con un parémetro de penalización $\epsilon = 10^{-4}$. Podemos ver en la figura (**??**) como el problema de control óptimo es versátil y es capaz de mover entre varios conjuntos de soluciones.

5. **OCP para SHE con simetría de media onda**: Se ha relizado el caso de control óptimo de media onda con con $\mathcal{E}_a = \{1, 3, 5\}$ y $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 5, 9\}$, donde $\boldsymbol{a}_T = [m_a, 0, 0]$, $\boldsymbol{b}_T = [m_a, m_a, 0, 0]$ y $m_a \in [-0.6, 0.6]$. Se ha elegido la penalización $L(u) = +f$

6 Conclusiones

Se ha presentado el problema SHE desde un punto de vista de la teoría de control. Esta metodología es efectiva para llega a presiciones $10^{-4} - 10^{-5}$ en la distancia al vector objetivo. Sin embargo en comparación con metodologías donde el número de conmutaciones es prefijado, nuestra aproximación es más costosa. Sin enbargo, el control óptimo asegura soluciones en todo el rango de indice de modulación, aunque el número de soluciones o la localización de estas cambien abruptamente.

Este planteamiento del problema SHE enlaza la teoría de control con la eliminación de harmónicos. De esta manera el problema SHE se puede resolver mediante herramientras clásicas.

References

[1] José Rodríguez, Jih Sheng Lai, and Fang Zheng Peng. Multilevel inverters: A survey of topologies, controls, and applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(4):724–738, 2002.

[2] Georgios S. Konstantinou and Vassilios G. Agelidis. Bipolar switching waveform: Novel solution sets to the selective harmonic elimination problem. *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology*, pages 696–701, 2010.

[3] Kehu Yang, Zhibao Yuan, Ruyi Yuan, Wensheng Yu, Jiaxin Yuan, and Jin Wang. A Groebner Bases Theory-Based Method for Selective Harmonic Elimination. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 30(12):6581–6592, 2015.

[4] Jian Sun, Stephan Beineke, and Horst Grotstollen. Optimal PWM based on real-time solution of harmonic elimination equations. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11(4):612–621, 1996.

[5] Kehu Yang, Qi Zhang, Jianjun Zhang, Ruyi Yuan, Qiang Guan, Wensheng Yu, and Jin Wang. Unified Selective Harmonic Elimination for Multilevel Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 32(2):1579–1590, 2017.

[6] Arthur Earl Bryson. *Applied optimal control: optimization, estimation and control.* CRC Press, 1975.