

# Selective Harmonic Elimination via Optimal Control Theory

Jesús Oroya  
Chair of Computational Mathematics

December 4, 2020

## Abstract

En este documento formularemos el problema de *Selective Harmonic Elimination pulse-width modulation* (SHE-PWM) como el problema de control óptimo, con el fin de encontrar soluciones de ondas cuadradas sin prefijar el número de ángulos de conmutación. Esta nueva perspectiva nos permite realizar un análisis sobre la continuidad de soluciones.

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Formulaciones clásicas</b>	<b>2</b>
2.1	Formulación clásica para dos y tres niveles . . . . .	3
2.2	Formulación clásica para multi-nivel . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Selective Harmonic Elimination as dynamical system</b>	<b>4</b>
3.1	Notación . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Control óptimo para SHE de dos y tres niveles</b>	<b>5</b>
4.1	Condiciones para la obtención de controles <i>bang-bang</i> . . . . .	6
4.2	OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Control óptimo para SHE multi-nivel</b>	<b>8</b>
5.1	Condiciones de Optimalidad para obtención de control digital . . . . .	8
5.2	OC SHE multi-nivel con simetría de cuarto de onda . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Experimentos numéricos</b>	<b>8</b>
6.1	Numerical solution of OCP-SHE . . . . .	9
6.2	Resultados . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>10</b>

# 1 Introducción

El problema *Selective Harmonic Elimination*(SHE) es un método de modulación que permite generar señales escalón<sup>1</sup> con un espectro armónico deseado. Es decir, dados algunos coeficientes de Fourier, el problema SHE busca la forma de onda escalón  $\{f(\tau) | \tau \in (0, 2\pi]\}$  cuyos coeficientes de Fourier sean los requeridos. En este contexto si el número cambios de la función escalón es prefijado el problema *SHE* se puede formular como un problema de optimización donde las variables a optimizar son las localizaciones de conmutación y donde la función de coste es la distancia euclídea entre coeficientes de la función buscada y los coeficientes dados.

Aunque el problema *SHE* con número de ángulos de conmutación prefijado es fácilmente resoluble existen varias dificultades en su aplicación en tiempo real. No es posible calcular los ángulos de conmutación mediante una optimización a tiempo real es por ello que se precaculan las soluciones para distintos valores de coeficientes de Fourier objetivos. Cuando una solución no precaculada es requerida se realizan interpolaciones con ayuda de las demás soluciones para obtenerla. Sin embargo es conocido que el espacio de soluciones en los ángulos de conmutación es discontinuo con respecto a una variación continua de coeficientes de Fourier objetivo. Este es motivo por la que la interpolación de soluciones es compleja y en algunas ocasiones imposible.

La naturaleza sobre la aparición y el desvanecimiento de las soluciones mediante una variación continua de los coeficientes de Fourier, es desconocida. Por medio del cálculo *offline* de las soluciones se sabe que mientras más ángulos de conmutación es considerado más grande es la región continua de soluciones. Esto nos indica que el número de ángulos de conmutación necesarios a lo largo de una región del espacio de soluciones podría cambiar de manera que esta formulación es poco flexible para una descripción continua de las soluciones.

En este documento presentaremos el problema SHE como un problema de control óptimo, donde la variable de optimización es la señal  $f(\tau)$  definida en todo el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Así pues describiremos como en el problema SHE los coeficientes de Fourier de la función  $f(\tau)$  se pueden ver como el estado final de un sistema controlado por  $f(\tau)$ . De manera que la optimización se realiza entre todas las posibles funciones que cumplan  $|f(\tau)| < 1$  que puedan controlar el estado final a los coeficientes de Fourier deseados. Luego mostraremos como diseñar un problema de control de manera que la solución sea una función escalón. Por último, mostraremos soluciones del problema *SHE* mediante la formulación del control óptimo viendo como esta metodología es versátil ante la variación del número de conmutaciones.

## 2 Formulaciones clásicas

A continuación mencionaremos trabajos relacionados con el problema SHE mencionando su fortalezas y limitaciones con el fin de enfatizar las ventajas de considerar el problema SHE como un problema de control. Entonces como hemos mencionado el problema SHE es típicamente formulado como problema de optimización sobre las localizaciones de los ángulos de conmutación, sin embargo en el caso en el que la función escalón pueda tomar más de dos niveles no solo deberemos indicar

---

<sup>1</sup>Cabe remarcar que las señales escalón de las que hablamos son funciones discontinuas definidas en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y que solo pueden tomar valores en un conjunto de valores finito y pequeño. Como por ejemplo las señales escalón bi-nivel serán las funciones que solo pueden tomar los valores  $\{-1, 1\}$

en que lugar se realiza la conmutación sino también qué forma de onda estamos siguiendo. Es por ello que las formulaciones de convertidores de dos y tres niveles están claramente diferenciadas por lo que continuaremos su descripción en secciones separadas.

El problema *Selective Harmonic Elimination*(SHE) consiste en la búsqueda de una función  $f(\tau)$  definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , fijados unos pocos coeficientes de Fourier. Esta función  $f(\tau)$  solo podrá tomar dos posibles valores  $\{-1, 1\}$ . Nos centraremos en concreto en las funciones  $f(\tau)$  con simetría de media onda, es decir funciones tal que  $f(\tau) = -f(\tau + \pi)$ , por lo que la descripción de la función  $f(\tau)$  queda determinada con sus valores en el intervalo  $\tau \in [0, \pi]$ . De esta forma, nos referiremos a una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$  cuyo desarrollo en serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(\tau) = \sum_{i \in \text{odd}} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in \text{odd}} b_j \sin(j\tau) \quad (2.1)$$

Donde  $a_i$  y  $b_j$  son:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \text{ odd} \quad (2.2)$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ odd} \quad (2.3)$$

A continuación introduciremos los problemas SHE para dos niveles, tres niveles y multi-nivel explicando la metodología que se suele aplicar para la solución de estos casos.

## 2.1 Formulación clásica para dos y tres niveles

Entonces podemos formular el problema SHE para dos niveles de la siguiente manera:

**Problem 2.1 (SHE para dos niveles)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, y dado los vectores objetivo  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)\}$  tal que  $f(\tau)$  solo pueda tomar los valores  $\{-1, 1\}$  y cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:  $a_i = (\mathbf{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $b_j = (\mathbf{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$ .

Además en el caso en el que consideremos que  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$  puede tomar valores en el conjunto  $\{1, 0\}$  obtenemos tres niveles en la función definida en el intervalo total  $[0, 2\pi]$ . Esto se debe a la simetría de media onda. De esta manera podemos formular el problema de tres niveles de manera equivalente como:

**Problem 2.2 (SHE para tres niveles)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, y dado los vectores objetivo  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)\}$  tal que  $f(\tau)$  solo pueda tomar los valores  $\{0, 1\}$  y cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:  $a_i = (\mathbf{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $b_j = (\mathbf{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$ .

## 2.2 Formulación clásica para multi-nivel

Por último, existe la posibilidad de considerar un conjunto discreto como posibles valores que pueda tomar la función  $f(\tau)$  de esta manera si llamamos  $\Omega_f$  al conjunto de valores discretos que puede tomar  $f(\tau)$  podemos definir el problema de SHE multi-nivel de la siguiente manera.

**Problem 2.3 (SHE multi-nivel)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, y dado los vectores objetivo  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)\}$  tal que  $f(\tau)$  solo pueda tomar los valores en una discretización  $\Omega_f$  del intervalo  $[-1, 1]$  y cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:  $a_i = (\mathbf{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $b_j = (\mathbf{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$ .

### 3 Selective Harmonic Elimination as dynamical system

Inspirados en la naturaleza continua de la variable de optimización  $f(\tau)$  proponemos en este documento la formulación desde el control óptimo. Es decir en lugar buscar los ángulos de conmutación, buscaremos la función  $f(\tau) \in \{g(\tau) \in L^\infty([0, \pi]) \mid |g(\tau)| < 1\}$  que tenga los coeficientes de Fourier deseados. Utilizaremos el teorema fundamental del cálculo diferencial para re-escribir la expresión de los coeficientes de Fourier (2.2) y (2.3) como la evolución de un sistema dinámico. Es decir:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(i\tau) \\ \alpha_i(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(j\tau) \\ \beta_j(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La evolución de los sistemas dinámicos  $\alpha_i(\tau)$  y  $\beta_j(\tau)$  desde el tiempo  $\tau = 0$  hasta  $\tau = \pi$  nos da lugar a los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$ . De esta manera, el problema general de SHE (2.2) puede formularse como un problema de control de un sistema dinámico donde  $\alpha_i(\tau) \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $\beta_j(\tau) \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$  son los estados del sistema y donde  $f(\tau)$  es la variable de control, y cuyo objetivo será llevar los estados desde el origen de coordenadas hasta los vectores objetivos  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$  en tiempo  $\tau = \pi$  (véase figura (1)).

#### 3.1 Notación

Con el fin de obtener una expresión compacta del problema que nos simplifique el entendimiento del mismo introduciremos la siguiente notación

$$\mathbf{x}(t) = [\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)]^T \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}_T = [\mathbf{a}_T, \mathbf{b}_T]^T \quad (3.4)$$

$$\mathcal{D}(t) = \frac{2}{\pi} [\cos(\tau), \cos(3\tau), \dots, \sin(\tau), \sin(3\tau), \dots]^T \quad (3.5)$$

De manera que para un par de conjuntos  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  tenemos el siguiente sistema dinámico asociado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{D}(t)f(t) & \tau \in [0, \pi] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.6)$$

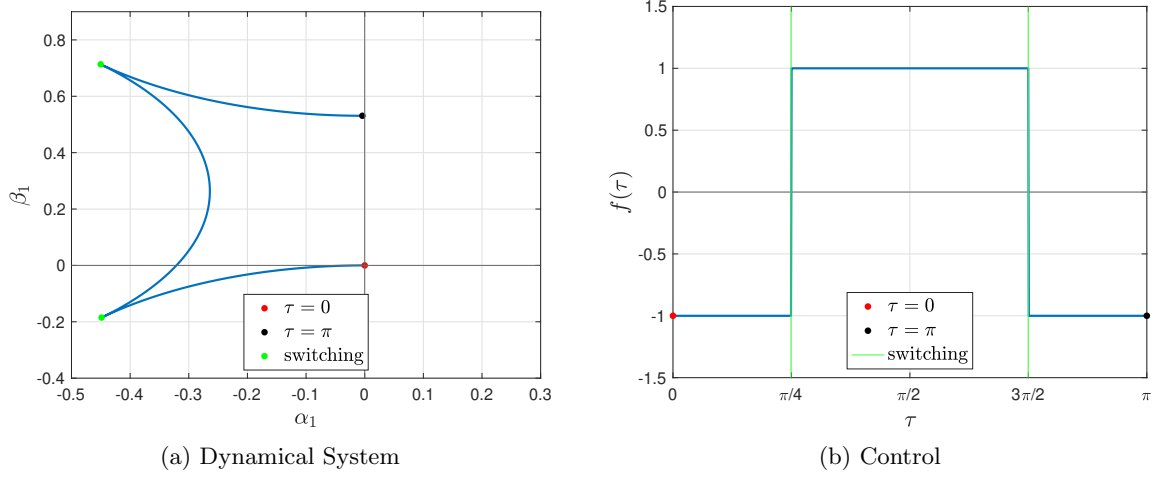


Figure 1: Mostramos el problema SHE como un sistema dinámico cuando consideramos los coeficientes de Fourier  $a_1$  y  $b_1$ . En la figura (a) podemos ver la evolución del sistema dinámico asociado a los coeficientes de Fourier  $a_1$  y  $b_1$ . Por otro lado, en la figura (b) podemos ver el control  $f(\tau)$  que genera la trayectoria mostrada en (a).

## 4 Control óptimo para SHE de dos y tres niveles

Dado que el problema SHE es equivalente a controlar un sistema dinámico desde el origen de coordenadas a un punto concreto, podemos formular el siguiente problema de control:

**Problem 4.1 (OCP para SHE en media onda)** Dados dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  and  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, dados los vectores objetivos  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos la función  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$  que minimiza el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[ \|\mathbf{a}_T - \boldsymbol{\alpha}(T)\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}(T)\|^2 + \epsilon \int_0^\pi \mathcal{L}(f) d\tau \right] \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$ ,  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea y  $\epsilon$  es un parámetro pequeño que penaliza el funcional de coste con el término  $\mathcal{L}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

De esta forma podemos escribir el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} & \min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \\ & \text{subject to:} \\ & \forall i \in \mathcal{E}_a \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) = (2/\pi) \cos(i\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \alpha_i(0) = 0 \end{cases} \\ & \forall j \in \mathcal{E}_b \quad \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (2/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En el problema de SHE de dos niveles se busca una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$  que solo pueda tomar los valores  $\{-1, 1\}$ , sin embargo el problema (4.1) definido para un término de penalización  $\mathcal{L}(f)$  arbitrario puede tomar valores en todo el intervalo  $[-1, 1]$ . En teoría de control los controles que toma solo los valores extremos del intervalo son conocidos como controles *bang-bang*. A continuación estudiaremos las condiciones que debe cumplir el término  $\mathcal{L}(f)$  para que nuestro control óptimo sea una función escalón.

#### 4.1 Condiciones para la obtención de controles *bang-bang*

A continuación estudiaremos las condiciones de optimilidad del problema con el fin de encontrar condiciones en el término  $\mathcal{L}(f)$  que nos de el comportamiento *bang-bang* en el control óptimo. Para ello utilizaremos el principio de máximo de Pontryagin [Pontryagin, 2018], el cual formula varias condiciones de optimilidad para los problemas de control óptimo. Estas condiciones se formulan a través de un objeto llamado Hamiltoniano, que en este caso se puede escribir como:

$$H(f, \mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) f(\tau) \quad (4.3)$$

Donde hemos llamado  $G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau)$  a:

$$G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) = \frac{2}{\pi} \left[ \sum_{i \in \mathcal{E}_a} p_i^\alpha \cos(i\tau) + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (4.4)$$

y además donde hemos introducido las variables  $\mathbf{p}^\alpha \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$  y  $\mathbf{p}^\beta \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$  son los estados adjuntos correspondientes a los estados  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Aunque el valor exacto de los coestados es necesario para obtener el control óptimo, las condiciones necesarias para obtener controles *bang-bang* son independientes del valor de estos. Por esta razón, suponemos que el valor de los coestados óptimos  $\mathbf{p}_*^\alpha$  y  $\mathbf{p}_*^\beta$  son conocidos.

Por otra parte, utilizando otra condición del principio del máximo:

$$H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f_*) \leq H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f) \quad (4.5)$$

podemos obtener la forma del control óptimo cuando los co-estados óptimos  $\mathbf{p}_*^\alpha$  y  $\mathbf{p}_*^\beta$  además de la variable temporal  $\tau$  están fijas. Entonces el problema se reduce a la minimización de una función  $H^*(f) = H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f)$  en una variable  $f$  dentro del intervalo  $[-1, 1]$ . Dado que necesitamos que el control óptimo  $f^*$  sea *bang-bang*, debemos diseñar  $H^*(f)$  de manera que su mínimo esté en los extremos del intervalo  $[-1, 1]$ . En el caso de una variable (este caso) solo podemos conseguir este comportamiento si no existe ningún mínimo dentro del intervalo. Una manera de asegurar este comportamiento es tomando la función  $H^*(f)$  concava, mediante la elección del término  $\mathcal{L}(f)$ . Eso se debe a que la concavidad de el término  $\mathcal{L}(f)$  determina la concavidad del Hamiltoniano  $H^*(f)$  gracias a que la derivada segunda de  $H^*(f)$  es proporcional a la derivada segunda del término de penalización, es decir:

$$\frac{d^2 H^*}{df^2} = \epsilon \frac{d^2 \mathcal{L}(f)}{df^2} \quad (4.6)$$

De esta manera siempre que elijamos un término de penalización tal que:

$$\frac{d^2 L[f]}{df^2} \leq 0 \quad (4.7)$$

obtendremos un función  $H^*(f)$  cóncava dentro de un intervalo convexo dando lugar a un control óptimo  $f^*$  *bang-bang*. Podemos ver una ilustración de este comportamiento en la figura (2).

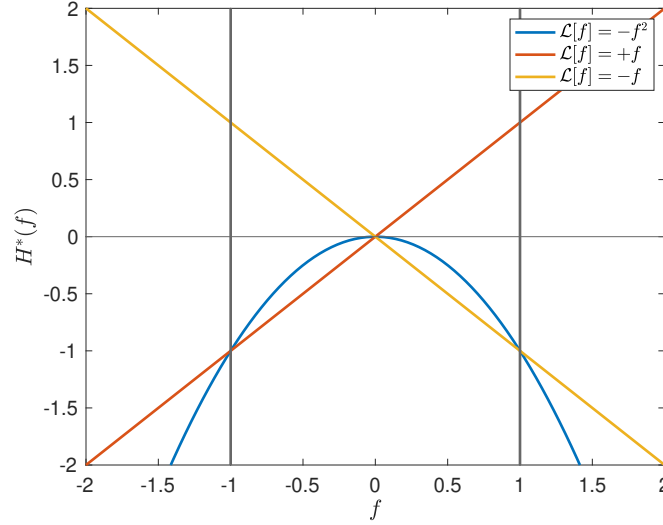


Figure 2: Ilustración sobre el comportamiento de la función  $H^*(f)$  para distintos términos de penalización  $\mathcal{L}(f)$ . El problema de minimización de  $H^*(f)$  con respecto a  $f$  para las distintas curvas presentadas en la figura siempre tiene minimos en los extremos del intervalo  $[-1, 1]$  de manera que el control óptimo en los tres casos, será *bang-bang*.

## 4.2 OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda

Consideraremos un caso concreto del problema presentado en la sección anterior. Este es problema de SHE con simetría de cuarto de onda, es decir consideramos que la función  $f(\tau)$  cumple la siguiente expresión:

$$f(\tau + \pi/2) = f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2) \quad (4.8)$$

Esta expresión nos permite simplificar la expresión para los coeficientes de Fourier (2.2) and (2.3) de la siguiente manera:

$$a_i = 0 \mid \forall i \in \mathbb{Z} \quad (4.9)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ odd} \quad (4.10)$$

Entonces  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$  puede ser escrita como:

$$f(\tau) = \sum_{j \text{ odd}}^{\infty} b_j \sin(j\tau) \quad (4.11)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid j \text{ odd} \quad (4.12)$$

En este contexto podemos definir el siguiente problema de control de manera análoga que en la subsección anterior:

**Problem 4.2 (OCP para SHE en cuarto de onda)** Dado un conjunto de número impares  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidad  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  y dado un vector objetivo  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , busquemos la función  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$  tal que  $f(\tau)$  minimize el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[ \|\mathbf{b}_T - \beta(T)\|^2 + \epsilon \int_0^{\pi/2} \mathcal{L}(f(\tau)) d\tau \right] \quad (4.13)$$

donde  $\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2]$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea y  $\epsilon$  es un parámetro de penalización para el término  $\mathcal{L}(f)$ .

Entonces el problema de control se puede escribir como:

$$\min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \quad (4.14)$$

subject to:

$$\forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases}$$

En este caso el problema de control tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H(f, \mathbf{p}_\beta, \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + \frac{4f}{\pi} \left[ \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (4.15)$$

Podemos ver que el Hamiltoniano tiene la misma estructura que (4.3), por lo que de la misma forma la elección de un término de penalización  $\mathcal{L}(f)$  concavo nos produce un Hamiltoniano  $H^*(f)$  cóncavo y por tanto un control óptimo  $f^*$  bang-bang.

## 5 Control óptimo para SHE multi-nivel

### 5.1 Condiciones de Optimialidad para obtención de control digital

### 5.2 OC SHE multi-nivel con simetría de cuarto de onda

## 6 Experimentos numéricos

En esta sección mostraremos soluciones obtenidas numéricamente del problema de control presentado. Para ello primero explicaremos como la metodología que utilizamos para resolver los problemas de control (4.1) y (4.2), y luego mostraremos casos concretos mostrando la precisión obtenida



y algunos ejemplos donde el número de ángulos varía con respecto al valor de los coeficientes de Fourier considerados.

## 6.1 Numerical solution of OCP-SHE

To solve the optimal control problem (4.1), we use a direct method. If we consider a partition  $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$  of interval  $[0, T]$ , we can represent a function  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, T]\}$  as a vector  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$  where component  $f_t = f(\tau_t)$ . Then the optimal control problem (4.1) can be written as optimization problem with variable  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$ . This problem is a nonlinear programming, for this we use CasADi software to solve. Entonces, dado una partición del intervalo  $[0, \pi]$  podemos reformular el problema (4.1) como el siguiente problema en tiempo discreto:

**Problem 6.1 (OCP numérico con simetría de media onda)** Dados dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  and  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, dados los vectores objetivos  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$  y una partition  $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$  of interval  $[0, \pi]$ . We search a vector  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$  that minimize the following function:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T} \left[ \|\mathbf{a}_T - \boldsymbol{\alpha}^T\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}^T\|^2 + \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(f_t) \Delta \tau_t \right] \quad (6.1)$$

subject to:

$$\begin{aligned} i \in \mathcal{E}_a \quad & \begin{cases} \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + \Delta \tau_t (2/\pi) \cos(i \tau_t) f_t \\ \alpha_i^0 = 0 \end{cases} \\ j \in \mathcal{E}_b \quad & \begin{cases} \beta_j^{t+1} = \beta_j^t + \Delta \tau_t (2/\pi) \sin(j \tau_t) f_t \\ \beta_j^0 = 0 \end{cases} \\ |f_t| < 1 \mid & \Delta \tau_t = \tau_{t+1} - \tau_t \mid \forall t \in \{1, \dots, T-1\} \end{aligned}$$

En el caso del problema con simetría de cuarto de onda siguiendo la misma línea argumental anterior podemos formular el siguiente problema de optimización:

**Problem 6.2 (OCP numérico con simetría de cuarto de onda)** Given a set of odd numbers  $\mathcal{E}_b$  with cardinality  $|\mathcal{E}_b| = N_b$ , given the target vector  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$  and partition  $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$  of interval  $[0, \pi/2]$ . We search a vector  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$  that minimize the following function:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T} \left[ \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}^T\|^2 + \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(f_t) \Delta \tau_t \right] \quad (6.2)$$

subject to:

$$\begin{aligned} j \in \mathcal{E}_b \quad & \begin{cases} \beta_j^{t+1} = \beta_j^t + \Delta \tau_t (4/\pi) \sin(j \tau_t) f_t \\ \beta_j^0 = 0 \end{cases} \\ |f_t| < 1 \mid & \Delta \tau_t = \tau_{t+1} - \tau_t \mid \forall t \in \{1, \dots, T-1\} \end{aligned}$$

## 6.2 Resultados

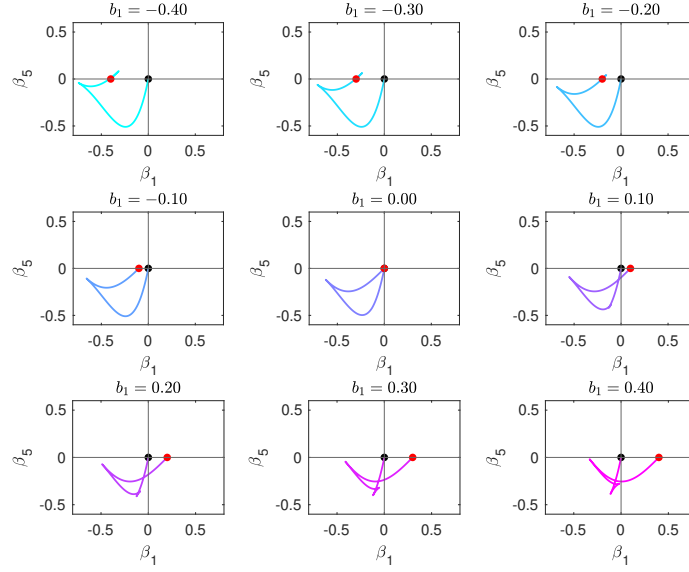
Cabe mencionar que todas las simulaciones se han realizado con un ordenador de mesa con 8Gb de ram, y el tiempo de ejecución para la búsqueda de soluciones dado un vector objetivo es del orden del segundo. A continuación listaremos cada uno de los resultados numéricos obtenidos:

1. **OCP con simetría de cuarto de onda:** Consideraremos el problema con un conjunto de números impares  $\mathcal{E}_b = \{1, 5\}$  con una discretización del intervalo  $[0, \pi/2]$  de  $T = 200$ . Mostramos las soluciones para los vectores objetivo  $b_T^1 = \{(-0.4, -0.3, \dots, 0.3, 0.4)\}$  manteniendo  $b_T^5 = 0$  para todos los casos. Mostramos las trayectorias óptimas obtenidas en la figura (4), donde se puede ver una continuidad en las soluciones con respecto a vector objetivo.
2. **OCP con simetría de cuarto onda para un intervalo del  $b_1$ :** Para este ejemplo consideramos el siguiente conjunto de números impares:  $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$ . Además consideramos el vector objetivo  $b_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$ , donde  $m_a \in [-1, 1]$  es un parámetro. with three penalization terms:  $\mathcal{L}(f) = -f$ ,  $\mathcal{L}(f) = +f$  and  $\mathcal{L}(f) = -f^2$  obtained by direct method with uniform partition of interval  $[0, \pi/2]$  with  $T = 400$  and penalization parameter  $\epsilon = 10^{-5}$ . Para cada uno de los términos de penalización utilizados la distancia entre los coeficientes de Fourier se encuentra en el orden de  $10^{-4}$ . Sin embargo, cuando el término de penalización es  $\mathcal{L}(f) = -f^2$  la solución no presenta continuidad con respecto al vector objetivo. Por otra parte, es importante mencionar que las soluciones para los términos de penalización  $\mathcal{L}(f) = -f$  y  $\mathcal{L}(f) = f$  cumplen una simetría por lo que invirtiendo las soluciones con respecto al origen y invirtiendo el signo de las soluciones se puede ver que ambas soluciones son la misma.
3. **SHE para tres niveles:** Podemos ver que en el caso en el que el control  $f(\tau)$  solo pueda tomar valores entre  $[0, 1]$  obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo  $[0, 2\pi]$  gracias a la simetría de cuarto de onda. Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones  $|f(\tau)| < 1$  por  $\{0 < f(\tau) < 1\}$ . Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo soluciones para los mismo términos de penalización obteniendo la figura (8). Allí se muestra la continuidad de las soluciones y que estas se encuentran en el orden de  $10^{-4}$ .
4. **Cambio en el número de conmutaciones:** Gracias a la formulación de control óptimo para el problema SHE podemos variar el número de ángulos de conmutación. Este es el caso del siguientes ejemplo, donde hemos tomado como conjunto de números pares  $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 9, 13, 17\}$ , además consideramos el vector objetivo  $b_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$ , donde  $m_a \in [0, 1]$  es un parámetro. En este problema hemos utilizado una penalización tipo  $\mathcal{L} = f$  con un parámetro de penalización  $\epsilon = 10^{-4}$ . Podemos ver en la figura (6) como el problema de control óptimo es versátil y es capaz de mover entre varios conjuntos de soluciones.
5. **OCP para SHE con simetría de media onda:** Se ha realizado el caso de control óptimo de media onda con  $\mathcal{E}_a = \{1, 3, 5\}$  y  $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 5, 9\}$ , donde  $a_T = [m_a, 0, 0]$ ,  $b_T = [m_a, m_a, 0, 0]$  y  $m_a \in [-0.6, 0.6]$ . Se ha elegido la penalización  $L(f) = +f$

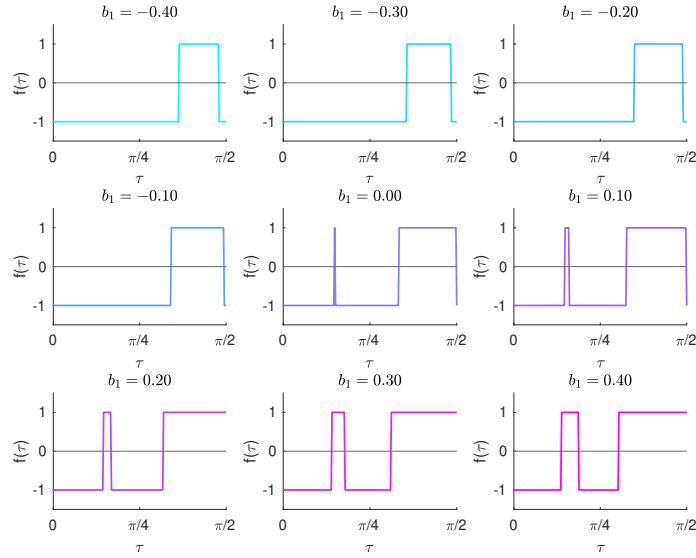
## 7 Conclusiones

Se ha presentado el problema SHE desde un punto de vista de la teoría de control. Esta metodología es efectiva para llegar a presiciones  $10^{-4} - 10^{-5}$  en la distancia al vector objetivo. Sin embargo en comparación con metodologías donde el número de conmutaciones es prefijado, nuestra aproximación es más costosa. Sin embargo, el control óptimo asegura soluciones en todo el rango de índice de modulación, aunque el número de soluciones o la localización de estas cambien abruptamente.

Este plantamiento del problema SHE enlaza la teoría de control con la eliminación de armónicos. De esta manera el problema SHE se puede resolver mediante herramientas clásicas.

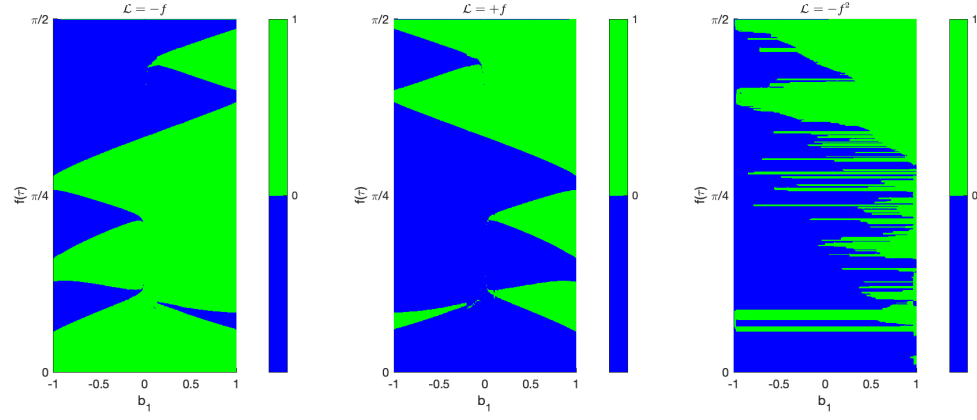


(a) Dynamical System: el punto rojo hace referencia al punto final mientras que el punto negro hace referencia al punto inicial.

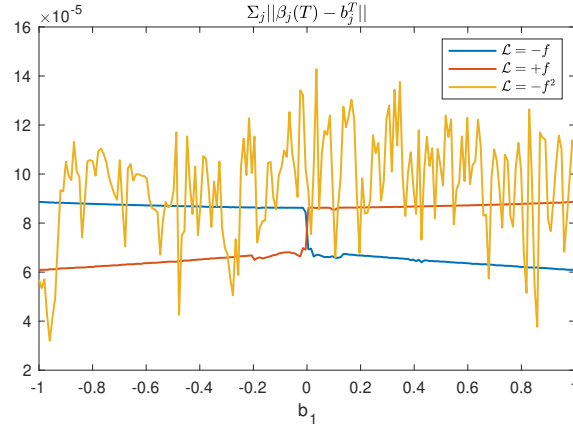


(b) Control

Figure 3: Mostramos las trayectorias óptimas y controles óptimos para distintos vectores objetivo.

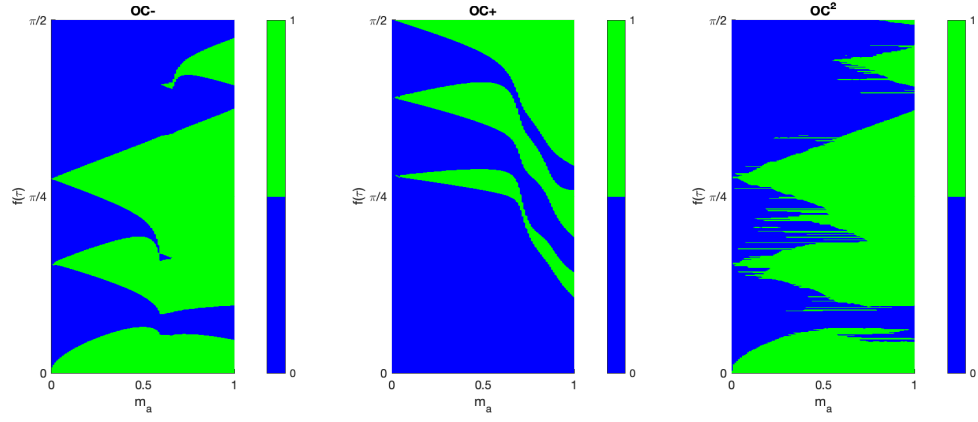


(a) Comparison of solutions for different values of  $m_a$ . El problema con penalización  $L(f) = -f$  y  $L(f) = +f$  son equivalentes bajo una transformación de inversión con respecto a origen de coordenadas y un cambio de signo.

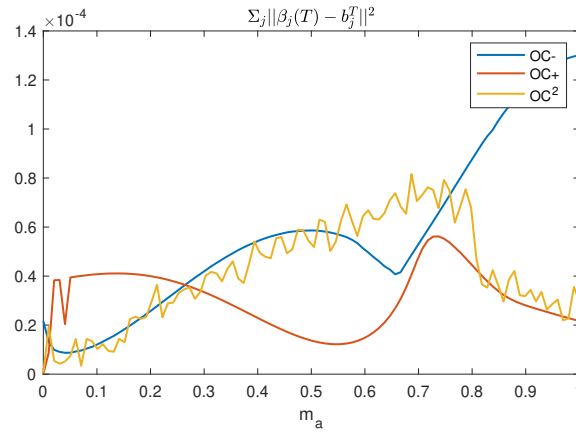


(b) Error

Figure 4: The order of magnitude of the distance of target



(a) Soluciones para un control con restricciones  $0 \leq f \leq 1$  para obtener soluciones de tres niveles.



(b) error

Figure 5: Errors of solution in three level solutions

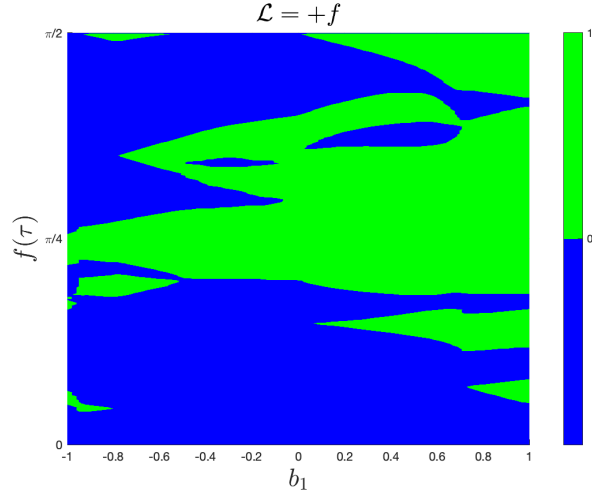


Figure 6: Discontinuidad en las soluciones obtenidas. Soluciones para SHE con simetría cuarto de onda con  $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 9, 13, 17\}$ , donde  $\mathbf{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$  y  $m_a \in [0, 1]$

## References

[Pontryagin, 2018] Pontryagin, L. S. (2018). *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge.

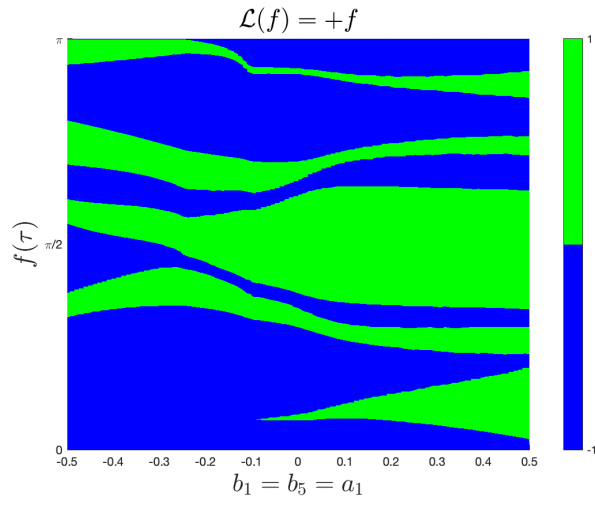
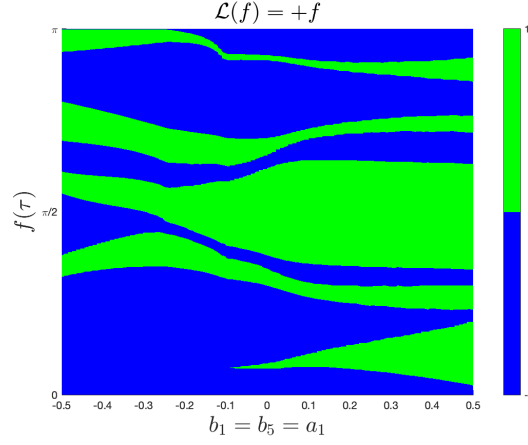


Figure 7: Discontinuidad en las soluciones obtenidas. Soluciones para SHE con simetría media de onda con  $\mathcal{E}_a = \{1, 3, 5\}$  y  $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 5, 9\}$ , donde  $\mathbf{a}_T = [m_a, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b}_T = [m_a, m_a, 0, 0]$  y  $m_a \in [-0.6, 0.6]$



(a) Discontinuidad en las soluciones obtenidas. Soluciones para SHE con simetría media de onda con  $\mathcal{E}_a = \{1, 3, 5\}$  y  $\mathcal{E}_b = \{1, 3, 5, 9\}$ , donde  $\mathbf{a}_T = [m_a, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b}_T = [m_a, m_a, 0, 0]$  y  $m_a \in [0, 1]$

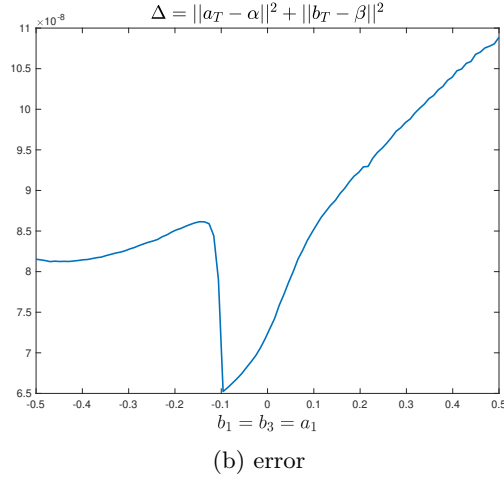


Figure 8: Errors of solution in three level solutions