Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique
- El Jadida -

Mécanique du Solide Indéformable

A. EL AFIF

Filière : Sciences de la Matière Physique – S_3

Année Universitaire : 2015-2016 *(Deuxième Edition)*

Ch. I

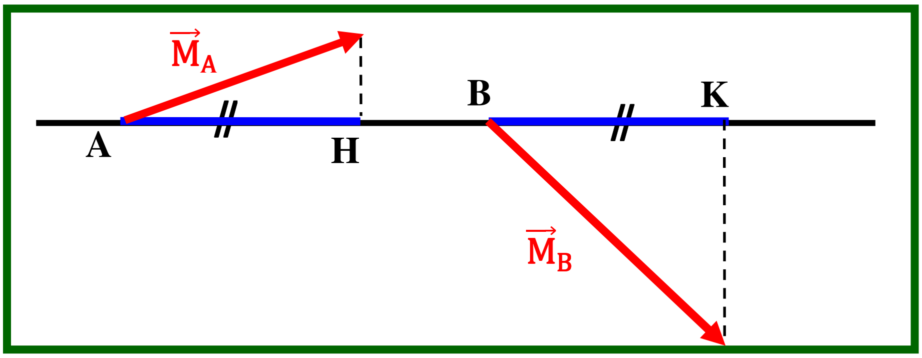
TORSEURS

I. Champ de vecteurs antisymétrique

- On appelle ***champ de vecteurs,*** $\vec{\mathbf{M}}$ toute application qui associe à chaque point A de l'espace un vecteur $\vec{\mathbf{M}}(\mathbf{A}) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$.
- On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{M}}$ est équiprojectif si et seulement si :

$$\forall \ \mathbf{A \ et \ B} \qquad \overrightarrow{\mathbf{AB}} \,.\, \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \,.\, \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$$

L'équiprojectivité traduit le fait que les champs en deux points quelconques A et B ont même projection sur la droite (AB) : $\overline{\mathbf{AH}} = \overline{\mathbf{BK}}$



- On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{M}}$ est ***antisymétrique*** si :

$$\forall \ \mathbf{A \ et \ B} \qquad \exists! \ \vec{R} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Ou encore s'il existe une matrice [**F**] antisymétrique ([**F**] **= -** [**F**]$^{\mathbf{T}}$) tel que :

$$\forall \ \mathbf{A \ et \ B} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + [\mathbf{F}].\ \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

[**F**]$^{\mathbf{T}}$ est la matrice transposée de [**F**].

Théorème de Delassus : Tout champ de vecteurs antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

Antisymétrie $\Leftrightarrow$ Equiprojectivité

II. Torseurs

On appelle torseur un ensemble constitué d'un champ de vecteurs antisymétrique $\vec{\mathbf{M}}$ et de son vecteur associé $\vec{\mathbf{R}}$ appelé **résultante** du torseur, vérifiant la relation de transport:

$$\boxed{\forall \ \mathbf{A, B} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}}$$

On note le torseur en un point A sous la forme :

$$[\mathrm{T(A)}] = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}} \end{Bmatrix} \text{ ou encore } [\vec{\mathrm{R}},\ \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}}]$$

$\vec{\mathbf{M}}_{\mathrm{A}}$ est appelé **moment résultant** en A du torseur. Les vecteurs $\vec{\mathrm{R}}$ et $\vec{\mathbf{M}}_{\mathrm{A}}$ s'appellent les éléments de réduction du torseur au point A. En termes des composantes des deux vecteurs dans une même base, on écrit:

$$[T(A)] = \begin{Bmatrix} R_1 & M_{1A} \\ R_2 & M_{2A} \\ R_3 & M_{3A} \end{Bmatrix}$$

III. Invariant scalaire d'un torseur

L'invariant scalaire d'un torseur [T], noté, $I_{[T]}$ est le produit scalaire de sa résultante $\vec{\mathbf{R}}$ et de son moment $\vec{\mathbf{M}}_{\mathrm{A}}$ en un point A quelconque. Cette quantité est indépendante de ce point.

$$\forall \textbf{ A et B} \qquad I_{[T]} = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_{\mathrm{A}} = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_{\mathrm{B}}$$

IV. Algèbre élémentaire des torseurs

Soient deux torseurs : $[\boldsymbol{T_1}(\mathrm{A})] = [\vec{\mathbf{R}}_1,\ \vec{\mathbf{M}}_{1\mathrm{A}}]$ et $[\boldsymbol{T_2}(\mathrm{A})] = [\vec{\mathbf{R}}_2,\ \vec{\mathbf{M}}_{2\mathrm{A}}]$

<u>Egalité</u> : $\quad [\boldsymbol{T_1}] = [\boldsymbol{T_2}] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{A}) \quad (\vec{\mathbf{R}}_1 = \vec{\mathbf{R}}_2 \ \ \boldsymbol{et} \ \ \vec{\boldsymbol{M}}_{1A} = \vec{\boldsymbol{M}}_{2A})$

<u>Addition</u>: $\quad [\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{T_1}] + [\boldsymbol{T_2}]$ est un torseur tel que :

(∀ **A**) $\quad [\boldsymbol{T(A)}] = [\boldsymbol{T_1(A)}] + [\boldsymbol{T_2(A)}] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_1 + \vec{\boldsymbol{R}}_2 \ \ \textbf{et} \ \ \vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{M}}_{1A} + \vec{\boldsymbol{M}}_{2A}$

<u>Multiplication par un scalaire λ</u>: $[\boldsymbol{T}] = \boldsymbol{\lambda}\,[\boldsymbol{T_1}]$ est un torseur tel que :

(∀ **A**) $\quad [\boldsymbol{T(A)}] = \boldsymbol{\lambda}\,[\boldsymbol{T_1(A)}] \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\lambda}\,\vec{\boldsymbol{R}}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{M}}_A = \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{M}}_{1A})$

<u>Comoment :</u> $\quad [\boldsymbol{T_1(A)}].[\boldsymbol{T_2(A)}] = \vec{\boldsymbol{R}}_1.\vec{\boldsymbol{M}}_{2A} + \vec{\boldsymbol{R}}_2.\vec{\boldsymbol{M}}_{1A}$

Le comoment est un invariant scalaire qui ne dépend pas du point A.

$$(\forall \textbf{ A et B}) \qquad [\boldsymbol{T_1(A)}].[\boldsymbol{T_2(A)}] = [\boldsymbol{T_1(B)}].[\boldsymbol{T_2(B)}]$$

<u>Preuve :</u>

$[\boldsymbol{T_1(A)}].[\boldsymbol{T_2(A)}] = \vec{\mathbf{R}}_1.\vec{\mathbf{M}}_{2\mathrm{A}} + \vec{\mathbf{R}}_2.\vec{\mathbf{M}}_{1\mathrm{A}} = \vec{\mathbf{R}}_1.(\vec{\mathbf{M}}_{2\mathrm{B}} + \vec{\mathbf{R}}_2 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) + \vec{\mathbf{R}}_2.(\vec{\mathbf{M}}_{1\mathrm{B}} + \vec{\mathbf{R}}_1 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}})$

$= \vec{\mathbf{R}}_1.\vec{\mathbf{M}}_{2\mathrm{B}} + \vec{\mathbf{R}}_2.\vec{\mathbf{M}}_{1\mathrm{B}} + \vec{\mathbf{R}}_1.(\vec{\mathbf{R}}_2 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) + \vec{\mathbf{R}}_2.(\vec{\mathbf{R}}_1 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) = \vec{\mathbf{R}}_1.\vec{\mathbf{M}}_{2\mathrm{B}} + \vec{\mathbf{R}}_2.\vec{\mathbf{M}}_{1\mathrm{B}} = [\boldsymbol{T_1(B)}].[\boldsymbol{T_2(B)}]$

Car **:** $\vec{\mathbf{R}}_1.(\vec{\mathbf{R}}_2 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) = -\vec{\mathbf{R}}_2.(\vec{\mathbf{R}}_1 \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}})$

Automoment : $[T(A)] \cdot [T(A)] = 2\,\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_A = 2\, I_{[T]}$

V. Axe central d'un torseur

1. Point central

Le point central A d'un torseur est un point où le moment résultant $\vec{\mathbf{M}}_A$ est colinéaire à sa résultante $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{M}_A \wedge \vec{R} = \vec{0},$$

Ou encore que : $\vec{\mathbf{M}}_A = \mathbf{k}\,\vec{\mathbf{R}}$, où k est un scalaire.

2. Axe central

L'axe central (Δ) **d'**un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux :

$$\Delta = \left\{ A \;\; / \quad \vec{M}_A \wedge \vec{R} = \vec{0} \right\}$$

L'axe central n'existe que si $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Equation de l'axe central

Soit $[T(O)] = \left[\vec{R},\ \vec{M}_O\right]$ un torseur dont les éléments de réduction en un point O sont donnés. Soit (Δ) l'axe central de [T] et soit $A \in \Delta$ alors :

$$\vec{\mathbf{M}}_A \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Ou encore :

$$(\vec{\mathbf{M}}_O + \vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{OA}}) \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Ce qui donne en développant :

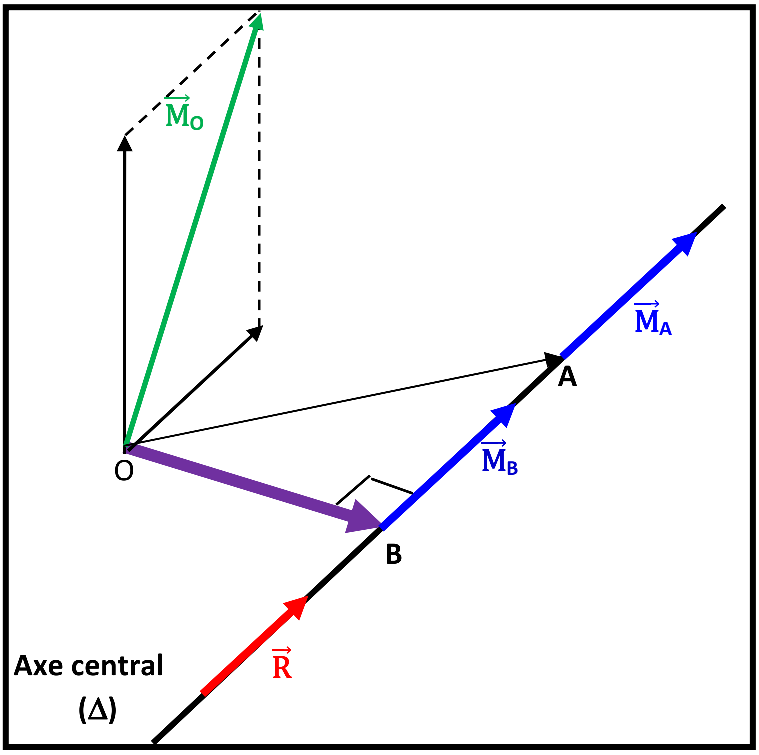
$$\vec{\mathbf{M}}_O \wedge \vec{\mathbf{R}} + R^2\ \vec{\mathbf{OA}} - (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{OA}})\ \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Comme $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, on obtient:

$$\vec{\mathbf{OA}} = \left(\frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{OA}}}{\mathbf{R}^2}\right) \vec{\mathbf{R}} + \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_O}{\mathbf{R}^2}$$

Soit $B \in \Delta$ tel que $\vec{\mathbf{OB}} \cdot \vec{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ alors :

$$\boxed{\vec{\mathbf{OB}} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_O}{\mathbf{R}^2}}$$



Le point B est la projection orthogonale de O sur l'axe central (Δ). Donc :

$$\boxed{\vec{OA} = \alpha\,\vec{R} + \vec{OB}} \qquad \boldsymbol{\alpha}\ \textbf{scalaire}$$

Par conséquent, l'axe central est la droite, $\Delta(\boldsymbol{B}, \vec{\mathbf{R}})$ qui passe par le point B et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$**.**

3. Moment central

Le moment central $\vec{\mathbf{M}}_A$ d'un torseur est le moment résultant en un point A de son axe central $(A \in (\Delta))$.

Le moment central a la même direction que l'axe central du torseur.

Remarque

Le moment d'un torseur est constant le long de :

- l'axe central : $\forall$ A et B $\in$ (Δ) : $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A$
- toute parallèle à l'axe central.

Preuve : Soit A et B $\in$ (Δ) alors $\vec{\mathbf{R}} \,//\, (\mathbf{AB})$ donc $\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \vec{\mathbf{0}}$ Par conséquent : $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \vec{\mathbf{M}}_A$

VI. Torseurs à invariant scalaire nul : Glisseurs et Couples

Soit $[T(A)] = \left[\vec{R}, \vec{\mathbf{M}}A\right]$ un torseur. L'invariant scalaire du torseur : $I_{[T]} = \vec{\mathbf{R}} \,.\, \vec{\mathbf{M}}_A = \mathbf{0}$ est nul, dans les cas suivants :

1. Torseur nul
2. Glisseur
3. Couple

1. Torseur nul **[0]:** ($\forall$ **A**) $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{0}}$

2. Glisseur **:** $\mathbf{I}_{[T]} = \mathbf{0}$ **et** $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$

Le moment central d'un glisseur est nul : $\forall\, \mathbf{C} \in \Delta$ $\vec{\mathbf{M}}_C = \vec{\mathbf{0}}$

En effet : $\vec{M}_C \perp \vec{R}$ (car $I_{[T]} = \mathbf{0}$) et $\vec{M}_C \,//\, \vec{R}$ (car $C \in (\Delta)$) Donc : $\vec{M}_C = \vec{0}$

Un glisseur est un torseur pour lequel il existe au moins un point central dont le moment est nul.

*Axe **central** :* Il faut distinguer deux cas :

1^er^ Cas : $\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{0}}$.

Donc : $\vec{\mathbf{M}}_A \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ d'où $A \in \Delta$ (l'axe central passe par le point A)

L'axe central du glisseur est la droite $\Delta(\boldsymbol{A}, \vec{\mathbf{R}})$ passant par le point central A et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$.

2^eme^ Cas : $\vec{\mathbf{M}}_A \neq \vec{\mathbf{0}}$ **.**

L'axe du glisseur est la droite $\Delta(\boldsymbol{B}, \vec{\mathbf{R}})$ passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_A}{\mathbf{R}^2}$$

3. Couple **:** $\mathbf{I}_{[T]} = \mathbf{0}$, $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{M}}_A \neq \vec{\mathbf{0}}$

Un couple est un champ uniforme: $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A$.

Par construction, un couple ne possède pas d'axe central.

Exercice 1

Dans un repère $\mathcal{R}$ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère le champ de vecteurs $\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{M}$ défini par :

$$\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{M} = (\mathbf{a} + (\mathbf{1} - \mathbf{b})\,\mathbf{x} + \mathbf{by} - \mathbf{b}\,\mathbf{z})\vec{\mathbf{i}} + (-\mathbf{2a} - \mathbf{bx} + (\mathbf{b} - \mathbf{1})\mathbf{y} + \mathbf{b}\,\mathbf{z})\vec{\mathbf{j}} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}\,\mathbf{x} - \mathbf{b}\,\mathbf{y} + (\mathbf{1} - \mathbf{b})\mathbf{z})\vec{\mathbf{k}}$$

Où x, y et z sont les coordonnées du point M dans le repère (R), a et b sont deux constantes réelles.

1. 'Anti-symétriser' ce champ.

2. Déterminer alors les éléments de réduction au point O du torseur associé.

3. Déterminer sa nature et son axe central dans les deux cas : a = 0 et $a \neq 0$

Exercice 2

Dans un repère $\mathcal{R}$ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé et direct, on considère deux torseurs dont les éléments de réduction en un point M quelconque sont respectivement $[\vec{R}_1, \ \vec{V}_{1M}]$ et $[\vec{R}_2, \ \vec{V}_{2M}]$. On définit le champ de vecteur $\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{M}$ par :

$$\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{M} = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \wedge \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{2M}} - \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \wedge \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1M}}$$

1. Montrer que ce champ est équiprojectif ?

2. Déterminer alors la résultante associée à ce champ.

Exercice 3

Dans un repère $\mathcal{R}$ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O et point O' (0, 1, 1) sont respectivement $[\vec{R}_1, \ \vec{M}_{1O}]$ et $[\vec{R}_2, \ \vec{M}_{2O'}]$ définis par :

$$[\mathbf{T_1}(\mathbf{O})] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\,a\sin\alpha \\ \sin\alpha & a\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad [\mathbf{T_2}(\mathbf{O'})] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -(a+1)\sin\alpha \\ -\,\sin\alpha & -(a+1)\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

Où a et α sont des constantes réelles.

1. Préciser la nature des deux torseurs.

2. Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_1]$ et en déduire le moment $\vec{M}_{1P}$ en un point P de cet axe.

3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.

4. Calculer le co-moment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.

5. Trouver l'axe central de [T].

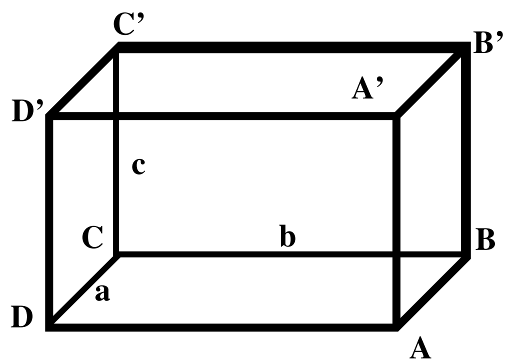
Exercice 4

Soit un parallélépipède ABCD A'B'C'D' ; de cotés a, b et c.

On choisit $R(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme repère orthonormé direct.

1. Déterminer les éléments de réduction au point C du torseur [T] constitué des vecteurs : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C'}$ **et** $\overrightarrow{D'D}$. En déduire l'axe central

2. Calculer le moment $\vec{M}_O$ du torseur au centre O du parallélépipède



Ch. II

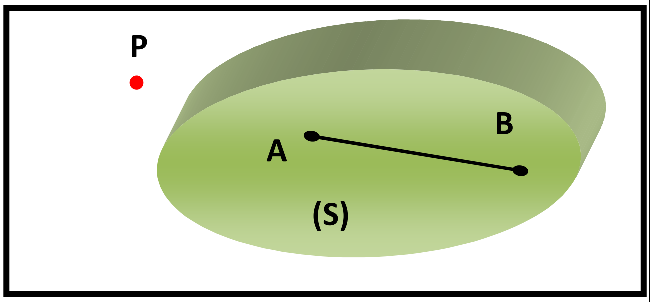
CINEMATIQUE DU SOLIDE

I. Généralités et définitions

D'une manière générale, la cinématique est l'étude d'un mouvement indépendamment des causes (forces) qui le produisent.

1. Solide indéformable

Un solide indéformable ou rigide, (S), est un ensemble de points telle que, la distance entre deux points quelconques parmi tous ses points, reste constante au cours du temps, et ceci quel que soit le mouvement du solide:



$$\forall\ A, B \in (S), \quad \forall\ t \qquad \left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\ (\mathbf{t})\right\| = \mathbf{Cste}$$

Remarques

- Tout vecteur joignant deux points d'un solide rigide (S) est un vecteur de (S) :

$$\forall\ A, B \in (S), \quad \forall\ t \qquad \overrightarrow{\mathbf{AB}}\ (\mathbf{t}) \in (S)$$

- Un point P est dit rigidement lié à (S) s'il est immobile par rapport à tout point de (S) :

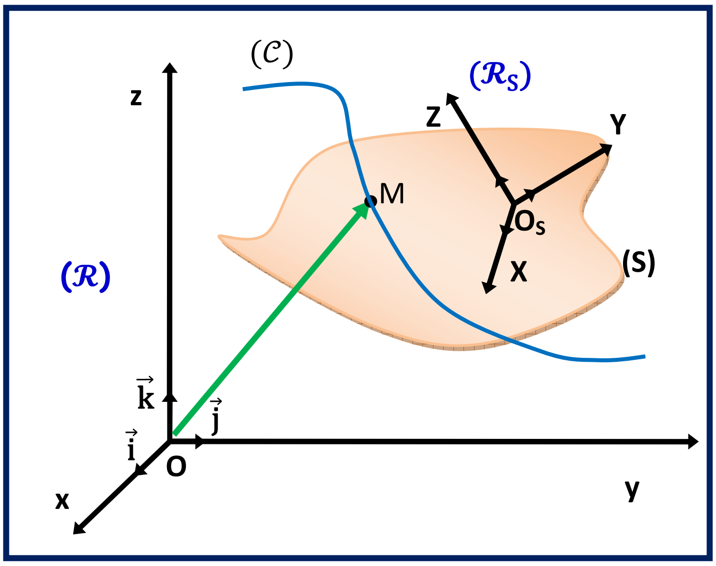
$$\forall\ A \in (S), \quad \forall\ t \qquad \left\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}(\mathbf{t})\right\| = \mathbf{Cste}$$

2. Référentiel, Repère

Un **repère d'espace** $\mathcal{R}(O; \mathcal{B})$, est un ensemble de points ***rigidement liés***, défini par la donnée d'une origine O (Observateur) et d'une base $\mathcal{B}$. Le repère est dit orthonormé direct si sa base associée $\mathcal{B}$ l'est aussi. L'adjonction du temps (Horloge) à un repère définit un **référentiel**. Tout repère d'espace ou référentiel est un « ***solide rigide*** » fictif.

En mécanique classique (c'est-à-dire non relativiste), l'espace physique est euclidien, de dimension 3, **homogène** (indépendant de la position), **isotrope** (indépendant de la direction) et est caractérisé par un temps **absolu** (indépendant de l'observateur).

3. Point d'un solide



La position d'un **point matériel M** quelconque d'un solide (S) dans un référentiel ($\mathcal{R}$), à l'instant t, est le **point géométrique** de l'espace, noté M(**t**), occupé par M à l'instant t. Au cours du mouvement du solide, le point matériel M décrit dans ($\mathcal{R}$) une courbe ($\mathcal{C}$) appelée trajectoire du point M dans ($\mathcal{R}$).

Le **vecteur position** d'un point M du solide (S), par rapport au repère ($\mathcal{R}$) d'origine O, à l'instant t, est le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ joignant l'origine O du repère et la position M(t). On définit :

Vecteur vitesse (**m/s**) : $\vec{v}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

Vecteur accélération: (**m/s²**) : $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

4. Paramétrage de la position d'un solide

Le mouvement d'un solide (S) dans un référentiel $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ peut, en général, être décomposé en:

- un mouvement de ***translation*** suite aux changements de sa position
- un mouvement de ***rotation*** suite aux changements de son orientation

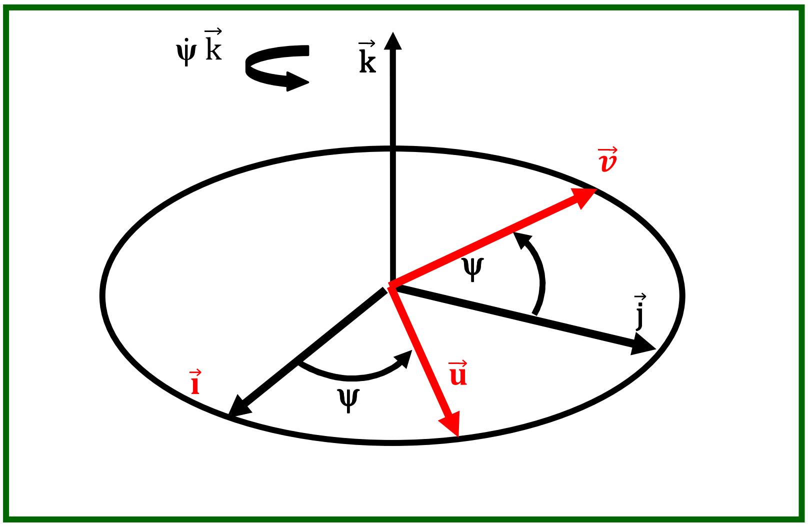
Pour étudier le mouvement de (S), on lui **lie rigidement** un référentiel orthonormé direct arbitraire, $\mathcal{R}_S(O_S;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ ayant pour origine un point quelconque, O_S lié à (S) (généralement son centre de gravité). Le mouvement de (S) dans ($\mathcal{R}$) est alors complètement déterminé par le mouvement de ($\mathcal{R}_S$) dans ($\mathcal{R}$). Par conséquent, il suffit de paramétrer ***la position*** de l'origine O_S et ***l'orientation*** de la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ de ($\mathcal{R}_S$) par rapport à ($\mathcal{R}$).

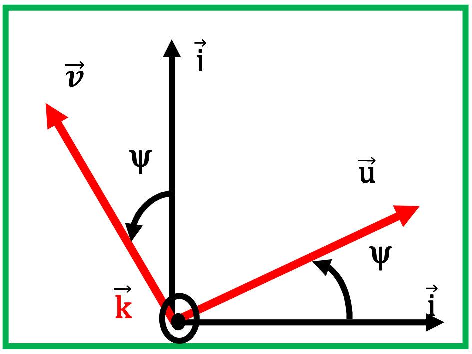
- ***Paramétrage de la position de l'origine*** O_S**:** comme l'**origine** $O_S$est un point matériel, sa position est habituellement **paramétrée** par :
  - les coordonnées cartésiennes : (x, y, z)
  - les coordonnées cylindriques : (ρ, θ, z)
  - les coordonnées sphériques : (r, θ, φ).
- ***Paramétrage de l'orientation de la base*** $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$**:** L'orientation de la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$de ($\mathcal{R}_S$) par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de ($\mathcal{R}$) est **paramétrée**, par les trois **angles d'Euler: ψ, θ et φ.** Le

mouvement de rotation (S) peut être décomposé en trois rotations planes successives autour de trois axes de rotation. Fixons l'origine O_s de $(\mathcal{R}_s)$ avec l'origine O de $(\mathcal{R})$ afin d'éliminer la translation.

- La première rotation s'effectue autour de l'axe $(O_s\vec{k})$ avec l'angle ψ tel que : $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\boldsymbol{k}}) \rightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{\boldsymbol{k}})$

La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{\boldsymbol{k}})$ s'appelle première base intermédiaire



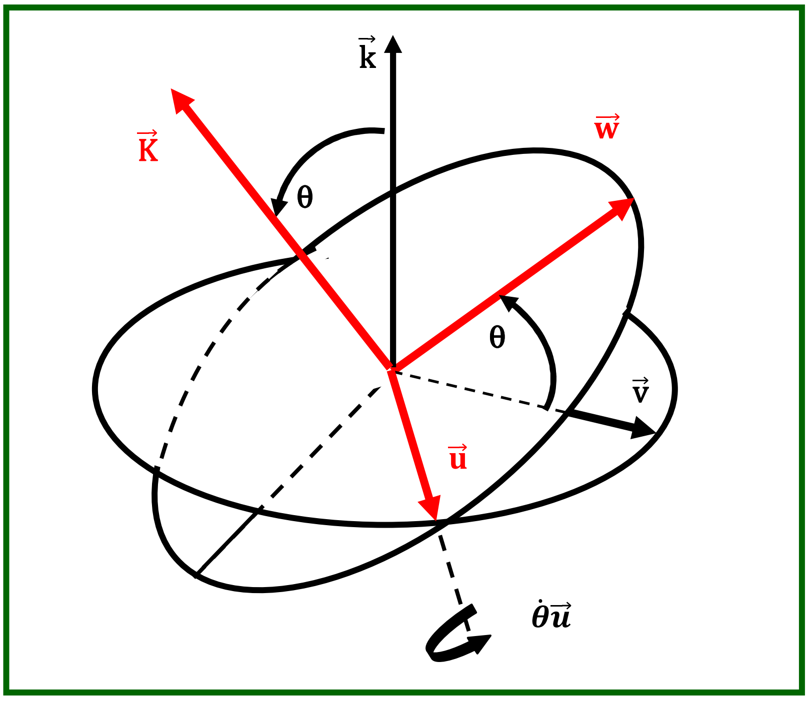


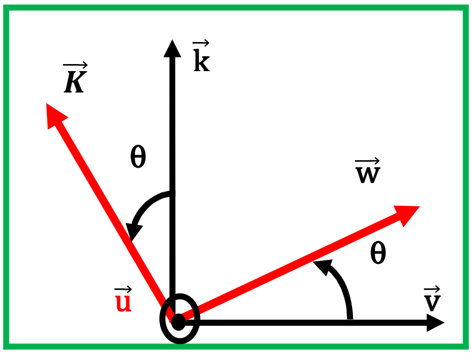
Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_1(O_s;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par rapport à $(\mathcal{R})$ autour de l'axe de rotation $(O_s\vec{k})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est :

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\boldsymbol{\psi}}\,\vec{k}$$

- La deuxième rotation s'effectue autour de l'axe $(O_s\vec{u})$ avec l'angle θ: $(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{v},\vec{k}) \rightarrow (\vec{\boldsymbol{u}},\vec{w},\vec{K})$

La base $(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{w},\vec{K})$ s'appelle deuxième base intermédiaire

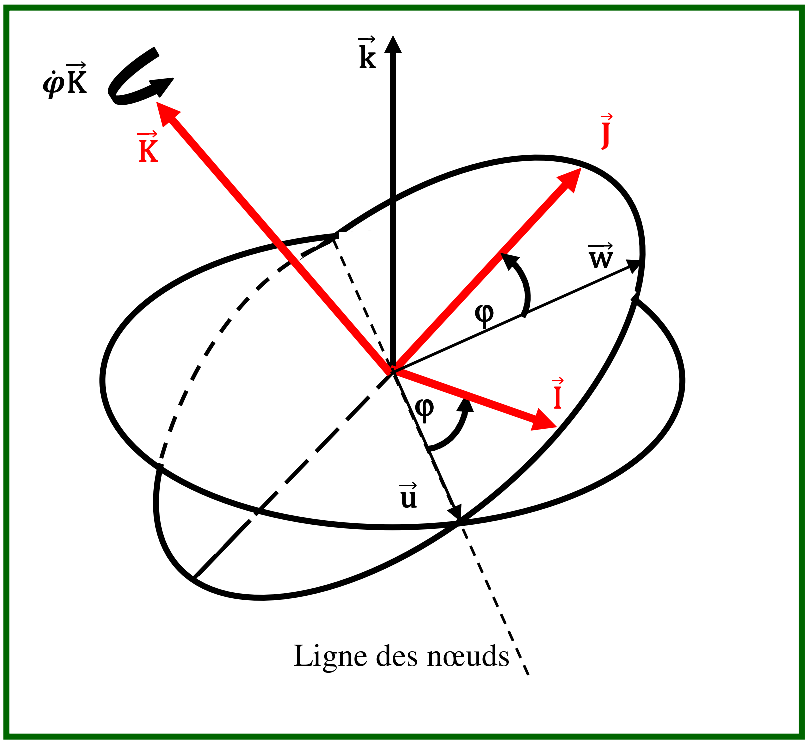


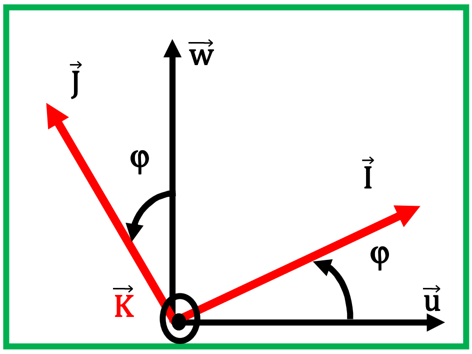


Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_2(O_s; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ par rapport à $\mathcal{R}_1(O_s; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ autour de l'axe de rotation $(O_s\vec{u})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta}\,\vec{u}$$

- La troisième rotation s'effectue autour de l'axe $(O_s\vec{K})$ avec l'angle φ tel que : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{K}) \rightarrow (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$





Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_s(O_s; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par rapport à $\mathcal{R}_2(O_s; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ autour de l'axe de rotation $(O_s\vec{K})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_2) = \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

L'appellation des angles d'Euler est d'origine astronomique :

ψ : s'appelle angle de **précession** qui est le mouvement de rotation lent autour de la verticale.

θ: s'appelle angle de **nutation** qui est le mouvement d'oscillation de l'axe de rotation propre du solide.

φ : s'appelle angle de **rotation propre** qui est le mouvement de rotation autour de l'axe du solide.

La droite $D(O_S, \vec{u})$ s'appelle **axe nodal** ou **ligne des nœuds**.

En conclusion, le paramétrage d'un solide ***non rectiligne* libre** est donné par $\boldsymbol{n = 3 + 3 = 6}$ ***coordonnées généralisées*** (3 pour la translation et 3 pour la rotation) qui doivent être des ***variables indépendantes*** et qu'on appelle **paramètres primitifs**.

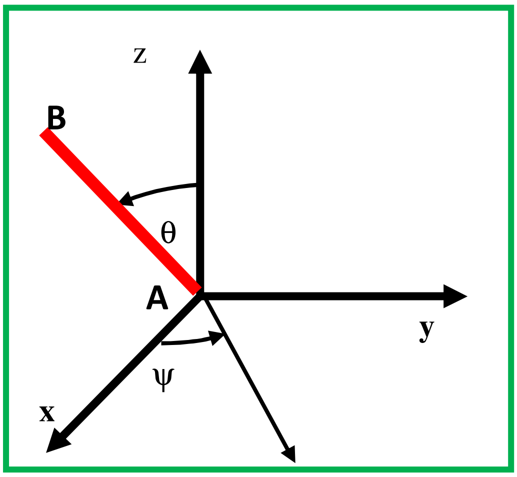
Exemples :

1. Un point matériel **libre** dans l'espace (peut être considéré comme un solide ponctuel) est décrit par $n = 3$ paramètres primitifs: les trois coordonnées de sa position.

2. Un solide **rectiligne** (AB) non ponctuel **libre** dans l'espace (par exemple une barre rigide) possède $n = 5$ coordonnées généralisées

❖ 3 degrés de translation : trois coordonnées de $A(x_A, y_A, z_A)$

❖ 2 degrés de rotation : 2 angles d'Euler : ψ (précession) et θ (nutation).



3. La position d'un système matériel, constitué de n_1 solides non rectilignes libres, de n_2 solides rectilignes non ponctuels libres et de n_3 points matériels libres, dépend de n **coordonnées généralisées** tel que:

$$n = 6\,n_1 + 5\,n_2 + 3\,n_3$$

II. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

Dérivation vectorielle. Formule de Varignon.

Soient $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ deux référentiels tel que $(\mathcal{R}')$ soit en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$. Soit $\vec{U}$ un vecteur quelconque alors la formule dite de **Varignon** s'écrit:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{U}}$$

Remarque

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$$

Formule fondamentale de la cinématique du solide (F.F.C.S).

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_S)$ un référentiel lié à (S). D'après la formule de Varignon, $\forall$ A et B $\in$ (S):

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant dans le référentiel $(\mathcal{R}_S)$ lié au solide (S), donc : $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = \vec{0}$

De plus :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(B/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R})$$

Comme (S) et $(\mathcal{R}_S)$ sont rigidement liés: $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})$

Par conséquent:

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in (\boldsymbol{S}) \qquad \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}$$

C'est la **F**ormule **F**ondamentale de la **C**inématique du **S**olide (F.F.C.S.) ou de Varignon.

III. Torseur cinématique

D'après la F.F.C.S., le champ des vecteurs vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ de vecteur associé $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ est antisymétrique et par conséquent c'est un torseur. On l'appelle **torseur cinématique** ou torseur **distributeur des vitesses** noté:

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}), \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})]$$

Ses éléments de réduction en un point A de S ($A \in S$) sont :

$\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})$ **:** résultante du torseur cinématique = vecteur rotation instantané de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$

$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})$: moment en A du torseur cinématique = vecteur vitesse de $A \in S$ par rapport à $(\mathcal{R})$

REMARQUES

1. Si $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \neq \vec{\boldsymbol{0}}$ **,** alors l'axe central (Δ) du torseur cinématique existe et on l'appelle **axe instantané de rotation** et **de glissement** ou encore **axe de viration**

2. **Le champ de vitesses est équiprojectif :** $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in (\boldsymbol{S}) \quad \overrightarrow{AB}.\, \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AB}.\, \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})$

IV. Mouvements de Translation et de rotation

1. Mouvement de translation - Couple

Le mouvement d'un solide (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ est un mouvement de translation si tout vecteur de (S) reste équipollent à lui-même au cours du mouvement :

$$\forall\, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in (\boldsymbol{S}) \quad \forall \boldsymbol{t} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}(\boldsymbol{t}) = \overrightarrow{\boldsymbol{cte}}$$

Dans un mouvement de translation d'un solide, le torseur cinématique est un ***couple*** :

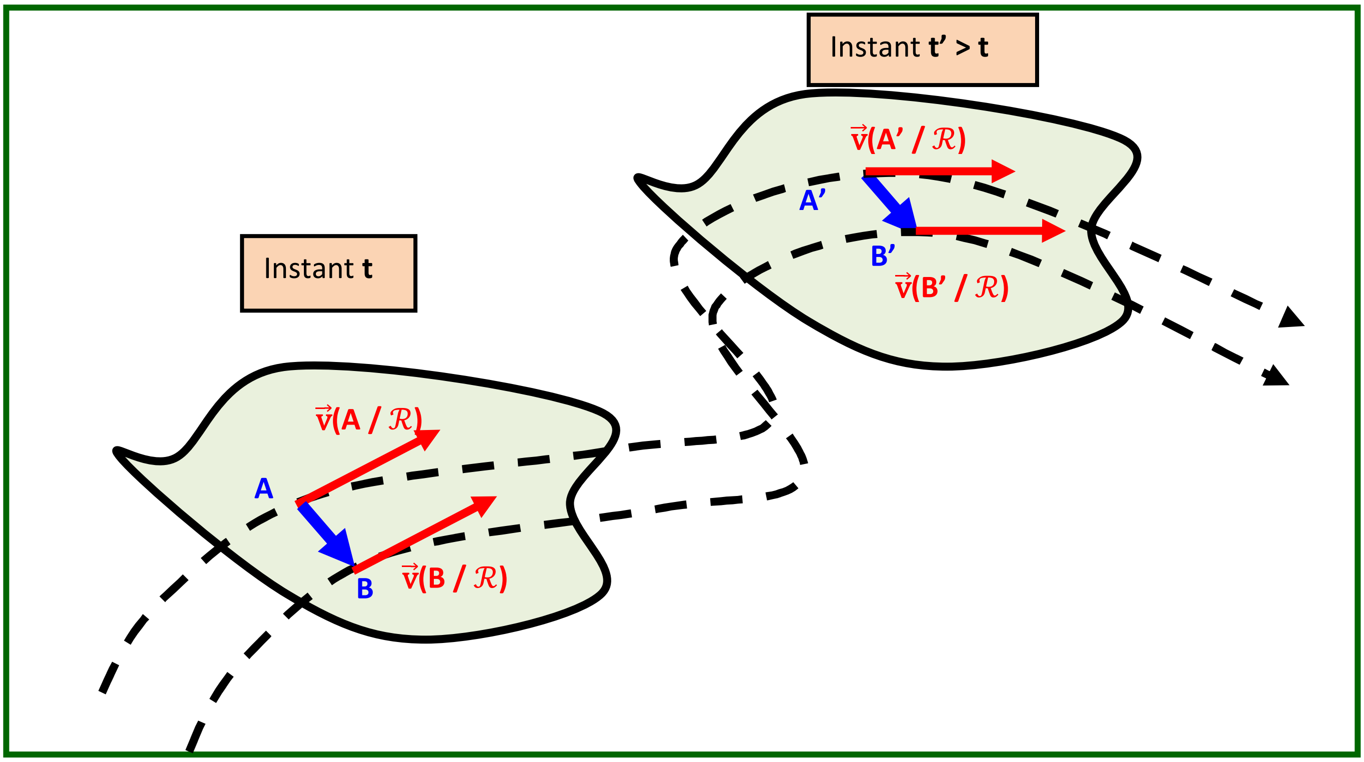
- Le champ des vitesses est uniforme
- le vecteur rotation instantané est nul : $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{0}}$.

Preuve :

1. Comme $\overrightarrow{\mathbf{AB}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{cte}}$, alors : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$

Ce qui donne : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(t) \quad \forall\, t$

Par conséquent, à un instant t donné, tous les vecteurs vitesse des points du solide ont une même direction. Le champ des vitesses est uniforme.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

Instant t : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(t)$

Instant $t' = t + dt$: $\vec{v}(B'/\mathcal{R}) = \vec{v}(A'/\mathcal{R}) = \vec{v}(t')$

Remarque

Dans un mouvement de translation du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}$ (O; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), les vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}_S(O_S;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, lié au solide (S) gardent des directions fixes dans ($\mathcal{R}$).

$$\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

2. D'après la F.F.C.S. on a: $\forall A, B \in (S) \quad \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

$$\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\Omega}}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$$

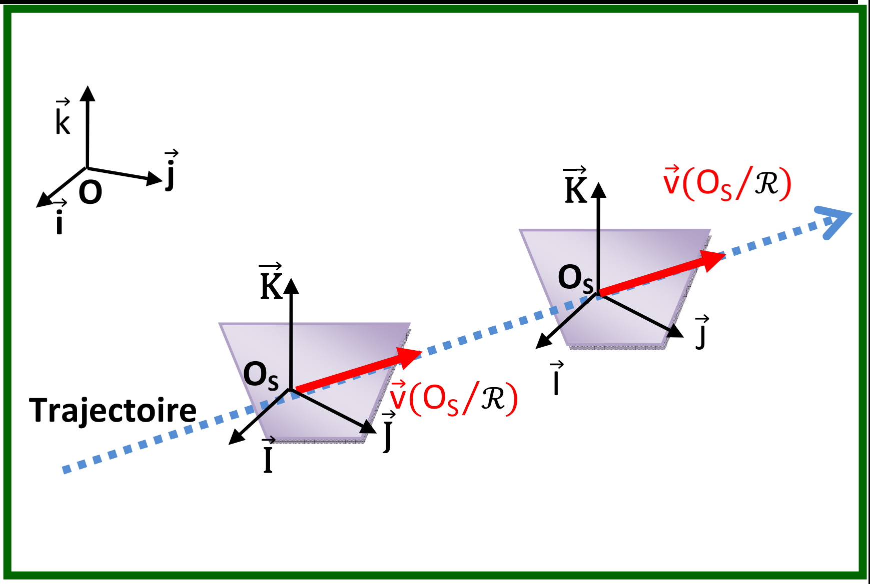
Comme $I_{[\mathcal{V}\,]} = \vec{\boldsymbol{v}}\,(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}).\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{0}$ et $\vec{\boldsymbol{\Omega}}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

Alors le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère ($\mathcal{R}$) est un **couple**:

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{v}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) \neq \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

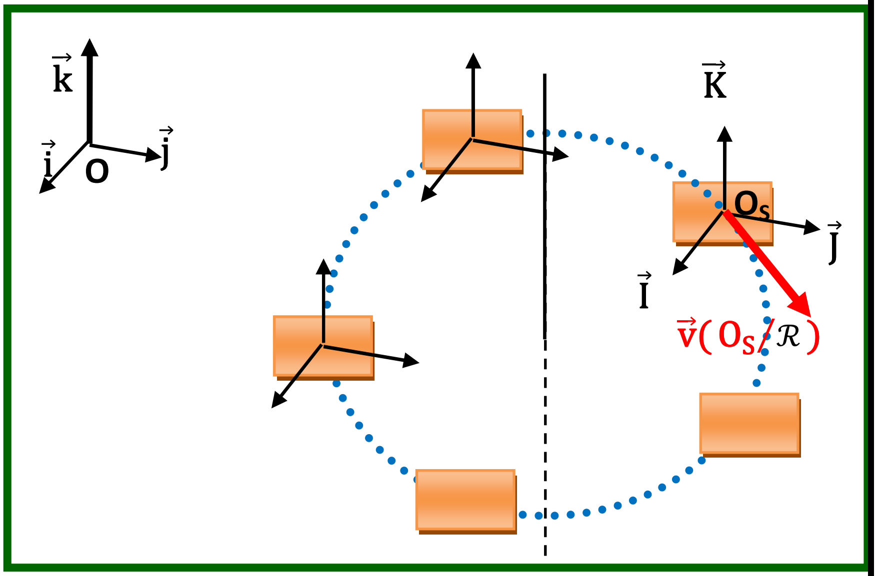
Mouvement de translation rectiligne

Le mouvement de translation de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ est dit **rectiligne** si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans $(\mathcal{R})$ est une **droite**.



Mouvement de translation circulaire

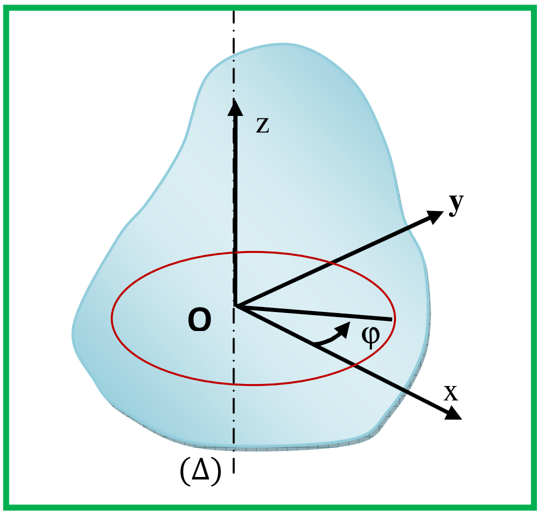
Le mouvement de translation de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ est dit **circulaire** si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans $(\mathcal{R})$ est un **cercle**.



2. Solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Soit (S) un solide en rotation autour d'un axe (Δ) **fixe** dans un référentiel $(\mathcal{R})$.

Soit O ∈ (Δ) : $\quad \vec{v}\,(O/\mathcal{R}) = \vec{0}$



La distance du point O à tout point du solide (S) est constante au cours du temps. Donc O est lié au solide (S) :

$$M \in (S) \qquad \vec{v}\,(M/\mathcal{R}) = \vec{v}\,(O/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Donc: $I_{[\mathcal{V}]} = \vec{v}\,(M/\mathcal{R}).\ \vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = 0$

Le torseur cinématique est un **glisseur** dont l'axe central est l'axe instantané de rotation (Δ).

Si tous les points du solide (S) sont en mouvement sur des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{k}$, à la même vitesse angulaire,$\dot{\varphi}$, alors :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$$

V. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère ($\mathcal{R}$). La formule de transport :

$$\forall \text{ A et B} \in (S) \qquad \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

En dérivant par rapport au temps, dans ($\mathcal{R}$), on obtient :

$$\vec{\gamma}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) + \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R})\right]_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \left[\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathcal{R}}$$

Sachant que :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{\mathcal{R}} = \vec{v}(B/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

On arrive à :

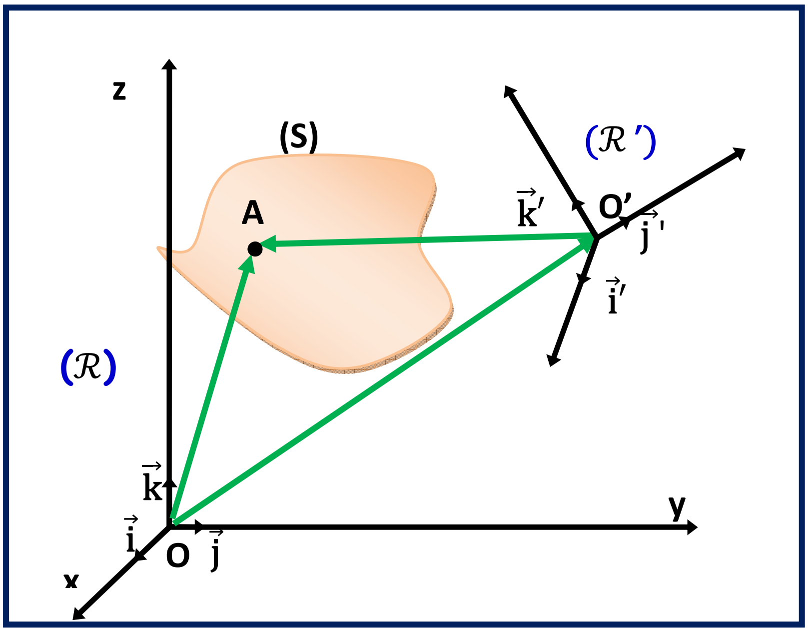
$$\boxed{\vec{\gamma}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) + \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R})\right]_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right]}$$

Le dernier terme $\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right]$ est en général non nul. Par suite, le champ des vecteurs accélération des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

VI. Composition de mouvements

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à deux référentiels ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{R}'$). Le référentiel $\mathcal{R}$ (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est choisi comme étant absolu et le référentiel $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est choisi comme étant un référentiel relatif en mouvement relatif par rapport à ($\mathcal{R}$). Soit A un point du solide (S). D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$



1. Composition des vecteurs rotation

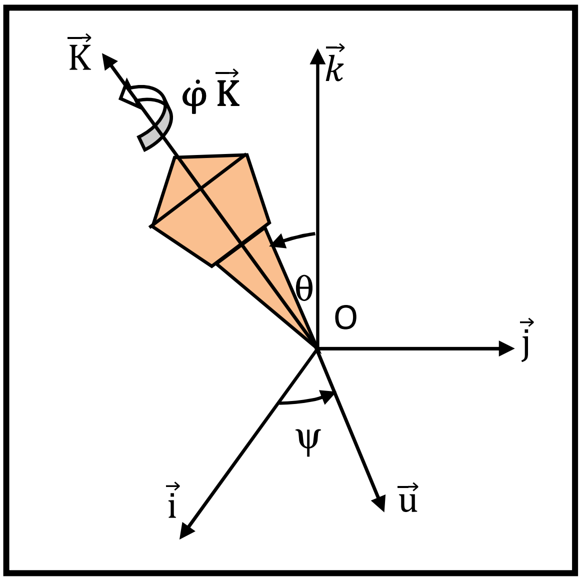
$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') = -\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/S)$$

Généralisation :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{\Omega}(\mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i+1})$$

Exemple : Rotation autour d'un point fixe



Soit $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère fixe et $\mathcal{R}_S(O_S \equiv O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ un repère lié à un solide (S) qui est en rotation autour du point fixe $O_S \equiv O$ (mouvement de rotation d'une toupie par exemple). Le vecteur rotation instantané de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$:

$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R})$

$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$

$$\mathcal{R}(O_S;\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \xrightarrow{(\vec{k},\psi)} \mathcal{R}_1(O_S;\vec{u},\vec{v},\vec{k}) \xrightarrow{(\vec{u},\theta)} \mathcal{R}_2(O_S;\vec{u},\vec{w},\vec{K}) \xrightarrow{(\vec{K},\varphi)} \mathcal{R}_S(O_S;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$$

En fonction des angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

2. Composition des vecteurs vitesse

La vitesse absolue du point A du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est la somme de sa vitesse relative par rapport à $\mathcal{R}'(O';\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ et de sa vitesse d'entrainement :

$$\vec{v}_a(A) = \vec{v}_r(A) + \vec{v}_e(A)$$

Vecteur vitesse absolue : $\vec{v}_a(A) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

Vecteur vitesse relative : $\vec{v}_r(A) = \vec{v}(A/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$

Vecteur vitesse d'entraînement : $\overrightarrow{v_e}\,(A) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'A}$

La vitesse d'entraînement est la vitesse absolue d'un point coïncidant A' fixe dans le repère relatif $(\mathcal{R}')$ $(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{A}') = \vec{0})$ et qui coïncide, à l'instant t, avec le point A dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$. Les points A et A' occupent la même position à l'instant t. On utilisera dans la suite la notation $\mathbf{A} \in \mathcal{R}'$ pour désigner le point coïncidant A':

$$A' \equiv \mathbf{A} \in \mathcal{R}'$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{A}') = \vec{\mathrm{v}}(\mathrm{A}'/\mathcal{R}') = \vec{\mathrm{v}}(\mathbf{A} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}') = \vec{0}$$

Par conséquent, la vitesse d'entrainement s'écrit :

$$\overrightarrow{v_e}\,(A) = \vec{v}_a(A \in \mathcal{R}') = \vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Finalement on peut écrire:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}'\big) + \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Remarque :

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}/\mathcal{R}')$$

$$\vec{v}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{v}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i+1})$$

On obtient également l'égalité des torseurs :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}') \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$$

D'où la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})] = [\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}')] + [\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

3. Composition des vecteurs accélération

L'accélération absolue d'un point A de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ est la somme de son accélération relative par rapport à $(\mathcal{R}')$, de son accélération d'entrainement et de son accélération de Coriolis :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{A}) + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{A}) + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{A})$$

Accélération absolue : $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}_a(A)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OA}}}{\boldsymbol{dt^2}}\right)_{\mathcal{R}}$

Accélération relative : $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{A}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\vec{v}_r(A)}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'A}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}'}$

Accélération de Coriolis ou Complémentaire : $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{2}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{A})$

L'accélération de Coriolis n'est non nulle que dans le cas d'un mouvement relatif par rapport à un repère en rotation !

Accélération d'entraînement : $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{A}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{O}'/\mathcal{R}) + \left(\frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{\Omega}}}{\mathbf{dt}}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O'A}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O'A}}\right)$

L'accélération d'entraînement est l'accélération absolue d'un point coïncidant $A \in R'$ fixe dans le repère relatif ($\mathcal{R}'$) et qui coïncide, à l'instant t, avec le point A dans son mouvement par rapport à ($\mathcal{R}$) :

$$\vec{\gamma}_e(A) = \gamma(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

On retrouve la relation de transfert obtenue dans le cas d'un champ d'accélération du fait que les points O' et $A \in \mathcal{R}'$ sont deux points du même référentiel solide ($\mathcal{R}$').

Finalement :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}') + \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{2}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}')}$$

Remarque

$$\vec{\gamma}_e(A) \neq \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{v}_e(A)}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\mathcal{R}}$$

VII. Cinématique de contact entre deux solides

1. Définitions

On dit que deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact, à un instant t, s'ils ont un ensemble commun de points matériels qui coïncident. Le contact entre deux solides est soit **ponctuel** (un seul point de contact) soit **multi-ponctuel** (linéique ou surfacique).

Liaison

- Le contact entre deux solides se traduit par une contrainte appelée **liaison** qui limite le mouvement relatif d'un solide par rapport à l'autre. La liaison est exprimée mathématiquement par une relation ou équation algébrique entre les paramètres primitifs, $q_i(\equiv x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ des solides en contact et/ou de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i$ $(\equiv \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$:

$$\boldsymbol{f(t, q_i, \dot{q}_i) = 0}$$

- La liaison est dite **holonome** si cette relation ne dépend pas des dérivées de ces paramètres :

$$\boldsymbol{f(t, q_i) = 0}$$

Par exemple, la rigidité d'un solide indéformable (S) est une liaison holonome : $\forall\, \boldsymbol{A, B} \in (\boldsymbol{S}), \quad \forall\, \boldsymbol{t} \qquad \left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,(\mathbf{t})\right\| = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2 + (\mathbf{z_B} - \mathbf{z_A})^2} = \mathbf{Cste}$

Dans le cas contraire, la liaison est dite **non-holonome :**

$$\boldsymbol{f(t, q_i, \dot{q}_i) = 0}$$

La liaison est dite **bilatérale** si tout mouvement de (S_1) et (S_2) ***exclut la rupture du contact*** entre les deux solides ($\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$). La liaison est dite **unilatérale** s'il y a possibilité de rupture du contact ($\boldsymbol{f} \geq 0\ ou \leq 0$)

<u>Degrés de liberté</u>

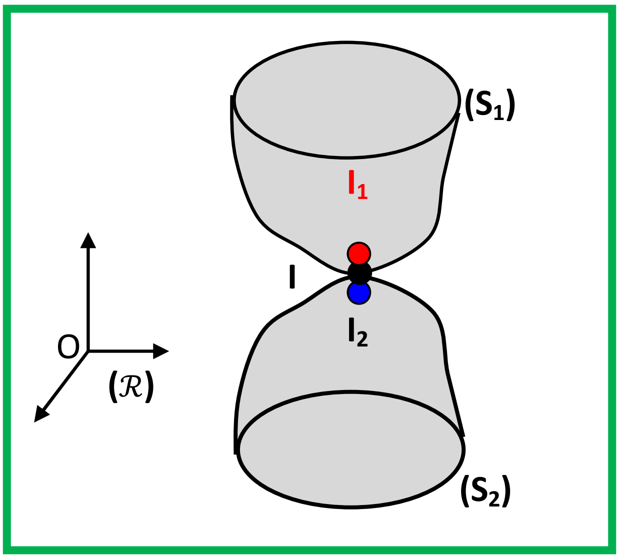
Si un solide est soumis à des **liaisons**, certains de ses paramètres primitifs deviennent des **variables dépendantes**. Par conséquent pour paramétrer la position d'un solide soumis à des liaisons, il ne faut choisir parmi le nombre de ces paramètres primitifs, **n,** qu'un nombre réduit de paramètres **indépendants, N** qui s'appelle **nombre de degrés de liberté,** et qui représente le nombre de mouvements ***indépendants*** de rotation et de translation**.** Le nombre de degrés de liberté **N** est généralement inférieur au nombre de paramètres primitifs**, n** :

$$\boldsymbol{N = n - N_l}$$

où $\boldsymbol{N_l}$ est le nombre de liaisons. Si le système est **libre** sans liaisons ($\boldsymbol{N_l} = \mathbf{0}$) alors: $\boldsymbol{N = n}$

2. Contact ponctuel

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit I le point géométrique de l'espace de contact entre (S_1) et (S_2) à l'instant t.



A chaque **instant t**, il est nécessaire de distinguer trois points confondus qui se trouvent au contact de (S_1) et de (S_2) :

- Le point matériel I_1 lié à S_1 ($I_1 \equiv I \in S_1$)
- Le point matériel I_2 lié à S_2 ($I_2 \equiv I \in S_2$)
- Le point de l'espace I n'appartenant ni à (S_1) ni à (S_2), qui au cours du mouvement se déplace sur (S_1) et sur (S_2).

  Les vitesses et accélérations de ces trois points sont en général différentes au cours du temps.

2.1. Vitesse de glissement

On appelle vecteur vitesse de glissement au point I, $\vec{v}_g(I;\ S_1/S_2)$, du solide (S_1) par rapport au solide (S_2), la vitesse d'entraînement du point I du solide (S_1) par rapport au solide (S_2).

$$\boxed{\vec{v}_g(I;\ S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1/S_2) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{I})}$$

D'après la composition des vitesses:

$$\vec{v}(I \in S_1/S_2) = \vec{v}(I/S_2) - \vec{v}(I/S_1)$$

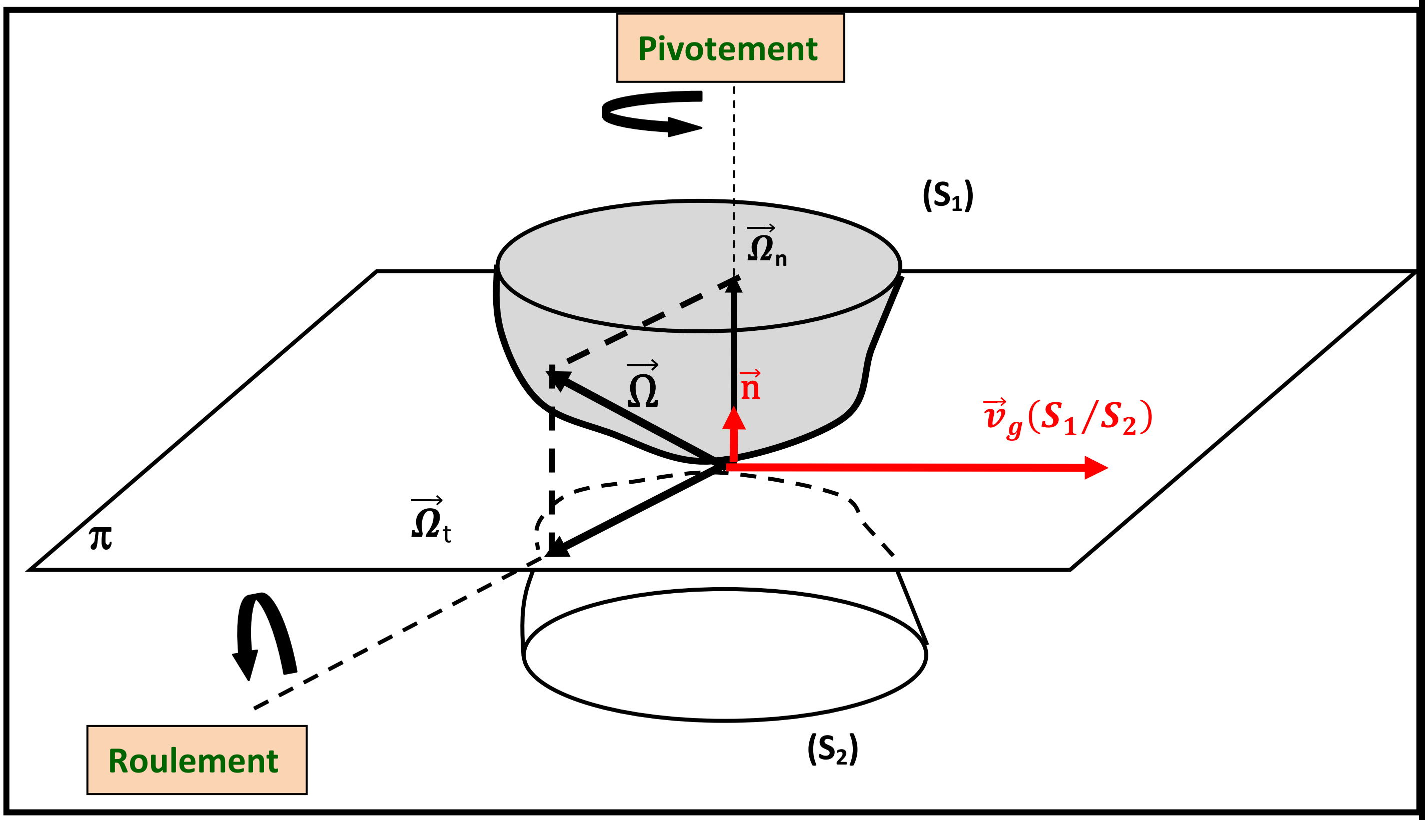
Ce qui donne:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I};\ \boldsymbol{S_1}/\boldsymbol{S_2}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{S_1}/\mathcal{R}) - \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{S_2}/\mathcal{R}) \qquad \forall\ (\mathcal{R})}$$

Le vecteur vitesse de glissement est indépendant du repère par rapport auquel les solides (S_1) et (S_2) sont en mouvement.

Remarque : $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I};\ \boldsymbol{S_1}/\boldsymbol{S_2}) = -\,\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I};\ \boldsymbol{S_2}/\boldsymbol{S_1})$

Proposition : Le vecteur vitesse de glissement est parallèle au plan tangent commun à (S_1) et à (S_2) en I.



Définition

Le solide (S_1) **roule sans glisser** sur le solide (S_2) si : $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I};\ \boldsymbol{S_1}/\boldsymbol{S_2}) = \vec{\boldsymbol{0}}$

2.2. Roulement et pivotement au point de contact.

On peut décomposer le vecteur rotation instantané du solide (S_1) par rapport au solide (S_2) en une composante normale et une composante tangentielle au plan (π) :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}_n + \vec{\Omega}_t$$

- $\vec{\Omega}_n = [\vec{\Omega}(S_1/S_2).\vec{n}\,]\,\vec{n}$: Vecteur rotation instantané de **pivotement** qui correspond à une rotation autour de l'axe ($I;\vec{\Omega}_n$) normal (perpendiculaire) au plan tangent (π). $\Omega_n = \|\vec{\Omega}_n\|$ est la vitesse angulaire de pivotement.
- $\vec{\Omega}_t = \vec{n} \wedge [\vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{n}]$: Vecteur rotation instantané de **roulement** qui correspond à une rotation autour de l'axe ($I;\vec{\Omega}_t$) tangent (parallèle) au plan tangent (π). $\Omega_t = \|\vec{\Omega}_t\|$ est la vitesse angulaire de roulement.

$$M \in (S_1) \qquad \vec{v}(M/S_2) = \vec{v}(I \in S_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{IM}$$

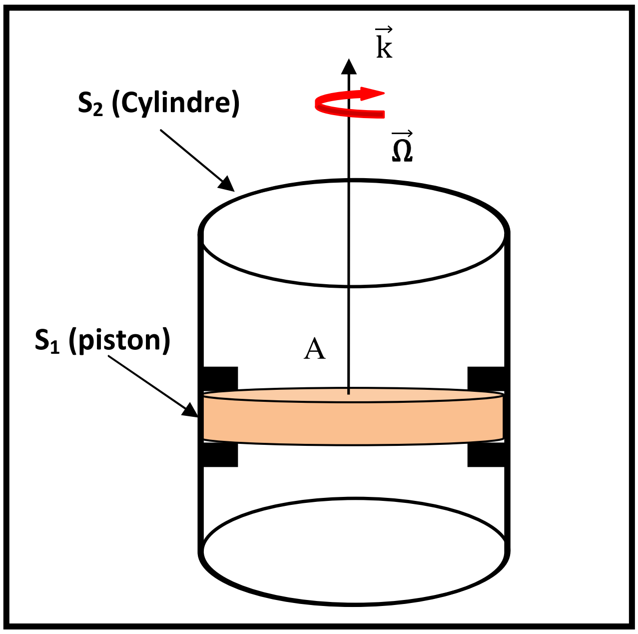
Ce qui peut s'écrire encore :

$$\vec{v}(M/S_2) = \underbrace{\vec{v}_g}_{\text{vitesse de glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_n \wedge \vec{IM}}_{\text{vitesse de pivotement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_t \wedge \vec{IM}}_{\text{vitesse de roulement}}$$

3. Contact multi-ponctuel. Quelques types de liaisons

3.1. Liaison rotoïde (pivot)

Un solide (S_1) est soumis à une liaison rotoïde d'axe ($A,\vec{k}$) par rapport au solide (S_2), si et seulement si, le seul mouvement possible de (S_1) par rapport à (S_2) est le mouvement de rotation d'axe ($A,\vec{k}$).



Par rapport au solide (S_2), le solide (S_1) n'a qu'un seul degré de liberté : une rotation (d'angle φ) autour de l'axe ($A,\vec{k}$).

$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$

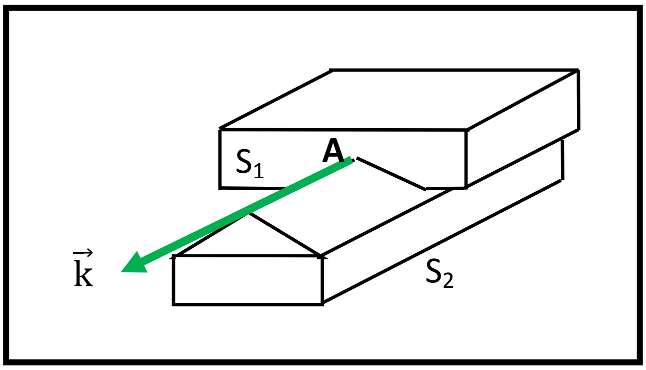
$\vec{v}(A \in S_1/S_2) = \vec{0}$ $\qquad A \in$ l'axe fixe de rotation

Le torseur cinématique de la liaison pivot d'axe ($A,\vec{k}$) est un glisseur:

$$[\mathcal{V}(S_1/S_2)]_A = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}, \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(M \in S_1/S_2) = \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \vec{AM}$$

3.2. Liaison glissière

Un solide (S_1) est soumis à une liaison glissière d'axe $(A, \vec{k})$ par rapport au solide (S_2), si et seulement si, le seul mouvement possible de (S_1) par rapport à (S_2) est un mouvement de translation d'axe $(A, \vec{k})$.



Par rapport au solide (S_2), le solide (S_1) n'a qu'un seul degré de liberté : une translation (de paramètre λ) selon l'axe $(A, \vec{k})$.

$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{0}$

$\vec{v}(A \in S_1/S_2) = \dot{\lambda}\,\vec{k}$ A est un point de (S_1)

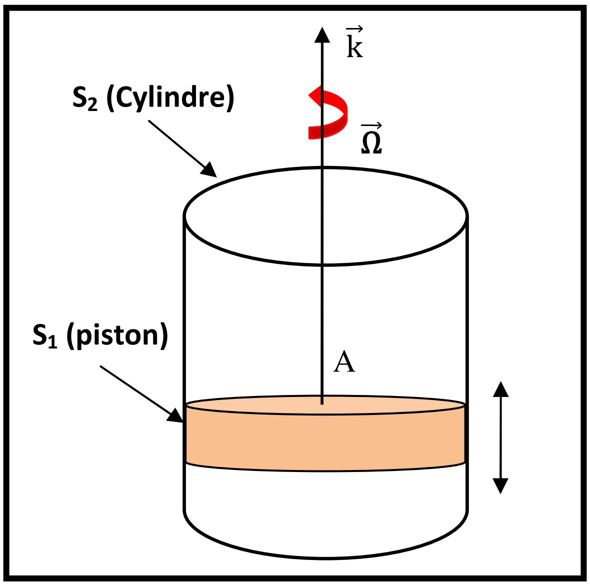
Le torseur cinématique de la liaison glissière d'axe $(A, \vec{k})$, est un couple:

$$[\mathcal{V}(S_1/S_2)]_A = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda} \end{Bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

$\vec{v}(M \in S_1/S_2) = \dot{\lambda}\,\vec{k}$

3.3. Liaison verrou (ou pivot-glissant)

Un solide (S_1) est soumis à une ***liaison verrou*** d'axe $(A, \vec{k})$ par rapport au solide (S_2), si et seulement si, les seuls mouvements possibles de (S_1) par rapport à (S_2) sont des mouvements de rotation d'axe $(A, \vec{k})$ et de translation d'axe $(A, \vec{k})$.



Par rapport au solide (S_2), le solide (S_1) n'a que deux degrés de liberté : une rotation (d'angle φ) autour de l'axe $(A, \vec{k})$ et une translation (de paramètre λ) selon l'axe $(A, \vec{k})$.

$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$

$\vec{v}(A \in S_1/S_2) = \dot{\lambda}\,\vec{k}$ A est un point de (S_1)

Le torseur cinématique de la liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{k})$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est:

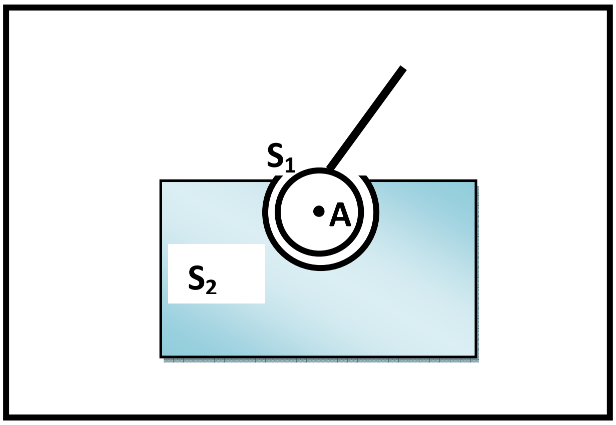
$$[\mathcal{V}(S_1/S_2)]_A = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & \dot{\lambda} \end{Bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

$\vec{v}(M \in S_1/S_2) = \dot{\lambda}\,\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}$

3.4. Liaison sphérique (ou rotule)

Un solide (S_1) est soumis à une ***liaison sphérique*** au point A par rapport au solide (S_2), si et seulement si, les seuls mouvements possibles de (S_1) par rapport à (S_2) sont des mouvements de rotation autour du point fixe A.

Par rapport au solide (S_2), le solide (S_1) a trois degrés de liberté : les trois rotations correspondant aux angles d'Euler: ψ, θ, φ.



$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}$

$\vec{v}(A \in S_1/S_2) = \vec{0}$

Le torseur cinématique de la liaison rotule de centre A est un glisseur:

$$[\mathcal{V}(S_1/S_2)]_A = {}_A\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}(M \in S_1/S_2) = (\dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}) \wedge \overline{AM}$$

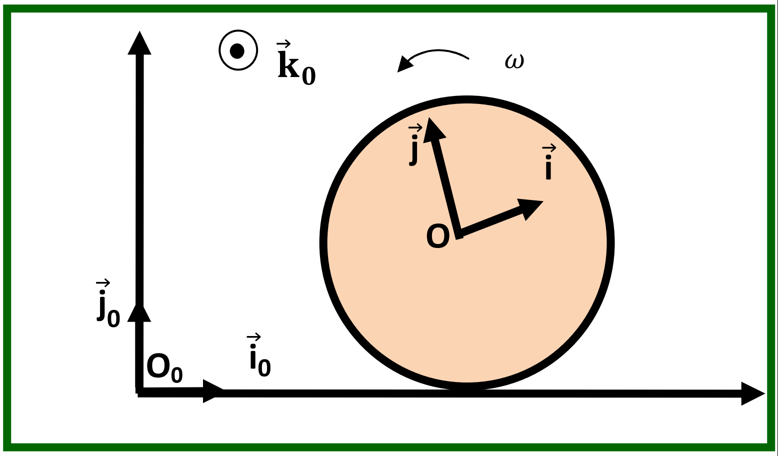
IV. Mouvement plan sur plan

1. Définition et propriétés

On considère un disque (S) qui roule sur une table (S_0).

Soit $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un référentiel lié à (S_0) et soit $\Pi_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ le plan de référence perpendiculaire à $\vec{k}_0$.

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{k}_0)$ un référentiel lié à (S).

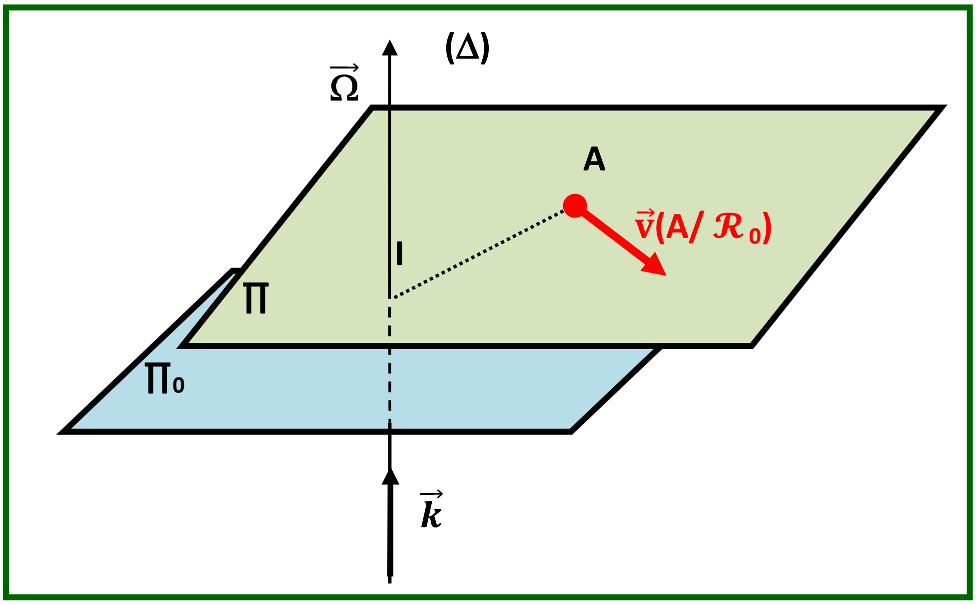


Si chaque point de (S) se déplace dans un plan (Π) de ($\mathcal{R}$) parallèle au plan de référence (Π_0), alors on dit que le mouvement de (S) par rapport à (S_0) est un **mouvement plan sur plan**. Dans ce cas :

- **Les vecteurs vitesse de tous les points de (S) restent dans des plans (Π) parallèles à (Π_0).**

Soit A ∈(S) et évoluant dans (Π). Le mouvement est plan sur plan alors :

$\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{k} = 0$ car $\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \in (\Pi)$



- **Le vecteur rotation instantané du solide (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$) est perpendiculaire au plan du mouvement Π:** $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$

$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \omega\vec{k}$

Pour A et B ∈ (S) et évoluant dans (Π) on a :

$$\underbrace{[\vec{v}(B/\mathcal{R}_0) - \vec{v}(A/\mathcal{R}_0)]}_{\in \Pi} = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\in \Pi} \quad \Rightarrow \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB} \in \Pi \quad \Rightarrow \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \perp \Pi$$

2. Centre Instantané de Rotation (CIR)

Dans un mouvement plan sur plan, l'invariant scalaire du torseur cinématique est nul :

$I_{[V]} = \vec{v}(A/\mathcal{R}_0)\,.\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = 0$ car $\vec{v}(A/\mathcal{R}_0)\,.\vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$

Comme $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \neq \vec{0}$, le torseur cinématique est un glisseur dont l'axe central (l'axe instantané de rotation) est la droite $\Delta(I, \vec{k})$ de vecteur directeur $\vec{k}$ et passant par le point central I de moment central nul :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \vec{0}.$$

Le point I est **unique**

Définition

On appelle **centre instantané de rotation** (**CIR**), à l'instant t, du mouvement plan sur plan de (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$), le point I, intersection entre le plan (Π) et l'axe instantané de rotation (Δ):

$$I \in \Pi \cap \Delta \qquad \vec{v}(I \in \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

Au cours du mouvement, le point I change de position dans (Π) et ($Π_0$).

3. Base et roulante

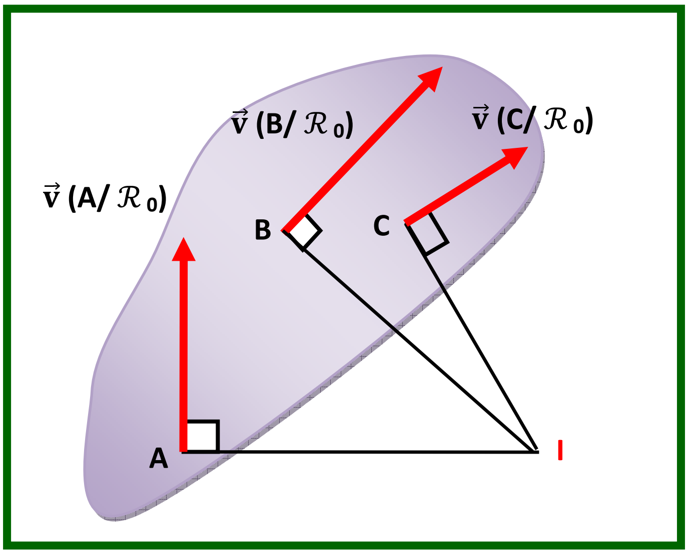
1. La trajectoire du CIR dans le plan (Π_0) est appelée **base** du mouvement plan sur plan de (Π) par rapport à (Π_0).
2. La trajectoire du CIR dans le plan (Π) est appelée **roulante** du mouvement plan sur plan de (Π) par rapport à (Π_0).

La base et la roulante roulent sans glisser l'une sur l'autre. Les deux courbes sont tangentes au point I (CIR)

4. Recherche géométrique du CIR

Soit I, le centre instantané de rotation.

Soit M un point quelconque lié au plan (Π) du solide (S).



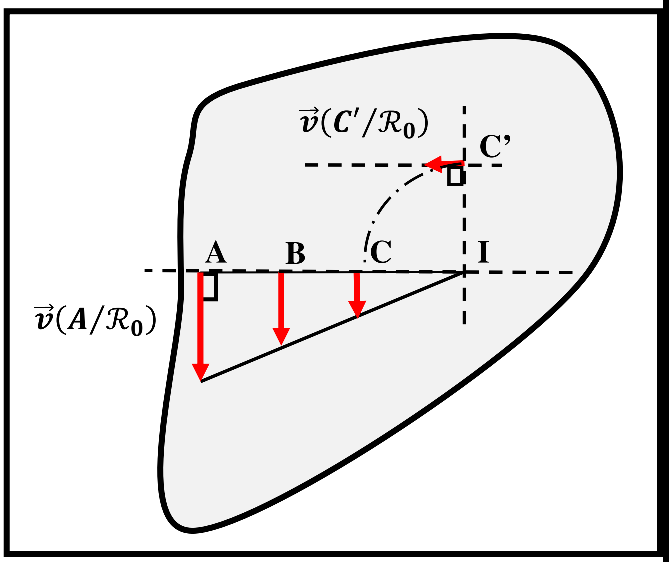
$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{v}(I/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{IM}$$
$$= \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{IM}$$

Donc $\quad \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_0) \perp \overrightarrow{\boldsymbol{IM}}$

Le CIR se trouve à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesse du solide.

5. Champ des vecteurs. Méthode des triangles :

Connaissant la position du CIR et un vecteur vitesse, on peut déterminer géométriquement tous les vecteurs vitesses d'un solide.



$\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_0)\| = \boldsymbol{IM}\|\vec{\Omega}\|$ car $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \perp \overrightarrow{\boldsymbol{IM}}$

$\forall\, \boldsymbol{M} \in (\Pi)$ lié à (S) on a :

$$\frac{\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_0)\|}{\boldsymbol{IM}} = \boldsymbol{cte}$$

Pour les points quelconques A, B, C, on a :

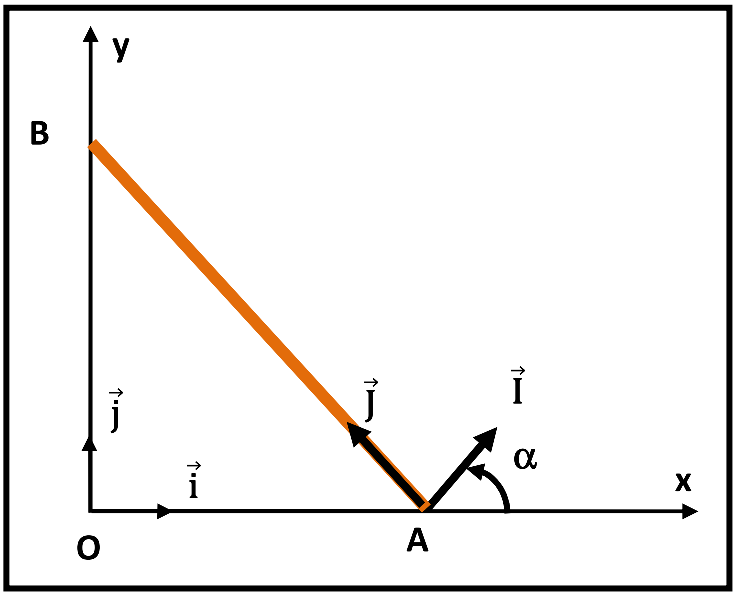
$$\frac{\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}_0)\|}{\boldsymbol{IA}} = \frac{\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)\|}{\boldsymbol{IB}} = \frac{\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_0)\|}{\boldsymbol{IC}}$$

Les vecteurs situés sur une même trajectoire circulaire ont donc même module. C et C'appartiennent à une même trajectoire circulaire de centre I: IC' = IC. Donc : $\|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}_0)\| = \|\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{C}'/\boldsymbol{R}_0)\|$

Exercice 1

Soit une barre (AB) rigide et homogène de longueur **L**, en mouvement dans le plan vertical **xOy** du référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'extrémité A glisse sur l'axe Ox, alors que l'extrémité B glisse sur l'axe Oy. Soit $\mathcal{R}_1(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ le référentiel lié à la barre (AB). La barre (AB) est repérée dans ($\mathcal{R}$) par l'angle α.

NB : Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) de ($\mathcal{R}$)

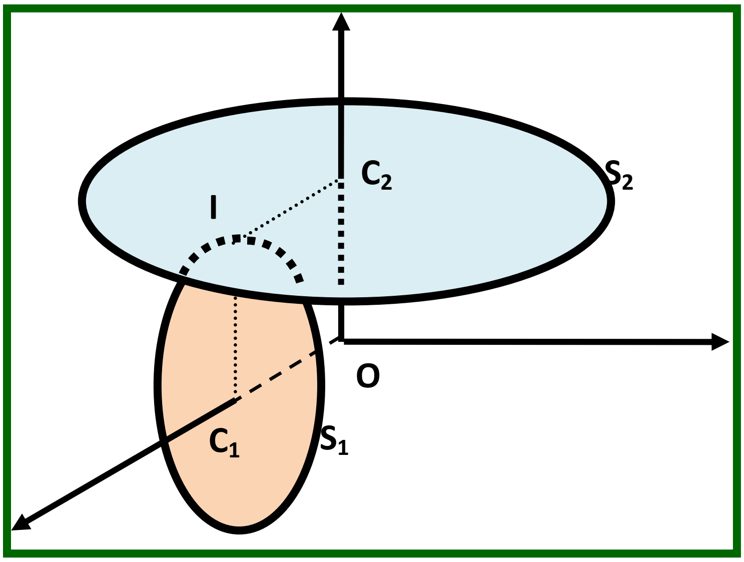


1. Paramétrage de (S)
2. Déterminer le torseur cinématique au point A $[\mathcal{V}\,(AB/\mathcal{R})]_A$. Préciser sa nature.
3. Déterminer le moment central et l'axe central du torseur cinématique
4. Calculer de deux manières différentes les vecteurs vitesses : $\vec{V}(B/\mathcal{R})$ **et** $\vec{V}(O \in AB/\mathcal{R})$**.**
5. Calculer de deux manières différentes les vecteurs accélérations : $\vec{\gamma}(B/\mathcal{R})$ **et** $\vec{\gamma}(O \in AB/\mathcal{R})$
6. Trouver géométriquement et par calcul, la position du centre instantané de rotation **I** du mouvement plan sur plan de la barre (AB) dans ($\mathcal{R}$)
7. Déterminer la base (**b**) et la roulante (**r**) du mouvement plan sur plan de la barre (AB) par rapport à ($\mathcal{R}$). Tracer la base et la roulante.
8. Calculer les vecteurs vitesses du centre instantané de rotation: $\vec{V}(I/b)$ et $\vec{V}(I/r)$**.** Conclure

---

Exercice 2 : Variateur à plateau

$\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère fixe. Un disque (S_1) de centre C_1 et de rayon R_1, tourne autour de l'axe ($O\,\vec{i}$) . Le centre C_1 est sur ($O\,\vec{i}$) et le plan de (S_1) est perpendiculaire à ($O\,\vec{i}$). Un plateau circulaire (S_2) de centre C_2 tourne autour de l'axe ($O\,\vec{k}$). Le centre C_2 est sur ($O\,\vec{k}$) et le plan de (S_2) est perpendiculaire à ($O\,\vec{k}$). Le plateau circulaire roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que :



$\overrightarrow{C_2I} = R_2\vec{i}.\qquad (R_2 > 0)$

$\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \omega_1\vec{i}$

$\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}) = \omega_2\vec{k}$

1. Déterminer la relation entre la vitesse angulaire $\omega_2$du plateau (S_2) et la vitesse angulaire ω_1 du disque (S_1).

2. Déterminer le vecteur rotation de roulement et le vecteur rotation de pivotement du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) en fonction de ω_1 , R_1 et R_2.

Ch. III

GEOMETRIE DES MASSES

Un système matériel (S) désigne un ensemble de points matériels ou de solides disjoints ($\boldsymbol{S} = \bigcup_j \boldsymbol{S_j}$). Un mouvement quelconque d'un système peut se décomposer en une translation et une rotation. Le système matériel oppose à son mouvement une résistance due à sa masse ou à la répartition de cette masse : c'est ce qu'on appelle l'**inertie**. La résistance à la translation est due à la **masse** elle-même. La résistance à la rotation est due à la répartition de la masse dans le système. Cette dernière est mesurée par les **moments d'inertie**.

I. Masse

1. Définition

En mécanique classique, la masse d'un système matériel (S) est une grandeur physique qui est:

- strictement positive : m (S) > 0
- additive (extensive)
- invariante : même valeur dans tous les référentiels
- conservée pour un système fermé (solide par exemple) : $\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = 0$

2. Système discret

Si le système (S) est constitué d'un ensemble de N points matériels de masse m_i ($\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{N}$), alors d'après la propriété d'additivité, la masse totale m du système est :

$$\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{m_i}$$

3. Système continu

Si le système (S) est continu (par exemple un solide), alors la masse totale du système est :

$$\boldsymbol{m} = \int_{(\boldsymbol{S})} \boldsymbol{dm}$$

Où dm est la masse élémentaire d'un élément de matière de (S)

Distribution Volumique de masse volumique ρ

$$\boldsymbol{m} = \iiint_V \boldsymbol{\rho}\ \boldsymbol{dv}$$

Si le système est homogène : ρ = Cte : $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{V}$

Distribution Surfacique de masse surfacique σ:

$$m = \iint_s \sigma \; ds$$

Si le système est homogène : σ = Cte. $m = \sigma\, s$

Distribution Linéique de masse linéique λ :

$$m = \int_L \lambda \, dL$$

Si le système est homogène : $\lambda = Cste \quad m = \lambda\, L$

II. Centre d'inertie

1. Définition

Système discret

Le centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système matériel (S), constitué d'un ensemble de N points matériels M_i, de masse m_i ($i = 1, \dots, N$), est le point géométrique G tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Il s'agit du barycentre des points matériels M_i pondérés par leur masse m_i. Si A est un point quelconque de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{AM_i}$$

Système Continu

Dans ce cas, on a :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0}$$

Si A est un point quelconque de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_{(S)} \overrightarrow{AM} \; dm$$

2. Méthodes de détermination du centre d'inertie

2.1 Calcul direct

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. Soit G le centre d'inertie d'un système matériel (S).

$$\overrightarrow{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \, \vec{k}$$

Système discret

Considérons le cas d'un système matériel (S) constitué de N points matériels M_i ($\mathbf{i = 1, \ldots, N}$), respectivement, de masse m_i et de vecteur position, $\overrightarrow{OM_i}$ dans ($\mathcal{R}$) tel que:

$$\overrightarrow{OM_i} = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$$

Les coordonnées du centre d'inertie, G sont données par :

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad z_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Système continu

Soit M un point matériel quelconque du système matériel (S), de vecteur position, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$**,** dans ($\mathcal{R}$) tel que:

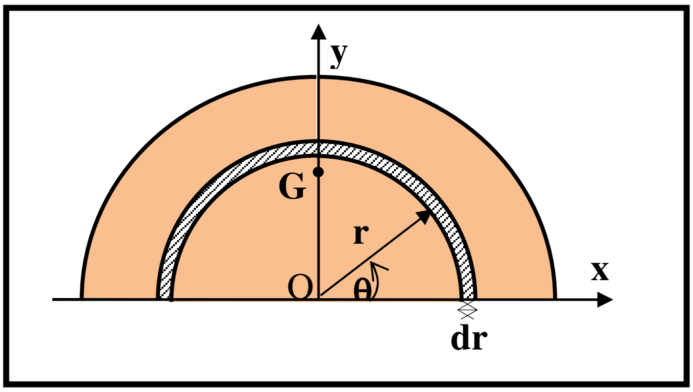
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les coordonnées du centre d'inertie, G, sont données par :

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_V \rho\, x\, dv \qquad y_G = \frac{1}{m}\iiint_V \rho\, y\, dv \qquad z_G = \frac{1}{m}\iiint_V \rho\, z\, dv$$

Les cas bidimensionnel et unidimensionnel peuvent s'en déduire de manière similaire.

<u>Exemple</u> : Demi-disque homogène de rayon R



Le demi-disque est dans le plan (xOy) :

$\mathbf{z = 0}$ donc $\mathbf{z_G = 0}$

<u>Coordonnées polaires</u> (r, θ):

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

<u>Surface élémentaire</u> : $ds = r dr d\theta$

La surface du demi-disque de rayon R est :

$S = \int_0^R \int_0^\pi r dr d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$

<u>Masse élémentaire</u> : $dm = \sigma\, ds = \sigma\, r dr d\theta$

Système homogène : σ = Cte donc $m = \sigma S$ et $\sigma = \frac{2m}{\pi R^2}$

<u>Coordonnées du centre d'inertie, G</u> :

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_S y dm = \frac{\sigma}{m}\iint_S y ds = \frac{1}{S}\iint_S y ds = \left(\frac{2}{\pi R^2}\right)\int_0^R\int_0^\pi r^2 \sin\theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi = \frac{4R}{3\pi}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x dm = \frac{1}{S}\iint_S x ds = \left(\frac{2}{\pi R^2}\right)\int_0^R\int_0^\pi r^2 \cos\theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [\sin\theta]_0^\pi = 0$$

Donc le centre de masse G a pour coordonnées dans ($\mathcal{R}$): $G\left(0, \frac{4R}{3\pi}, 0\right)$

2.2 Utilisation de la symétrie

Le centre d'inertie, G d'un système (S) est un point invariant des opérations de symétrie et par conséquent, il appartient aux éléments de symétrie de (S).

Symétrie par rotation : G appartient à l'axe de rotation

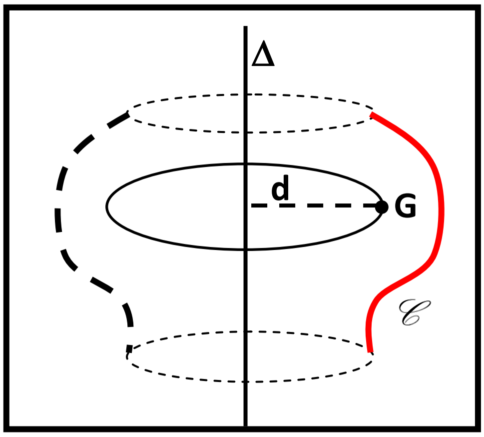
Symétrie plane (miroir) : G appartient au plan de symétrie.

Exemple : Demi-disque homogène de rayon R

Le plan (yOz) est un plan de symétrie (miroir). Donc le centre d'inertie G appartient au plan (yOz). Par conséquent : $\mathbf{x_G = 0}$

2.3 Utilisation des théorèmes de Guldin

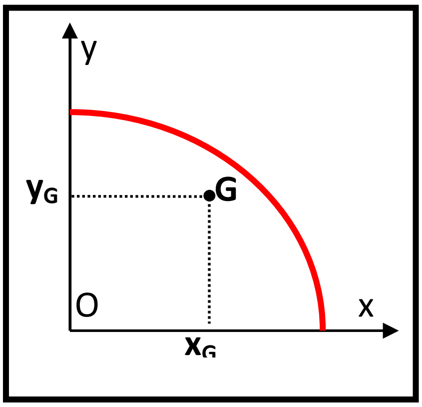
Premier théorème de Guldin



Soit une **courbe plane** ($\mathscr{C}$) homogène, de longueur L et de centre de masse G. La rotation de cette courbe, autour d'un axe de rotation (Δ), ne la coupant pas, engendre une surface d'aire S. La distance de G à (Δ) est :

$$d = \frac{S}{2\pi L}$$

Exemple: Quart de cerceau de rayon R



La longueur du quart de cerceau de rayon R est: $\boldsymbol{L = \pi R/2}$

Rotation autour de l'axe (Oy) : Cette rotation engendre une demi-sphère creuse de surface : $S = 2\pi R^2$

La distance de G à l'axe (Oy) est donc :

$$x_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2\pi R^2}{2\pi(\pi R/2)} = \frac{2R}{\pi}$$

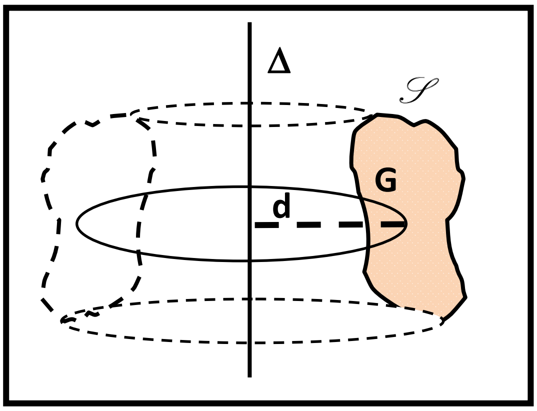
Rotation autour de l'axe (Ox) : Cette rotation engendre une demi-sphère creuse de surface : $S = 2\pi R^2$

La distance de G à l'axe (Ox) est donc :

$$y_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2\pi R^2}{2\pi(\pi R/2)} = \frac{2R}{\pi}$$

Donc le centre d'inertie, G a pour coordonnées dans ($\mathcal{R}$): $\mathbf{G\left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}, 0\right)}$

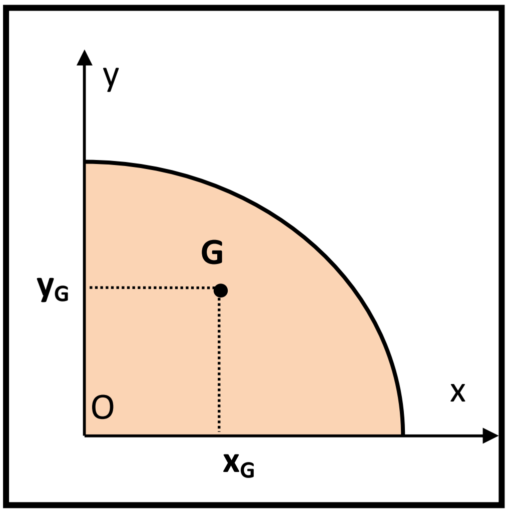
Second théorème de Guldin



Soit une **surface plane** ($\mathscr{S}$) homogène, d'aire S, et de centre de masse G. La rotation de cette surface autour d'un axe (Δ), ne la coupant pas, engendre un volume V. La distance de G à Δ est :

$$d = \frac{V}{2\pi S}$$

Exemple : Quart de disque de rayon R



La surface du quart de disque est : S = $\pi R^2/4$

Rotation autour de l'axe (Oy) :

Cette rotation engendre une demi-sphère pleine de volume :

$$V = 2\pi R^3/3$$

La distance de G à l'axe (Oy) est donc :

$$x_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{2\pi R^3/3}{2\pi(\pi R^2/4)} = \frac{4R}{3\pi}$$

Rotation autour de l'axe (Ox) :

Cette rotation engendre une demi-sphère pleine de volume : $V = 2\pi R^3/3$

La distance de G à l'axe (Ox) est donc :

$$y_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{2\pi R^3/3}{2\pi(\pi R^2/4)} = \frac{4R}{3\pi}$$

Donc le centre d'inertie, G a pour coordonnées dans ($\mathcal{R}$): $G\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, 0\right)$

III. Le référentiel barycentrique

Soit (S) un système matériel de centre d'inertie, G, en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Définition

Le référentiel **barycentrique,** $\mathcal{R}_G(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du système (S) est le référentiel d'origine G, en **translation** par rapport au référentiel ($\mathcal{R}$) :

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_G/\mathcal{R}) = \vec{0}}$$

2. Vecteurs vitesse et accélération

Vecteur vitesse et accélération de G dans $(\mathcal{R})$

Le vecteur- vitesse du centre d'inertie, G par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/R) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}} \int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\, \boldsymbol{dm}$$

Le vecteur- accélération du centre d'inertie, G par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{G}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}} \int_{\mathbf{M} \in (\mathbf{S})} \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\, \mathbf{dm}$$

Vecteurs vitesse et accélération dans $(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$

Le centre d'inertie G est fixe dans $(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$:

$$\vec{v}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{\gamma}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

Ou encore:

$$\int_{\mathbf{M} \in (\mathbf{S})} \vec{\mathbf{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_{\mathbf{G}})\mathbf{dm} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\int_{\mathbf{M} \in (\mathbf{S})} \vec{\gamma}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_{\mathbf{G}})\mathbf{dm} = \vec{\mathbf{0}}$$

On aurait pu trouver ces résultats par différentiation de l'intégrale exprimant que G est le centre d'inertie de (S), donc:

$$\int_{\mathbf{M} \in (\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{G}\boldsymbol{M}}\mathbf{dm} = \vec{\mathbf{0}}$$

3. Composition des mouvements

Composition des vecteurs rotation instantané

On a :

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}/\mathcal{R})$$

$\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$ car $(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$ est en translation par rapport à $(\mathcal{R})$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})}$$

Composition des vecteurs vitesse et accélération

$(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$ est choisi comme référentiel relatif par rapport à $(\mathcal{R})$. M ∈ (S):

$$\vec{v}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \vec{v}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) + \vec{v}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$$

$$\vec{\gamma}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) + \vec{\gamma}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$$

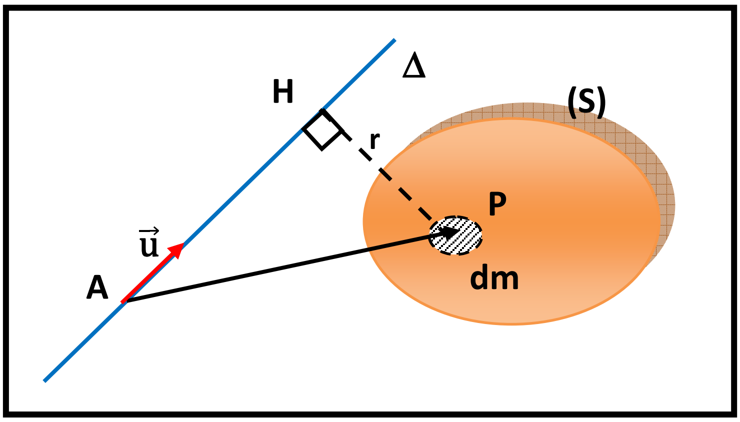
IV. Moments d'inertie, opérateur d'inertie et matrice d'inertie d'un solide

1. Moment d'inertie par rapport à un axe

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) est le scalaire positif défini par:

$$\boxed{\mathbf{I}_{\Delta}(\mathbf{S}) = \int_{\mathbf{P}\in(\mathbf{S})} \mathbf{r}^2 \, \mathbf{dm}}$$

où $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{PH} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \Delta)$ est la distance du point P du solide (S) à l'axe (Δ). H étant la projection orthogonale du point P sur l'axe (Δ).



2. Opérateur d'inertie

En utilisant le triangle AHP rectangle en H, la distance **r** du point P du solide (S) à l'axe Δ(A,$\vec{\mathbf{u}}$) passant par le point A et de vecteur directeur unitaire $\vec{\mathbf{u}}$ est :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{AP}\left|\boldsymbol{sin}(\vec{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{AP}})\right| = \left|\vec{\mathbf{u}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AP}}\right|$$

Donc :

$$\boldsymbol{r^2} = (\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}).(\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}) = \vec{\boldsymbol{u}}.\left[\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \wedge (\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}})\right]$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{I_{\Delta}(S)} = \int_{\boldsymbol{P}\in(\boldsymbol{S})} \boldsymbol{r^2}\,\boldsymbol{dm} = \vec{\boldsymbol{u}}.\int_{\boldsymbol{P}\in(\boldsymbol{S})} \left[\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \wedge (\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}})\right]\boldsymbol{dm} = \vec{\boldsymbol{u}}\,.\overrightarrow{\boldsymbol{J_A}}(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{u}})$$

Cette expression fait apparaitre un opérateur linéaire qu'on appelle opérateur d'inertie du solide (S) au point A :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{J_A}}(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{u}}) = \int_{\boldsymbol{P}\epsilon(\boldsymbol{S})} \left[\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \wedge (\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}})\right] \boldsymbol{dm}}$$

Comme : $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \wedge (\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}^2)\,\vec{\boldsymbol{u}} - (\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}.\vec{\boldsymbol{u}})\,\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$

Alors : $\overrightarrow{\boldsymbol{J_A}}(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{u}}\left[\int_{\boldsymbol{P}\epsilon(\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}^2\,\boldsymbol{dm}\right] - \int_{\boldsymbol{P}\epsilon(\boldsymbol{S})} (\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}.\vec{\boldsymbol{u}})\,\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\,\boldsymbol{dm}$

3. Matrice d'inertie

- L'opérateur d'inertie $\overrightarrow{\mathbf{J_A}}$ est symétrique et linéaire. Donc on peut lui associer une matrice symétrique $\mathbf{II_A(S)}$, appelée matrice d'inertie ou tenseur d'inertie du solide (S) au point A.

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{J_A}}(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{II_A}(\boldsymbol{S}).\vec{\boldsymbol{u}}}$$

- Le moment d'inertie par rapport à un axe $\Delta(A,\vec{u})$ est donc :

$$\boxed{I_\Delta(S) = \vec{u}\,.\overrightarrow{J_A}(\,S,\vec{u}) = \,{}^t\vec{u}\,.II_A(S).\vec{u}}$$

${}^t\vec{u}$ est le transposé du vecteur unitaire $\vec{u}$.

Eléments de la matrice d'inertie $II_O(S)$

Soit (S) un solide en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ (O; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) orthonormé direct. La matrice d'inertie de (S) au point O dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ peut s'écrire comme:

$$\boxed{II_O(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}}$$

Les éléments diagonaux : I_{xx}, I_{yy} **et** I_{zz} s'appellent les moments d'inertie

Les éléments non-diagonaux : I_{xy}, I_{xz} **et** I_{yz} s'appellent les produits d'inertie

$$I_{xx} = {}^t\vec{i}\,.II_O(S).\vec{i},$$

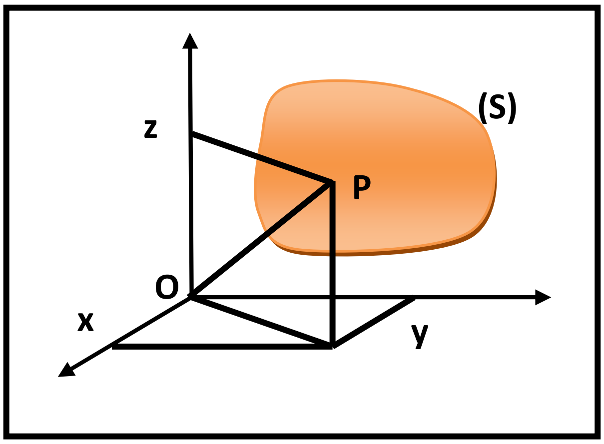
$$I_{yy} = {}^t\vec{j}\,.II_O(S).\vec{j},$$

$$I_{xy} = {}^t\vec{i}\,.II_O(S).\vec{j}$$

Etc…

Moments d'inertie : I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}

Calculons par exemple I_{xx} :



$$I_{xx} = {}^t\vec{i}\,.II_O(S).\vec{i} = \vec{i}\,.\,\overrightarrow{J_O}(\,S,\vec{i})$$

$$\overrightarrow{J_O}(\,S,\vec{i}) = \vec{i}\int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{OP}^2\;dm - \int_{P\epsilon(S)} (\overrightarrow{OP}.\vec{i})\overrightarrow{OP}\;dm$$

$$I_{xx} = \vec{i}.\,\overrightarrow{J_O}(\,S,\vec{i})$$

$$= \int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{OP}^2\;dm - \int_{P\epsilon(S)} (\overrightarrow{OP}.\vec{i})^2\;dm$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$I_{xx} = \int_{P\epsilon(S)} (x^2+y^2+z^2)\;dm - \int_{P\epsilon(S)} x^2\,dm = \int_{P\epsilon(S)} (y^2+z^2)\;dm$$

(y^2+z^2) est le carré de la distance du point P à l'axe (Ox)

Produits d'inertie : I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}

Calculons par exemple I_{xy} :

$$I_{xy} = {}^t\vec{i}\;.\;II_O(S)\;.\;\vec{j} = \vec{i}.\,\overrightarrow{J_O}(\,S,\vec{j})$$

$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{j}) = \vec{j}\int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{OP}^2\ dm - \int_{P\epsilon(S)} \left(\overrightarrow{OP}.\vec{j}\right)\overrightarrow{OP}\ dm$$

$$I_{xy} = \vec{\imath}.\ \overrightarrow{J_O}(S,\vec{j}) = -\int_{P\epsilon(S)} \left(\overrightarrow{OP}.\vec{\imath}\right)\left(\overrightarrow{OP}.\vec{j}\right) dm = -\int_{P\epsilon(S)} xy\ dm$$

On peut de façon similaire définir les deux autres moments et produits d'inertie.

En résumé :

- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) : $A = I_{xx} = \int_{(S)}(y^2 + z^2)dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) : $B = I_{yy} = \int_{(S)}(x^2 + z^2)dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) : $C = I_{zz} = \int_{(S)}(x^2 + y^2)dm$
- Produit d'inertie par rapport aux axes (Ox) et (Oy) : $F = -I_{xy} = \int_{(S)} xydm$
- Produit d'inertie par rapport aux axes (Ox) et (Oz) : $E = -I_{xz} = \int_{(S)} xzdm$
- Produit d'inertie par rapport aux axes (Oy) et (Oz) : $D = -I_{yz} = \int_{(S)} yzdm$

La matrice d'inertie du solide (S) au point O, relativement à la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, s'écrit :

$$\boxed{II_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})}}$$

Moment d'inertie par rapport à un point

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un point A est défini par:

$$I_A(S) = \int_{P\in(S)} r^2\ dm$$

où $r(P) = AP = d(P, A)$ est la distance du point P du solide (S) au point A.

Moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O origine du référentiel $(\mathcal{R})$:

$$I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

$\mathrm{r}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$ est le carré de la distance du point P au point O.

Relations entre les moments d'inertie

$$I_O = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

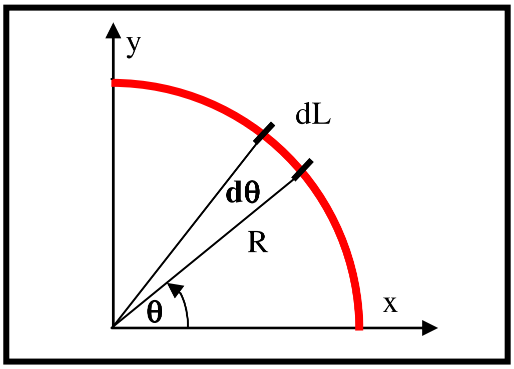
$$A + B = C + 2\int_{(S)} z^2 dm$$

<u>Exemple</u> : Quart de cerceau homogène de rayon R

Solide bidimensionnel dans le plan (xOy) : z = 0.

Donc, les intégrales impliquant z sont nulles

On utilise les coordonnées polaires :



$x = R\cos\theta$
$y = R\sin\theta$
$dm = \lambda dL = \lambda R d\theta$

Cerceau homogène : $\lambda = Cte$. Donc : $m = \lambda \frac{\pi R}{2}$

$$A = I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(S)} y^2 dm = \lambda \int_0^{\pi/2} R^3 \sin^2\theta \, d\theta = \frac{2mR^2}{\pi}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$B = I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(S)} x^2 dm = \frac{mR^2}{2}$$

$$C = I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = A + B = mR^2$$

$$I_{xy} = -\int_{(S)} xy dm = -\lambda \int_0^{\pi/2} R^3 \sin\theta \cos\theta \, d\theta = -\frac{2mR^2}{\pi}\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{mR^2}{\pi}$$

La matrice d'inertie du quart de cerceau au point O, relativement à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, s'écrit :

$$II_O(S) = \frac{mR^2}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\pi} & 0 \\ -\frac{2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

V. Matrice d'inertie en cas de Symétrie

Si le système (S) possède des éléments de symétrie matérielle (axe de rotation, plan de symétrie, inversion), certains éléments de la matrice d'inertie s'annulent.

<u>Exemple</u> 1: ***(Oz) est un axe de symétrie matérielle***

L'image d'un point P (x, y, z) du solide par l'axe de symétrie (Oz) est un point P'$(-x, -y, z)$ du solide.

$$(x, y, z) \quad \rightarrow \quad (-x, -y, z)$$

Alors :

$$\mathbf{E} = \int_{(S)} \mathbf{xzdm} = \int_{x\geq 0} \mathbf{xzdm} + \int_{x\leq 0} \mathbf{xzdm} = \mathbf{0} \quad \text{car :} \int_{x\geq 0} \mathbf{xzdm} = -\int_{x\leq 0} \mathbf{xzdm}$$

De manière similaire, on peut montrer que : $D = \int_{(S)} \mathbf{yzdm} = \mathbf{0}$.

Par conséquent : Si (Oz) est un axe de symétrie matérielle alors $E = D = 0$

La matrice d'inertie au point O, relativement à la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, s'écrit :

$$II_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

Exemple 2 : ***(xOy) est un plan de symétrie matérielle***

L'image d'un point P (x, y, z) du solide par le plan de symétrie (xOy) est un point P'$(x, y, -z)$ du solide.

$$(x, y, z) \quad \rightarrow \quad (x, y, -z)$$

Alors :

$$\mathbf{E} = \int_{(S)} \mathbf{xzdm} = \int_{z\geq 0} \mathbf{xzdm} + \int_{z\leq 0} \mathbf{xzdm} = \mathbf{0} \quad \text{car :} \int_{z\geq 0} \mathbf{xzdm} = -\int_{z\leq 0} \mathbf{xzdm}$$

De manière similaire, on peut montrer que : D = 0.

Par conséquent : Si (xOy) est un plan de symétrie matérielle alors $E = D = 0$

La matrice d'inertie au point O, relativement à la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, s'écrit :

$$II_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

Exemple 3 : ***(Oz) est axe de symétrie de révolution matérielle***

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle.

Donc, d'après l'exemple 2 :

- (xOz) est un plan de symétrie matérielle alors : $D = F = 0$
- (yOz) est un plan de symétrie matérielle alors : $E = F = 0$

De plus : par une rotation d'angle π/2 autour de l'axe (Oz) :

$$(x, y, z) \rightarrow (y, -x, z) \quad \textbf{implique que} \quad A = B$$

La matrice d'inertie au point O, relativement à la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, s'écrit :

$$II_O(S/R) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\forall \text{ la base } (-,-,\ \vec{k})}$$

La notation $(-,-,\ \vec{k})$ signifie que la matrice d'inertie est de cette forme dans toute base orthonormée ayant $\vec{\mathbf{k}}$ comme troisième vecteur.

VI. Matrice principale d'inertie

1. Définitions

La matrice d'inertie est symétrique, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Elle possède un système de trois vecteurs propres deux à deux orthogonaux qui forment une ***base principale d'inertie***. Les repères, $(\mathcal{R}_p)$, associés aux bases principales s'appellent les ***repères principaux d'inertie*** dont les axes s'appellent les ***axes principaux d'inertie***. Dans un repère principal d'inertie $(\mathcal{R}_p)$, d'origine O la matrice d'inertie est diagonale:

$$\boxed{\boldsymbol{II_O(S)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{(\boldsymbol{base\ principale})}}$$

Les valeurs propres A, B et C de la matrice d'inertie s'appellent les ***moments principaux d'inertie*** du solide (S) au point O

2. Propriétés des repères principaux

a. $\boldsymbol{F = E = 0}$ si et seulement si **(Ox)** est un axe principal d'inertie
$\boldsymbol{F = D = 0}$ si et seulement si **(Oy)** est un axe principal d'inertie
$\boldsymbol{E = D = 0}$ si et seulement si **(Oz)** est un axe principal d'inertie

b. Tout axe de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie

c. Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie

d. Tout repère qui possède pour éléments de symétrie matérielle du système (S) deux plans de symétrie est un repère principal d'inertie

e. Tout repère qui possède pour éléments de symétrie matérielle du système (S) deux axes de symétrie est un repère principal d'inertie.

<u>Remarques</u>

1. Si les 3 moments principaux d'inertie sont tous distincts les uns des autres ($\boldsymbol{A \neq B \neq C}$), il existe un seul repère principal d'inertie

2. Symétrie de révolution matérielle ou cylindrique :

Si le système possède la symétrie cylindrique, alors :

- il existe une infinité de repères principaux d'inertie ayant en commun l'axe de symétrie de révolution (par exemple Oz)

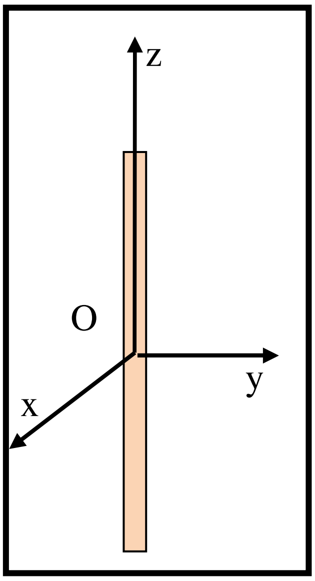
- uniquement deux des moments principaux d'inertie sont identiques (par exemple A = B ≠ C si Oz est l'axe de symétrie de révolution matérielle)

3. Symétrie sphérique:

Si le système possède la symétrie sphérique, alors :

- tout axe issu du **centre de masse** est un axe de symétrie et donc un axe principal d'inertie
- tout repère ayant le **centre de masse** comme origine est un repère principal d'inertie
- les trois moments principaux d'inertie sont identiques ($\boldsymbol{A = B = C}$)

<u>Exemple 1</u> : Tige pleine de longueur L



L'axe (Oz) est un axe de symétrie de révolution, donc le repère $\mathcal{R}_p$ (Oxyz) muni de la base ($\vec{\mathbf{i}}$,$\vec{\mathbf{j}}$,$\vec{\mathbf{k}}$) est un repère principal d'inertie.

(Oz) axe de symétrie de révolution: $\boldsymbol{A = B}$

Tige linéique disposée suivant Oz : x = y = 0 donc $\boldsymbol{C = 0}$

$\boldsymbol{dm = \lambda dL = \lambda dz}$

Tige homogène : $\boldsymbol{\lambda = Cte}$. Donc : $\boldsymbol{m = \lambda L}$

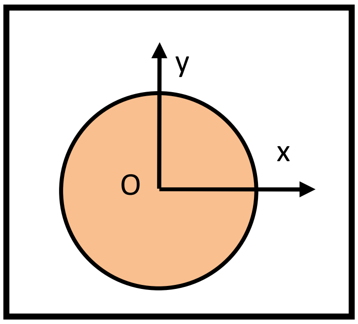
$$\mathbf{A = B = \int_{(S)} z^2 dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}}$$

La matrice d'inertie au centre d'inertie O :

$$\boldsymbol{II_O(S) = \frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\forall\, la\ base\ (-,-,\ \vec{k})}}$$

<u>Exemple 2</u> : Disque de rayon R

L'axe (Oz) est un axe de symétrie de révolution, donc le repère $\mathcal{R}_p$ (Oxyz) muni de la base ($\vec{\mathbf{i}}$,$\vec{\mathbf{j}}$,$\vec{\mathbf{k}}$) est un repère principal d'inertie.



Symétrie cylindrique : $\boldsymbol{A = B}$

Le disque appartient au plan (xOy) : $\boldsymbol{z = 0}$.

$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$

$\boldsymbol{dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta}$

Le disque homogène : $\boldsymbol{\sigma = Cte}$. Donc $\boldsymbol{m = \sigma\pi R^2}$

$$\boldsymbol{A = \int_{(S)} y^2 dm = \sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3 \sin^2\theta\, d\theta dr = \frac{mR^2}{4}}$$

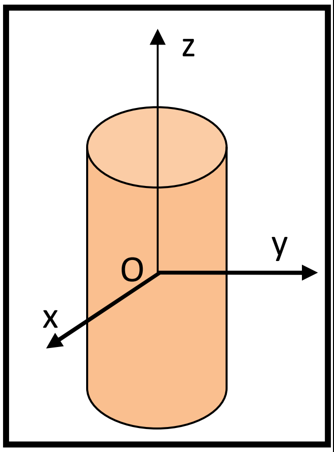
$$\boldsymbol{C = A + B = 2A = \frac{mR^2}{2}}$$

La matrice d'inertie au centre d'inertie O:

$$\boldsymbol{II_O(S) = \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\forall\, la\ base\ (-,-,\ \vec{k})}}$$

Exemple 3: Cylindre homogène plein de rayon R et de hauteur h

L'axe (Oz) est un axe de symétrie de révolution, donc le repère $\mathcal{R}_p$ (Oxyz) muni de la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ est un repère principal d'inertie. Symétrie cylindrique : A=B



$$dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$$

Cylindre homogène : $\rho = Cte$. Donc $m = \rho\pi R^2 h$

$$A + B = C + 2\int_{(S)} z^2 dm$$

Coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$$C = I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^3 dr d\theta dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{xOy} = \int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 r dr d\theta dz = \rho \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{h^3}{12} = \frac{mh^2}{12}$$

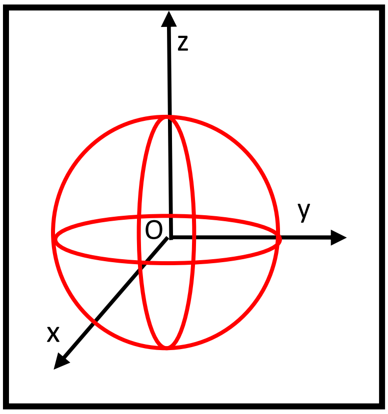
$$A = B = C/2 + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

La matrice d'inertie au centre d'inertie O:

$$II_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{\forall\, la\ base\ (-,-,\ \vec{k})}$$

Exemple 4 : Sphère homogène creuse de rayon R

Le repère $\mathcal{R}_p$ (Oxyz) muni de la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ est un repère principal d'inertie, car tout axe passant par le centre de masse est un axe de symétrie sphérique



Symétrie sphérique : $A = B = C$

$$I_O = \frac{1}{2}(A + B + C) = \frac{3}{2}A$$

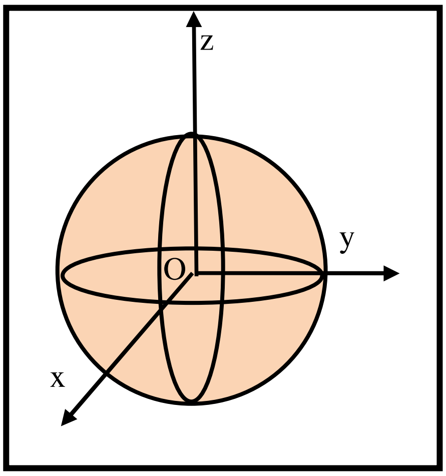
$$I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{(S)} R^2 dm = mR^2$$

$$A = B = C = \frac{2}{3} mR^2$$

La matrice d'inertie de la sphère creuse au point centre de masse O :

$$II_O(S) = \frac{2}{3} mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\forall\, la\ base\ (-,-,\ -)}$$

<u>Exemple 5</u> : Sphère homogène pleine de rayon R



Le repère $\mathcal{R}_p$ (Oxyz) muni de la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ est un repère principal d'inertie. Symétrie sphérique : $\boldsymbol{A = B = C}$

$\boldsymbol{dm = \rho dV = \rho r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi}$

Sphère homogène : $\boldsymbol{\rho = Cte}$. Donc $\boldsymbol{m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$

$$\mathbf{I_O = \frac{1}{2}(A + B + C) = \frac{3}{2}A}$$

$$\boldsymbol{I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4 sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{3}{5} m R^2}$$

$$\mathbf{A = B = C = \frac{2}{5} mR^2}$$

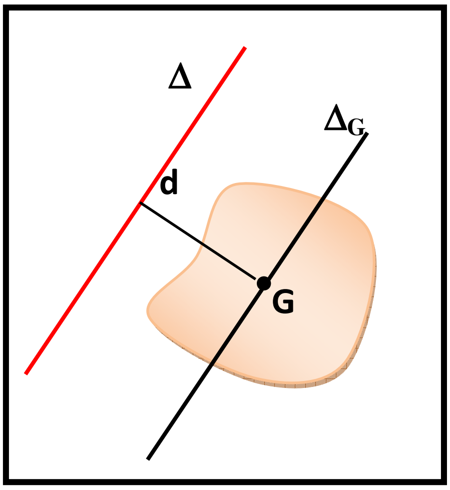
La matrice d'inertie de la sphère pleine au centre de masse O :

$$\boldsymbol{II_O(S) = \frac{2}{5} mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\forall \, la \, base \, (-,-,\ -)}}$$

VII. Théorèmes de Huygens (ou théorèmes des axes parallèles)

Hypothèses :

- L'axe (Δ_G) est un axe passant par le centre de masse G de (S)
- L'axe (Δ) est parallèle à l'axe (Δ_G)

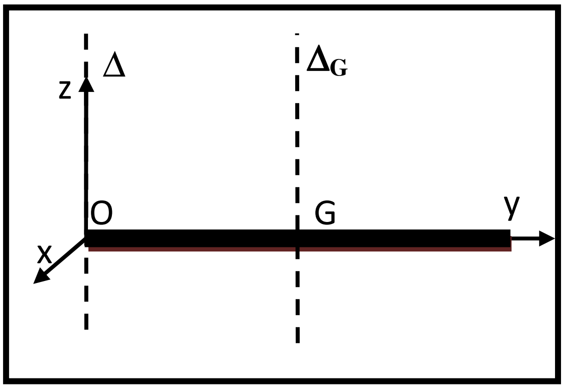


Le moment d'inertie $\mathbf{I_\Delta}$ par rapport à un axe (Δ), d'un solide (S) de masse m, est égal à son moment d'inertie $\mathbf{I_{\Delta_G}}$ par rapport à l'axe (Δ_G), augmenté du produit de la masse, m, de (S) par le carré de la distance, d, des deux axes :

$$\boxed{\boldsymbol{I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2}}$$

Où : $\boldsymbol{d = d(G, \Delta) \equiv d\,(\Delta_G, \Delta\,)}$ est la distance entre le point G et l'axe (Δ)

<u>Exemple 1</u> :Tige pleine de longueur L



Tige de longueur L disposée suivant l'axe (Oy) qui est l'axe de symétrie de révolution : A = C

$\Delta(\mathrm{O}, \vec{\boldsymbol{k}})$: axe perpendiculaire à la tige, passant par O et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{(0, 0, 1)}$

$\Delta_G(\mathrm{G}, \vec{\boldsymbol{k}})$ axe passant par G et parallèle à l'axe (Δ)

$$\mathbf{II_G(S)} = \frac{\boldsymbol{mL^2}}{\mathbf{12}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\forall \text{ la base } (-,\vec{j},\ -)}$$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ_G:

$$\mathbf{I_{\Delta_G}} = {}^t\vec{\mathbf{k}}\,.\,\mathbf{II_G(S)}.\vec{\mathbf{k}} = \frac{\boldsymbol{mL^2}}{\mathbf{12}}[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1}].\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{mL^2}}{\mathbf{12}}$$

La distance entre les deux axes est : $\boldsymbol{d(G,\Delta) = L/2}$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ est:

$$\mathbf{I_\Delta} = \frac{\boldsymbol{mL^2}}{\mathbf{12}} + \boldsymbol{m}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{mL^2}}{\mathbf{3}}$$

VIII. Théorème de Huygens-Steiner (ou de Huygens généralisé)

Dans une même base orthonormée directe : La matrice d'inertie $\mathbf{II_O(S)}$ au point O, d'un solide (S) de masse m, est égale à sa matrice d'inertie $\mathbf{II_G(S)}$ en son centre de masse G, augmentée de la matrice d'inertie $\mathbf{II_O(G,m)}$ au point O, du centre de masse G, considéré comme point fictif affecté de la masse, m de (S)

$$\boxed{\boldsymbol{II_O(S) = II_G(S) + II_O(G,m)}}$$

De façon explicite:

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}$$

Les matrices d'inertie doivent être exprimées dans une même base orthonormée directe

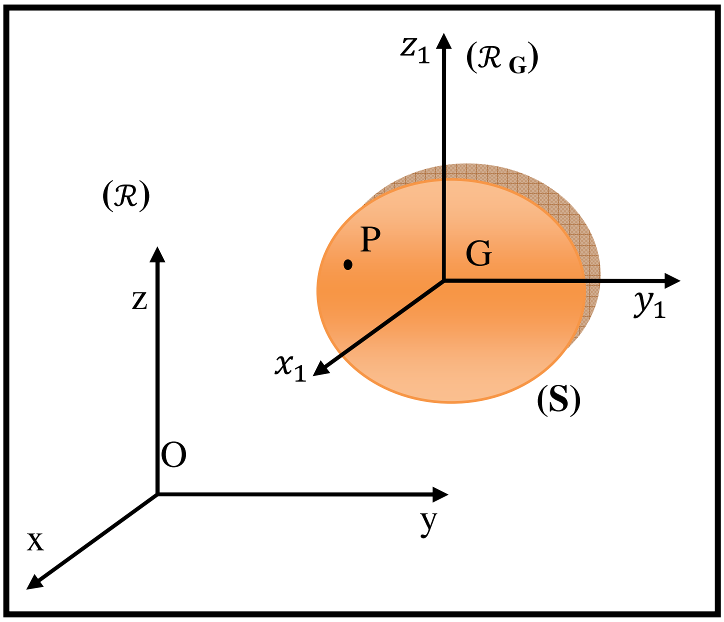
Eléments des matrices d'inertie $\mathbf{II_G(S)}$ et $\mathbf{II_O(G,m)}$

Soit $\mathcal{R}$ (O; $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) un repère orthonormé direct. Soit $\mathcal{R}_G$(G; $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) le référentiel barycentrique.

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{x}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \mathbf{x_G}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y_G}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z_G}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{GP}} = \mathbf{x_1}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y_1}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z_1}\vec{\mathbf{k}}$$



D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} + \overrightarrow{\mathbf{GP}}$

Ou encore que :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_G} + \mathbf{x_1}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y_G} + \mathbf{y_1}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{z_G} + \mathbf{z_1}$$

<u>**Montrons que**</u> : $A = A_G + m\left(y_G^2 + z_G^2\right)$

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm = \int_{(S)} ({y_1}^2 + {z_1}^2)dm + ({y_G}^2 + {z_G}^2)\int_{(S)} dm + 2y_G\int_{(S)} y_1 dm + 2z_G\int_{(S)} z_1 dm$$

Comme G est le centre d'inertie de (S) alors :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \int_{(S)} x_1 dm = 0, \quad \int_{(S)} y_1 dm = 0 \quad \int_{(S)} z_1 dm = 0$$

Donc, on obtient que : $A = A_G + m\left(y_G^2 + z_G^2\right)$

- $A_G = \int_{(S)}({y_1}^2 + {z_1}^2)dm$ est le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (Gx_1).
- La quantité $y_G^2 + z_G^2$ est le carré de la distance entre les axes (Ox) et (Gx)

On peut montrer de façon similaire que :

$$B = B_G + m\left(x_G^2 + z_G^2\right)$$

- $B_G = \int_{(S)}({x_1}^2 + {z_1}^2)dm$ est le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (Gy_1).
- La quantité $x_G^2 + z_G^2$ est le carré de la distance entre les axes (Oy) et (Gy)

$$C = C_G + m\left(x_G^2 + y_G^2\right)$$

- $C_G = \int_{(S)}\left({x_1}^2 + {y_1}^2\right)dm$ est le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (Gz_1).
- La quantité $x_G^2 + y_G^2$ est le carré de la distance entre les axes (Oz) et (Gz)

<u>**Montrons que**</u> : $F = F_G + m x_G y_G$

$$F = \int_{(S)} y\, z\, dm = \int_{(S)} (y_G + y_1)(x_G + x_1)dm$$

$$= \int_{(S)} y_1 x_1 dm + y_G x_G \int_{(S)} dm + y_G \int_{(S)} x_1 dm + x_G \int_{(S)} y_1 dm$$

Donc, on obtient que : $F = F_G + m x_G y_G$

$F_G = \int_{(S)} y_1 x_1 dm$: est le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes {(G x_1) et (Gy_1)}

On peut montrer de façon similaire que :

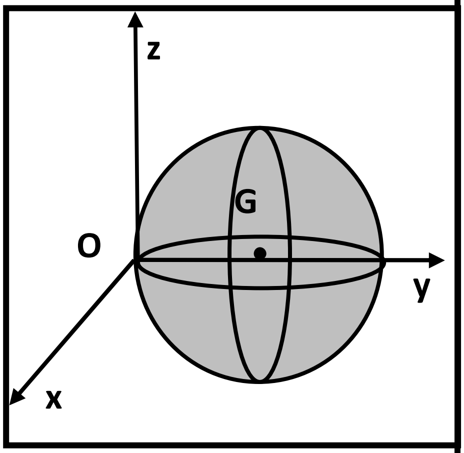
$$\boldsymbol{D = D_G + m\, y_G z_G}$$

$$\boldsymbol{E = E_G + m\, x_G z_G}$$

$\boldsymbol{D_G} = \int_{(S)} \mathbf{y_1 z_1 dm}$: est le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes {(G $\mathbf{y_1}$) et (G$\mathbf{z_1}$)}

$\boldsymbol{E_G} = \int_{(S)} \mathbf{x_1 z_1 dm}$: est le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes {(G $\mathbf{x_1}$) et (G$\mathbf{z_1}$)}

<u>Exemple</u> : Sphère pleine de rayon R



Les coordonnées du centre de masse G dans ($\mathcal{R}$) :

$\boldsymbol{x_G = 0, y_G = R, z_G = 0}$

La matrice d'inertie du système (S) au point G s'écrit :

$$\boldsymbol{II_G(S) = \frac{2}{5} mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\forall\, la\ base\ (-,-,\ -)}}$$

Matrice d'inertie en O : $\mathbf{II_O(S) = II_O(G,m) + II_G(S)}$

$$\boldsymbol{II_O(G,m) = m \begin{bmatrix} y_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_G^2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})} = mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}}$$

La matrice d'inertie du système (S) au point O, relativement à la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, s'écrit :

$$\boldsymbol{II_O(S) = \frac{2}{5} mR^2 \begin{bmatrix} 7/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}}$$

Ch.IV

CINETIQUE DU SOLIDE

La cinétique est l'étude cinématique d'un système matériel en considérant l'influence de sa masse ou de la répartition de celle-ci sur son mouvement. Soit (S) un solide de centre de masse G en mouvement dans un référentiel $(\mathcal{R})$ d'origine O. Soit $(\mathcal{R}_G)$ le repère barycentrique d'origine G.

I. Cas d'un Point Matériel M(m)

1. Quantité de mouvement ($kg.m.s^{-1}$)

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m par rapport à $(\mathcal{R})$ est:

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

2. Moment cinétique en un point A ($kg.m^2.s^{-1}$)

Le moment cinétique de M, en un point A par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

3. Quantité d'accélération ($kg.m.s^{-2}$)

La quantité d'accélération d'un point matériel M de masse m par rapport à $(\mathcal{R})$:

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

4. Moment dynamique en un point A ($kg.m^2.s^{-2}$)

Le moment dynamique de M, en un point A par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{\delta}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

5. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\,[\vec{v}(M/\mathcal{R})]^2$$

II. Cas d'un Solide (S)

1. Quantité de mouvement ($kg.m.s^{-1}$)

La quantité de mouvement d'un solide (S), de masse m :

Par rapport à ($\mathcal{R}$) : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \vec{v}(M/\mathcal{R})\,dm = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$

Par rapport à ($\mathcal{R}_G$) : $\boxed{\vec{p}(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}}$

2. Moment cinétique en un point A ($kg.m^2.s^{-1}$)

Le moment cinétique de (S), en un point A, par rapport à ($\mathcal{R}$) est :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})dm$$

C'est le moment de la quantité de mouvement.

Moment cinétique au centre de masse G

- Le moment cinétique d'un solide (S) au centre de masse G par rapport à ($\mathcal{R}$) est égal à son moment cinétique en son centre de masse G par rapport au référentiel barycentrique ($\mathcal{R}_G$),

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G)}$$

Démonstration :

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})dm = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_G)dm + \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R})dm = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G)$$

car : $\int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R})dm = \underbrace{\left(\int_{(S)} \overrightarrow{GM}dm\right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

- De plus, il est trivial de voir que :

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R}_G) \qquad \forall P}$$

Donc le moment cinétique dans le référentiel barycentrique ($\mathcal{R}_G$) est indépendant du point par rapport auquel il est calculé, on le note par conséquent par $\vec{\sigma}^*(S/\mathcal{R}_G)$:

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\sigma}^*(S/\mathcal{R}_G)$$

3. Quantité d'accélération ($kg.m.s^{-2}$)

La quantité d'accélération d'un solide (S) de masse m :

Par rapport à ($\mathcal{R}$): $\vec{a}(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\,dm = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$

Par rapport à ($\mathcal{R}_G$): $\boxed{\vec{a}(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}}$

4. Moment dynamique en un point A ($kg.m^2.s^{-2}$)

Le moment dynamique d'un solide (S), en un point A dans un référentiel ($\mathcal{R}$) est :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) dm$$

C'est le moment de la quantité d'accélération

Moment dynamique par rapport au centre de masse G

Le moment dynamique de (S) en son centre de masse G dans un référentiel ($\mathcal{R}$) est égal à son moment dynamique en G dans le référentiel barycentrique ($\mathcal{R}_G$),

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\delta}^*(S/\mathcal{R}_G)}$$

5. Moments par rapport à un axe Δ

Soit $\Delta(A, \vec{u})$ un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par le point A.

- Le moment cinétique de (S) par rapport à Δ est: $\sigma_\Delta(S/\mathcal{R}) = \vec{u}.\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})$
- Le moment dynamique de (S) par rapport à Δ est: $\delta_\Delta(S/R) = \vec{u}.\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R})$

Ces résultats sont indépendants du point A de l'axe (Δ).

6. Energie cinétique

L'énergie cinétique du solide (S) en mouvement dans ($\mathcal{R}$) :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{M \in (S)} [\vec{v}(M/\mathcal{R})]^2 \, dm$$

Energie cinétique barycentrique

L'énergie cinétique barycentrique de (S), dans le référentiel barycentrique ($\mathcal{R}_G$) est :

$$E_c(S/\mathcal{R}_G) = \frac{1}{2} \int_{M \in (S)} [\vec{v}(M/\mathcal{R}_G)]^2 \, dm$$

III. Torseur cinétique

Soient A et B deux points quelconques de l'espace. Soit M un point du solide (S). Le moment cinétique en B est :

$$\vec{\sigma}_B(S/\mathcal{R}) = \int_{(S)} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm = \int_{(S)} \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm$$

$$\int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm = \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})$$

$$\int_{(S)} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})dm = \left(\int_{(S)} \vec{v}(M/\mathcal{R})dm\right) \wedge \overrightarrow{AB} = m\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{p}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\vec{\sigma}_B(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) + \vec{p}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Le moment cinétique est antisymétrique de vecteur associé $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{G}/\mathcal{R})$. C'est un torseur appelé ***torseur cinétique***, noté **[C]** et dont les éléments de réduction en un point A :

$$[C(S/\mathcal{R})]_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}(S/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})dm \end{matrix} \right\}_A$$

$\vec{p}(S/\mathcal{R})$: s'appelle la résultante cinétique du torseur

IV. Torseur dynamique

De même, il est trivial de montrer que :

$$\boxed{\vec{\delta}_B(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) + \vec{a}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Le moment dynamique est antisymétrique de vecteur associé $\vec{a}(S/\mathcal{R}) = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$. C'est un torseur appelé, ***torseur dynamique*** du solide (S), noté [D] dont les éléments de réduction au point A :

$$[D(S/\mathcal{R})]_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{a}(S/\mathcal{R}) = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm \end{matrix} \right\}_A$$

$\vec{a}(S/\mathcal{R})$: s'appelle la résultante dynamique du torseur

V. Théorèmes de Kœnig

On utilise les relations de transfert pour passer au centre de d'inertie G du solide (S).

Théorème de Kœnig du moment cinétique:

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) + m\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}}$$

Par définition, le moment cinétique en un point A, du centre d'inertie G considéré comme un point matériel affectée de la masse totale m du solide (S), s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A(G(m)/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

Donc on arrive à :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) \ = \ \vec{\sigma}^*(S/\mathcal{R}_G) \ + \ \vec{\sigma}_A(G(m)/\mathcal{R})}$$

Théorème de Kœnig du moment dynamique :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \ = \ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G) \ + \ m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \ \wedge \ \overrightarrow{GA}}$$

Le moment dynamique en un point A, du centre de masse G du solide (S) affecté de la masse totale du m solide (S), est :

$$\vec{\delta}_A(G(m)/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$$

Donc on arrive au théorème de Koenig pour le moment dynamique :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \ = \ \vec{\delta}^*(S/\mathcal{R}_G) \ + \ \vec{\delta}_A(G(m)/\mathcal{R})}$$

Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique, $E_c(S/\mathcal{R})$ d'un solide (S) en mouvement dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est la somme de l'énergie cinétique barycentrique, $E_c(S/\mathcal{R}_G)$, et de l'énergie cinétique, $\frac{1}{2}m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2$, du centre de masse G, affecté de la masse totale, m de (S)

$$\boxed{E_c(S/\mathcal{R}) \ = \ E_c(S/\mathcal{R}_G) \ + \ \frac{1}{2}m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2}$$

Démonstration :

On considère que $(\mathcal{R}_G)$ est en mouvement relatif par rapport à $(\mathcal{R})$. D'après la composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

L'énergie cinétique de (S) dans $(\mathcal{R})$:

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int_{(S)} [\vec{v}(M/\mathcal{R})]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(S)} [\vec{v}(M/\mathcal{R}_G)]^2\, dm + \frac{1}{2}[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2 \int_{(S)} dm + \vec{v}(G/\mathcal{R}).\int_{(S)} \vec{v}(M/\mathcal{R}_G)\, dm$$

$$= E_c(S/\mathcal{R}_G) + \frac{1}{2}m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2$$

car : $\int_{(S)} \vec{v}(M/\mathcal{R}_G)\, dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm\right)_{\mathcal{R}_G} = \vec{0}$

VI. Mouvement de translation d'un solide (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Soit (S) un solide en mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R})$. Alors :

- $\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}$
- $\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}$
- $E_c(S/\mathcal{R}_G) = 0$

***Conséquences sur les théorèmes de Koenig*:**

- $\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R})$
- $\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$
- $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2$

VII. Relation entre Torseur Cinétique et Torseur Dynamique en un point quelconque

Soit A **un point quelconque de l'espace**. Le moment cinétique du solide (S) en un point A est

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm$$

En dérivant dans $(\mathcal{R})$ par rapport au temps, on a:

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \int_{(S)} \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm + \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} dm$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R})$$

$$\left.\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R}) \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

Finalement :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) + \vec{p}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}) \qquad \forall A}$$

En général

$$\left.\frac{d[C(S/\mathcal{R})]}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \neq [D(S/\mathcal{R})]$$

Cas particuliers :

Si :

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}) \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

Alors on a l'égalité suivante :

$$\left.\frac{d[C(S/\mathcal{R})]}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = [D(S/\mathcal{R})]$$

C'est-à-dire si l'une des conditions ci-dessous est remplie :

1. $A \equiv G$: $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R})$
2. A fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$
3. G fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$
4. $\vec{v}(A/\mathcal{R}) \ // \ \vec{v}(G/\mathcal{R})$

Au centre de masse G

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{J}_G\left(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\right)}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}$$

D'après la formule du transfert du torseur dynamique, le moment dynamique au point A quelconque est :

$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) + m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}$ et comme : $\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{J}_G(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}))}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$

Par conséquent :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{J}_G\left(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\right)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}}$$

A point quelconque fixe dans $(\mathcal{R})$

$$\boxed{\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}$$

VIII. Expressions par rapport à un point A du Solide (S)

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$. Soit **A un point du (S)**

- **Moment cinétique**

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{J}_A\left(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\right)}_{Rotation} + \underbrace{m\vec{v}(A/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}}_{Translation}}$$

Démonstration :

Le moment cinétique du solide par rapport au point A est : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\boldsymbol{dm}$

La relation de transfert de Varignon donne: A, M ∈(S): $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$

En remplaçant dans l'expression du moment cinétique, on a:

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})\boldsymbol{dm} + \int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\right)\boldsymbol{dm}$$

$$\int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})\boldsymbol{dm} = \left(\int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\boldsymbol{dm}\right) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{m}\overrightarrow{\boldsymbol{AG}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GA}}$$

$$\int_{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S})} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\right)\boldsymbol{dm} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})\right)$$

D'où le résultat !

- **Moment dynamique**

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left.\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{S}, \ \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})\right)}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GA}}}$$

- **Energie cinétique :**

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}}.\ [\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} \\ &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{m}\vec{v}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}).\vec{v}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{aligned}}$$

Démonstration : Le champ des vecteurs vitesse est un torseur :

A, M ∈(S): $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique :

$$2\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \int_{(\boldsymbol{S})}[\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})]^{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{dm} = \int_{(\boldsymbol{S})} \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}).\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R})\,\boldsymbol{dm} + \int_{(\boldsymbol{S})} \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}).\left(\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\right)\boldsymbol{dm}$$

$$= \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}).\int_{(\boldsymbol{S})} \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\,\boldsymbol{dm} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\int_{(\boldsymbol{S})} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\right)\boldsymbol{dm}$$

$$= \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})].[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]$$

Remarque 1: ***Au point G centre de masse de (S)***

- $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})\right) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}).\ \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})$
- $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left.\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{S}, \ \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})\right)}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\mathcal{R}}$
- $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\ [\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{m}[\vec{v}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})]^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}).\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$

Conséquences sur les théorèmes de Koenig:

- $\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \underbrace{II_G(S).\,\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}_{Rotation} + \underbrace{m\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}}_{Translation}$

- $\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{J}_G(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}))}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}$

- $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2 + \frac{1}{2}\ {}^t\vec{\Omega}\ (S/R_G)\,.\,II_G(S)\,.\,\vec{\Omega}(S/R_G)$

Remarque 2 : ***Solide (S) avec un point fixe***

Soit A un point de (S) **fixe dans $(\mathcal{R})$** : $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$

1. Le moment cinétique de (S) par rapport au point A est :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \underbrace{\vec{J}_A\left(S, \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\right)}_{Rotation} = II_A(S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

La matrice d'inertie, $II_A(S)$ et le vecteur rotation instantané, $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ doivent être **exprimés dans la même base**.

2. Le moment dynamique de (S) par rapport au point A est

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{J}_A(S,\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}))}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

- Si la matrice d'inertie, $II_A(S)$ et le vecteur rotation instantané, $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ sont exprimés dans une même base de $(\mathcal{R})$.

$$\vec{\delta}_A(S/R) = II_A(S).\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

- Si la matrice d'inertie, $II_A(S)$ et le vecteur rotation instantané, $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ sont exprimés dans une même base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ d'un référentiel $(\mathcal{R}_S)$ lié au solide (S) en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$.

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})$$

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = II_A(S).\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{R_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge II_A(S).\,\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

3. L'énergie cinétique est :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}).\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\ {}^t\vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}).\ II_A(S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

Remarque 3 : ***Solide en rotation autour d'un axe fixe***

Soit Δ ($\vec{u}$) l'axe de rotation fixe dans $(\mathcal{R})$ tel que:

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \omega\,\vec{u}$$

ω : est la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe

1. Le moment cinétique d'un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe (Δ) avec la vitesse angulaire **ω** est :

$$\sigma_\Delta(S/\mathcal{R}) = I_\Delta \omega$$

$I_\Delta(S)$ est le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe Δ.

2. Le moment dynamique par rapport à un axe fixe **Δ** :

$$\delta_\Delta(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\sigma_\Delta(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = I_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

3. L'énergie cinétique d'un solide (S) en rotation avec la vitesse angulaire **ω** autour d'un axe fixe Δ est :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\omega^2\, I_\Delta$$

Ou encore:

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m[\vec{v}(G/\mathcal{R})]^2 + \frac{1}{2}\omega^2\, I_{\Delta_G}$$

I_{Δ_G} est le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe de rotation Δ_G (G, $\vec{u}$)

IX. Système de solides

Soit (S) un solide de centre de masse G et de masse m constitué de N solides disjoints (S_i), respectivement de centre de masse G_i et de masse m_i :

Torseur cinétique

$$[C(S/\mathcal{R})]_A = \sum_{i=1}^{N}[C(S_i/\mathcal{R})]_A = \left\{\begin{matrix} \vec{p}(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}(S_i/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N}\vec{\sigma}_A(S_i/\mathcal{R}) \end{matrix}\right\}_A$$

Avec :

$\vec{p}(S_i/\mathcal{R}) = m_i\vec{v}(G_i \in S_i/\mathcal{R})$: est la quantité de mouvement ou résultante cinétique de (S_i)

Torseur dynamique

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_A = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R})]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_A(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{\delta}}_A(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A$$

Avec :

$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{m_i}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G_i} \in \boldsymbol{S_i}/\mathcal{R})$: est la quantité d'accélération ou résultante dynamique de ($\boldsymbol{S_i}$)

Energie cinétique:

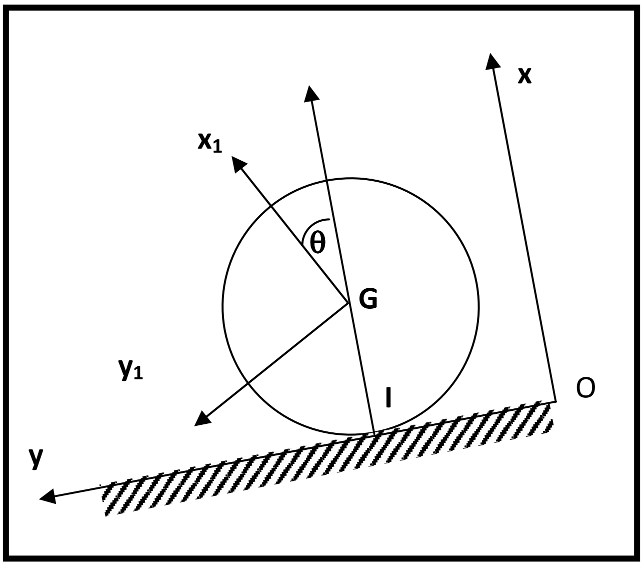
$$\boxed{\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R})}$$

Avec :

$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S_i}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}[\vec{v}(\boldsymbol{G_i}/\mathcal{R})]^2$: est l'énergie cinétique de ($\boldsymbol{S_i}$)

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ (Oxyz) un repère muni de la base ($\vec{\boldsymbol{\imath}}$,$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$,$\vec{\boldsymbol{k}}$); l'axe (O,$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$) étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente. Soit un cylindre de révolution (S) de centre d'inertie G, d'axe de révolution (G, $\vec{\boldsymbol{k}}$), homogène de masse m, de rayon r et roulant sans glisser au point de contact I sur le plan incliné Π(Oyz). Soit $\mathcal{R}_1$(G; x_1 y_1 z) un repère lié à (S) et muni de la base ($\vec{\boldsymbol{\imath}}_1$,$\vec{\boldsymbol{\jmath}}_1$,$\vec{\boldsymbol{k}}$). On pose : θ = ($\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\imath}}_1$). Déterminer :



1. **Moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à** ($\mathcal{R}$)

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_G(\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathbf{II}_G(\mathbf{S}).\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\mathbf{mr^2}}{\mathbf{2}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\mathbf{k}}$$

2. **Moment dynamique au point I dans son mouvement par rapport à** ($\mathcal{R}$)

Méthode 1 :

Théorème de Koenig du moment cinétique : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GI}}$

F.F.C.S. : I, G ∈(S): $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S}/\boldsymbol{v}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{IG}}$

(S) roule sans glisser sur le plan incliné: $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{v}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \vec{0} + \dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r}\,\vec{\mathbf{i}} = \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\sigma}_I(S/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{mr^2}}{\mathbf{2}}\dot{\theta}\vec{k} + \mathbf{mr}\dot{\theta}\,\vec{j} \wedge -\mathbf{r}\,\vec{i} = \frac{\mathbf{3mr^2}}{\mathbf{2}}\dot{\theta}\vec{k}$$

Le moment dynamique au point I est :

$$\vec{\delta}_I(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_I(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{v}(I/\mathcal{R}) \wedge\ m\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

I étant le point géométrique de contact entre (S) et le plan (Π) et se déplace suivant (O, $\vec{j}$)

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}) = \|\vec{v}(I/\mathcal{R})\|\,\vec{j}$$

Les points I et G ont même vecteurs vitesse par rapport au repère ($\mathcal{R}$) (l'axe (I, $\vec{\imath}$) a un mouvement de translation par rapport à ($\mathcal{R}$)

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}) \wedge\ m\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$\vec{\delta}_I(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_I(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{3}{2}\mathbf{mr^2}\ddot{\theta}\vec{k}$$

Méthode 2 :

Théorème du moment cinétique au point G: $\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{mr^2}}{2}\ddot{\theta}\vec{k}$

Théorème de Koenig du moment dynamique: $\vec{\delta}_I(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) + m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GI}$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\left(r\dot{\theta}\,\vec{j}\right)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = r\ddot{\theta}\,\vec{j}$$

$$\vec{\delta}_I(S/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{mr^2}}{\mathbf{2}}\ddot{\theta}\vec{k} + \ mr\ddot{\theta}\,\vec{j} \wedge -\mathbf{r}\,\vec{i} = \frac{3}{2}\mathbf{mr^2}\ddot{\theta}\vec{k}$$

***3.* Energie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à ($\mathcal{R}$).**

(S) roule sans glisser sur le plan incliné: $\vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}).\vec{\sigma}_I(S/\mathcal{R}) \ = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\vec{k}\right).\left(\frac{3mr^2}{2}\dot{\theta}\vec{k}\right)$$

Soit

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{3}{4}\mathbf{mr^2}\dot{\theta}^2$$

Ch. V

DYNAMIQUE DU SOLIDE

La dynamique est l'étude d'un mouvement en tenant compte des causes qui le produisent.

I. Actions mécaniques

On appelle **action mécanique** toute cause (force, moment) capable de provoquer le mouvement d'un système ou de le maintenir au repos. On distingue deux catégories d'actions mécaniques agissant sur un système:

- Actions mécaniques à distance sans contact (champ de pesanteur, champ électromagnétique…)
- Actions mécaniques de contact (liaisons entre solides,..)

Un système matériel (S) peut alors subir un ensemble de forces qui peuvent être:

- Ponctuelles : $\vec{F}_i$ appliquée au point M_i
- Réparties : $d\vec{F}(M) = \vec{f}(M)dm$ où $\vec{f}(M)$ étant la densité massique de la force

La **résultante générale** de ces forces est:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i} + \int_{M\in(S)} d\vec{F}(M)$$

Un système matériel peut-être en mouvement de rotation malgré que la résultante des forces qui lui sont appliquées soit égale à zéro. Par exemple, on peut observer le mouvement de rotation des pales d'une éolienne autour de son axe de rotation sous l'action du vent. Par conséquent le mouvement peut-être produit également par le **moment résultant** qui est défini en un point quelconque, A comme:

$$\vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i} + \int_{M\in(S)} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}(M)$$

II. Torseur d'action mécanique

En utilisant la relation de Chasles dans l'expression du moment:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

On obtient la formule de transfert du moment entre deux points A et B quelconques :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}$$

Donc, le moment résultant d'une action mécanique est un champ antisymétrique de vecteur associé la résultante générale $\vec{R}$. Ces deux vecteurs définissent un torseur appelé ***torseur d'action mécanique*** sur (S) et on le note par :

$$\boxed{[\,\mathcal{F}\,(S)\,]_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}}$$

dont les éléments de réduction au point A sont :

$\vec{R}$: Résultante générale du torseur d'action mécanique sur (S)

$\vec{M}_A$: Moment résultant au point A du torseur d'action mécanique sur (S).

Les actions mécaniques appliquées à un système (S) peuvent être **extérieures** ou **intérieures** à (S). Les actions intérieures proviennent des différentes interactions mutuelles entre les différents éléments composant (S). Par conséquent, le torseur des actions mécaniques sur (S) peut être décomposé en la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures et intérieures à (S) :

$$\boxed{[\mathcal{F}]_A = [\mathcal{F}_{ext}]_A + [\mathcal{F}_{int}]_A}$$

Ce qui peut s'écrire en termes d'éléments de réduction au point A :

$$\vec{R} = \vec{R}_{ext} + \vec{R}_{int}$$
$$\vec{M}_A = \vec{M}_{A,ext} + \vec{M}_{A,int}$$

Remarque :

Si on désigne par ($\bar{S}$) le milieu extérieur à (S), alors :

$$[\mathcal{F}_{ext}(S)]_A = [\mathcal{F}(\bar{S} \to S)]_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext}(S) = \vec{R}(\bar{S} \to S) \\ \vec{M}_{A,ext}(S) = \vec{M}_A(\bar{S} \to S) \end{Bmatrix}$$

III. Torseurs particuliers d'action mécanique

1. Couple

Le torseur d'action mécanique est un couple s'il est de la forme :

$$[\mathcal{F}]_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \neq \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Le moment est indépendant du point A. Souvent on confond le couple et le moment et on note le couple par $\vec{\Gamma}$ ou $\vec{C}$

2. Glisseur

Le torseur d'action mécanique est un glisseur si son invariant scalaire est nul, $\boldsymbol{I}_{[\mathcal{F}]} = \mathbf{0}$, et sa résultante générale est non nulle ($\vec{\boldsymbol{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$). En un point B quelconque, on a :

$$[\mathcal{F}]_{\boldsymbol{B}} = {}_{\boldsymbol{B}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}} \neq \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{B}} \end{Bmatrix}$$

Un glisseur est un torseur pour lequel il existe au moins un point A où le moment est nul :

$$[\mathcal{F}]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}} \neq \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}$$

Le point A est un point central et l'axe central du glisseur est appelé **la ligne d'action de la force**.

IV. Action à distance: le champ de pesanteur

Le champ de pesanteur est un champ qui peut-être considéré comme uniforme en tout point d'une région localisée de l'espace. Ce champ est orienté vers la verticale descendante. Les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de la pesanteur sur un système (S) de masse m au centre d'inertie G sont:

- La résultante : $\vec{\boldsymbol{R}}(\mathbf{g} \to \boldsymbol{S}) = \vec{\boldsymbol{P}} = \int \vec{\boldsymbol{g}}\, \boldsymbol{dm} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$

  Le vecteur force $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$ représente le poids de (S).
- Le moment résultant : $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{g} \to \boldsymbol{S}) = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{P}}) = \int \overrightarrow{\boldsymbol{GM}} \wedge \vec{\boldsymbol{g}}\, \boldsymbol{dm} = \int \overrightarrow{\boldsymbol{GM}} \boldsymbol{dm} \wedge \vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\mathbf{0}}$

Le torseur s'écrit :

$$[\mathcal{F}(\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{S})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}$$

Donc c'est un glisseur. En un point quelconque B, on écrit :

$$[\mathcal{F}(\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{S})]_{\boldsymbol{B}} = {}_{\boldsymbol{B}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{P}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{BG}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}} \end{Bmatrix}$$

V. Actions mécaniques de contact. Lois d'Amontons-Coulomb

1. Torseur d'action mécanique de contact

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel en un point I. Soit Π le plan tangent en I commun à (S_1) et à (S_2). Au point I, $\vec{\boldsymbol{n}}$ désigne le vecteur unitaire orienté de (S_2) vers (S_1) et qui est normal au plan Π.

Le torseur d'action mécanique de contact de (S_2) sur (S_1) au point I s'écrit comme:

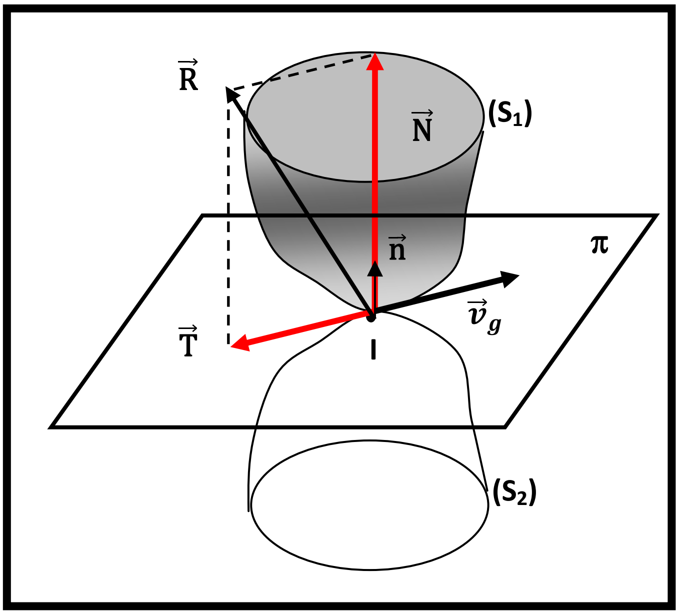
$$[\mathcal{F}(\boldsymbol{S_2} \to \boldsymbol{S_1})]_{\boldsymbol{I}} = {}_{\boldsymbol{I}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{S_2} \to \boldsymbol{S_1}) \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S_2} \to \boldsymbol{S_1}) \end{Bmatrix}$$

La résultante générale peut se décomposer en la somme :

$$\vec{R}(S_2 \to S_1) = \vec{N} + \vec{T}$$

$\vec{N}$: Composante normale de la résultante générale (perpendiculaire à Π). On l'appelle également **réaction normale** ; elle s'oppose à la pénétration d'un solide dans l'autre.

$\vec{T}$: Composante tangentielle de la résultante générale (parallèle à Π). C'est une force de **frottement** qui s'oppose au glissement. Le contact est dit sans frottement si $\vec{T} = \vec{0}$



De même, le moment résultant peut se décomposer en la somme :

$$\vec{M}_I(S_2 \to S_1) = \vec{M}_I^n + \vec{M}_I^t$$

$\vec{M}_I^n$: Composante normale du moment résultant au point I. On l'appelle également moment de résistance au **pivotement.**

$\vec{M}_I^t$: Composante tangentielle du moment résultant au point I. On l'appelle également moment de résistance au **roulement.**

Dans la suite on négligera les frottements de roulement et de pivotement et on supposera que :

$$\vec{M}_I = \vec{0}$$

Le torseur d'action mécanique de contact de (S_2) sur (S_1) au point I s'écrit comme:

$$[\mathcal{F}(S_2 \to S_1)]_I = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_2 \to S_1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Les actions de contact forment alors un glisseur au point de contact I

2. Lois d'Amontons-Coulomb

Ce sont des lois **expérimentales** du frottement solide, déterminées par Amontons (1699) et Coulomb (1871).

2.1. Vecteur résultante générale $\vec{R}(S_2 \to S_1)$

La résultante générale du torseur d'actions mécaniques s'écrit comme :

$$\vec{R}(S_2 \to S_1) = \vec{N} + \vec{T}$$

Selon les lois d'Amontons-Coulomb, les composantes normale et tangentielle satisfont aux critères suivants :

Composante normale : $\vec{N}$

- Le solide (S_1) ne peut pas pénétrer à l'intérieur du solide (S_2), par contre il peut s'en écarter.
- Sens : $\vec{N} = N\vec{n}$
- $N \geq 0$: Critère de maintien du contact. La liaison est unilatérale
- Si au cours du mouvement **N = 0** : le contact cesse (rupture du contact)

Composante tangentielle : $\vec{T}$

On distingue deux cas :

Absence de glissement : $\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S_1/S_2) = \vec{0}$

On observe que tant que:

$$\boxed{\|\vec{T}\| \leq f_s \, \|\vec{N}\|}$$

Il y a adhérence entre les deux solides et il n'y a pas de glissement. La constante positive f_s s'appelle le **coefficient de frottement statique** ou d'adhérence en I entre (S_1) et (S_2). Il dépend de la nature et l'état des surfaces (surfaces polies ou rugueuses, etc.) des deux solides en contact et donne le seuil de mise en glissement d'un solide immobile.

Si $f_s = 0$ alors $\vec{T} = \vec{0}$; il y a absence de frottement : $\vec{R}(S_2 \to S_1) = \vec{N}$

Glissement: $\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$

Lorsque $\|\vec{T}\|$ atteint la valeur de : $\|\vec{T}_{max}\| = f_s \, \|\vec{N}\|$

Alors, le glissement apparaît. On observe que quand les solides glissent l'un contre l'autre, alors:

- $\vec{T}$ est colinéaire à la vitesse de glissement : $\vec{v}_g \wedge \vec{T} = \vec{0}$
- $\vec{T}$ est de sens opposé à la vitesse de glissement : $\vec{v}_g \,.\, \vec{T} < 0$
- $\vec{T}$ a un module proportionnel à celui de $\vec{N}$: $\boxed{\|\vec{T}\| = f_d \, \|\vec{N}\|}$

Où f_d est une constante positive qui s'appelle le **coefficient de frottement dynamique** en I entre (S_1) et (S_2). Il dépend de la nature et l'état des surfaces en contact (surfaces polies ou rugueuses, etc.) des deux solides. Il dépend également de la vitesse de glissement :

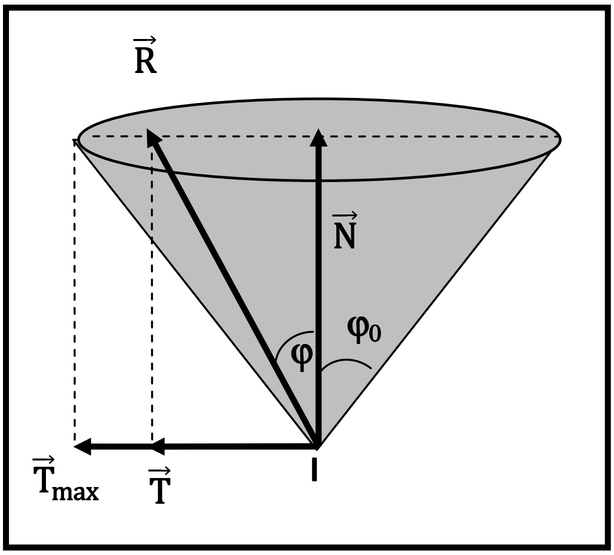
- aux grandes vitesses, f_d diminue avec $\vec{v}_g$
- aux faibles vitesses, f_d augmente fortement avec $\vec{v}_g$

On a en général $f_d < f_s$ mais souvent on suppose que $f_d = f_s$

Coefficients de frottement entre solides

matériaux en contact	f_d	f_s
acier/acier	0,15	0,18
bois/bois	0,4 à 0.2	0,65
métal/glace	0,01	0,03
pneu/route sèche	0,6	0,8
téflon®/téflon®	0,04	0,04

Cône et angle de frottement



Soit $\boldsymbol{\varphi}$ l'angle défini par : $\quad tg\varphi = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} \leq f_s$

Soit $\boldsymbol{\varphi_0}$ l'angle maximum pour lequel le **<u>glissement apparait</u>** : $\quad tg\varphi_0 = \frac{\|\vec{T}_{max}\|}{\|\vec{N}\|} = f_s$

Par conséquent : $\quad tg\varphi \leq tg\varphi_0$

donc: $\quad \varphi \leq \varphi_0$

La force $\vec{R}$ est contenue à l'intérieur d'un cône, qui s'appelle cône de frottement, de demi-angle au sommet :

$$\varphi_0 = arctg(f_s)$$

qui s'appelle angle de frottement

<u>Liaison parfaite</u>

On dit qu'une liaison est parfaite si : $\quad \vec{M}_I = \vec{0}$ et $\vec{T} = \vec{0}$

Tous les coefficients de frottement sont nuls.

VI. Principe Fondamental de la Dynamique - Théorèmes Généraux

1. Enoncé du PFD:

Il existe au moins un repère $(\mathcal{R})$, appelé **repère galiléen**, et au moins une chronologie, appelée **chronologie galiléenne**, tel que le torseur dynamique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$, soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (S)

$$\boxed{[D(S/\mathcal{R})] = [\mathcal{F}_{ext}(S)]}$$

Ou encore:

$$\boxed{{}_A\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{A,ext} \end{Bmatrix} \qquad \forall A}$$

Exemples de repères galiléens

Il existe des repères privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point isolé est rectiligne uniforme. On les appelle repères galiléens.

- Les repères terrestres (en première approximation)
- Le repère de Copernic défini par le centre de masse du système solaire et trois étoiles fixes.
- Le repère géocentrique ou de Ptolémée, défini par le centre de la terre et trois étoiles
- Le repère de Kepler, défini par le centre du soleil et trois étoiles fixes.

2. Théorème de la résultante dynamique ou du Centre d'inertie

La résultante dynamique de (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $(\mathcal{R})$ est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (S) :

$$m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \vec{R}_{ext}(S)$$

3. Théorème du moment dynamique

Le moment dynamique de (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $(\mathcal{R})$ est égale au moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (S)

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{M}_{A,ext} \qquad \forall A$$

4. Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{A,ext} - \vec{v}(A/\mathcal{R}) \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R})}$$

Cas particuliers :

<u>**Le point A est fixe dans $(\mathcal{R})$:**</u>

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{A,ext}}$$

<u>**A confondu avec le centre d'inertie G :**</u>

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{G,ext}}$$

<u>**Dans le référentiel barycentrique (R_G) :**</u>

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}_G)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_G} = \vec{M}_{G,ext}}$$

Cette relation est valable que le référentiel barycentrique (R_G) soit galiléen ou non.

5. Système isolé

Le système est dit **isolé** ou pseudo isolé si : $[\mathcal{F}_{ext}(S)] = [0]$

Le moment cinétique d'un système isolé est une constante du mouvement. On dit qu'il y a **conservation du moment cinétique** de (S) au cours du mouvement :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{const}}$$

6. Système en équilibre

Un système (S) est en équilibre dans $(\mathcal{R})$ si son torseur cinétique est nul :

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = [\boldsymbol{0}]$$

Conséquences :

Principe fondamental de la statique : $[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{S})] = [\boldsymbol{0}]$

Repos (absence de mouvement) : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = [\boldsymbol{0}]$

7. Equilibrage Dynamique

Afin d'éviter la naissance de vibrations mécaniques qui peuvent créer une détérioration rapide d'un solide (S) tournant autour d'un axe, il faut que les conditions d'équilibrage dynamique suivantes soient satisfaites:

- Le centre d'inertie G de (S) doit être sur l'axe de rotation. C'est la condition d'équilibrage statique
- L'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie pour (S)

8. Equation de mouvement

Soit un système (S) paramétré par n coordonnées généralisées q_i ($\boldsymbol{i = 1,..,n}$). Une équation de mouvement est une équation différentielle du **second ordre** traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle, il ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

$$\boldsymbol{f_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) \;=\; Constante \qquad i = 1,..,n}$$

Exemple : Equation de mouvement d'un oscillateur harmonique linéaire : $\boldsymbol{\ddot{x} \,+\, \omega_0^2\, x = 0}$

9. Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du **premier ordre**, obtenue par intégration d'une équation de mouvement, et est de la forme :

$$\boldsymbol{f_i(q_i, \dot{q}_i, t) \;=\; Constante \quad i = 1,..,n}$$

Exemple : Intégration de l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique: $\boldsymbol{\dot{x}^2 \,+\, \omega_0^2\, x^2 = Cste}$

VII. Théorème des actions mutuelles

1. Enoncé

L'action mécanique d'un solide (S_1) sur un solide (S_2) est opposée à l'action mécanique du solide (S_2) sur le solide (S_1) :

$$\boxed{[\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{S_2} \rightarrow \boldsymbol{S_1})] = -[\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{S_1} \rightarrow \boldsymbol{S_2})]}$$

Conséquence

Eléments de réduction :

$$\vec{R}(S_1 \to S_2) = -\vec{R}(S_2 \to S_1)$$
$$\vec{M}_A(S_1 \to S_2) = -\vec{M}_A(S_2 \to S_1)$$

2. Torseur d'action mécanique intérieure à un système (S)

Le torseur d'action mécanique intérieure à un système (S) est un torseur nul :

$$[\mathcal{F}_{int}(S)] = [0]$$

Ou explicitement, en termes de ses éléments de réduction en un point A :

$$\vec{R}_{int}(S) = \vec{0}$$
$$\vec{M}_{A,int}(S) = \vec{0}$$

Preuve:

Considérons un système constitué de deux solides disjoints (S_1) et (S_2), alors d'après le théorème des actions mutuelles, on a : $[\mathcal{F}_{int}(S_1 \cup S_2)] = [\mathcal{F}(S_2 \to S_1)] + [\mathcal{F}(S_1 \to S_2)] = [0]$

VIII. PFD dans ($\mathcal{R}'$) non Galiléen

1. Théorème.

Le principe fondamental de la dynamique s'applique dans un référentiel quelconque ($\mathcal{R}'$) à condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures, les torseurs des actions mécaniques des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis

$$\boxed{[D(S/\mathcal{R}')] = [\mathcal{F}_{ext}(S)] + [\mathcal{F}_{ie}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})] + [\mathcal{F}_{ic}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})]}$$

Avec

$$[\mathcal{F}_{ie}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})] = -[D_{ie}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$
$$[\mathcal{F}_{ic}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})] = -[D_{ic}(S, \mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

$[D_{ie}]$: Torseur dynamique d'inertie d'entraînement

$[D_{ic}]$: Torseur dynamique des effets d'inertie de Coriolis

Preuve :

Torseur dynamique de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$) : $[D(S/\mathcal{R})]_A = {}_A\begin{Bmatrix} \int_{M \in (S)} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\, dm \\ \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) dm \end{Bmatrix}$

On choisit $(\mathcal{R}')$ comme étant le repère relatif par rapport à $(\mathcal{R})$

D'après la composition des vecteurs accélération :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}') + \vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + 2\,\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$$

Torseur dynamique de (S) par rapport à $(\mathcal{R}')$: $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}')]_{\boldsymbol{A}} = \left\{\begin{matrix} \int_{M\in(S)} \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}')\,\boldsymbol{dm} \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}') = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}')\boldsymbol{dm} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A}}$

Torseur dynamique des effets d'inertie d'entraînement :

$$[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = \left\{\begin{matrix} \int_{M\in(S)} \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})\,\boldsymbol{dm} \\ \int_{M\in(S)} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})\boldsymbol{dm} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A}} = -[\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

Torseur dynamique des effets d'inertie de Coriolis :

$$[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{ic}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = \left\{\begin{matrix} \int_{M\in(S)} \mathbf{2}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{M}/\mathcal{R}')\,\boldsymbol{dm} \\ \int_{M\in(S)} \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \left[\mathbf{2}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{M}/\mathcal{R}')\right]\boldsymbol{dm} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A}} = -[\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ic}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

2. $(\mathcal{R}')$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $(\mathcal{R})$

Tout repère $(\mathcal{R}')$ en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen $(\mathcal{R})$ est aussi un repère galiléen

$$\boxed{[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}')] = [\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}}(\boldsymbol{S})]}$$

Démonstration :

Le référentiel $(\mathcal{R}')$ d'origine O' est en translation par rapport à $(\mathcal{R})$: $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

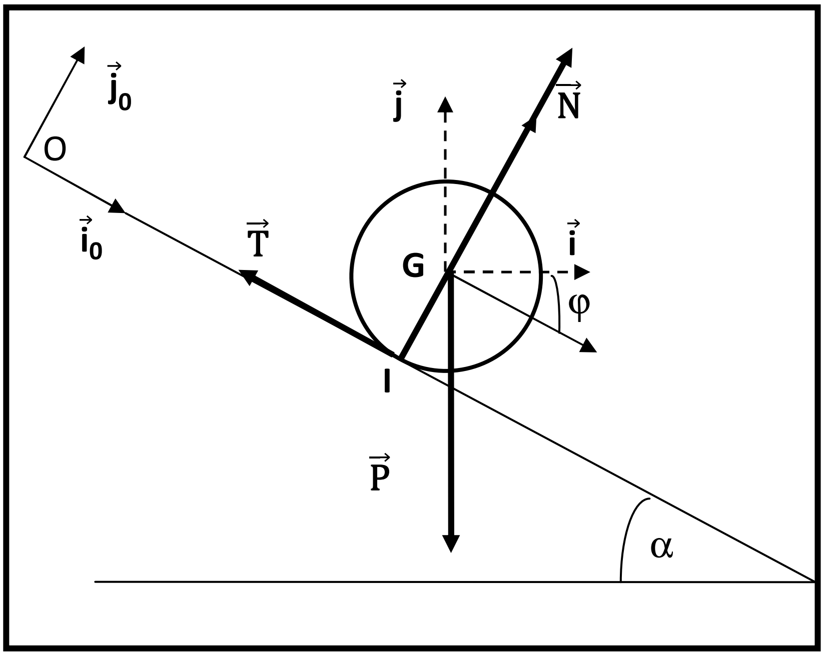
Mouvement rectiligne uniforme : $\vec{\gamma}(O'/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

Donc les torseurs dynamiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont nuls :

$$[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})] = [\mathbf{0}]$$
$$[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{ic}}(\boldsymbol{S},\mathcal{R}'/\mathcal{R})] = [\mathbf{0}]$$

<u>Exemple</u> : Mouvement d'une sphère sur un plan incliné

Soit une sphère (S) homogène, de centre G, de rayon r et de masse m en mouvement sur un plan incliné dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$. Soit f le coefficient de frottement résultant du contact entre la sphère et le plan incliné. Les résistances au roulement et au pivotement sont négligées. La sphère est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à $(\mathcal{R}_G)$. On pose $\varphi = (\vec{\imath}_0, \vec{\imath})$.



Etudier le mouvement de la sphère dans les deux cas a.) Roulement sans glissement et b) Glissement et roulement. Déterminer la valeur limite de l'angle α dans les deux cas.

<u>Etude du mouvement</u> :

Le mouvement de la sphère (S) est dans le plan : $(O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0)$

La liaison (holonome) de contact impose : $y_G = r$

Le mouvement de la sphère (S) dépend donc de deux paramètres : x_G et φ

<u>PFD appliqué à la sphère en mouvement dans</u> $(\mathcal{R}_0)$<u>:</u>

$$[D(S/\mathcal{R}_0)] = [F_{ext}(S)]$$

<u>Torseur des actions mécaniques extérieures à la sphère :</u>

$$[\mathcal{F}_{ext}(S)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{G,ext} \end{Bmatrix}$$

Les forces extérieures agissant sur la sphère :

Poids de la sphère : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha\, \vec{\imath}_0 - mg\cos\alpha \vec{\jmath}_0$

La force de contact : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N\, \vec{\jmath}_0 + T\, \vec{\imath}_0$

(T étant une grandeur algébrique qui peut-être > 0 ou < 0)

<u>Résultante générale</u>

$$\vec{R}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = (mg\sin\alpha + T)\vec{\imath}_0 + (-mg\cos\alpha + N)\vec{\jmath}_0$$

<u>Moment résultant au point G</u>

$$\vec{M}_{G,ext} = \vec{M}_G(\vec{R}) + \vec{M}_G(\vec{P})$$

$\vec{M}_G(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$

$\vec{M}_G(\vec{R}) = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R} = -r\vec{j}_0 \wedge (N\,\vec{j}_0 + T\,\vec{i}_0) = -r\vec{j}_0 \wedge T\vec{i}_0 = rT\vec{k}_0$

$\vec{M}_{G,ext} = rT\vec{k}_0$

Le torseur des actions mécaniques extérieure est :

$$[\mathcal{F}_{ext}(S)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} (mgsin\alpha + T)\vec{i}_0 + (-mgcos\alpha + N)\vec{j}_0 \\ rT\vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

<u>Torseur Dynamique de la sphère (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$) :</u>

$$[D(S/\mathcal{R}_0)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} \end{Bmatrix}$$

Accélération du centre de masse G :

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{GI} = x_G\vec{i}_0 + r\vec{j}_0$

$\vec{v}(G/R_0) = \dot{x}_G\vec{i}_0$

$\vec{\gamma}(G/R_0) = \ddot{x}_G\vec{i}_0$

Moment cinétique de la sphère (S) par rapport au centre de masse G dans le référentiel ($\mathcal{R}_0$) est :

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0) = \mathrm{II}_G(S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \frac{2}{5}mr^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{2}{5}mr^2\dot{\varphi}\,\vec{k}_0$$

Par conséquent :

$$\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}\,\vec{k}_0$$

Le torseur dynamique est :

$$[D(S/\mathcal{R}_0)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_G\vec{i}_0 \\ \dfrac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}\,\vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

- Egalité des résultantes : $m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{P} + \vec{R}$

$$m\ddot{x}_G = mgsin\alpha + T$$

$$0 = -mgcos\alpha + N$$

- Egalité des moments au point G (Théorème du moment cinétique):

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{M}_{G,ext}$$

Qui donne :

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = rT$$

Donc :

$$\boldsymbol{T = \frac{2}{5}mr\ddot{\varphi}}$$

Le problème présente 4 inconnues : $\boldsymbol{x_G}$, φ, N et T

Nous avons trois équations. D'où la nécessité d'introduire une quatrième équation ! On discutera deux cas :

1^er^ Cas : Roulement sans glissement **:** $\vec{v}_g(I; S/plan) = \vec{v}(I \in S/plan) = \vec{\mathbf{0}}$

Cette égalité cinématique permet de résoudre le problème !

D'après la F.F.C.S : $\vec{v}(I \in S/plan) = \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GI}}$

$\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S/plan) = \dot{x}_G\vec{i}_0 + \dot{\varphi}\vec{k}_0 \wedge -r\vec{j}_0 = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi})\vec{j}_0$

$$\dot{x}_G + r\dot{\varphi} = 0$$

Qui traduit une liaison non holonome.

Finalement, on a un système de 4 équations à 4 inconnues. En dérivant la quatrième équation, on a :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_G}{r}$$

En remplaçant dans l'expression de T, on obtient :

$$T = \frac{2}{5}mr\ddot{\varphi} = -\frac{2}{5}m\ddot{x}_G$$

$$-\frac{5}{2}T = m\ddot{x}_G = mgsin\alpha + T$$

Donc : $T = -\frac{2}{7}mgsin\alpha < 0$ **:**

Qui est orientée dans le sens des x décroissants. La force $\vec{T}$ est une force qui s'oppose au mouvement.

La composante normale a pour expression : $N = mgcos\alpha$

Ce qui donne : $\ddot{x}_G = \frac{5}{7}gsin\alpha$ **et** $\ddot{\varphi} = -\frac{5}{7}\frac{gsin\alpha}{r}$

L'accélération $\ddot{x}_G$ de la sphère est constante et positive : le mouvement de la sphère se fait dans le sens des x croissants.

Le roulement sans glissement a lieu si l'inégalité dynamique est vérifiée: $\|\vec{T}\| \le f\,\|\vec{N}\|$. soit :

$$tg\alpha \le \frac{7}{2}f$$

Si l'angle α est trop grand, il y'aura glissement.

2^ème^ cas : Roulement avec glissement **:** $\vec{v}_g = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi})\vec{j}_0 \neq \vec{\mathbf{0}}$

Loi de Coulomb (inégalité cinématique) doit être vérifiée : $\vec{v}_g \cdot \vec{T} < 0$

$v_g = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi}) > 0$ donc : $T < 0$

Il y aura glissement donc :

$$\|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\|$$

Cette égalité dynamique permet de résoudre le problème !

$$\|\vec{T}\| = |T| = -T = f\,N = fmgcos\alpha$$

Alors :

$$T = -fmgcos\alpha$$

Et donc : $\ddot{\varphi} = \frac{5}{2}\frac{T}{mr} = -\frac{5}{2}\frac{fgcos\alpha}{r}$

Le PFD donne: $m\ddot{x}_G = mgsin\alpha + T = mgsin\alpha - fmgcos\alpha$

D'où : $\ddot{x}_G = g(sin\alpha - fcos\alpha)$

Conditions initiales : $\dot{x}_G(t = 0) = 0$ et $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ (car immobilité initiale)

<u>Intégration</u>

$$\dot{x}_G = gt(sin\alpha - fcos\alpha)$$

$$\dot{\varphi} = -\left(\frac{5}{2}\frac{fgcos\alpha}{r}\right)t$$

Il y a roulement et glissement dans ce cas.

La condition de roulement avec glissement impose : $\vec{v}_g \,.\, \vec{T} < 0$

Ou encore : $(\dot{x}_G + r\dot{\varphi}) = gtcos\alpha\left(tg\alpha - \frac{7}{2}f\right) > 0$

Soit :

$$tg\alpha > \frac{7}{2}f$$

Si l'angle α devient trop petit, le glissement cesse et le RSG a lieu

Ch. VI

ENERGETIQUE DU SOLIDE

I. Puissance

1. Point matériel

La puissance développée par une force ponctuelle $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans un repère $(\mathcal{R})$ s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\vec{F}/\mathcal{R}\right) = \vec{F}\,.\,\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

L'unité de la puissance et le **watt** (W)

2. Système matériel (S)

La puissance développée, à l'instant t, par le torseur d'action mécanique $[\mathcal{F}(S)]$ sur un système matériel (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$est :

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{F}_i(M_i).\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) + \int_{M\epsilon(S)} d\vec{F}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Où la résultante générale du torseur d'action mécanique est représentée par des forces ponctuelles (M_i, $\vec{F}_i$) et des forces réparties $d\vec{F}(M)$.

3. Solide unique (S)

La puissance développée, à l'instant t, par le torseur d'action mécanique $[\mathcal{F}(S)]$ sur un **solide unique** (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$, est le co-moment du torseur d'action mécanique sur (S), et du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (R):

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = [\mathcal{F}(S)]\,.\,[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]}$$

Ou en termes des éléments de réduction au point A du solide (S)

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} . {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = \vec{R}\,.\vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{M}_A\,.\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}$$

Démonstration : La puissance pour un système continu est : $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})$

Le champ des vecteurs vitesse est un torseur. La relation de transfert de Varignon donne:

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{S}) \qquad \boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}$$

En remplaçant dans l'expression de la puissance

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left[\int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M})\right].\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \left[\int_{(S)} \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M})\right].\ \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\vec{R}}.\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\overrightarrow{\boldsymbol{M_A}}(\boldsymbol{S})$$

Conséquences

- Si deux torseurs de forces appliquées à un solide sont égaux, les puissances qu'ils développent sont égales
- Puissance d'un couple : $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\boldsymbol{M_A}}(\boldsymbol{S})\ .\ \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})$
- Puissance d'un glisseur: $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\vec{R}}\ .\ \boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$
- La puissance des forces intérieures à un solide est nulle.

  Comme $[\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}}(\boldsymbol{S})] = [\mathbf{0}]$ Alors $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{0}$

  Par conséquent: $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$

4. Changement de référentiels

La puissance développée sur un système matériel (S), par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$, est égale à la puissance sur (S) par rapport à un référentiel $(\mathcal{R}')$ augmentée par le co-moment du torseur d'action mécanique $[\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{S})]$ sur (S) et du torseur cinématique d'entrainement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$, $[\boldsymbol{\mathcal{V}_e}(\boldsymbol{S})] = [\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}') + [\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{S})].[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})]}$$

Démonstration : Soit $(\mathcal{R}')$ le repère d'origine O', qui est en mouvement relatif par rapport à un repère $(\mathcal{R})$.

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}) = \int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\left[\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{M}/\mathcal{R}') + \vec{\mathrm{v}}(\mathrm{M} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})\right]$$

$$\int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}') = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}')$$

Et comme le co-moment du torseur cinématique et celui d'action mécanique est :

$$\int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{M} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{\vec{v}}(\boldsymbol{O}'/\mathcal{R}) + \int_{(S)} \boldsymbol{d\vec{F}}(\boldsymbol{M}).\left(\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}\right)$$

$$= \vec{v}(O'/\mathcal{R}).\int_{(S)} d\vec{F}(M) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}).\int_{(S)} \overrightarrow{O'M}\wedge d\vec{F}(M) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}).\vec{R} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}).\vec{M}_{O'}$$

$$=[\mathcal{F}(S)].[\mathcal{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

5. Actions mutuelles entre deux systèmes matériels

La puissance développée, à l'instant t, par les actions mutuelles entres deux systèmes matériels (S_1) et (S_2), dans leurs mouvements par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\boxed{\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R})}$$

Propriété

La puissance développée par les actions mutuelles entre (S_2) et (S_1), est indépendante du repère $(\mathcal{R})$, on la note simplement par : $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1)$

6. Actions de contact entre deux solides

La puissance développée, à l'instant t, par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels (S_1) et (S_2), dans leur mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$, est négative ou nulle:

$$\boxed{\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1) = [\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)].[\mathcal{V}(S_1/S_2)] \leq 0}$$

Démonstration :

Soit I le point de contact entre (S_1) et (S_2) : $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1) = \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1).\vec{v}_g(I; S_1/S_2)$

Lois d' Amontons-Coulomb: $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1).\vec{v}_g(I;\ S_1/S_2) = \vec{T}.\vec{v}_g \leq 0$

Remarques

- $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1) \leq 0$ **:** On dit qu'il y a dissipation de l'énergie
- En l'absence de frottements entre les solides: $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1) = 0$

7. Liaison parfaite entre deux solides

La puissance développée par les actions mutuelles entre (S_2) et (S_1), qui ont une liaison parfaite est nulle :

$$\boxed{\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_1) = 0}$$

II. Travail (en joule (J))

1. Point matériel

Le travail élémentaire que reçoit un point matériel M dans un référentiel $(\mathcal{R})$, de la part d'une force ponctuelle $\vec{F}$ est donné par

$$\boxed{\delta W(\vec{F}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R})\, dt}$$

En utilisant, le déplacement élémentaire du point matériel M: $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}(M/\mathcal{R})dt$, on écrit que :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F}.\ \vec{v}(M/\mathcal{R})dt = \vec{F}\ .\ d\overrightarrow{OM}}$$

Remarque

Le travail n'est pas en général une différentielle totale exacte, il dépend du chemin suivi.

2. Système matériel (S)

Le travail élémentaire du torseur d'action mécanique $[\mathcal{F}(S)]$ sur un système matériel (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ est:

$$\boxed{\delta W(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R})\, dt}$$

Si on écrit que : $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}_{ext}] + [\mathcal{F}_{int}]$

Alors : $\mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(\mathcal{F}_{int} \longrightarrow S/\mathcal{R})$

Le travail élémentaire peut se décomposer en :

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int}$$

3. Solide unique (S)

Pour un **<u>solide indéformable unique</u>** (S), la distance, r_{ij} entre deux points M_i et M_j quelconques de (S) est constante. Par conséquent, le déplacement élémentaire est nul $dr_{ij} = 0$ et le travail des actions mécaniques intérieures est nul.

$$\boxed{\delta W_{int} = 0}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\delta W(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \delta W_{ext} = \mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\mathcal{R})\, dt}$$

Remarques

- Couple de moment résultant $\vec{\Gamma}$: $\boldsymbol{\delta W(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\,.\vec{\Gamma}\ dt}$
- Glisseur de résultante générale $\vec{R}$: $\boldsymbol{\delta W(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \vec{R}\,.\vec{v}(A/\mathcal{R})\ dt}$

III. Energie potentielle

1. Point matériel

Les forces appliquées à un point matériel M peuvent être décomposées en la somme de forces conservatives $\vec{F}_c$ et de forces non conservatives : $\vec{F}_{nc}$.

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

<u>**Force conservative $\vec{F}_c$**</u> : Une force $\vec{F}_c$ est dite conservative si elle dérive d'une fonction différentiable E_p, appelée énergie potentielle :

$$\vec{F}_c = -\overrightarrow{grad}\, Ep$$

Une force, $\vec{F}_c$ est conservative si: $\boldsymbol{Rot\,\vec{F}_c = \vec{0}}$

Le travail élémentaire est : $\boldsymbol{\delta W(\vec{F}_c/\mathcal{R}) = -dE_p}$

La puissance est : $\boldsymbol{P(\vec{F}_c/\mathcal{R}) = -\frac{d\,E_p}{dt}}$

<u>**Exemple**</u>

Le poids d'un point matériel M de masse m : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$

est une force conservative, car il dérive d'une énergie potentielle Ep :

$$\delta W(\vec{P}/\mathcal{R}) = m\vec{g}.d\overrightarrow{OM} = -mg\ dz = -dE_p$$

L'énergie potentielle est : $\boldsymbol{Ep(z) = mgz + Cste}$ (Cste : Constante d'intégration)

<u>**Force non conservative $\vec{F}_{nc}$**</u> : Une force est dite non conservative si elle ne dérive pas d'une énergie potentielle.

Exemple : forces de frottement.

2. Système matériel (S)

D'une manière similaire, le torseur d'action mécanique $[\mathcal{F}(S)]$sur un système matériel (S), peut s'écrire comme la somme :

$$[\mathcal{F}(S)] = [\mathcal{F}_c(S)] + [\mathcal{F}_{nc}(S)]$$

$[\mathcal{F}_c(S)]$: Torseur d'action mécanique des forces conservatives

$[\mathcal{F}_{nc}(S)]$: Torseur d'action mécanique des forces non conservatives

La puissance développée sur un système matériel (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$, par le torseur d'action mécanique $[\mathcal{F}(S)]$:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(\mathcal{F}_{nc} \longrightarrow S/\mathcal{R})}$$

Comme les forces conservatives dérivent d'une grandeur scalaire E_p appelée énergie potentielle, on a :

$$\boxed{\delta W(\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R}) = -dE_p\,(\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R})}$$

Et la puissance développée est :

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R}) = -\frac{d}{dt}\,E_p\,(\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R})}$$

IV. Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen

1. Système matériel (S)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système matériel (S), dans un repère galiléen $(\mathcal{R})$, est égale à la puissance des actions mécaniques $[\mathcal{F}(S)]$ intérieures et extérieures à (S) dans $(\mathcal{R})$

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE_c}\,(S/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}} = \mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(\mathcal{F}_{int} \longrightarrow S/\mathcal{R})}$$

Ou encore

$$\mathrm{dE_c}\,(S/\mathcal{R}) = \delta W(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\mathcal{R}) + \delta W(\mathcal{F}_{int} \longrightarrow S/\mathcal{R})$$

Preuve :

Soit (S) un système matériel de masse m et soit dm la masse élémentaire d'un élément de (S) centré autour du point M auquel est appliquée la résultante des forces : $\vec{F}(M)$. Ces forces englobent des forces extérieures et intérieures à (S).

$$\vec{\gamma}(M/R)dm = d\vec{F}(M)$$

Multiplions scalairement par le vecteur vitesse de M : $\vec{\gamma}(M/R).\vec{v}(M/\mathcal{R})dm = d\vec{F}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R})$

Le terme de gauche peut se réécrire comme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dm(\vec{v}(M/\mathcal{R})^2)}{2}\right] = d\vec{F}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

En étendant la somme à tous les points de (S), on aura :

$$\frac{\mathbf{dE_c}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$$

2. Cas d'un solide unique (S)

Pour un solide unique on a : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}] = \mathbf{0}}$

Alors :

$$\boxed{\frac{\mathbf{dE_c}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})}$$

et :

$$\Delta \boldsymbol{E_c}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{F_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$$

V. Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen $(\mathcal{R}')$

1. Système matériel (S)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système matériel (S), dans un repère non galiléen $(\mathcal{R}')$, est égale à la puissance des actions mécaniques **intérieures** et **extérieures** à (S) dans $(\mathcal{R}')$ augmentée de la puissance du torseur de l'action mécanique des forces d'inertie :

$$\boxed{\frac{\mathbf{dE_c}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}')}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}'] + \boldsymbol{\mathcal{P}}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}'] + \boldsymbol{\mathcal{P}}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ie}} \longrightarrow \boldsymbol{S}]}$$

où

$$[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ie}}(\boldsymbol{S}, \mathcal{R}'/\mathcal{R})] = -[\boldsymbol{D_{ie}}(\boldsymbol{S})]$$

Ou encore

$$\Delta \boldsymbol{E_c}\,(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}') = \boldsymbol{W}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}'] + \boldsymbol{W}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{int}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}'] + \boldsymbol{W}[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ie}} \longrightarrow \boldsymbol{S}]$$

Preuve :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R})\boldsymbol{dm} = \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}')\boldsymbol{dm} + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dm} + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dm}$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M}/\mathcal{R}')\boldsymbol{dm} = \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{M}) + \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{M}) + \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ic}}(\boldsymbol{M})$$

Avec :

$$\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{M}) = -\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dm}$$

$$\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ic}}(\boldsymbol{M}) = -\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dm}$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}').\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}')\boldsymbol{dm} = \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{M}).\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}') + \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ie}}(\boldsymbol{M}).\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\mathcal{R}')$$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas dans $(\mathcal{R}')$:

$$d\vec{F}_{ic}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{\gamma}_c(M).\vec{v}(M/\mathcal{R}')dm = (2\,\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')).\vec{v}(M/\mathcal{R}')dm = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dm(\vec{v}(M/\mathcal{R}')^2)}{2}\right] = d\vec{F}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R}') + d\vec{F}_{ie}(M).\vec{v}(M/\mathcal{R}')$$

En étendant la somme à tous les points de (S), on obtient le résultat.

2. Solide unique (S)

Pour un solide unique on a : $\mathcal{P}[\mathcal{F}_{int} \longrightarrow S/\mathcal{R}'] = 0$

Alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE_c}\,(S/\mathcal{R}')}{\mathrm{dt}} = \mathcal{P}[\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\mathcal{R}'] + \mathcal{P}[\mathcal{F}_{ie} \longrightarrow S]}$$

Ou encore :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE_c}\,(S/\mathcal{R}')}{\mathrm{dt}} = [\mathcal{F}_{ext}(S)].[\mathcal{V}(S/\mathcal{R}') + [\mathcal{F}_{ie}(S,\mathcal{R}'/\mathcal{R})].[\mathcal{V}(S/\mathcal{R}')]}$$

VI. Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique de (S) dans $(\mathcal{R})$ est donnée par :

$$\mathrm{E_m}\,(S/\mathcal{R}) = \mathrm{E_c}\,(S/\mathcal{R}) + \mathrm{E_p}[\mathcal{F}_c \longrightarrow S/\mathcal{R}]$$

La variation de l'énergie mécanique est :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE_m}\,(S/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}} = \mathcal{P}[\mathcal{F}_{nc} \longrightarrow S/\mathcal{R}] \leq 0}$$

L'énergie mécanique diminue dans le temps. On dit que les forces non conservatives (de frottement) dissipent l'énergie.

Si la **puissance** du torseur des forces **non conservatives** est **nulle**, alors l'énergie mécanique est constante:

$$\mathrm{E_m}\,(S/\mathcal{R}) = \mathrm{E_c}\,(S/\mathcal{R}) + \mathrm{E_p}(S) = Cste$$

Qui exprime l'existence d'est une intégrale première du mouvement appelée intégrale première de l'énergie cinétique et qui traduit la conservation de l'énergie mécanique.

REFERENCES

1. *MECANIQUE DU SOLIDE. COURS, EXERCICES ET PROBLEMES CORRIGES*. A. THIONNET, E. COQUET ET P. LAPAGE. ELLIPSES
2. *MECANIQUE DU SOLIDE. APPLICATIONS INDUSTRIELLES*. P. AGATI, Y. BREMONT ET G. DELVILLE, DUNOD
3. *TOUTE LA MECANIQUE. COURS ET EXERCICES CORRIGES*. L. BOCQUET, J P FAROUX ET J. RENAULT. DUNOD

Annexe: Vecteurs

1. Introduction

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe B = ($\vec{e_1}$,$\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$), dans laquelle un vecteur $\vec{u}$ de E se décompose en terme de ses composantes u_1, u_2, u_3 comme suit:

$$\vec{u} = u_1\,\vec{e_1} + u_2\,\vec{e_2} + u_3\,\vec{e_3}$$

N.B. Dans la suite, on ne considèrera que les bases orthonormées directes.

Soit E l'espace affine euclidien de dimension 3 qui est associé à E. On associe à tout vecteur $\vec{u}$ de E, un bipoint (A, B) de E ^{2}, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, défini par :

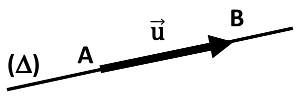
- **Sens :** de A vers B
- **Module** :

$$u = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Où $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

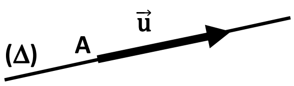
- **Origine ou point d'application** : c'est le point A de E

- **Direction** : droite Δ (A, $\vec{u}$) passant par A et admettant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour vecteur directeur. On l'appelle support du vecteur.



Vecteur lié ou pointeur

C'est un vecteur (A, $\vec{u}$) dont l'origine A (ou le point d'application) et le support sont fixes.

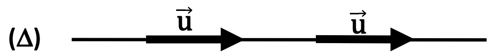


Exemple : Force appliquée à un solide *déformable*.

Selon le point d'application ou la direction de la force, le solide peut se déformer différemment. *L'effet* de la force change si on change son point d'application ou sa direction.

Vecteur glissant ou glisseur

C'est un vecteur dont le support est fixe mais non le point d'application. Il est défini à un glissement près sur son support. On le note (□,$\vec{u}$).

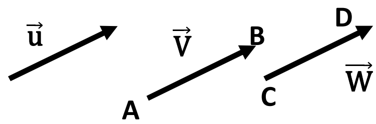


Exemple : Force appliquée à un solide *indéformable*

Suivant une même direction, une force, aura le même *effet*, si elle est appliquée à un solide *indéformable*. Selon la direction de la force, le solide peut subir soit une translation, soit une rotation ou les deux.

Vecteur libre

C'est un vecteur dont le support et le point d'application ne sont pas fixes.



Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

Remarque

Contrairement aux grandeurs scalaires (température, masse, etc.), toutes les grandeurs vectorielles (vitesse, accélération etc.) dépendent du repère d'observation.

2. Opérations sur les vecteurs

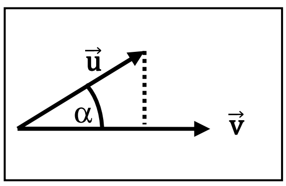
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w} \in$ E . Dans une même base de E :

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$; $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^t$

2.1. Produit scalaire

Expression géométrique :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, est le scalaire défini par :



$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = u\ v\ \cos\alpha$$

avec $\alpha = (\widehat{\vec{u}\,,\ \vec{v}})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Expression analytique :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

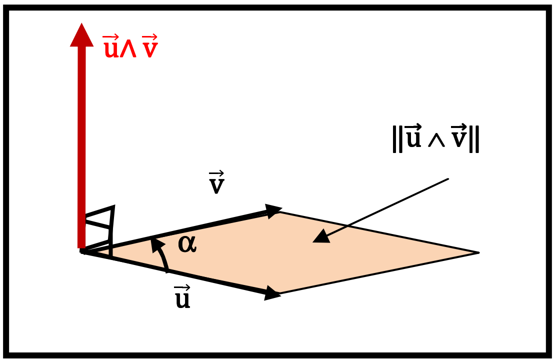
- $u_i = \vec{u}\cdot\vec{e_i}$ $\quad i = 1,2,3$
- Le module de $\vec{u}$ est :

$$u = \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

2.2. Produit vectoriel

Expression géométrique : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté, $\vec{u}\wedge\vec{v}$, tels que :

- **module** : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = u\ v\ |\sin\alpha|$
- **sens** : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ est un trièdre direct
- **direction** : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$: est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Expression analytique :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix}$$

- $\vec{u}\wedge\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants (colinéaires ou parallèles)
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$: le produit vectoriel est anticommutatif.

2.3. Double produit vectoriel

Le produit vectoriel de trois vecteurs : $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de E est le vecteur :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$$

C'est un vecteur qui appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2.4. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs : $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ de E est le scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ -v_1(u_2 w_3 - u_3 w_2) \\ w_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) \end{vmatrix}$$

Géométriquement, c'est le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

- Le produit mixte est invariant par une permutation circulaire entre les trois vecteurs :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

- Le produit mixte change de signe par une permutation deux à deux (non circulaire) :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si :
  - l'un des vecteurs est nul
  - ou deux des vecteurs sont colinéaires.