CHAP3 Analyse3: Intégrales Doubles

Metrane Abdelmoutalib
ab.metrane@gmail.com

UPM Marrakech

April 18, 2017

1. Les intégrales itérées et sur des domaines de forme quelconque
    - Rappel: Intégrale de Riemann de $f(x)$
    - Intégrale double sur un rectangle
    - Propriétés de l'intégrale double
2. Les intégrales itérées
    - Définitions
    - intégrale itérée
    - Les intégrales doubles sur des domaines de forme quelconque
    - Intégrale de type I
    - Intégrale de type II
    - Exemples
    - Les propriétés des intégrales doubles
3. Les intégrales doubles en coordonnées polaires
    - Rectangle polaire Simple

Soit

- une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$
- une subdivision $x_0,\ x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ de $[a, b]$ tel que $x_0 = a$ et $x_n = b$. On suppose que chaque sous intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est de même longueur $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$
- un point $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour chaque sous intervalle.

Définition

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$$

- Le nombre $f(x_i^*)\triangle x$ est l'aire du rectangle dont la base est $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(x_i^*)$.
- $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x$ est une approximation de l'aire sous la courbe $y = f(x)$ depuis a jusqu'à b.

Soit f une fonction positive de deux variables définie sur un rectangle fermé

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \right\}.$$

La première étape consiste à diviser le rectangle R en sous rectangles. Soit la subdivisions $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ de $[a, b]$ et $y_0 = c, y_1, ..., y_m = d$ de $[c, d]$. Les sous rectangle sont de la forme

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j \right\}$$

On suppose que tous les R_{ij} ont la même aire

$$\triangle A = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Un point $\left(x_i^*, y_j^*\right) \in R_{ij}$ pour chaque sous-rectangle.

Définition

L'intégrale (double) de f sur R est définie par

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \triangle A$$

pourvu que cette limite existe

Si $f(x,y) \geq 0$, alors

- le nombre $f\left(x_i^*, y_j^*\right) \triangle A$ est le volume du parallélipipède rectangle dont la base est R_{ij} et de hauteur $f\left(x_i^*, y_j^*\right)$.
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \triangle A$ est une approximation du volume sous la surface $z = f(x,y)$ au-dessus du rectangle R.

Si $f(x,y)$ n'est pas toujours positive sur R alors

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = V_+ - V_-$$

où

- V_+ est le volume sous la surface $z = f(x,y)$ et au-dessus de la sous-région de R où f est positive.
- V_- est le volume sous la surface $z = f(x,y)$ et en-dessous de la sous-région de R où f est négative.

Proposition

Soit f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle R et c une constante. Alors

1. $\int\int_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int\int_R f(x,y)\,dA + \int\int_R g(x,y)\,dA$
2. $\int\int_R c\,f(x,y)\,dA = c\int\int_R f(x,y)\,dA$
3. *Si* $f(x,y) \geq g(x,y)$ *pour tout* (x,y) *de* R, *alors*

$$\int\int_R f(x,y)\,dA \geq \int\int_R g(x,y)\,dA.$$

On suppse que f est une fonction de deux variables continues sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \longleftrightarrow \ x \text{ est fixe et que } f(x, y) \text{ est intégrée par rapport à } y$$

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

En intégrant la fonction A par rapport à x depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, on a

$$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Cet intégrale est appelée **intégrale itérée**. De même on peut montrer que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

Théorème

Si f est continue sur le rectangle $R = \{(x, y)\ /\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq b\}$, alors

$$\int\int_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

Exemple

1. Calculez les intégrales itérées a) $\int_0^2 \int_{-1}^1 y^2 xdydx$ b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 y^2 xdxdy$
2. Calculez l'intégrale double $\int\int_R (1 + 4xy)\, dA$, où $R = \{(x, y)\ /\ 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
3. Calculez l'intégrale double $\int\int_R (y \sin xy)\, dA$, où $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.
4. Calculez le volume du solide qui se trouve sous le plan $3x + 2y + z = 12$ et au-dessus du rectangle $R = [0, 1] \times [-2, 3]$

Produit séparable par variables

$$\int\int_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \quad \text{où } R = [a,b]\times[c,d]$$

Exemple

Calculez l'intégrale double $\int\int_R (x\sin y)\,dA$, où $R = [0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

Domaine d'intégration

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \text{ appartient à } D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \text{ et non à } D \end{cases}$$

L'intégrale double de f sur D par

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_R F(x,y)\,dA$$

Un domaine plan D est dite de type I s'il est délimité par les graphes de deux fonctions continues de x, c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) \ / \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

où g_1 et g_2 sont continues sur $[a, b]$.

Proposition

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type I tel que

$$D = \{(x, y) \ / \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

alors

$$\int\int_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

Un domaine plan D est dite de type II s'il est délimité par les graphes de deux fonctions continues de y, c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) \ / \ c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

où h_1 et h_2 sont continues sur $[c, d]$.

Proposition

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type II tel que

$$D = \{(x, y) \ / \ c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

alors

$$\int\int_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx dy$$

Exemples

1. Si D est le domaine délimité par les paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$, calculez $\int\int_D (x + 2y)\, dA$
2. Calculez le volume du solide décrit sous le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et sur le domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
3. Calculez $\int\int_D (x - 1)\, y dA$ où D est le domaine borné par la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.
4. Calculez le volume du solide décrit sous la suface $z = xy$ et sur le triangle de sommet $(1, 1)$, $(4, 1)$ et $(1, 2)$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, sans que D_1 ne chevauche D_2 sauf peut-être sur leur frontière, alors

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dA + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dA$$

L'intégrale double de la fonction constante 1 sur un domaine D donne l'aire de celui-ci

$$\int\int_D 1 dA = A(D)$$

Si $m \leq f(x,y) \leq M$ pour tout (x,y) dans D , alors

$$m\,A(D) \leq \int\int_D f(x,y)\,dA \leq M\,A(D)$$

Exemple: Servez-vous de la propriété précédente pour évaluer l'intégrale $\int\int_D e^{\sin x \cos y} dA$ où D est le disque centré à l'origine de rayon 2.

Les coordonnées polaires (r, θ) sont liées aux coordonnées rectangulaires (x, y)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

où r est la distance du point à l'origine et θ est l'angle entre l'axe positif des x et le segment de l'origine jusqu'au point (x, y).

Un rectangle polaire est définie par

$$R = \{(r, \theta) \ / \ a \leq r \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Proposition

Si f est continue sur un rectangle polaire
$R = \{(r, \theta) \ / \ 0 \leq a \leq r \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ *où* $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, *alors*

$$\int \int_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

Exemple

1. Calculez $\int \int_R 2xydA$ où R est la région du demi-plan supérieur comprise entre les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.
2. Déterminez le volume du solide délimité par le plan $z = 0$ et le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$.