Fonctions de variable complexe

Pr Azeddine BAALAL   Faculté des Sciences Aïn Chock - Casablanca

Analyse3-SMP3-2012

Le plan complexe

- $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

Le plan complexe

- $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
- Le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. $z = re^{i\theta}$, avec $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $r = |z|$.

Le plan complexe

- $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
- Le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $z = re^{i\theta}$, avec $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $r = |z|$.
- $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Le plan complexe

- $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
- Le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. $z = re^{i\theta}$, avec $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $r = |z|$.
- $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
- Le **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

- $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
- Le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $z = re^{i\theta}$, avec $\tan\theta = \frac{y}{x}$ et $r = |z|$.
- $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
- Le **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

- On appelle **voisinage** de $z_0 \in \mathbb{C}$ tout partie de $\mathbb{C}$ contenant un disque ouvert de centre z_0. Un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est un **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses points.

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

- Si $z = x + iy$, alors $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$f : \quad \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

- Si $z = x + iy$, alors $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$.
- Soit z_0 un point d'accumulation de Ω. On dit que f tend vers une **limite** l quand z tend vers z_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad (z \in \Omega \text{ et } |z - z_0| < \eta) \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On note alors : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$f : \begin{array}{rcl} \Omega \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

- Si $z = x + iy$, alors $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$.
- Soit z_0 un point d'accumulation de Ω. On dit que f tend vers une **limite** l quand z tend vers z_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0 \;\; (z \in \Omega \;\text{ et }\; |z - z_0| < \eta) \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On note alors : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

- On dit que f est **continue** au point $z_0 \in \Omega$, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$f: \quad \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

- Si $z = x + iy$, alors $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$.
- Soit z_0 un point d'accumulation de Ω. On dit que f tend vers une **limite** l quand z tend vers z_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0 \ \ (z \in \Omega \ \text{ et } \ |z - z_0| < \eta) \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On note alors : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

- On dit que f est **continue** au point $z_0 \in \Omega$, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Pour que f soit **continue** au point z_0 il faut et il suffit que les fonctions P et Q soient continues au point (x_0, y_0).

- **Fonction d'une variable complexe** :

$$f: \quad \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

- Si $z = x + iy$, alors $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$.
- Soit z_0 un point d'accumulation de Ω. On dit que f tend vers une **limite** l quand z tend vers z_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0 \;\; (z \in \Omega \;\text{ et }\; |z - z_0| < \eta) \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On note alors : $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l$.

- On dit que f est **continue** au point $z_0 \in \Omega$, si $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Pour que f soit **continue** au point z_0 il faut et il suffit que les fonctions P et Q soient continues au point (x_0, y_0).
- Une fonction continue en tout point de Ω est dite **continue sur** Ω.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}z^{-1}$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}z^{-1}$.
- Alors, si $z = x + iy$, on a

$$f(x+iy) = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

Exemple

- Soit $f : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}z^{-1}$.
- Alors, si $z = x + iy$, on a

$$f(x+iy) = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

- et

$$1 = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x+iy) \neq \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x+iy) = -1$$

Exemple

- Soit $f : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}z^{-1}$.
- Alors, si $z = x + iy$, on a

$$f(x+iy) = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

- et

$$1 = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x+iy) \neq \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x+iy) = -1$$

- f n'a donc pas de limite en 0.

- On dit que f est **dérivable** en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h + z_0) - f(z_0)}{h}$$

existe,

Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

- On dit que f est **dérivable** en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h + z_0) - f(z_0)}{h}$$

existe,

- et on note cette limite $f^{'}(z_0)$ qu'on appelle **dérivée** de f au point z_0.

Exemple

- Considérons $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. On a :

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z}_0+\overline{h})-z_0\overline{z}_0}{h} = \overline{z}_0+\overline{h}+z_0\frac{\overline{h}}{h}.$$

Exemple

- Considérons $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. On a :

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z}_0+\overline{h})-z_0\overline{z}_0}{h} = \overline{z}_0+\overline{h}+z_0\frac{\overline{h}}{h}.$$

- Si $z_0 = 0$, alors $f'(z_0) = 0$, f est donc dérivable en 0.

Exemple

- Considérons $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. On a :

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z}_0+\overline{h})-z_0\overline{z}_0}{h} = \overline{z}_0+\overline{h}+z_0\frac{\overline{h}}{h}.$$

- Si $z_0 = 0$, alors $f'(z_0) = 0$, f est donc dérivable en 0.
- si $z_0 \neq 0$ f n'est pas dérivable en dehors de 0.

Exemple

- Considérons $f(z) = z^2$. On a :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = 2z_0 + h$$

Exemple

- Considérons $f(z) = z^2$. On a :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = 2z_0 + h$$

- f est donc dérivable en z_0 et on a $f'(z_0) = 2z_0$.

Propriétés

- Les propriétés des limites dans $\mathbb{C}$ étant semblables à celles des limites dans $\mathbb{R}$, le calcul des dérivées des fonctions complexes d'une variable complexe s'effectue et se justifie dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

- Les propriétés des limites dans $\mathbb{C}$ étant semblables à celles des limites dans $\mathbb{R}$, le calcul des dérivées des fonctions complexes d'une variable complexe s'effectue et se justifie dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivables.On a : $(\alpha f)^{'} = \alpha f^{'}$; $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$; $(fg)^{'} = f^{'}g + fg^{'}$; $\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'}g - fg^{'}}{g^2}$, avec $g(z) \neq 0$; $(f \circ g)^{'} = \left(f^{'} \circ g\right) g^{'}$.

Conditions de Cauchy-Riemann

- Si f est dérivable en z_0, alors P et Q admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières par rapport à chacune de leurs variables,

Conditions de Cauchy-Riemann

- Si f est dérivable en z_0, alors P et Q admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières par rapport à chacune de leurs variables,
- et on a les "Conditions de Cauchy-Riemann" :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad .$$

Remarque

Les conditions de Cauchy-Riemann n'impliquent pas que la fonction f *est dérivable.*
En effet, soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{C}$ *par*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & si\ z \neq 0, \\ 0 & si\ z = 0. \end{cases}$$

vérifie les relations de Cauchy-Riemann en 0*.Cependant on voit que :*

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x + i0) - f(0)}{x} = 1 + i$$

et

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{f(x + ix) - f(0)}{x + ix} = \frac{1 + i}{2}.$$

La fonction f *n'est donc pas dérivable en* 0*, malgré le fait qu'elle vérifie les relations de Cauchy-Riemann.*

Proposition

Si les fonctions réelles P *et* Q *admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de* (x_0, y_0) *et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en* $z_0 = x_0 + iy_0$, *alors* $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *est dérivable en* z_0.

Fonctions holomorphes

On dit d'une fonction f qu'elle est **holomorphe** dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si elle est dérivable en tout point de Ω.

Exemple

- La fonction
$$f(x+iy) = y^2 - x^2 + i(y^2 - 2x)$$
définie et continue sur $\mathbb{C}$, n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exemple

- La fonction
$$f(x+iy) = y^2 - x^2 + i(y^2 - 2x)$$
définie et continue sur $\mathbb{C}$, n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- La fonction
$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Théorème

La fonction somme d'une série entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence, sa dérivée peut être obtenue par dérivation terme à terme et elle est indéfiniment dérivable sur ce même disque.

Exemples

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ est égal à 1. Sur le disque de convergence, la somme de cette série vaut $\dfrac{1}{1-z}$.

Exemples

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ est égal à 1. Sur le disque de convergence, la somme de cette série vaut $\dfrac{1}{1-z}$.
- Le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à $+\infty$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut appliquer le critère de d'Alembert au module $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right|$.

Séries de Laurent

- Une **série de Laurent**, c'est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, i.e. une série de puissances positives et négatives de z.

Séries de Laurent

- Une **série de Laurent**, c'est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, i.e. une série de puissances positives et négatives de z.
- Pour que $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ convergent.

Séries de Laurent

- Une **série de Laurent**, c'est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, i.e. une série de puissances positives et négatives de z.
- Pour que $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ convergent.
- Par conséquent, une série de Laurent possède une couronne de convergence $A = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$.

Séries de Laurent

- Une **série de Laurent**, c'est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, i.e. une série de puissances positives et négatives de z.
- Pour que $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ convergent.
- Par conséquent, une série de Laurent possède une couronne de convergence $A = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$.
- Le théorème de dérivation terme à terme s'étend aux séries de Laurent.

(Subsubsubsection head:)

- La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$, en prolongeant ce que l'on connaît dans $\mathbb{R}$, on pose par définition

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

(Subsubsubsection head:)

- La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$, en prolongeant ce que l'on connaît dans $\mathbb{R}$, on pose par définition

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- La fonction exponentielle e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (donc entière) et vérifie $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(e^z\right)' = e^z$.

(Subsubsubsection head:)

- La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$, en prolongeant ce que l'on connaît dans $\mathbb{R}$, on pose par définition

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- La fonction exponentielle e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (donc entière) et vérifie $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(e^z\right)' = e^z$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a $e^z \neq 0$, $\; e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ et $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

(Subsubsubsection head:)

- La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ayant pour rayon de convergence $R=+\infty$, en prolongeant ce que l'on connaît dans $\mathbb{R}$, on pose par définition

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

- La fonction exponentielle e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (donc entière) et vérifie $\forall z\in\mathbb{C} \quad \left(e^z\right)'=e^z$.
- $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a $e^z\neq 0$, $\;e^{-z}=\frac{1}{e^z}$ et $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$.
- $\left|e^{iy}\right|=1$ si $y\in\mathbb{R}$ et $\left|e^z\right|=e^{\mathrm{Re}(z)}$.

(Subsubsubsection head:)chshcossin

- Les fonction ch, sh, cos et sin sont définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$ par

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

(Subsubsubsection head:)chshcossin

- Les fonction ch, sh, cos et sin sont définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$ par

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

-

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch}(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \operatorname{sh}(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Fonction logarithmique

(Subsubsubsection head:)

- On a pour tout nombre complexe w non nul

$$e^{w} = z \Longleftrightarrow w = \ln|z| + i\arg(z) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Fonction logarithmique

(Subsubsubsection head:)

- On a pour tout nombre complexe w non nul

$$e^w = z \Longleftrightarrow w = \ln|z| + i\arg(z) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- On appelle **détermination principale du logarithme** la fonction notée $\ln z$,

$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) \quad \text{avec} \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Fonction logarithmique

(Subsubsubsection head:)

- On a pour tout nombre complexe w non nul

$$e^w = z \Longleftrightarrow w = \ln|z| + i\arg(z) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- On appelle **détermination principale du logarithme** la fonction notée $\ln z$,

$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) \ \text{ avec } \ -\pi < \arg(z) < \pi.$$

- Elle est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sur la bande du plan complexe $-\pi < y < \pi$ et on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \qquad (\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.
- Si le point initial $\gamma(a)$ de γ coïncide avec le point final $\gamma(b)$, nous disons que γ est une **courbe fermée**.

Intégration complexe sur les chemins

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.
- Si le point initial $\gamma(a)$ de γ coïncide avec le point final $\gamma(b)$, nous disons que γ est une **courbe fermée**.
- Un **chemin** est une courbe dans $\mathbb{C}$, continûment differentiable par morceaux.

Intégration complexe sur les chemins

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.
- Si le point initial $\gamma(a)$ de γ coïncide avec le point final $\gamma(b)$, nous disons que γ est une **courbe fermée**.
- Un **chemin** est une courbe dans $\mathbb{C}$, continûment differentiable par morceaux.
- Un **contour** (ou **chemin fermé**) est une courbe fermée qui est aussi un chemin.

Intégration complexe sur les chemins

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.
- Si le point initial $\gamma(a)$ de γ coïncide avec le point final $\gamma(b)$, nous disons que γ est une **courbe fermée**.
- Un **chemin** est une courbe dans $\mathbb{C}$, continûment differentiable par morceaux.
- Un **contour** (ou **chemin fermé**) est une courbe fermée qui est aussi un chemin.
- Un **contour** est dit **simple** s'il est la frontière d'un domaine simplement connexe.

Intégration complexe sur les chemins

- Une **courbe** γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est une application continue d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; ici $a < b$. Nous appelons $[a, b]$ le **segment du paramétrage** de γ et nous notons encore par γ son image $\gamma([a, b])$.
- Si le point initial $\gamma(a)$ de γ coïncide avec le point final $\gamma(b)$, nous disons que γ est une **courbe fermée**.
- Un **chemin** est une courbe dans $\mathbb{C}$, continûment differentiable par morceaux.
- Un **contour** (ou **chemin fermé**) est une courbe fermée qui est aussi un chemin.
- Un **contour** est dit **simple** s'il est la frontière d'un domaine simplement connexe.
- Un contour simple est orientable et le **sens positif** sera par convention le sens trigonométrique.

- Supposons maintenant que γ soit un chemin, et que f soit une fonction continue sur γ.

- Supposons maintenant que γ soit un chemin, et que f soit une fonction continue sur γ.
- L'intégrale de f sur γ est définie comme une intégrale sur le segment du paramétrage $[a, b]$ de γ :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1}$$

Exemple

- Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le chemin défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

est le *cercle orienté* positivement, de centre z_0 et de rayon r ;

Exemple

- Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le chemin défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

  est le *cercle orienté* positivement, de centre z_0 et de rayon r ;
- on a

$$\int_\gamma f(z)dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{i\theta} d\theta,$$

Proposition

Pour $m \in \mathbb{Z}$ *et* $a \in \mathbb{C}$, *considérons la fonction de la variable complexe* $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)^m}$. *C'est une fonction définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe)* $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. *Considérons d'autre part un circuit* Γ *constitué par un cercle de rayon* r *centré au point* a. *Alors*

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0 & si\ m \neq 1, \\ 2i\pi & si\ m = 1. \end{cases}$$

Démonstration

- Paramétrons le circuit Γ de la manière suivante $z(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, de sorte que

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^m e^{itm}} ire^{it} dt = ir^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t} dt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1, \\ 2i\pi & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Théorème de Cauchy

Théorème

(de Cauchy) Soit Ω un domaine simplement connexe, soit f une fonction holomorphe sur Ω, et soit γ un contour simple contenu dans Ω. Alors

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = 0.$$

Formule intégrale de Cauchy

Proposition

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe Ω, et $z_0 \in \Omega$. Alors on a, pour tout contour C de Ω orienté positivement et entourant z_0 :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad \textit{(Formule de Cauchy).} \tag{2}$$

Proposition

Soit f holomorphe dans un domaine Ω, alors f est de classe C^∞ sur dans Ω. Si de plus Ω est simplement connexe, pour tout contour C entourant z_0 on a :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Formule de Taylor

Théorème

Soient Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, f une fonction holomorphe sur un voisinage de Ω et C un cercle de centre z_0 et de rayon $R > 0$ entièrement contenu dans Ω. On a, pour chaque point z intérieur à C :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Les coefficients de la série de Taylor sont donnés par la formule

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du,$$

ou encore

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du.$$

Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

- Une couronne est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques (en $z_0 \in \mathbb{C}$).

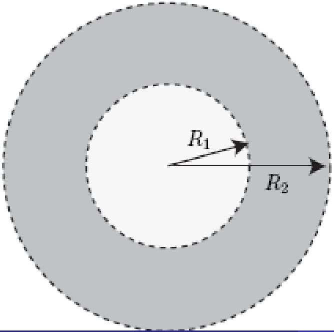
Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

- Une couronne est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques (en $z_0 \in \mathbb{C}$).
- Si R_1 et R_2 sont deux nombres réels vérifiant $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, on notera
$$A_{R_1,R_2}(z_0) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

- Une couronne est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques (en $z_0 \in \mathbb{C}$).
- Si R_1 et R_2 sont deux nombres réels vérifiant $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, on notera

$$A_{R_1,R_2}(z_0) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$



Théorème

Toute fonction holomorphe dans une couronne $A_{R_1,R_2}(z_0)$ *est développable en série de Laurent dans cette couronne. Les coefficients du développement de* f *se calculent par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+_{(z_0,r)}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$

où $C^+_{(z_0,r)}$ *est un cercle de centre* z_0 *et de rayon* $r \in \left]R_1, R_2\right[$ *arbitraire.*

Exemples

- La fonction $\dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $C \setminus \{0,1\}$.

Exemples

- La fonction $\dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $C \setminus \{0,1\}$.
- D'après le théorème, elle est développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. En effet :

Exemples

- La fonction $\dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $C \setminus \{0,1\}$.
- D'après le théorème, elle est développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. En effet :
- On a dans la couronne $A_{0,1}(0)$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Exemples

- La fonction $\dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $C \setminus \{0,1\}$.
- D'après le théorème, elle est développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. En effet :
- On a dans la couronne $A_{0,1}(0)$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

- Dans la couronne $A_{0,1}(1)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{(1-(1-z))(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Exemples

- La fonction $\dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur l'ouvert $C \setminus \{0,1\}$.
- D'après le théorème, elle est développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. En effet :
- On a dans la couronne $A_{0,1}(0)$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

- Dans la couronne $A_{0,1}(1)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{(1-(1-z))(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

- Pour $z \in A_{1,+\infty}(0)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

- On dit que z_0 est un point singulier isolé de la fonction f s'il existe un disque ouvert D de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.

- On dit que z_0 est un point singulier isolé de la fonction f s'il existe un disque ouvert D de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.
- Soient f une fonction d'une variable complexe et z_0 un point singulier isolé de f. Il existe un disque ouvert D de centre z_0 tel que f soit développable en série de Laurent dans la couronne ouverte $D \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in D \setminus \{z_0\}.$$

Point singulier éliminable

- Si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

Point singulier éliminable

- Si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.
- Alors, il suffit de poser, dans ce cas, $f(z_0) = a_0$ pour prolonger f en une fonction holomorphe dans D.

Point singulier éliminable

- Si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.
- Alors, il suffit de poser, dans ce cas, $f(z_0) = a_0$ pour prolonger f en une fonction holomorphe dans D.
- On dit que z_0 est un point singulier éliminable . On dit aussi que l'on a une singularité apparente en z_0.

Exemple de point singulier éliminable

- La fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ admet 0 comme point singulier éliminable,

Exemple de point singulier éliminable

- La fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ admet 0 comme point singulier éliminable,
- car $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.

Point singulier d'ordre fini

- Si Il existe $n_0 < 0$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.

Point singulier d'ordre fini

- Si Il existe $n_0 < 0$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.
- On dit dans ce cas que z_0 est un pôle d'ordre $-n_0$.

Point singulier d'ordre fini

- Si Il existe $n_0 < 0$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.
- On dit dans ce cas que z_0 est un pôle d'ordre $-n_0$.
- Soit $m \in \mathbb{N}$. Le complexe z_0 est un pôle d'ordre m de f si et seulement si
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$
où g est holomorphe au voisinage de z_0 et $g(z_0) \neq 0$.

Exemple de point singulier d'ordre fini

- Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z-3)}.$$

Exemple de point singulier d'ordre fini

- Soit f la fonction définie par
$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z-3)}.$$
- Le complexe $z = 3$ est un pôle d'ordre 1 (simple) alors que $z = i$ est un pôle d'ordre 2 (double).

Exemple de point singulier d'ordre fini

- Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z-3)}.$$

- Le complexe $z = 3$ est un pôle d'ordre 1 (simple) alors que $z = i$ est un pôle d'ordre 2 (double).
- Le complexe z_0 est un pôle d'ordre m pour f si et seulement si

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

est finie et est non nulle.

Point singulier essentiel

- Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $n < 0$ tel que $a_n \neq 0$.

Point singulier essentiel

- Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $n < 0$ tel que $a_n \neq 0$.
- On dit que z_0 est un point singulier essentiel de f.

Exemple de point singulier essentiel

- Soit la fonction f définie, pour tout $z \neq 0$, par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

admet 0 comme un point singulier essentiel.

Résidus

- Soit z_0 un point singulier isolé de f et soit D un disque ouvert de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.

Résidus

- Soit z_0 un point singulier isolé de f et soit D un disque ouvert de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.
- On a pour tout $z \in D \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Résidus

- Soit z_0 un point singulier isolé de f et soit D un disque ouvert de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.
- On a pour tout $z \in D \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- On appelle **résidu** de f au point singulier isolé z_0 et on le note $Res(f, z_0)$ le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent autour de z_0.

- Soit z_0 un point singulier isolé de f et soit D un disque ouvert de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.
- On a pour tout $z \in D \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- On appelle **résidu** de f au point singulier isolé z_0 et on le note $Res(f, z_0)$ le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent autour de z_0.
- En d'autres termes

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(z)dz$$

où C est un cercle quelconque de centre z_0 contenu dans D.

- Si z_0 est un pôle simple de f, on a

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Si de plus $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0 (zéro simple de h) et $g(z_0) \neq 0$, alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Si z_0 est un pôle simple de f, on a

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Si de plus $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0 (zéro simple de h) et $g(z_0) \neq 0$, alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Si z_0 est un pôle d'ordre $n \geq 2$, alors

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right).$$

- Si z_0 est un pôle simple de f, on a

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Si de plus $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0 (zéro simple de h) et $g(z_0) \neq 0$, alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Si z_0 est un pôle d'ordre $n \geq 2$, alors

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z)\right).$$

- Si z_0 est un point singulier essentiel de f, alors on doit calculer le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent.

Théorème des résidus

Théorème

Soit Ω *un domaine simplement connexe et soit* f *une fonction holomorphe sur un voisinage de* Ω *sauf en un nombre fini de points singuliers* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *intérieurs à* Ω*. Alors*

$$\int_{\partial\Omega^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{p} Res(f, z_k).$$

- Pour calculer une intégrale de la forme
$$\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta,$$

Intégrale de fonctions rationnelles trigonométriques

- Pour calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)d\theta,$$

- la fonction φ étant rationnelle, on pose $z = e^{i\theta}$ et on obtient

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{z^2-1}{2iz}$$
$$d\theta = \frac{-idz}{z}.$$

Intégrale de fonctions rationnelles trigonométriques

- Pour calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

- la fonction φ étant rationnelle, on pose $z = e^{i\theta}$ et on obtient

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{z^2-1}{2iz}$$
$$d\theta = \frac{-idz}{z}.$$

- Ces intégrales se ramènent à la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \int_{C^+} \varphi(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}) \frac{-idz}{z} = \int_{C^+} f(z) dz,$$

où C^+ est le cercle trigonométrique et f une fonction rationnelle.

Exemple

- $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \int_{C^+} f(z)dz,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 4\pi \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Exemple

- $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \int_{C^+} f(z)dz,$$
- avec $f(z) = \dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(z^2+4z+1)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Les pôles de f sont $z_0 = 0$, double, $z_1 = \sqrt{3}-2$, simple et $z_2 = -\sqrt{3}-2$, simple.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 4\pi \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Exemple

- $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \int_{C^+} f(z)dz,$$
- avec $f(z) = \dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(z^2+4z+1)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Les pôles de f sont $z_0 = 0$, double, $z_1 = \sqrt{3}-2$, simple et $z_2 = -\sqrt{3}-2$, simple.
- Seuls z_0 et z_1 sont intérieurs au cercle C, donc
$$I = 2i\pi(Res(f, z_0) + Res(f, z_1)).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 4\pi \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

- $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \int_{C^+} f(z)dz,$$
- avec $f(z) = \dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(z^2+4z+1)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Les pôles de f sont $z_0 = 0$, double, $z_1 = \sqrt{3}-2$, simple et $z_2 = -\sqrt{3}-2$, simple.
- Seuls z_0 et z_1 sont intérieurs au cercle C, donc
$$I = 2i\pi(Res(f, z_0) + Res(f, z_1)).$$
- On a $Res(f, z_1) = \left(\dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(2z+4)}\right)_{z=\sqrt{3}-2} = -i\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 4\pi\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Exemple

- $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \int_{C^+} f(z)dz,$$
- avec $f(z) = \dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(z^2+4z+1)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Les pôles de f sont $z_0 = 0$, double, $z_1 = \sqrt{3}-2$, simple et $z_2 = -\sqrt{3}-2$, simple.
- Seuls z_0 et z_1 sont intérieurs au cercle C, donc
$$I = 2i\pi(Res(f, z_0) + Res(f, z_1)).$$
- On a $Res(f, z_1) = \left(\dfrac{-i(z^2+1)^2}{2z^2(2z+4)}\right)_{z=\sqrt{3}-2} = -i\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.
- En $z_0 = 0$, on a $Res(f, z_0) = \lim\limits_{z\to 0} \left(z^2 f(z)\right)' = 2i$.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 4\pi\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Intégrale de fractions rationnelles

- Considérons les intégrales du type

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, Q n'a pas de zéros réels et $d°Q \geq d°P + 2$ (sous ces conditions l'intégrale est convergente).

Intégrale de fractions rationnelles

- Considérons les intégrales du type
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$
où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, Q n'a pas de zéros réels et $d°Q \geq d°P + 2$ (sous ces conditions l'intégrale est convergente).
- On pose $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et on considère un contour fermé Γ constitué du segment orienté $[-R, R]$ et du demi-cercle C_R de centre O.

- Considérons les intégrales du type
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$
où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, Q n'a pas de zéros réels et $d°Q \geq d°P + 2$ (sous ces conditions l'intégrale est convergente).
- On pose $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et on considère un contour fermé Γ constitué du segment orienté $[-R, R]$ et du demi-cercle C_R de centre O.
- Alors,

$$2i\pi \sum_{z_i \text{ intérieur à } \Gamma} \mathrm{Re}\, s(f, z_i) = \int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{[-R,R]^+} f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz$$
$$= \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R^+} f(z)dz.$$

- Considérons les intégrales du type

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, Q n'a pas de zéros réels et $d°Q \geq d°P + 2$ (sous ces conditions l'intégrale est convergente).

- On pose $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et on considère un contour fermé Γ constitué du segment orienté $[-R, R]$ et du demi-cercle C_R de centre O.
- Alors,

$$2i\pi \sum_{z_i \text{ intérieur à } \Gamma} \mathrm{Re}\, s(f, z_i) = \int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{[-R,R]^+} f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R^+} f(z)dz.$$

- A la limite $(R \longrightarrow +\infty)$ on obtient

Exemple

- Calculons

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx.$$

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx.$$
- La fonction $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^6}$ admet six pôles simples, $z_k = e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{k\pi}{3}}$ $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx.$$

- La fonction $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^6}$ admet six pôles simples, $z_k = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{k\pi}{3}}$ $k = 0, 1, \ldots, 5$.
- Seuls z_0, z_1 et z_2 ont une partie imaginaire strictement positive.

Exemple

- Calculons
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{1+x^6}dx.$$
- La fonction $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^6}$ admet six pôles simples, $z_k=e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{k\pi}{3}}$ $k=0,1,\dots,5$.
- Seuls z_0, z_1 et z_2 ont une partie imaginaire strictement positive.
- On a donc
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{1+x^6}dx=2i\pi\sum_{k=0}^{2}Res(f,z_k)$$
$$=2i\pi\sum_{k=0}^{2}\frac{z_k^4}{6z_k^5}=\frac{i\pi}{3}(\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2})=\frac{2\pi}{3}.$$

Intégrale de Fourier d'une fraction rationnelle

- On appelle ainsi des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, P et Q étant deux polynômes à coefficients réels, on supposera encore que Q n'a pas de zéro réel.

Intégrale de Fourier d'une fraction rationnelle

- On appelle ainsi des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, P et Q étant deux polynômes à coefficients réels, on supposera encore que Q n'a pas de zéro réel.

- Si $d°P < d°Q$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx,$$

est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx.$$

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx.$$
- Le seul pôle à retenir est $z = i$, le résidu de ce pôle simple est
$$Res(f, i) = \left(\frac{ze^{iz}}{2z} \right)_{z=i} = \frac{1}{2e}.$$

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx.$$
- Le seul pôle à retenir est $z = i$, le résidu de ce pôle simple est
$$Res(f, i) = \left(\frac{ze^{iz}}{2z}\right)_{z=i} = \frac{1}{2e}.$$
- On a donc
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{i\pi}{e}.$$

Exemple

- Calculons
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx.$$

- Le seul pôle à retenir est $z = i$, le résidu de ce pôle simple est
$$Res(f, i) = \left(\frac{ze^{iz}}{2z}\right)_{z=i} = \frac{1}{2e}.$$

- On a donc
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx = \frac{i\pi}{e}.$$

- Il en résulte que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}.$$

Intégrale de Dirichlet

- Pour calculer l'intégrale (dite de Dirichlet)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

- Pour calculer l'intégrale (dite de Dirichlet)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

- on part de

$$\int_{\Gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

où Γ étant le contour :

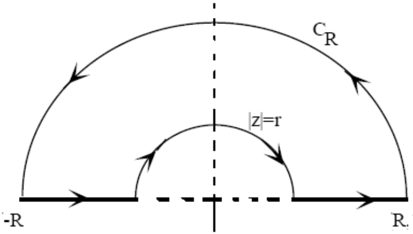


FIG.: Le contour Γ

- Pour calculer l'intégrale (dite de Dirichlet)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

- on part de

$$\int_{\Gamma^+} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

où Γ étant le contour :

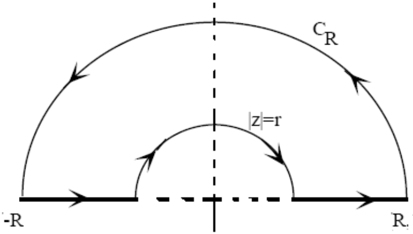


FIG.: Le contour Γ

Exercice

Montrer que la fonction f *définie par* $f(z) = \overline{z}$ *n'est holomorphe en aucun point de* $\mathbb{C}$.

Exercice

Trouver toutes les fonctions holomorphes dont la partie réelle est $P(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercice

Déterminer $Q(x, y)$ *pour que*

$$f(z) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + iQ(x, y)$$

soit holomorphe.

Exercice

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{C^+} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z+1)} dz$$

où C est le cercle de centre O et de rayon 3.

Exercice

Soit a *et* $b \in R_+^*$ *et* Γ *l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad (0 < b \leq a).$$

Calculer

$$\int_{\Gamma^+} \frac{1}{z} dz$$

et en déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice

Calculer par la méthode des résidus :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\sin\theta + a^2}\,d\theta \quad (0 < a < 1).$$

Exercice

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\, d\theta.$$

Exercice

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta \quad (a>1).$$

Exercice

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Exercice

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice

Soit $a \in]0,1[$. *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx$$

en utilisant f *définie par*

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^{z}}$$

et le contour rectangulaire délimité par les droites d'équations $x = -R$, $x = R$, $y = 0$ *et* $y = 2\pi$.

Exercice

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx \quad et \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$