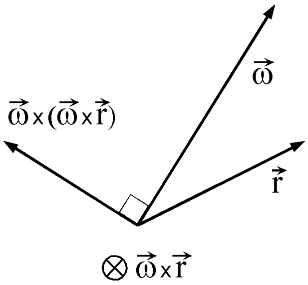
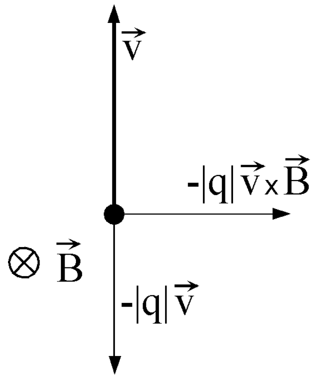
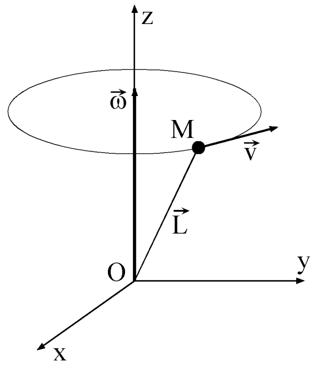
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Corrigé Série 2 - Produits scalaire et vectoriel

1. Produit vectoriel

a)


b)


c)


c) Soit $\boldsymbol{L}$ un vecteur defini par les points O et M avec O un point fixe et M l'extremite du vecteur $\boldsymbol{L}$. Soit par ailleurs, un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ constant.

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{L})=0$$

d'où la vitesse $\boldsymbol{v}$ du point M (qui est colinéaire à $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$) est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{L}\cdot\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{L})=0$$

donc $\boldsymbol{L}\cdot\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(\boldsymbol{L}^2)}{dt}=0$ donc $\|\boldsymbol{L}\|=cste$ et la vitesse de M est perpendiculaire à $\boldsymbol{L}$. D'où l'angle $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{\omega})$ est constant et $\boldsymbol{L}$ « tourne » autour de $\boldsymbol{\omega}$. Ce mouvement est appelé « précession ».

d) Soient (x_a,y_a,z_a) les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{a}$, (x_b,y_b,z_b) celles du vecteur $\boldsymbol{b}$ et (x_c,y_c,z_c) celles du vecteur $\boldsymbol{c}$.

On a :

$$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_bz_c-z_by_c\\x_cz_b-x_bz_c\\x_by_c-y_bx_c\end{pmatrix}$$

Alors,

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}x_a\\y_a\\z_a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y_bz_c-z_by_c\\x_cz_b-x_bz_c\\x_by_c-y_bx_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_ax_by_c-y_ay_bx_c-z_ax_cz_b+z_ax_bz_c\\z_ay_bz_c-z_az_by_c-x_ax_by_c+x_ay_bx_c\\x_ax_cz_b-x_ax_cz_b-y_ay_bz_c+y_az_by_c\end{pmatrix}$$

Or :

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=(x_ax_c+y_ay_c+z_az_c)\begin{pmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{pmatrix}-(x_ax_b+y_ay_b+z_az_b)\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}$$

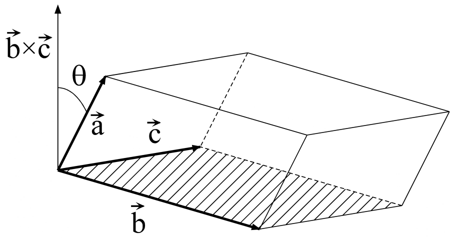
$$=\begin{pmatrix}x_ax_cx_b+y_ay_cx_b+z_az_cx_b-(x_ax_bx_c+y_ay_bx_c+z_az_bx_c)\\x_ax_cy_b+y_ay_cy_b+z_az_cy_b-(x_ax_by_c+y_ay_by_c+z_az_by_c)\\x_ax_cz_b+y_ay_cz_b+z_az_cz_b-(x_ax_bz_c+y_ay_bz_c+z_az_bz_c)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}y_ax_by_c-y_ay_bx_c-z_ax_cz_b+z_ax_bz_c\\z_ay_bz_c-z_az_by_c-x_ax_by_c+x_ay_bx_c\\x_ax_cz_b-x_ax_cz_b-y_ay_bz_c+y_az_by_c\end{pmatrix}$$

On a donc bien $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$.

2. Produit scalaire et produit vectoriel

a)
- La norme $||\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}|| = ||\boldsymbol{b}||\, ||\boldsymbol{c}|| \sin(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ du vecteur $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$
  est l'aire du parallélogramme (i.e. surface hachurée) engendré par les deux vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.
- Le scalaire $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = ||\boldsymbol{a}|| \cos\theta\, ||\boldsymbol{b}||\, ||\boldsymbol{c}|| \sin(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$; c'est le produit de la base $||\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}||$ et de la hauteur $||\boldsymbol{a}|| \cos\theta$.



b) On prend un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ orienté selon l'axe vertical et un vecteur position $\boldsymbol{r}$ quelconque, i.e.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Le produit vectoriel $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ est donné par

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & x \\ \hat{y} & 0 & y \\ \hat{z} & \omega & z \end{vmatrix} = -\,\omega y\, \hat{x} + \omega x\, \hat{y} = \begin{pmatrix} -\,\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

D'autre part, la vitesse $\boldsymbol{v}$ s'écrit en composantes comme,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Par identification des équations vectorielles (2) et (3) on obtient le système d'équations scalaires,

$$\dot{x} = -\,\omega y \ , \tag{4}$$
$$\dot{y} = \omega x \ , \tag{5}$$
$$\dot{z} = 0 \ . \tag{6}$$

L'équation (6) implique que le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe z (où z est constant). En dérivant l'équation (4) par rapport au temps et en la substituant dans l'équation (5) et vis versa, on obtient,

$$\ddot{x} = -\,\omega^2 x \ , \tag{7}$$
$$\ddot{y} = -\,\omega^2 y \ . \tag{8}$$

Les équations du mouvement selon les axes x et y sont des oscillateurs harmoniques de pulsation ω. Les solutions qui satifont les systèmes d'équations (4)-(8) sont de la forme

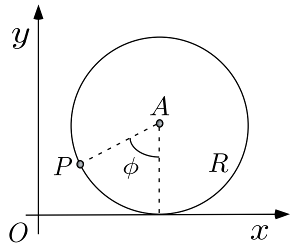
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \ , \tag{9}$$
$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \ , \tag{10}$$

où A est l'amplitude du mouvement. Ces solutions représentent l'équation paramétrique d'un cercle. Le mouvement du point matériel P a donc lieu selon un cercle de rayon A centré sur l'axe $\hat{z}$ et se trouvant dans un plan perpendiculaire à $\hat{z}$.

c) Les projections du vecteur $\boldsymbol{OP}$ selon les axes de coordonnees $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_y$ sont

$$\boldsymbol{OP} = r\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y \tag{11}$$

3. Point sur roue



a) On choisit le sens positif des angles selon le sens des aiguilles d'une montre. Lorsque la roue roule vers la droite, son axe A parcourt une distance horizontale $R\phi$. Ainsi les coordonnées du point A sont :

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\phi \\ R \end{pmatrix} .$$

Les coordonnées cartésiennes du point P correspondent aux composantes du vecteur $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}$ exprimées dans la base Oxy :

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\phi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ -R\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,(\phi - \sin\phi) \\ R\,(1-\cos\phi) \end{pmatrix} . \tag{12}$$

b) Pour déterminer la variation du point P lorsque ϕ varie, on prend la dérivée première des coordonnées cartésiennes (12) de P par rapport à ϕ :

$$\begin{cases} x'_P\,(\phi) = \dfrac{dx_P}{d\phi} = R\,(1-\cos\phi) \ , \\ y'_P\,(\phi) = \dfrac{dy_P}{d\phi} = R\sin\phi \ . \end{cases} \tag{13}$$

Dans la limite des petits angles (i.e. ϕ proche de 0 et P proche du sol), le développement limité de ϕ implique que $\sin\phi \simeq \phi$ et $\cos\phi \simeq 1$. La variation des coordonnées cartésiennes (13) de P par rapport à ϕ se réduit à,

$$\begin{cases} x'_P\,(\phi) = \dfrac{dx_P}{d\phi} \simeq R\,(1-1) = 0 \ , \\ y'_P\,(\phi) = \dfrac{dy_P}{d\phi} \simeq R\phi \ . \end{cases} \tag{14}$$

Ainsi, initialement, lorsque ϕ augmente, P se déplace uniquement dans la direction Oy : **son mouvement est vertical**.

c) Les points pour lesquels l'angle $\phi = \{0, \pi, 2\pi\}$ sont des exemples de points caractéristiques.