Chap3, série 2: Analyse Numérique
Sections: Info2, Génie civil, automne 2015
Enseignant : Salem NAFIRI

18 novembre 2015

Exercice 2 : énoncé

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 3.1 dans le cas où $r = 3$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on veut approcher numériquement $\int_a^b f(x)dx$. Soit N un entier positif, $h = (b-a)/N$, on pose $x_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, N$. On considère une formule de quadrature exacte pour les polynômes de degré trois, par exemple la formule de Simpson $J(g) = 1/3g(-1) + 4/3g(0) + 1/3g(1)$. On obtient donc l'approximation

$$L_h(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1})\Big) \text{ de } \int_a^b f(x)dx.$$

Il s'agit de démontrer que, $\forall f \in \mathcal{C}^4[a,b]$, $\exists C > 0$, $\forall 0 < h < b-a$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| \leqslant Ch^4.$$

Question 1 : Montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = \frac{h}{2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} g_i(t)dt - J(g_i)\right)\right|,$$

où on a noté $g_i(t) = f(x_i + h\frac{t+1}{2})$.

Question 2 : En utilisant le développement de Taylor de g_i en $t = 0$, montrer que, pour tout $-1 \leqslant t \leqslant 1$, on a $g_i(t) = p_i(t) + r_i(t)$, où p_i est un polynôme de degré trois en t. Expliciter p_i et r_i.

Question 3 : En déduire que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = \frac{h}{2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{-1}^{1} r_i(t)dt - J(r_i)\right)\right|.$$

Question 4 : Conclure.