

COURS DE MECANIQUE

2ème année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

Chapitre 4. DYNAMIQUE DU SOLIDE

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques



Le but de ce chapitre est d'énoncer dans toute sa généralité le **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)** ainsi que ses conséquences pour l'étude du mouvement d'un système matériel quelconque. Deux formes particulières de ce principe ont déjà été énoncées : le Principe Fondamental de la Statique (PFS) au chapitre 3, et le Principe Fondamental de la Dynamique du point matériel, dans le cours de mécanique du point. L'énoncé général, dans le cas d'un système matériel quelconque, nécessite la définition préalable de grandeurs dites "dynamiques" qui associent les notions de masse, vitesse et accélération.

Les points importants de ce chapitre sont :

L'énoncé précis du PFD, avec le concept de repère galiléen

Les éléments d'inertie d'un solide rigide

I GRANDEURS DYNAMIQUES D'UN SYSTEME MATERIEL

Un système matériel quelconque peut tout d'abord être modélisé par un ensemble de points matériels, mais l'extension aux systèmes à répartition continue de masse est immédiate. Il suffit en effet de remplacer tous les signes \sum_i par une intégrale simple, double ou triple,

selon la géométrie considérée.

Considérons donc à présent des systèmes mécaniques constitués d'un ensemble de points matériels A_1, \dots, A_n dotés des masses m_1, \dots, m_n . Nous noterons par Σ un tel système :

$$\Sigma = \{(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)\} = \{(A_i, m_i)\},$$

et l'on s'intéresse au mouvement de Σ par rapport à un repère \mathcal{R}_0 .

1. Torseur dynamique

a) Cas du point matériel

Le Principe Fondamental de la Dynamique du point matériel s'énonce de la manière suivante :

Si un point matériel A, de masse m, est en mouvement par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_0 , la somme des forces (extérieures) appliquées au point A est égale au produit de la masse m du point par l'accélération galiléenne du point :

$$m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}(\text{ext} \rightarrow A) . \quad (4.1)$$

On a vu par ailleurs qu'à chaque force appliquée à A on peut associer un glisseur dont le support passe par A, et à l'ensemble des forces appliquées à A, le glisseur unique équivalent à la somme de tous ces glisseurs : $[A, \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A)]$.

Il est alors logique de considérer également le glisseur $[A, m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0)]$, appelé *glisseur dynamique*. Le PFD du point A, lorsque \mathcal{R}_0 est galiléen, peut alors s'exprimer par l'égalité des glisseurs :

$$[A, m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0)] = [A, \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A)] . \quad (4.2)$$

L'égalité des vecteurs libres redonne l'énoncé classique rappelé à l'équation (4.1).

L'égalité des moments en un point K ne donne aucune information supplémentaire. En effet, si l'on choisit $K \equiv A$, on obtient trivialement :

$$\vec{0} = \vec{0} .$$

De la même manière que précédemment, on introduit le *moment dynamique* du point matériel A, pris au point K :

$$\vec{\delta}_K(A/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{KA} \wedge m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) . \quad (4.3)$$

b) Généralisation au cas du système Σ

L'ensemble des glisseurs dynamiques

$$\{[A_1, m_1\vec{\Gamma}(A_1/\mathcal{R}_0)], \dots, [A_n, m_n\vec{\Gamma}(A_n/\mathcal{R}_0)]\}$$

est appelé :

torseur dynamique de Σ en mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 :

$$\mathcal{D}(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \{[A_i, \vec{d}(A_i/\mathcal{R}_0)]\} , \quad (4.4)$$

de *résultante dynamique*

$$\vec{d}(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \sum_i m_i \vec{\Gamma}(A_i/\mathcal{R}_0) = m\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) , \quad (4.5)$$

et de *moment dynamique* au point K

$$\vec{\delta}_K(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \sum_i \overrightarrow{KA_i} \wedge m_i \vec{\Gamma}(A_i/\mathcal{R}_0) , \quad (4.6-a)$$

soit

$$\vec{\delta}_K(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \sum_i \vec{\delta}_K(A_i/\mathcal{R}_0) , \quad (4.6-b)$$

où G est le centre de masse du système Σ et m est la masse totale de ce système. Le centre de masse G est tel que

$$\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = m \overrightarrow{OG} \quad (4.7)$$

▪ Le PFD exprimera que, pour un repère d'observation \mathcal{R}_0 bien choisi, le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures appliquées au système Σ .

2. Principe fondamental de la dynamique

a) Enoncé du principe

Cet énoncé est l'énoncé général du **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)**. Tous les autres énoncés s'en déduisent comme cas particuliers.

Il existe un repère privilégié, appelé repère galiléen, soit \mathcal{R}_0 , tel que pour tout système matériel Σ , en général en mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , le torseur dynamique de Σ par rapport à \mathcal{R}_0 soit égal au torseur des forces extérieures exercées sur Σ , soit

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} \quad (4.8)$$

Cette égalité (ou équivalence) entre torseurs se traduit par l'égalité des résultantes :

$$\vec{d}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) \quad (4.9)$$

et par l'égalité des moments en un point K :

$$\vec{\delta}_K(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{M}}_K(\text{ext} \rightarrow \Sigma) \quad (4.10)$$

Dans le cas du point matériel unique, la distinction entre forces extérieures et forces intérieures ne se posait pas. Sur ce plan, l'extension aux systèmes matériels n'est pas immédiate : il est fondamental que le PFD pour les systèmes ne fasse intervenir que les **forces extérieures** à Σ .

b) Repères galiléens, invariance galiléenne

❖ Le PFD postule l'existence dans l'Univers d'au moins un repère \mathcal{R}_0 dans lequel l'énoncé du principe est valable. Préciser la position d'un tel repère dans l'espace cosmique n'est pas chose facile. Dans la réalité, on considère toujours des repères qui ne sont galiléens que de manière approchée.

La définition du repère galiléen dans lequel on considère le PFD comme valable dépend en réalité de l'échelle du problème considéré :

- Pour un problème de dynamique concernant un système mécanique à l'échelle de l'homme (machine, véhicule, ...) un repère lié à la Terre locale (au sol ou à la pièce) est suffisant. Ce faisant, on néglige des mouvements tels que la rotation de la Terre.

- Pour des problèmes terrestres à plus grande échelle, on ne peut plus négliger cette rotation. On prendra alors un repère dont l'origine est au centre de la Terre et dont les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles. Cependant, on néglige encore dans ce cas le mouvement (elliptique) de la Terre autour du Soleil.

- L'étude du mouvement des planètes dans le système solaire se fait sur la base d'un repère dont l'origine est au centre de masse du système solaire (pratiquement le centre du Soleil) et dont les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles.

- A des échelles plus grandes (galaxie, cosmos), on sort pratiquement du domaine de la Mécanique classique en raison des très grandes vitesses mises en jeu, et chercher à définir des repères galiléens n'a plus grand intérêt.

❖ Invariance galiléenne

Théorème : Lorsque, pour un problème donné, un repère \mathcal{R}_0 peut être considéré comme galiléen, il lui correspond une **infinité de repères**, mobiles par rapport à \mathcal{R}_0 , qui peuvent eux aussi être considérés comme galiléens, avec la même approximation. Ce sont **tous les repères animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_0** .

Démonstration :

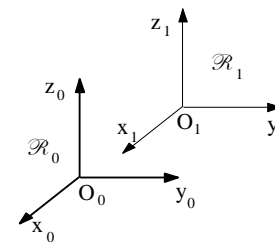


figure 4.1

▪ Soit $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1)$, un repère animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$. La base \mathcal{B}_1 du repère \mathcal{R}_1 peut être choisie de telle sorte qu'elle coïncide constamment avec la base \mathcal{B}_0 de \mathcal{R}_0 (figure 4.1).

▪ Tous les points liés à \mathcal{R}_1 ont même vitesse, à chaque instant, par exemple celle de O_1 .

La translation étant *rectiligne uniforme*, le vecteur $\vec{V}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_0)$ est *constant* au cours du temps.

■ Considérons alors un système matériel quelconque Σ . Soit A_i l'un de ses points de masse m_i . Par composition des vitesses, on peut écrire :

$$\vec{V}(A_i / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(A_i / \mathcal{R}_1) + \vec{V}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_0) \quad (4.11)$$

Pour les accélérations, en dérivant par rapport au temps et par rapport à la base $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}_1$:

$$\vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_0) . \quad (4.12)$$

Or le vecteur $\vec{V}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_0)$ est *constant* au cours du temps, donc on obtient :

$$\vec{\Gamma}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(\mathcal{O}_1 / \mathcal{R}_1) . \quad (4.13)$$

Par suite, pour le système matériel Σ , on a égalité des deux torseurs dynamiques :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) . \quad (4.14)$$

■ Si \mathcal{R}_0 est galiléen, on a par ailleurs, d'après le PFD :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) . \quad (4.15)$$

Il en résulte que \mathcal{R}_1 est tel que pour tout système matériel Σ on ait l'égalité :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) , \quad (4.16)$$

et par suite \mathcal{R}_1 est lui-même galiléen.

c) Principe de l'action-réaction

On généralise ici ce qui a déjà été vu en statique.

Considérons deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 en mouvement par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_0 , et désignons par Σ le système total :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \quad (4.17)$$

On a, pour les torseurs dynamiques, l'égalité suivante :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\Sigma_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{D}(\Sigma_2 / \mathcal{R}_0) . \quad (4.18)$$

❖ Par ailleurs, les actions mises en jeu sont de deux sortes :

- les actions extérieures au système total Σ , qui s'appliquent soit à Σ_1 , soit à Σ_2 .

- les actions mutuelles des systèmes Σ_1 et Σ_2 .

■ Pour les premières, on a l'égalité suivante entre les torseurs associés :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.19)$$

où la notation $\text{ext}_{/\Sigma}$ précise que les actions considérées sont extérieures relativement à Σ .

■ Les actions exercées sur Σ_1 , extérieures à Σ_1 , sont quant à elles constituées des actions provenant de l'extérieur de Σ et de l'action de l'autre constituant Σ_2 . On a ainsi l'égalité :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} , \quad (4.20)$$

et de même pour Σ_2 :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.21)$$

❖ Appliquons à présent le PFD à chacun des systèmes Σ_1 , Σ_2 et Σ , le repère \mathcal{R}_0 étant galiléen :

$$\mathcal{D}(\Sigma_1 / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma_2 / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} \quad (4.24)$$

De l'égalité (4.18) entre les torseurs dynamiques, on déduit alors l'égalité suivante :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\} . \quad (4.25)$$

A l'aide des équations (4.20) et (4.21), on écrit ensuite :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\} ,$$

ce qui conduit, d'après l'équation (4.19), à :

$$\mathcal{O} = \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\} ,$$

soit finalement :

$$\boxed{\{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} = -\{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\}} . \quad (4.26)$$

On est ainsi conduit à l'énoncé suivant :

Principe : Les actions d'un système mécanique Σ_1 sur un autre système mécanique Σ_2 sont opposées aux actions du système Σ_2 sur le système Σ_1 , en ce sens que les torseurs correspondants sont opposés.

d) Dynamique des systèmes de masse négligeable

Lorsque les *masses* des divers points constitutifs de Σ peuvent être considérées comme *négligeables* (vis-à-vis de masses d'objets extérieurs interagissant avec Σ), le torseur dynamique $\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}) = \mathcal{O}$ pour tout repère \mathcal{R} , et en particulier pour un repère \mathcal{R}_0 galiléen.

Le PFD conduit alors à l'égalité :

$$\boxed{\{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} = \mathcal{O}}. \quad (4.27)$$

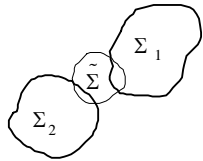
Cas particulier important : constituant intermédiaire de masse négligeable

Figure 4.2

Considérons deux systèmes mécaniques Σ_1 et Σ_2 liés entre eux par un système intermédiaire $\tilde{\Sigma}$ de masse négligeable (figure 4.2). On suppose de plus que $\tilde{\Sigma}$ n'est soumis à aucune autre action, de contact ou à distance, que celles exercées par Σ_1 et Σ_2 .

Le torseur des actions extérieures s'exerçant sur le système $\tilde{\Sigma}$ est donc la somme du torseur des actions de Σ_1 sur $\tilde{\Sigma}$ et du torseur des actions de Σ_2 sur $\tilde{\Sigma}$, soit

$$\{\text{ext} \rightarrow \tilde{\Sigma}\} = \{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \tilde{\Sigma}\}. \quad (4.28)$$

D'après le PFD, sous la forme particulière de l'équation (4.27), on a donc :

$$\{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \tilde{\Sigma}\} = \mathcal{O}. \quad (4.29)$$

En vertu du principe de l'action-réaction énoncé au § I.2.b), on en déduit :

$$\boxed{\{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\} = \{\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\}}. \quad (4.30)$$

▪ **Conclusion** : lorsque $\tilde{\Sigma}$ est un système intermédiaire, de masse négligeable, ne recevant d'autres actions extérieures que celles exercées par les deux constituants Σ_1 et Σ_2 qu'il relie, ce système intermédiaire $\tilde{\Sigma}$ transmet à Σ_2 intégralement les actions qu'il reçoit de la part de Σ_1 .

Ce résultat serait faux si la masse de $\tilde{\Sigma}$ était prise en compte : les deux torseurs $\{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\}$ et $\{\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\}$ diffèreraient alors d'une quantité égale au torseur dynamique $\mathcal{D}(\tilde{\Sigma} / \mathcal{R}_0)$ où \mathcal{R}_0 à présent doit être galiléen.

▪ Application pratique : clavetage

L'un des moyens pour un arbre Σ_1 de transmettre une certaine puissance à une poulie Σ_2 , est d'utiliser une clavette $\tilde{\Sigma}$ (figures 4.3).

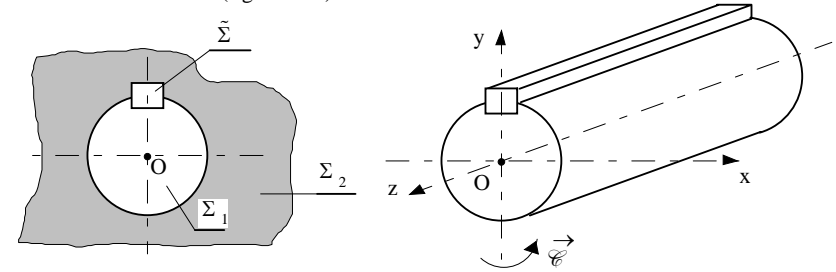


figure 4.3-a

figure 4.3-b

La poulie Σ_2 est alors liée en rotation à l'arbre Σ_1 par l'intermédiaire de la clavette $\tilde{\Sigma}$. Si l'on connaît $\{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\}$, et si l'on néglige la masse de la clavette, alors on pourra écrire, d'après l'équation (4.30) que $\{\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}\} = \{\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\}$.

La puissance étant notamment transmise par l'intermédiaire de la projection sur l'axe \vec{e}_z du moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma})$, soit $\vec{\mathcal{M}}_O(\Sigma_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}) \cdot \vec{e}_z = \mathcal{C}$ (où \mathcal{C} est couramment appelé "couple moteur"), on aura alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2) \cdot \vec{e}_z = \mathcal{C}$, ce qui revient à écrire :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) \cdot \vec{e}_z = \mathcal{C}. \quad (4.31)$$

▪ Exemple du ressort

Le système de la figure 4.4 est constitué de trois ressorts reliant deux points matériels A et B de masses respectives m_1 et m_2 , dont les déplacements, respectivement notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$, sont référencés dans le repère ayant pour origine leur position d'équilibre respective.

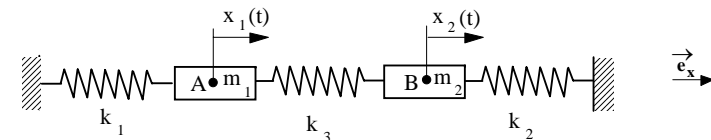


Figure 4.4

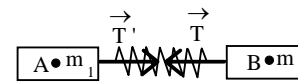


Figure 4.5

Les ressorts sont des systèmes de masse négligeable. Ainsi, le ressort de raideur k_3 reliant les points A et B n'est soumis qu'à deux actions mécaniques extérieures, celles des points A et B (figure 4.5).

• Notons (A, \vec{T}) l'action du ressort sur le point A (et non l'inverse), et (B, \vec{T}) l'action du ressort sur le point B (Figure 4.5), soit

$$\{\text{ressort} \rightarrow A\} = (A, \vec{T}) = -\{A \rightarrow \text{ressort}\}, \quad (4.32-a)$$

et $\{\text{ressort} \rightarrow B\} = (B, \vec{T}) = -\{B \rightarrow \text{ressort}\}.$ (4.32-b)

• L'application du PFD au ressort de masse négligeable conduit, d'après l'équation (4.27) à

$$\{A \rightarrow \text{ressort}\} + \{B \rightarrow \text{ressort}\} = \mathcal{O}, \quad (4.33)$$

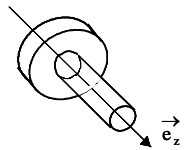
soit, pour les résultantes, à

$$-\vec{T}' - \vec{T} = \vec{0}, \quad (4.34)$$

$$\boxed{\vec{T}' = -\vec{T}}.$$

II ELEMENTS D'INERTIE D'UN SOLIDE

1 Introduction



Le solide de la figure 4.6 est constitué d'un disque de grand diamètre et d'un axe de plus faible diamètre, le tout pouvant tourner autour de \vec{e}_z .

Figure 4.6

On considère quatre anneaux identiques (donc de même masse), que l'on dispose de deux manières différentes (figure 4.7) ; sur la figure 4.7-a), ils sont collés sur la face avant du disque, et sur la figure 4.7-b), ils sont fixés sur l'axe du disque.

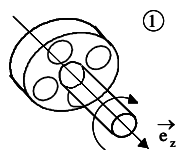


Figure 4.7-a)

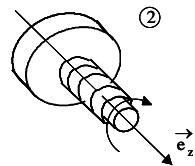


Figure 4.7-b)

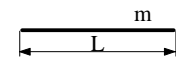
Si l'on veut faire tourner chacun des deux systèmes, l'expérience montre qu'il faudra dépenser beaucoup plus d'énergie pour communiquer une vitesse de rotation donnée au système ① (figure 4.7-a) qu'au système ② (figure 4.7-b), alors que chacun des deux systèmes a la même masse.

On peut en conclure que la distance de la masse par rapport à l'axe est un élément important dans l'étude de la dynamique des systèmes.

2 Répartition de masse continue

Le cas, plus fréquent, des solides à répartition continue de masse, fait appel à la notion d'intégrale : tous les signes $\sum_{i=1}^n$ se transforment en \int_S sur une ligne, une surface ou un volume. Citons quelques exemples de solides homogènes :

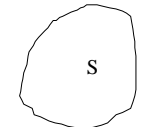
a) Cas d'une ligne



Masse linéique $\lambda = \frac{m}{L}$

$$[\lambda] = M L^{-1} \Rightarrow \text{unité : kg.m}^{-1}$$

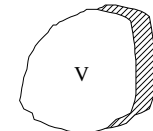
b) Cas d'une surface



Masse surfacique $\sigma = \frac{m}{S}$

$$[\sigma] = M L^{-2} \Rightarrow \text{unité : kg.m}^{-2}$$

c) Cas d'un volume



Masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$

$$[\rho] = M L^{-3} \Rightarrow \text{unité : kg.m}^{-3}$$

3 Exemples de calcul du moment dynamique

a) Pendule simple

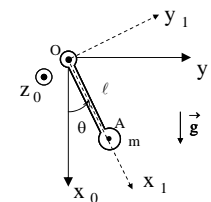


Figure 4.8

Le système de la figure 4.8 est constitué d'une tige sans masse de longueur OA de longueur ℓ à laquelle est accrochée une masse m considérée comme ponctuelle au point A. La tige est en liaison pivot sans frottements d'axe (O, \vec{e}_{z_0}) avec le bâti. La position de la tige est repérée par l'axe Ox_1 , faisant un angle θ avec l'axe Ox_0 (figure 4.8). Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ est galiléen, l'accélération de la pesanteur étant telle que $\vec{g} = -g \vec{e}_{x_0}$.

Le torseur dynamique de la tige par rapport au repère \mathcal{R}_0 se réduit au torseur dynamique du point A par rapport au repère \mathcal{R}_0 , donné par ses éléments de réduction au point O :

$$\vec{d}(A/\mathcal{R}_0) = m \vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) , \quad (4.35-a)$$

$$\vec{\delta}_O(A/\mathcal{R}_0) = \vec{OA} \wedge m \vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) . \quad (4.35-b)$$

• Le vecteur position \vec{OA} est donné par ses composantes sur la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_0})$:

$$\vec{OA} = \ell \vec{e}_{x_1} . \quad (4.36)$$

• La vitesse du point A par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} , \quad (4.37)$$

soit, en appliquant la formule de changement de base de dérivation

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{OA} , \quad (4.38)$$

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{e}_{z_0} \wedge (\ell \vec{e}_{x_1}) = \ell \dot{\theta} \vec{e}_{y_1} . \quad (4.39)$$

• L'accélération du point A par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit

$$\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} , \quad (4.40)$$

soit, en appliquant la formule de changement de base de dérivation

$$\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) , \quad (4.41)$$

$$\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) = \ell \ddot{\theta} \vec{e}_{y_1} + \dot{\theta} \vec{e}_{z_0} \wedge (\ell \dot{\theta} \vec{e}_{y_1}) , \quad (4.42)$$

$$\text{d'où} \quad \vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0) = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_1} + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_{y_1} . \quad (4.43)$$

• La résultante dynamique du point A par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit donc, en remplaçant $\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0)$ par son expression (4.43) dans la relation (4.35-a) :

$$\vec{d}(A/\mathcal{R}_0) = -m \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_1} + m \ell \ddot{\theta} \vec{e}_{y_1} . \quad (4.44)$$

• Le moment dynamique au point O du point A par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit, en remplaçant $\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0)$ par son expression (4.43) dans la relation (4.35-b) :

$$\vec{\delta}_O(A/\mathcal{R}_0) = m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0} . \quad (4.45)$$

Le terme $m \ell^2$ est le produit de la masse du point A par le carré de la distance au carré entre le point A et l'axe de rotation (O, \vec{e}_{z_0}) . C'est le moment d'inertie du point A par rapport à l'axe (O, \vec{e}_{z_0}) .

b) Pendule composé

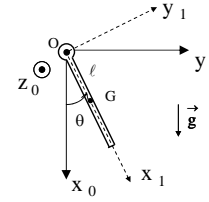


Figure 4.9

Le système de la figure 4.9 est constitué d'une tige pesante homogène S de masse m de longueur ℓ . Le centre de masse G est donc situé à une distance $\ell/2$ du point O. La tige est en liaison pivot sans frottements d'axe (O, \vec{e}_{z_0}) avec le bâti. La position de la tige est repérée par l'axe Ox_1 , faisant un angle θ avec l'axe Ox_0 (Figure 4.8). Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ est galiléen, l'accélération de la pesanteur étant telle que $\vec{g} = -g \vec{e}_{z_0}$.

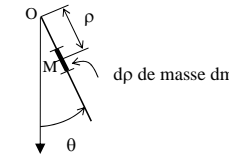


Figure 4.10

Un point M courant de la tige a pour coordonnées polaires (ρ, θ) (figure 4.10). Un petit élément $d\rho$ de la tige, centré sur le point M, a pour masse

$$dm = \lambda d\rho . \quad (4.46)$$

où λ est la masse linéique de la tige ($m = \lambda \ell$). Il convient de noter ici que ρ est la variable de description spatiale de la tige à t fixe ; il est donc constant à t fixé et ne varie donc pas en fonction du temps.

L'accélération du point M par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit, en utilisant le résultat de l'équation (4.43) et en remplaçant ℓ par ρ :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_1} + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_{y_1} . \quad (4.47)$$

Le moment dynamique au point O de la tige S par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'obtient alors en sommant tous les moments dynamiques élémentaires du point M courant au point O, lorsque M décrit toute la tige, soit ρ variant de 0 à ℓ :

$$\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \int_0^\ell \vec{OM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) d\rho , \quad (4.48)$$

$$\text{soit} \quad \vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \lambda \int_0^\ell \rho^2 \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0} d\rho = \lambda \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0} \left[\rho^3/3 \right]_0^\ell ,$$

d'où, en remplaçant λ par m/ℓ

$$\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \frac{m \ell^2}{3} \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0} . \quad (4.49)$$

La quantité $m \ell^2/3$ est homogène à une masse multipliée par une longueur au carré.

Les quantités $m \ell^2$ et $m \ell^2/3$ qui interviennent dans les cas particuliers a) et b) sont ce que l'on appelle les moments d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (O, \vec{e}_{z_0}) qui est ici l'axe de rotation fixe par rapport au repère \mathcal{R}_0 . L'objet du paragraphe suivant est de généraliser ces notions.

4 Définition des éléments d'inertie d'un solide

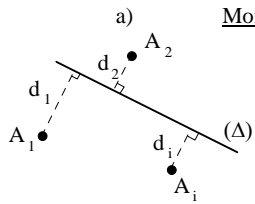


Figure 4.11

Moment d'inertie par rapport à une droite

Soit une droite (Δ) (figure 4.11). Si l'on désigne par d_i les distances des points A_i du solide (S) par rapport à (Δ) , on définit le moment d'inertie de (S) par rapport à (Δ) par :

$$I_{\Delta}(S) = \sum_i m_i d_i^2 \quad (4.50)$$

Dans le cas d'une seule masse (Figure 4.8), $I_{Oz_0}(S) = m \ell^2$.

Remarques :

- un moment d'inertie est toujours positif
- Dimension : $[I_{\Delta}] = M L^2 \Rightarrow$ unité : kg.m^2

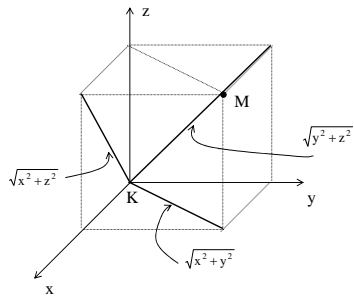
b) Moment d'inertie par rapport aux axes d'un repère \mathcal{R} 

Figure 4.12

Soit K un point quelconque. On considère la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associée au repère $\mathcal{R} = (K, \mathcal{B})$, ce repère n'étant pas nécessairement lié à (S) . En désignant par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes d'un point M dans le repère \mathcal{R} , c'est-à-dire $\vec{KM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, on peut écrire, d'après la définition du § II.4.a), les moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère :

$$A = I_{Kx}(S) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \int_{M \in S} (y^2 + z^2) dm \quad (4.51-a)$$

$$B = I_{Ky}(S) = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = \int_{M \in S} (x^2 + z^2) dm \quad (4.51-b)$$

$$C = I_{Kz}(S) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int_{M \in S} (x^2 + y^2) dm \quad (4.51-c)$$

répartition continue de masse

où $(y^2 + z^2)$, $(x^2 + z^2)$ et $(x^2 + y^2)$ désignent respectivement le carré de la distance du point M aux axes (Kx) , (Ky) et (Kz) (figure 4.12).

Exemple : Le moment d'inertie d'une tige, assimilée à une ligne (figure 4.9) par rapport à l'axe Oz_0 est $I_{Oz_0}(S) = m \ell^2 / 3$. Il convient de noter que le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle, par exemple l'axe Gz_0 passant par le centre de masse G du solide, n'est pas égal à $m \ell^2 / 3$: $I_{Oz_0}(S) \neq I_{Gz_0}(S)$.

c) Produits d'inertie par rapport aux plans de coordonnées d'un repère \mathcal{R}

Définition : on appelle "**produit d'inertie**" du solide (S) par rapport aux deux plans de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$, la quantité :

$$J_{KxKy}(S) = \sum_i m_i x_i y_i \quad (4.52)$$

L'orientation des axes de coordonnées est essentielle ici pour obtenir le signe de ces produits d'inertie.

$$D = J_{KyKz}(S) = \sum_i m_i y_i z_i = \int_{M \in S} yz dm \quad (4.53-a)$$

$$E = J_{KxKz}(S) = \sum_i m_i x_i z_i = \int_{M \in S} xz dm \quad (4.53-b)$$

$$F = J_{KxKy}(S) = \sum_i m_i x_i y_i = \int_{M \in S} xy dm \quad (4.53-c)$$

répartition continue de masse

Remarques :

- Les produits d'inertie sont des quantités positives, négatives ou nulles.
- On pourra se reporter au tableau de la figure 4.15 pour connaître les éléments d'inertie en un point O , et les centres de masse de quelques solides homogènes.

⚠ Lorsque l'on cherche un élément d'inertie en un autre point que le point O , il faut utiliser le *théorème de Huygens* (§ II.5.b).

d) Opérateur d'inertie

Définition : L'opérateur d'inertie du solide (S) en un point K et exprimé dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ peut s'écrire sous la forme d'une matrice symétrique, appelée **matrice d'inertie** :

$$\mathcal{I}_K(S) \Big|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Si la base \mathcal{B} est associée à un repère $\mathcal{R} = (K, \mathcal{B})$ **lié** à (S) , alors $\mathcal{I}_K(S)$ ne dépend pas du temps.

• Axes principaux d'inertie

Théorème : Il existe au moins une base \mathcal{B} , appelée **base principale d'inertie de (S) au point K**, telle que tous les produits d'inertie soient nuls, c'est-à-dire telle que la matrice d'inertie soit diagonale :

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{I}_K(S) \\ \mathcal{B} \end{matrix} \right| = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

- Tout axe de symétrie d'un solide est axe principal d'inertie.
- Tout plan de symétrie d'un solide est un plan principal d'inertie.

Exemples :

- Solide de révolution d'axe (K, \vec{e}_z) :

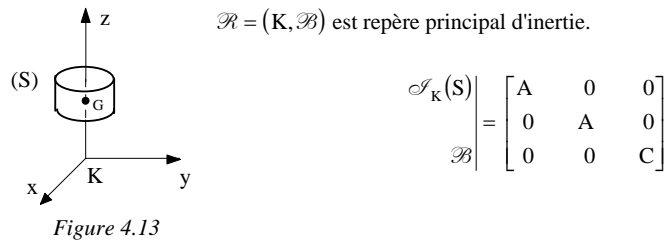


Figure 4.13

- K est centre de symétrie sphérique :

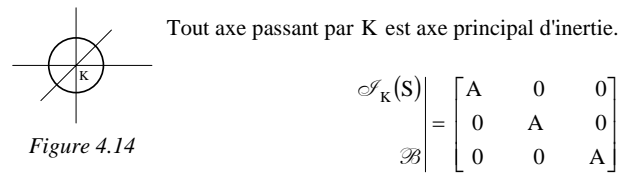


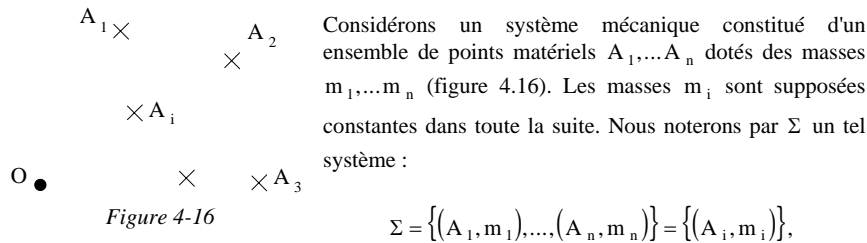
Figure 4.14

e) Éléments d'inertie de quelques solides homogènes usuels

Centre de masse et éléments d'inertie au point O de quelques solides homogènes usuels	Solide homogène de masse M	Centre de masse G	Éléments d'inertie
	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Ml^2$ $I_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Ml^2$ $I_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Ml^2$ $I_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Ml^2$ $I_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$ $I_{Oy} = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2)$ $I_{Oz} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$ $I_{Oy} = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2)$ $I_{Oz} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{3}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{3}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$
	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{3}{8}Mh^2$ $I_{Oz} = \frac{3}{8}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$	Centre O	$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{3}{8}Mh^2$ $I_{Oz} = \frac{3}{8}MR^2$ $I_{Oxy} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$

Figure 4.15

⚠ Lorsque l'on cherche un élément d'inertie en un autre point que le point O, il faut utiliser le théorème de Huygens (§ II.5.b).

5 Centre de masse d'un solidea) Répartition de masse discontinue

Définition : Le **centre de masse** G d'un corps est le barycentre de la répartition de masse du corps.

Sa position est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (4.56-a)$$

$$\text{soit} \quad m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}, \quad (4.56-b)$$

où m est la masse totale du système.

Remarque : En vertu du PFS, le centre de masse d'un corps est le point d'application de la force de pesanteur exercée sur ce corps, d'où le nom fréquent de *centre de gravité*.

Soit le repère $\mathcal{R} = (K, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En vertu de la définition du centre de masse G donnée au § II.5.a), ses coordonnées cartésiennes (x_G, y_G, z_G) dans le repère \mathcal{R} sont telles que :

$$\begin{cases} m x_G = \sum_i m_i x_i \\ m y_G = \sum_i m_i y_i \\ m z_G = \sum_i m_i z_i \end{cases} \quad (4.57)$$

Où les x_i, y_i, z_i représentent les coordonnées des points A_i dans le repère \mathcal{R} .

b) Théorème de Huygens pour les moments d'inertie

Théorème de Huygens : Le **moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite** est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à cette droite de la masse du solide concentrée au centre de masse G et du moment d'inertie du solide par rapport à la droite parallèle passant par G .

$$I_{\Delta}(S) = I_{\Delta_G}(S) + \underbrace{I_{\Delta}(m, G)}_{m d^2}, \quad (4.58)$$

où Δ_G est la droite parallèle à Δ et passant par G ,
et d est la distance entre Δ et Δ_G (figure 4.17)

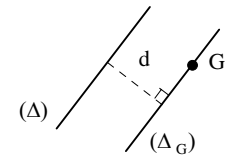


Figure 4.17

Exemples :

▪ **Solide de révolution d'axe** (K, \vec{e}_z) :

$\mathcal{R} = (K, \mathcal{B})$ est repère principal d'inertie.

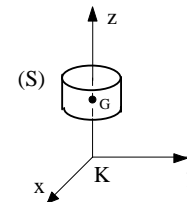


Figure 4.18

D'après le tableau de la figure 4.15

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{I}_K(S) \\ \mathcal{B} \end{matrix} \right| = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$A = I_{Gx}(S) + M d^2 = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M \ell^2 + M z_G^2 \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2} M R^2$$

▪ **K est centre de symétrie sphérique :**

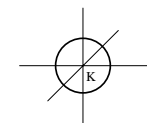


Figure 4.19

Tout axe passant par K est axe principal d'inertie.

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{I}_K(S) \\ \mathcal{B} \end{matrix} \right| = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

D'après le tableau de la figure 4.15, $A = \frac{2}{5} M R^2$

III CALCUL DES GRANDEURS DYNAMIQUES POUR UN SOLIDE RIGIDE

1. Application de l'opérateur à un vecteur

L'écriture des grandeurs dynamiques comportera des termes de la forme $\mathcal{S}_K(S)\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)\}$, où \mathcal{B} est la base associée au repère lié au solide (S).

Si l'on pose
$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) = \Omega_x \vec{e}_x + \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z, \quad (4.59)$$

alors les composantes de $\mathcal{S}_K(S)\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)\}$ dans la base \mathcal{B} sont :

$$\mathcal{S}_K(S)\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)\} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A\Omega_x - F\Omega_y - E\Omega_z \\ -F\Omega_x + B\Omega_y - D\Omega_z \\ -E\Omega_x - D\Omega_y + C\Omega_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}. \quad (4.60)$$

2. Torseur dynamique

- La relation (4.5) donnant l'expression de la résultante dynamique est toujours valable :

$$\vec{d}(\Sigma/\mathcal{R}_0) = m\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0), \quad (4.61)$$

- Le moment dynamique au point K peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = m\vec{KG} \wedge \vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0) + \mathcal{S}_K(S) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} \right\} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{S}_K(S)\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)\} \quad (4.62)$$

où \mathcal{B} est la base associée au repère lié au solide (S).

- Si, de plus, le repère \mathcal{R}_0 est galiléen, l'énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique, énoncé au § I.2.a) se traduit par :

$$\mathcal{G}(S/\mathcal{R}_0) = \{\text{ext} \rightarrow S\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{d}(S/\mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow S) \\ \vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{M}}_K(\text{ext} \rightarrow S) \end{cases}. \quad (4.63)$$

3 Cas particuliers importants d'application du PFD

a) Solide en rotation autour d'une droite

- Exemple du pendule composé, déjà étudié partiellement au § I.3.b).

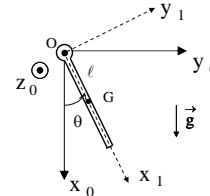


Figure 4.20

Le système de la figure 4.20 est constitué d'une tige pesante homogène (S) de masse m de longueur ℓ . Le centre de masse G est donc situé à une distance $\ell/2$ du point O . La tige est en liaison pivot sans frottements d'axe (O, \vec{e}_{z_0}) avec le bâti. La position de la tige est repérée par l'axe Ox_1 , faisant un angle θ avec l'axe Ox_0 (figure 4.8). Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ lié au bâti est galiléen, l'accélération de la pesanteur étant telle que $\vec{g} = -g\vec{e}_{x_0}$.

Le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_0})$ est lié à la tige, tel que $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_1}) = (\vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{y_1}) = \theta$.

✓ Le système étudié est la tige (S).

- Les actions mécaniques extérieures sont :

- Action de la pesanteur $\varpi : \{\varpi \rightarrow S\} = (G, \vec{P})$ avec $\vec{P} = mg\vec{e}_{x_0}$,

$$\text{soit } \{\varpi \rightarrow S\} = \begin{Bmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{Bmatrix} mg \cos \theta & 0 \\ -mg \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1}.$$

- Action du bâti 0 sur la tige (S) : $\{0 \rightarrow S\}$, tel que $\vec{\mathcal{M}}_O(0 \rightarrow S) \cdot \vec{e}_{z_0} = 0$,

$$\text{soit } \{0 \rightarrow S\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1}.$$

- Le vecteur rotation associé au mouvement de \mathcal{B}_1 par rapport à \mathcal{B}_0 est

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) = \dot{\theta} \vec{e}_{z_0}, \quad (4.64)$$

et sa dérivée par rapport au temps et par rapport à la base \mathcal{B}_0 est donc

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} = \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0}. \quad (4.65)$$

- Le vecteur accélération du centre de masse G par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'obtient à partir de la relation (4.43), en remplaçant ℓ par $\ell/2$, et A par G ,

$$\text{soit } \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) = -\ell \dot{\theta}^2 / 2 \vec{e}_{x_1} + \ell \ddot{\theta} / 2 \vec{e}_{y_1}. \quad (4.66)$$

La résultante dynamique s'écrit donc

$$\vec{d}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = m\vec{\Gamma}(\mathcal{G}/\mathcal{R}_0) = -m\ell\dot{\theta}^2/2\vec{e}_{x_1} + m\ell\ddot{\theta}/2\vec{e}_{y_1} . \quad (4.67)$$

✓ Le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit, pour les résultantes :

$$\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}) = \vec{d}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) , \quad (4.68)$$

soit

$$X + mg \cos \theta = -m\ell\dot{\theta}^2/2 , \quad (4.69-a)$$

$$Y - mg \sin \theta = m\ell\ddot{\theta}/2 , \quad (4.69-b)$$

et

$$Z = 0 . \quad (4.69-c)$$

✓ La tige étant assimilée à une ligne de longueur ℓ , ses éléments d'inertie au point O peuvent être déduits des éléments d'inertie d'un cylindre (plein ou creux) de rayon $R=0$ du tableau de la figure 4.15. Il convient de noter que, dans ce tableau, le point O joue le rôle du centre de masse G de la figure 4.20, tout comme l'axe z joue celui de l'axe x_1 . Par conséquent, l'opérateur d'inertie au point O, relativement à la base \mathcal{B}_1 (base associée au repère \mathcal{R}_1 lié au solide) est diagonal et est de la forme :

$$\mathcal{I}_O(\mathcal{S}) \Big|_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} , \quad (4.70)$$

où

$$A = I_{Ox_1}(\mathcal{S}) = I_{Gx_1}(\mathcal{S}) = 0 , \quad (4.71-a)$$

$$B = I_{Oy_1}(\mathcal{S}) = I_{Gy_1}(\mathcal{S}) + m(\ell/2)^2 = m\ell^2/3 , \quad (4.71-b)$$

et

$$C = I_{Oz_1}(\mathcal{S}) = B = m\ell^2/3 . \quad (4.71-c)$$

Remarque : Le moment d'inertie B de la tige par rapport à l'axe Oy_1 est calculé ici en utilisant le théorème de Huygens (§ II.5.b), et avait été calculé directement au § II.3.b).

✓ L'opérateur d'inertie, appliqué au vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$, s'écrit donc

$$\mathcal{I}_O(\mathcal{S})\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)\} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\theta} \end{bmatrix} ,$$

soit

$$\mathcal{I}_O(\mathcal{S})\{\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)\} = C\dot{\theta}\vec{e}_{z_0} = m\ell^2/3\dot{\theta}\vec{e}_{z_0} . \quad (4.72)$$

✓ De même, en utilisant la relation (4.65), l'opérateur d'inertie, appliqué à la dérivée du vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$ par rapport au temps et par rapport à la base \mathcal{B}_0

$$\mathcal{I}_O(\mathcal{S}) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}{dt} \right) \right\} \Big|_{\mathcal{B}_0} = C\ddot{\theta}\vec{e}_{z_0} = m\ell^2/3\ddot{\theta}\vec{e}_{z_0} . \quad (4.73)$$

✓ Le moment dynamique au point O du solide S par rapport au repère \mathcal{R}_0 , $\vec{\delta}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$, s'écrit, en utilisant la relation (4.62) :

$$\vec{\delta}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = m\vec{OG} \wedge \vec{\Gamma}(\mathcal{O} \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) + \mathcal{I}_O(\mathcal{S}) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}{dt} \right) \right\} \Big|_{\mathcal{B}_0} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{I}_O(\mathcal{S}) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \} , \quad (4.74)$$

soit, en remplaçant $\vec{\Gamma}(\mathcal{O} \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$ par le vecteur $\vec{0}$ (liaison pivot entre le solide S et le bâti 0), et en utilisant les relations (4.72) et (4.73)

$$\vec{\delta}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = m\ell^2/3\ddot{\theta}\vec{e}_{z_0} + \dot{\theta}\vec{e}_{z_0} \wedge (m\ell^2/3\dot{\theta}\vec{e}_{z_0}) ,$$

d'où

$$\boxed{\vec{\delta}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = m\ell^2/3\ddot{\theta}\vec{e}_{z_0}} . \quad (4.75)$$

✓ Le moment au point des actions mécaniques extérieures est donné par

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}) = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_O(\varpi \rightarrow \mathcal{S})}_{\vec{OG} \wedge \vec{P}} + \vec{\mathcal{M}}_O(0 \rightarrow \mathcal{S}) ,$$

$$\text{soit} \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}) = \begin{vmatrix} \ell/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_1} \wedge \begin{vmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_1} + \begin{vmatrix} L \\ M \\ -mg\ell \sin \theta/2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg\ell \sin \theta/2 \end{vmatrix} . \quad (4.76)$$

✓ Le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit, pour les moments au point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}) = \vec{\delta}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) , \quad (4.77)$$

soit

$$L = 0 , \quad (4.78-a)$$

$$M = 0 , \quad (4.78-b)$$

et

$$-mg\ell \sin \theta/2 = m\ell^2/3\ddot{\theta} . \quad (4.78-c)$$

L'équation (4.78-c) donne l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + 3g/(2\ell) \sin \theta = 0 , \quad (4.79)$$

qui, sous forme linéarisée, s'écrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 , \quad (4.80-a)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{3g/(2\ell)} , \quad (4.80-b)$$

où ω_0 est la pulsation propre des oscillations libres non amorties de la tige.

• Généralisation au cas du solide en rotation autour d'une droite

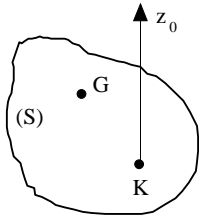


Figure 4.21

Soit un solide (S) en rotation autour de l'axe (K, \vec{e}_{z_0}) (figure 4.21). On désigne par $\mathcal{R}_0 = (K, \mathcal{B}_0)$ le repère supposé galiléen et par $\mathcal{R} = (K, \mathcal{B})$ le repère lié au solide (S), avec $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_{z_0})$.

Le vecteur rotation associé au mouvement de \mathcal{B} par rapport à \mathcal{B}_0 est de la forme

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) = \Omega_3 \vec{e}_{z_0}. \quad (4.81)$$

Le moment dynamique au point K du solide (S) par rapport au repère \mathcal{R}_0 est donné par la relation (4.62)

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = m \overrightarrow{KG} \wedge \vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0) + \mathcal{I}_K(S) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)}{dt} \right) \right\}_{/\mathcal{B}_0} \\ + \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{I}_K(S) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \} \end{aligned} \quad (4.62)$$

✓ D'après le § III.1, II/5/c), l'opérateur d'inertie, appliqué au vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)$, s'écrit

$$\mathcal{I}_K(S) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\Omega_3 \\ -D\Omega_3 \\ C\Omega_3 \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

$$\text{donc} \quad \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{I}_K(S) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -E\Omega_3 \\ -D\Omega_3 \\ C\Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\Omega_3^2 \\ -E\Omega_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

✓ De même, l'opérateur d'inertie, appliqué à la dérivée du vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)$ par rapport au temps et par rapport à la base \mathcal{B}_0 s'écrit

$$\mathcal{I}_K(S) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)}{dt} \right) \right\}_{/\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\dot{\Omega}_3 \\ -D\dot{\Omega}_3 \\ C\dot{\Omega}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

✓ Si on prend le centre de gravité G pour point K, c'est-à-dire $K \equiv G$, alors :

$$\overrightarrow{KG} = \vec{0} \quad (4.85)$$

✓ Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_{z_0})$ est base principale d'inertie, alors $D = E = F = 0$ et donc :

$$\vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = m \overrightarrow{KG} \wedge \vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0) + C\dot{\Omega}_3 \vec{e}_{z_0}. \quad (4.86)$$

Or K est un point fixe de (S) par rapport à \mathcal{R}_0 donc $\vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{\vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = C\dot{\Omega}_3 \vec{e}_{z_0}}. \quad (4.87)$$

c) Solide en translation par rapport à \mathcal{R}_0

Dans ce cas, $\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) = \vec{0}$ et donc :

$$\boxed{\vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = m \overrightarrow{KG} \wedge \vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0)}. \quad (4.88)$$

Remarque : dans ce cas, on prendra toujours $K \equiv G$, ce qui revient à écrire :

$$\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}. \quad (4.89)$$

d) Solide ayant un point fixe par rapport à \mathcal{R}_0

Dans ce cas, $\vec{\Gamma}(K \in S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$, d'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_K(S/\mathcal{R}_0) = \mathcal{I}_K(S) \left\{ \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)}{dt} \right) \right\}_{/\mathcal{B}_0} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{I}_K(S) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \}} \quad (4.90)$$

4 Cas général d'un système mécanique de solides rigides

De manière générale, un système mécanique Σ est constitué de plusieurs solides rigides $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$, tous en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$.

On peut attacher à chaque solide (S_i) un repère $\mathcal{R}_i = (K_i, \mathcal{B}_i)$ et ainsi définir les vecteurs rotations associés au mouvement de \mathcal{B}_i par rapport à \mathcal{B}_0 , $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_0)$.

En revanche, on ne peut pas lier un repère au système Σ , ni définir un vecteur rotation associé à son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 .

Le torseur dynamique de Σ par rapport à \mathcal{R}_0 est alors la somme des torseurs dynamiques de chaque solide (S_i) :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}(S_i / \mathcal{R}_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = m \vec{\Gamma}(G / \mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}(G_i / \mathcal{R}_0) \\ \vec{\mathcal{M}}_K(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^n \vec{\delta}_K(S_i / \mathcal{R}_0) \end{cases} \quad (4.91)$$

5 Mise en équations d'un problème

La mise en équations d'un problème de dynamique pour l'étude du mouvement d'un système matériel quelconque procède d'une démarche qui reprend chacune des étapes de la modélisation telles que nous les avons décrites dans l'Introduction de ce cours. Cette marche à suivre a déjà été partiellement abordée au chapitre 3 dans le cas d'un problème de statique. Nous la décrivons en détail à présent dans le cas de la dynamique d'un système constitué de solides rigides, en illustrant nos propos sur l'exemple de la figure 4.22 qui représente la nacelle d'un manège voltigeur : un bras S_1 est entraîné d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical du manège par un moteur (non représenté). L'axe S_2 de la nacelle est articulé à S_1 par une liaison de type cardan, dont le détail est porté sur la figure 4.22-b où l'on distingue le croisillon \tilde{S} . La nacelle S_3 , supposée sphérique, tourne librement autour de son axe S_2 .

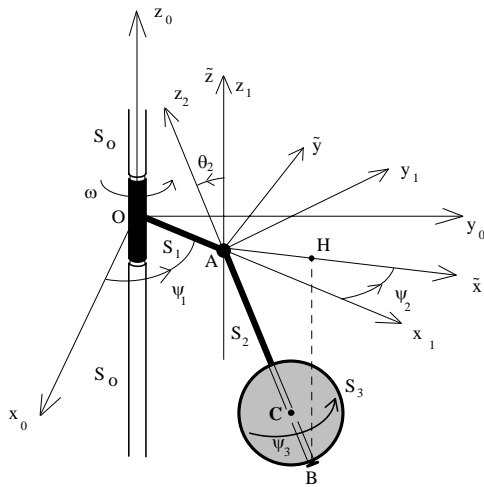


figure 4.22-a

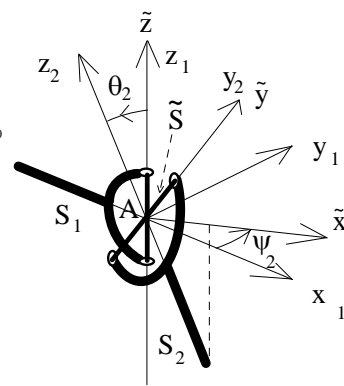


figure 4.22-b

a) Les étapes de la modélisation

Il convient avant toutes choses de bien identifier le système mécanique que l'on se propose d'étudier et d'en distinguer les diverses parties. Dans le cas présent, il s'agira d'un ensemble de solides supposés indéformables, chacun des solides étant une partie constitutive du système total.

On doit en outre préciser l'espace d'observation du mouvement, en général par la donnée d'un repère, et savoir si ce repère peut être considéré comme galiléen.

■ Etape géométrique

On décrit d'abord la forme schématique de chaque constituant et l'on désigne ses dimensions essentielles. Le bras S_1 a la forme d'un barreau horizontal OA de longueur a, l'axe S_2 est assimilé à une tige rectiligne AB de longueur ℓ , la nacelle est schématisée par une boule sphérique de centre C et de rayon R.

Les relations géométriques, c'est-à-dire le type des liaisons, entre les constituants sont ensuite indiquées : liaison de cardan entre S_1 et S_2 se traduisant par les deux pivots S_1/\tilde{S} et \tilde{S}/S_2 , liaison pivot entre S_2 et S_3 .

Le système est souvent lié à une ou plusieurs pièces externes, fixes dans le repère d'observation, que l'on appelle le bâti. Dans l'exemple considéré, le constituant S_1 est lié au bâti S_0 par une liaison pivot.

Ce premier travail étant fait, on introduit les paramètres de position du système. Il convient pour cela de choisir le repère (en général galiléen) de l'espace d'observation par rapport auquel sera décrit le mouvement. Il est souvent utile d'introduire également des repères mobiles liés aux divers constituants ainsi que certains repères intermédiaires. La figure 4.22 comporte les repères nécessaires au positionnement du système :

- $\mathcal{R}_0 = (O, x_0 y_0 z_0)$ lié au bâti fixe S_0 et supposé galiléen,
- $\mathcal{R}_1 = (A, x_1 y_1 z_1)$ lié au bras S_1 ,
- $\mathcal{R}_2 = (A, x_2 y_2 z_2)$ lié à l'axe S_2 mais dont seuls les axes Ay_2 et Az_2 sont dessinés,
- $\tilde{\mathcal{R}} = (A, \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z})$ intermédiaire entre S_1 et S_2 , mais en réalité lié au croisillon du cardan.
- $\mathcal{R}_3 = (C, x_3 y_3 z_3)$ lié à la nacelle S_3 , non représenté, dont l'axe Cz_3 coïnciderait avec Az_2 .

Les paramètres de position peuvent alors être définis : ce sont des grandeurs algébriques, qui entreront comme telles dans les équations. Il importe donc de préciser avec soin comment leur

signe est défini. Dans l'exemple 4.22, quatre angles algébriques déterminent la position du système par rapport au repère fixe \mathcal{R}_0 :

- $\psi_1 = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_1})$ évalué positivement selon \vec{e}_{x_0} ,
- $\psi_2 = (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{\bar{x}})$ évalué positivement selon $\vec{e}_{x_0} = \vec{e}_{x_1}$,
- $\theta_2 = (\vec{e}_{\bar{x}}, \vec{e}_{z_2})$ évalué positivement selon $\vec{e}_{\bar{y}}$ (il est donc négatif sur la figure),
- $\psi_3 = (\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$ évalué positivement selon \vec{e}_{x_2} .

■ Etape cinématique

Le temps étant introduit, il s'agit d'examiner quels sont les divers mouvements possibles du système, indépendamment des efforts qui lui seront appliqués mais en tenant compte des liaisons géométriques qui viennent d'être analysées. Les calculs de vecteurs vitesse et accélération font partie de cette étape ainsi que l'écriture éventuelle de conditions de roulement sans glissement.

Des quatre angles introduits ci-dessus, le premier est une fonction connue du temps dès lors que le mouvement du bras S_1 est une rotation uniforme imposée par le moteur : $\psi_1 = \omega t$. Les trois autres angles sont des fonctions inconnues du temps qui seront déterminées par résolution du problème de dynamique.

Les supposant provisoirement connues, on peut calculer les vitesses de tous les points du système. On appliquera par exemple le théorème de composition des vitesses et les champs de vitesses relatives seront calculés comme moments des torseurs distributeurs des vitesses appropriés. En utilisant les notations définies au chapitre 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} - \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0 : \quad \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) &= \omega \vec{e}_{x_0}, \quad \vec{V}(O \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{0} \\ \Rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ O \left\{ \begin{array}{c} \dot{\psi}_1 = \omega \end{array} \right. & 0 \end{array} \right\} \mathcal{B}_0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} - \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1 : \quad \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) &= \dot{\psi}_2 \vec{e}_{x_1} + \dot{\theta}_2 \vec{e}_{\bar{y}}, \quad \vec{V}(A \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) = \vec{0} \\ \Rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 \\ A \left\{ \begin{array}{c} \dot{\psi}_2 \end{array} \right. & 0 \end{array} \right\} \vec{\mathcal{B}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} - \mathcal{R}_3 / \mathcal{R}_2 : \quad \vec{\Omega}(\mathcal{R}_3 / \mathcal{R}_2) &= \dot{\psi}_3 \vec{e}_{x_2}, \quad \vec{V}(C \in \mathcal{R}_3 / \mathcal{R}_2) = \vec{0} \\ \Rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R}_3 / \mathcal{R}_2) &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C \left\{ \begin{array}{c} \dot{\psi}_3 \end{array} \right. & 0 \end{array} \right\} \mathcal{B}_2 \end{aligned} \quad (4.94)$$

■ Etape cinétique

Les masses et leurs répartitions sont ensuite décrites. La schématisation des solides est ici essentielle mais elle n'est pas suffisante. Des précisions complémentaires sont nécessaires.

Dans le cas du bras S_1 , dont le mouvement est imposé, les précisions sur sa masse ne sont pas primordiales pour l'étude du mouvement. Elles pourraient toutefois intervenir dans le calcul de certaines forces exercées sur le bâti et des résistances rencontrées par le moteur. On pourra préciser alors, outre la masse totale m_1 , la position du centre de masse G_1 et le moment d'inertie $I_{O_{z_0}}(S_1)$.

L'axe S_2 sera par exemple assimilé à une tige d'épaisseur négligeable, à répartition de masse homogène, de masse totale m_2 . Son centre de masse G_2 sera alors le milieu de la tige AB et l'on saura calculer son moment d'inertie par rapport à toute médiatrice.

Le croisillon \tilde{S} du cardan pourra être supposé de masse négligeable.

On précisera enfin, pour la nacelle, sa masse totale m_3 . S'il s'agit d'une sphère homogène, son centre de masse est alors son centre C et ses moments d'inertie par rapport à tout diamètre peuvent se calculer.

Ces données permettent alors de calculer tout torseur cinétique ou dynamique de chacun des constituants donc du système total.

■ Etape physique

L'étape physique commence par l'inventaire de tous les efforts s'exerçant sur le système considéré, tant intérieurs qu'extérieurs. Puis on énonce les lois de forces correspondantes et l'on précise les torseurs qui représentent ces efforts. On identifie, parmi les composantes des vecteurs ainsi écrits, celles qui sont a priori inconnues.

Dans l'exemple considéré, l'ensemble du système est soumis au champ de la pesanteur terrestre. L'étape cinétique ayant précisé la répartition des masses, on peut dire que l'action de la Terre se ramène aux trois forces suivantes, représentées par des glisseurs :

$$(G_1, -m_1 g \vec{e}_{z_0}), \quad (G_2, -m_2 g \vec{e}_{z_0}), \quad (C, -m_3 g \vec{e}_{z_0})$$

Les efforts extérieurs sont complétés par les actions de liaison du bâti S_0 sur le bras S_1 . Ceux-ci sont caractérisés par une résultante et un moment que l'on considérera au point O situé sur l'axe de rotation. Les six composantes correspondantes sont inconnues, mais la troisième

composante du moment a une signification particulière : elle représente ce que l'on appelle communément le "couple moteur" exercé sur le bras.

$$\{S_0 \rightarrow S_1\} = \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \quad (4.95)$$

où l'on a mis en évidence dans ce dernier membre la somme des actions d'une liaison pivot sans frottement (chapitre 2) et de l'action du moteur, en effet réduite à un couple dans cette décomposition.

Les actions intérieures sont constituées des interactions entre les divers solides du système. On doit faire des hypothèses sur la qualité de ces liaisons, faute de quoi le mouvement ne pourrait être décrit. Par exemple, on supposera que la liaison cardan entre S_1 et S_2 est parfaite c'est-à-dire que les deux pivots correspondants sont sans frottement. En termes de torseurs d'efforts, on écrira donc :

$$\{S_1 \rightarrow \tilde{S}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} & \tilde{L} \\ \tilde{Y} & \tilde{M} \\ \tilde{Z} & 0 \end{Bmatrix}_{\tilde{\mathcal{B}}} , \quad \{\tilde{S} \rightarrow S_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

D'après le théorème des corps intermédiaires de masse négligeable, ces deux torseurs sont égaux. On peut donc écrire directement :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{\tilde{\mathcal{B}}} \quad (4.96a)$$

On peut alors remarquer que la liaison entre S_1 et S_2 peut également être modélisée par une liaison sphérique à doigt.

Certaines forces intérieures peuvent être connues en fonction des paramètres de position, en obéissant alors à certaines lois. Ainsi, on pourrait envisager qu'un ressort de rappel ramène le croisillon dans sa position de référence pour laquelle son plan est perpendiculaire au bras S_1 ($\psi_2 = 0$). Une loi de rappel linéaire de coefficient k conduirait à l'expression du moment des actions correspondantes par rapport à l'axe Az_1 . On aurait alors :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & -k\psi_2 \end{Bmatrix}_{\tilde{\mathcal{B}}} \quad (4.96b)$$

De la même façon, une liaison pivot parfaite entre la nacelle et son axe conduit au torseur d'action suivant :

$$\{S_2 \rightarrow S_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad (4.97)$$

On remarquera, en comparant les torseurs distributeurs des vitesses déterminés lors de l'étape cinématique et les torseurs d'action précédents :

équations (4.92) et (4.95) , (4.93) et (4.96) , (4.94) et (4.97)

que chaque liaison entre deux solides de ce système introduit six inconnues, paramètre de position ou composante d'effort (résultante ou moment). D'une manière générale, une liaison introduit n inconnues ($n \geq 6$) liées par $n - 6$ équations. Dans le cas présent, on est donc en présence de 18 inconnues : les trois angles a priori inconnus en fonction du temps (ψ_1 est connu) et 15 inconnues de liaison, dont le couple moteur N_1 .

■ Etape dynamique

Il s'agit maintenant de faire appel au PFD afin d'obtenir les équations nécessaires à l'étude du mouvement. L'identification d'un repère galiléen, si elle n'a pas encore été faite, est à présent indispensable. Le PFD met en jeu le torseur dynamique du système, donc de chacun de ses constituants, par rapport à ce repère. L'étape cinétique a donné tous les éléments nécessaires à ce calcul :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(S_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{D}(S_2 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{D}(S_3 / \mathcal{R}_0)$$

On remarquera que le corps intermédiaire \tilde{S} , de masse négligeable, a un torseur dynamique nul.

L'étape cinématique aura déjà fourni certaines équations de nature cinématique comme des conditions de roulement sans glissement ou des expressions telles que $\psi_1 = \omega t$.

L'étape physique aura également permis d'écrire les équations traduisant les lois de forces ou plus simplement de déclarer que certaines inconnues de forces de liaison sont nulles.

Il reste à compléter ces équations par celles qui expriment le PFD. L'application du PFD à un système composite relève d'une stratégie qui est décrite dans le paragraphe suivant.

b) Stratégie pour l'application du PFD

L'application du PFD à un système matériel donné se traduit par l'égalité de deux torseurs et fournit par suite 6 équations scalaires. Chaque solide constitutif du système met en jeu 6 inconnues : ce sont les 6 paramètres de position si le solide est complètement libre (système planétaire par exemple) ou, dans les cas les plus simples, un nombre inférieur de coordonnées, égal au nombre de degrés de liberté de la liaison du solide, complété à 6 par des inconnues de liaison, comme on l'a fait remarquer à la fin de l'étape physique ci-dessus.

Afin d'obtenir autant d'équations que d'inconnues, il convient donc d'appliquer autant de fois le PFD que le système total comporte de composantes solides.

Cette application multiple du PFD résulte également d'une autre nécessité : celle de faire intervenir au moins une fois, dans l'écriture des équations, les actions de liaison entre deux constituants solides du système. En effet, il serait illusoire de penser que l'application du PFD au seul système total puisse conduire à l'étude complète du mouvement, puisque cette application ne fait intervenir que les actions extérieures à ce système et ne permet donc pas d'exprimer la qualité physique des liaisons internes au système. Nous avons déjà signalé ce point à propos des problèmes de statique (chapitre 3).

Mais cette application répétée du PFD doit être bien comprise et elle donne lieu à une stratégie qu'il faut maîtriser. Nous en indiquons ci-dessous les points essentiels.

- Il faut faire intervenir au moins une fois les actions entre deux constituants, le théorème de l'action-réaction étant bien sûr acquis. Pour ce faire, le PFD sera appliqué à un sous-système contenant l'un des solides mais pas l'autre, de telle sorte que ces actions apparaissent comme extérieures dans cette application. Ainsi, dans l'exemple, l'application du PFD au sous-système $S_1 + S_2$ rend les actions de la nacelle S_3 sur son axe S_2 extérieures.

- L'application répétée du PFD doit conduire à des équations indépendantes. La considération successive des trois systèmes $S_1 + S_2$, S_1 et S_2 ne donnerait pas 18 équations indépendantes, mais 12 seulement compte tenu du théorème de l'action-réaction (qui a d'ailleurs été démontré ainsi).

- Afin d'obtenir les équations les plus simples possibles, il faut s'efforcer de faire intervenir à chaque application du PFD un nombre d'inconnues minimum en prenant en compte le moins d'actions de liaison possible. Dans cette optique, l'application successive du PFD aux systèmes réduits à chacun des solides S_1 , S_2 et S_3 de l'exemple, si elle fournit bien 18

équations indépendantes, n'est pas optimale. Dans cette stratégie, les actions entre S_1 et S_2 , de même que celles entre S_2 et S_3 , interviendraient deux fois. Une stratégie plus économique consiste ici à appliquer successivement le PFD aux systèmes S_3 , $S_2 + S_3$ et $S_1 + S_2 + S_3$. Elle conduit à 18 équations indépendantes et elle ne fait intervenir chaque action interne qu'une fois.

- Parmi les inconnues du problème, on distingue : les inconnues principales qui sont les paramètres de position du système dont la détermination en fonction du temps permet de connaître le mouvement; les inconnues auxiliaires constituées des composantes a priori inconnues des forces de liaison tant externes qu'internes. Leur détermination peut être importante sur le plan de la tenue mécanique du système mais elle n'est pas primordiale pour l'étude du mouvement, à l'exception des cas où certaines valeurs seuil de ces inconnues auxiliaires déterminent la nature du mouvement (contact avec frottement par exemple).

On cherchera donc fréquemment à extraire de l'ensemble des équations résultant de l'application du PFD celles qui ne font intervenir que les inconnues principales. De telles équations sont dites "équations du mouvement". L'examen attentif des propriétés des liaisons internes et externes donnera souvent la possibilité d'obtenir directement ces équations.

Sur l'exemple considéré, il convient d'obtenir trois équations ne faisant intervenir que les inconnues principales ψ_2 , θ_2 et ψ_3 (ψ_1 étant connue par ailleurs). On y parvient par la stratégie suivante :

- PFD pour S_3 seul :
égalité des moments au point C, projetée sur le vecteur de base $\vec{e}_{z_2} \Rightarrow 1$ équation.
- PFD pour $S_2 + S_3$:
égalité des moments au point A, projetée sur les vecteurs de base \vec{e}_y et $\vec{e}_z \Rightarrow 2$ équations.

Parmi les inconnues auxiliaires, le couple moteur N_1 est important à connaître. On déterminera sa valeur en fonction des inconnues principales sans introduire d'inconnues supplémentaires par application du PFD au système $S_1 + S_2 + S_3$:

égalité des moments au point O, projetée sur le vecteur de base $\vec{e}_{z_0} \Rightarrow N_1$.

c) Cas particulier des systèmes plans

Un système mécanique peut souvent être schématisé par un système plan, même si son épaisseur n'est pas négligeable. On a déjà traité de tels systèmes en statique au chapitre 3 et

l'on a étudié la cinématique des systèmes plans dans le chapitre 1. Le § III.6 traitera un exemple de ce type en dynamique.

Les vecteurs ordinaires (vitesses, accélérations, forces) sont dans le plan et ont par suite deux composantes. Les pseudo-vecteurs (rotations instantanées, moments des forces) sont perpendiculaires au plan et n'ont par suite qu'une composante sur la direction orientée conforme à l'orientation du plan.

Chaque solide dans le plan dépend de trois paramètres et chaque constituant solide du système introduit donc trois inconnues, principales ou auxiliaires.

L'application du PFD, par égalité des torseurs, conduit à l'écriture de trois équations scalaires.

Mises à part ces différences numériques, tout ce qui a été dit ci-dessus au niveau des étapes de la modélisation (dont la reconnaissance du caractère plan du modèle fait partie) puis de la stratégie pour l'application du PFD demeure valable.

6. Exemple

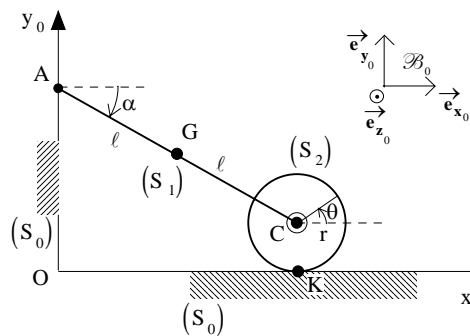


figure 4.23

Soit le système Σ constitué d'une tige (S_1) d'extrémités A et C et d'un cerceau (S_2), comme le montre la figure 4.23. On désigne par (S_0) le bâti et par $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$, avec $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$, le repère qui lui est lié.

La tige (S_1) est de longueur 2ℓ , homogène de masse M et a pour centre de masse G , milieu de AC. Son extrémité A est astreinte à se déplacer *sans frottements* sur l'axe (O, \vec{e}_{y_0}) .

Le cerceau (S_2) est homogène de masse m , il a pour rayon r et pour centre de masse C, et il est lié à la tige (S_1) par une *liaison pivot* sans frottements d'axe (C, \vec{e}_{z_0}) . La liaison entre ce cerceau et le bâti (S_0) peut être modélisée par une *liaison ponctuelle* en K. Le *coefficient de frottement* entre les deux matériaux constituant le cerceau et le bâti est noté f .

Soit $\alpha = \left(\vec{e}_{x_0}, \overrightarrow{AC} \right)$. Vue l'orientation de l'espace, $\alpha < 0$ dans la position de la figure. La

position du cerceau autour de son axe (C, \vec{e}_{z_0}) est repérée par le paramètre angulaire θ .

Si l'on désigne par x l'abscisse du point de contact K entre le cerceau (S_2) et le bâti (S_0), on est conduit à écrire : $x = \overline{OK} = 2\ell \cos \alpha$.

A l'instant initial $t = 0$, on suppose que le système est au repos : $\dot{\alpha} = 0, \dot{\theta} = 0$.

Le plan de l'étude est le suivant :

- Inventaire des actions appliquées aux divers solides
- Application du PFD : appliquant les principes exposés au § 10-4-1, on considérera successivement les systèmes suivants :
 - système $\Sigma = (S_1) \cup (S_2)$
 - solide (S_2)
- Ecriture de la condition de roulement sans glissement en K et résolution du problème.
- Etude du mouvement commençant à $t = 0$, avec les conditions initiales de repos.

a) Inventaire des actions appliquées

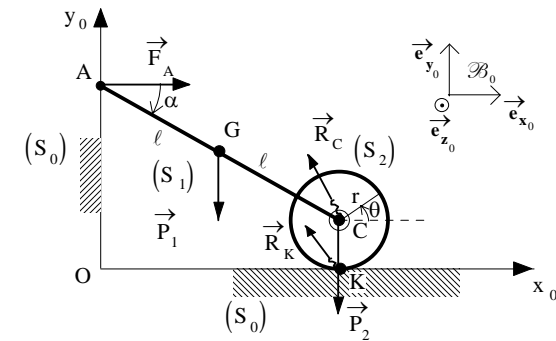


figure 4.24

- Action de la gravité : $\{\vec{\omega} \rightarrow S_1\} = (G, \vec{P}_1)$ avec $\vec{P}_1 = -Mg \vec{e}_{y_0}$
 $\{\vec{\omega} \rightarrow S_2\} = (C, \vec{P}_2)$ avec $\vec{P}_2 = -mg \vec{e}_{y_0}$
- Action de (S_0) sur (S_1) : $\{S_0 \rightarrow S_1\} = (A, \vec{F}_A)$ avec $\vec{F}_A = F_A \vec{e}_{x_0}$
- Action de (S_0) sur (S_2) : $\{S_0 \rightarrow S_2\} = (K, \vec{R}_K)$ avec $\vec{R}_K = T_K \vec{e}_{x_0} + N_K \vec{e}_{y_0}$

▪ Action de (S_1) sur (S_2) : $\{S_1 \rightarrow S_2\} = \{\vec{R}_C, \vec{M}_C\}$.

Or la liaison pivot d'axe (C, \vec{e}_{z_0}) est sans frottements donc $\vec{M}_C \cdot \vec{e}_{z_0} = 0$. De plus, le problème est plan donc $\vec{M}_C \cdot \vec{e}_{x_0} = \vec{M}_C \cdot \vec{e}_{y_0} = 0$. Finalement, $\{S_1 \rightarrow S_2\} = (C, \vec{R}_C)$ avec $\vec{R}_C = X_C \vec{e}_{x_0} + Y_C \vec{e}_{y_0}$.

b) Application du PFD au système $\Sigma = (S_1) \cup (S_2)$

Le repère \mathcal{R}_0 pouvant être considéré comme galiléen, l'énoncé du PFD conduit à :

$$\{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} = \mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0)$$

c'est-à-dire : $\{\vec{\omega} \rightarrow S_1\} + \{\vec{\omega} \rightarrow S_2\} + \{S_0 \rightarrow S_1\} + \{S_0 \rightarrow S_2\} = \mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0)$,

ou encore : $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{F}_A + \vec{R}_K = \vec{d}(\Sigma / \mathcal{R}_0)$ (4.98)

et $\vec{K}G \wedge \vec{P}_1 + \vec{K}C \wedge \vec{P}_2 + \vec{K}A \wedge \vec{F}_A = \vec{\delta}_K(\Sigma / \mathcal{R}_0)$. (4.99)

avec $\vec{d}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = M \vec{\Gamma}(G / \mathcal{R}_0) + m \vec{\Gamma}(C / \mathcal{R}_0)$ (4.100)

et $\vec{\delta}_K(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \vec{\delta}_K(S_1 / \mathcal{R}_0) + \vec{\delta}_K(S_2 / \mathcal{R}_0)$ (4.101)

❖ Calcul des résultantes :

▪ $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$ donc $\vec{OG} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} \ell \cos \alpha \\ r - \ell \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, (rappelons que $\alpha < 0$).

$$\vec{V}(G / \mathcal{R}_0) = \left(\frac{d \vec{OG}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} -\ell \dot{\alpha} \sin \alpha \\ -\ell \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \vec{\Gamma}(G / \mathcal{R}_0) = \left(\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} \right) \Big|_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} -\ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ -\ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

▪ $\vec{OC} = \vec{OK} + \vec{KC}$ donc $\vec{V}(C / \mathcal{R}_0) = -2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_{x_0}$,

$$\text{d'où } \vec{\Gamma}(C / \mathcal{R}_0) = -2 \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \vec{e}_{x_0}. \quad (4.103)$$

▪ En combinant les équations (4.98), (4.102) et (4.103), on obtient, en projection sur les vecteurs \vec{e}_{x_0} et \vec{e}_{y_0} :

$$F_A + T_K = -M \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) - 2m \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \quad (4.104)$$

$$-Mg - mg + N_K = -M \ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \quad (4.105)$$

❖ Calcul des moments au point K :

D'après la formule de changement de point,

$$\vec{\delta}_K(S_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{\delta}_G(S_1 / \mathcal{R}_0) + \underbrace{\vec{KG} \wedge \vec{d}(S_1 / \mathcal{R}_0)}_{M \vec{\Gamma}(G / \mathcal{R}_0)}, \quad (4.106)$$

$$\text{avec } \vec{\delta}_G(S_1 / \mathcal{R}_0) = \mathcal{I}_G(S_1) \left\{ \left(\frac{d \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0)}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{B}_0} \right\} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \wedge \mathcal{I}_G(S_1) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \}.$$

Or, d'après les calculs effectués au § III.3.a),

$$\mathcal{I}_G(S_1) \Big|_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \text{ où } B = \frac{M \ell^2}{3}$$

Si \mathcal{B}_1 désigne une base associée à un repère lié au solide (S_1) , alors :

$$\vec{\Omega}(S_1 / \mathcal{B}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) = \dot{\alpha} \vec{e}_{z_0}, \text{ où } \alpha = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_1}) \text{ et } \vec{e}_{x_1} = \frac{\vec{AC}}{2\ell}.$$

donc

$$\vec{\delta}_G(S_1 / \mathcal{R}_0) = \frac{M \ell^2}{3} \ddot{\alpha} \vec{e}_{z_0}.$$

D'après l'équation (4.106), on a alors :

$$\vec{\delta}_K(S_1 / \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M \ell^2}{3} \ddot{\alpha} \end{pmatrix} \Big|_{\mathcal{B}_0} + \begin{pmatrix} -\ell \cos \alpha \\ r - \ell \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -M \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ -M \ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\mathcal{B}_0},$$

ce qui conduit, tous calculs faits à :

$$\vec{\delta}_K(S_1 / \mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{M \ell^2}{3} \ddot{\alpha} + M \ell^2 (\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) + M \ell r (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \right\} \vec{e}_{z_0} \quad (4.107)$$

$$\vec{\delta}_K(S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}_C(S_2/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{CK} \wedge m\vec{\Gamma}(C/\mathcal{R}_0), \quad (4.108)$$

De la même manière que précédemment, on trouve : $\vec{\delta}_C(S_2/\mathcal{R}_0) = m r^2 \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0}$,

$$\text{donc } \vec{\delta}_K(S_2/\mathcal{R}_0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m r^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{vmatrix} 0 \\ r \wedge \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} \begin{vmatrix} -2 m \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{d'où } \vec{\delta}_K(S_2/\mathcal{R}_0) = \{ m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \} \vec{e}_{z_0} \quad (4.109)$$

$$\vec{KG} \wedge \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} -\ell \cos \alpha \\ r - \ell \sin \alpha \wedge \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -M g \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M g \ell \cos \alpha \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\vec{KC} \wedge \vec{P}_2 = r \vec{e}_{y_0} \wedge (-m g) \vec{e}_{y_0} = \vec{0}$$

$$\vec{KA} \wedge \vec{F}_A = \begin{vmatrix} -2 \ell \cos \alpha \\ r - 2 \ell \sin \alpha \wedge \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} \begin{vmatrix} F_A \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_A (r - 2 \ell \sin \alpha) \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

d'où :

$$\begin{aligned} M g \ell \cos \alpha - F_A (r - 2 \ell \sin \alpha) &= \frac{M \ell^2}{3} \ddot{\alpha} + m r^2 \ddot{\theta} \\ &+ (M + 2 m) r \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ &+ M \ell^2 (\ddot{\alpha} \cos 2 \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2 \alpha) \end{aligned} \quad (4.110)$$

c) Application du PFD au solide (S_2)

L'énoncé du PFD conduit à $\{\text{ext} \rightarrow S_2\} = \mathcal{D}(S_2/\mathcal{R}_0)$,

c'est-à-dire : $\{\vec{\omega} \rightarrow S_2\} + \{S_0 \rightarrow S_2\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \mathcal{D}(S_2/\mathcal{R}_0)$,

ou encore : $\vec{P}_2 + \vec{R}_K + \vec{R}_C = m \vec{\Gamma}(C/\mathcal{R}_0)$, (4.111-a)

ce qui conduit à deux équations scalaires

$$\begin{cases} T_K + X_C = -2 m \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha), \\ N_K + Y_C = m g. \end{cases} \quad (4.111-b)$$

$$(4.111-c)$$

$$\text{et } \overrightarrow{CK} \wedge \vec{R}_K = \vec{\delta}_C(S_2/\mathcal{R}_0). \quad (4.112)$$

$$\text{L'équation (4.112) s'écrit encore : } \begin{vmatrix} 0 \\ -r \wedge \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} \begin{vmatrix} T_K \\ N_K \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} = m r^2 \ddot{\theta} \vec{e}_{z_0},$$

$$\text{d'où } \boxed{T_K = m r \ddot{\theta}}. \quad (4.113)$$

d) Récapitulatif des équations et des inconnues du problème

❖ Inventaire des inconnues

▪ **3 forces** inconnues : F_A , T_K et N_K

▪ **2 angles** : α et θ En tout **5 inconnues**

❖ Inventaire des équations

▪ L'application du PFD au système $\Sigma = (S_1) \cup (S_2)$ conduit à
3 équations (4.104), (4.105) et (4.110).

▪ L'application du PFD à (S_2) conduit à
1 équation (4.113).

▪ Si l'on prend maintenant en compte l'hypothèse de *roulement sans glissement*, on disposera alors d'**1 équation** supplémentaire,

ce qui conduit finalement à **5 équations**.

❖ Conditions à vérifier

▪ Il faut vérifier par ailleurs que $F_A > 0$ et $N_K > 0$.

▪ L'hypothèse de non glissement impose également par ailleurs :

$$|T_K| < f N_K. \quad (4.114)$$

e) Condition de roulement sans glissement

▪ La condition de roulement sans glissement en K s'écrit : $\vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$.

Or $\vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(C_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{B}_0) \wedge \overrightarrow{CK}$,

$$\text{donc } \vec{0} = \dot{x} \vec{e}_{x_0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \wedge \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{c'est-à-dire } \dot{x} + r \dot{\theta} = 0. \quad (4.115)$$

Or $x = 2\ell \cos \alpha$ donc l'équation (4.115) s'écrit :

$$\boxed{-2\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha + r \ddot{\theta} = 0},$$

f) Etude du mouvement commençant à $t = 0$

▪ Pour connaître $\ddot{\alpha}$ à $t = 0$, il faut dériver une nouvelle fois par rapport au temps :

$$-2\ell(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) + r \ddot{\theta} = 0. \quad (4.116)$$

▪ Les cinq équations (4.104), (4.105), (4.110), (4.113) et (4.116) s'écrivent, à $t = 0$ et donc pour $\dot{\alpha} = 0$:

$$F_A + T_K = -(M + 2m)\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha \quad (4.117)$$

$$-(M + m)g + N_K = -M\ell \ddot{\alpha} \cos \alpha \quad (4.118)$$

$$Mg\ell \cos \alpha - F_A(r - 2\ell \sin \alpha) = \frac{M\ell^2}{3}\ddot{\alpha} + m r^2 \ddot{\theta} + (M + 2m)r\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha \quad (4.119)$$

$$+ M\ell^2 \ddot{\alpha} \cos 2\alpha$$

$$T_K = m r \ddot{\theta} \quad (4.113)$$

$$-2\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha + r \ddot{\theta} = 0. \quad (4.120)$$

▪ Les équations (4.113) et (4.120) impliquent :

$$T_K = m r \ddot{\theta} = 2m\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha. \quad (4.121)$$

▪ En remplaçant T_K par son expression dans l'équation (4.117), on obtient :

$$F_A = -(M + 2m)\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha - 2m\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha,$$

d'où

$$\boxed{F_A = -(M + 4m)\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha} \quad (4.122)$$

▪ En remplaçant F_A et $m r^2 \ddot{\theta}$ par leurs expressions dans l'équation (4.119), on a alors :

$$\begin{aligned} Mg\ell \cos \alpha + (M + 4m)\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha (r - 2\ell \sin \alpha) \\ = \frac{M\ell^2}{3}\ddot{\alpha} + 2m\ell r \ddot{\alpha} \sin \alpha + (M + 2m)r\ell \ddot{\alpha} \sin \alpha + M\ell^2 \ddot{\alpha} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

ce qui va permettre d'obtenir $\ddot{\alpha}$:

$$\begin{aligned} Mg\ell \cos \alpha + \ell r \ddot{\alpha} \sin \alpha (M + 4m - M - 2m - 2m) \\ + \ell^2 \ddot{\alpha} \left[-2(M + 4m) \sin^2 \alpha - M \cos 2\alpha - \frac{M}{3} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad Mg\ell \cos \alpha + \ell^2 \ddot{\alpha} \left[-8m \sin^2 \alpha - M \left(2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \right) \right] = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad Mg\ell \cos \alpha + \ell^2 \ddot{\alpha} \left[-8m \sin^2 \alpha - M \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad Mg\ell \cos \alpha = \ell^2 \ddot{\alpha} \left[8m \sin^2 \alpha - \frac{4M}{3} \right],$$

d'où

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \frac{3Mg \cos \alpha}{4\ell(6m \sin^2 \alpha + M)}} \quad (4.123)$$

On en déduit donc que $\ddot{\alpha} > 0$. Or $\alpha < 0$ donc, d'après l'équation (4.122), on vérifie bien que $F_A > 0$.

▪ En remplaçant $\ddot{\alpha}$ par son expression dans l'équation (4.120), on a :

$$r \ddot{\theta} = \frac{3Mg \sin \alpha \cos \alpha}{2(6m \sin^2 \alpha + M)} < 0.$$

L'équation (4.121) peut maintenant s'écrire, en utilisant l'équation (4.123) :

$$\boxed{T_K = m r \ddot{\theta} = \frac{3Mm g \sin \alpha \cos \alpha}{2(6m \sin^2 \alpha + M)}} \quad (4.124)$$

On a alors $T_K < 0$.

▪ La dernière étape consiste à calculer N_K en utilisant l'équation (4.118) :

$$N_K = (M + m)g - M\ell \ddot{\alpha} \cos \alpha$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad N_K = (M + m)g - \frac{3M^2 g \cos^2 \alpha}{4(6m \sin^2 \alpha + M)},$$

d'où

$$\boxed{N_K = \frac{4(6m \sin^2 \alpha + M)m + M^2(1 + 3 \sin^2 \alpha) + 24m M \sin^2 \alpha}{4(6m \sin^2 \alpha + M)}g} \quad (4.125)$$

g) Cas où $m = M$

$$\text{▪ L'équation (4.124) s'écrit alors : } T_K = \frac{3m g \sin \alpha \cos \alpha}{2(6 \sin^2 \alpha + 1)},$$

$$\text{et l'équation (4.125) : } N_K = m g \frac{24 \sin^2 \alpha + 4 + 1 + 3 \sin^2 \alpha + 24 \sin^2 \alpha}{4(6 \sin^2 \alpha + 1)}$$

d'où

$$\boxed{N_K = m g \frac{5 + 51 \sin^2 \alpha}{4(6 \sin^2 \alpha + 1)}} \quad (4.126)$$

- La condition (4.114) s'écrit, puisque $T_K < 0$,

$$-T_K < f N_K, \quad (4.127)$$

c'est-à-dire :
$$-\frac{3 m g \sin \alpha \cos \alpha}{2(6 \sin^2 \alpha + 1)} < f m g \frac{5 + 51 \sin^2 \alpha}{4(6 \sin^2 \alpha + 1)},$$

c'est-à-dire
$$-6 \sin \alpha \cos \alpha < f(5 + 51 \sin^2 \alpha),$$

ce qui revient à écrire, en divisant les deux membres de l'équation par $\cos^2 \alpha$:

$$-6 \operatorname{tg} \alpha < f[5(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 51 \sin^2 \alpha],$$

c'est-à-dire
$$-6 \operatorname{tg} \alpha < f(5 + 56 \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

d'où
$$f > \frac{6 \operatorname{tg} |\alpha|}{5 + 56 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4.128)$$

- On peut alors déterminer les domaines de glissement et de non glissement à l'instant initial en représentant le coefficient de frottement f en fonction de $\operatorname{tg} |\alpha|$.

L'équation (4.128) peut aussi s'écrire : $Y > \frac{6X}{5 + 56X^2}$ en posant $Y = f$ et $X = \operatorname{tg} |\alpha|$.

L'étude de la fonction $Y = \frac{6X}{5 + 56X^2}$ conduit à calculer sa dérivée par rapport à X :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6(5 - 56X^2)}{(5 + 56X^2)^2}.$$

$$\frac{dY}{dX} = 0 \Leftrightarrow X^2 = \frac{5}{56}, \text{ ce qui conduit à } Y = \frac{3}{2\sqrt{70}}.$$

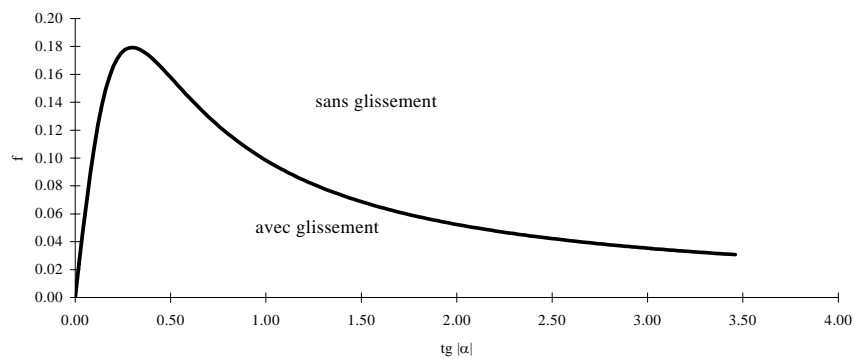


Figure 4.25