OTIMIZAÇÃO EM REDES

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

- Suponha que o grafo represente:

- uma rede hidráulica e que se deseja estabelecer o fluxo máximo de água que pode escoar através desta rede, ou;

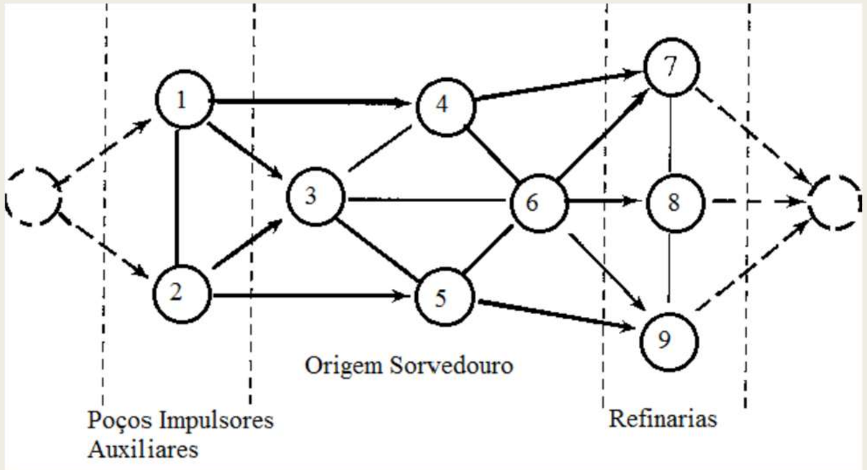
- Uma rede de comunicações com restrição à capacidade de transmissão por linha;

Problemas dessa natureza possuem formulação análoga e são classificados como problemas de fluxo máximo em rede.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

- Considere uma rede de tubulações que transporte petróleo cru de poços de petróleo a refinarias.
- Estações intermediárias de impulsores auxiliares e de bombeamento são instalados a distâncias adequadas para transportar o petróleo cru pela rede.
- Cada segmento de tubulação tem uma taxa de descarga máxima (ou capacidade) de fluxo de petróleo cru.
- Um segmento de tubulação pode ser unidirecional ou bidirecional, dependendo de seu projeto.
- A figura a seguir mostra uma rede de tubulação típica. Como podemos determinar a capacidade máxima da rede entre os poços e as refinarias?

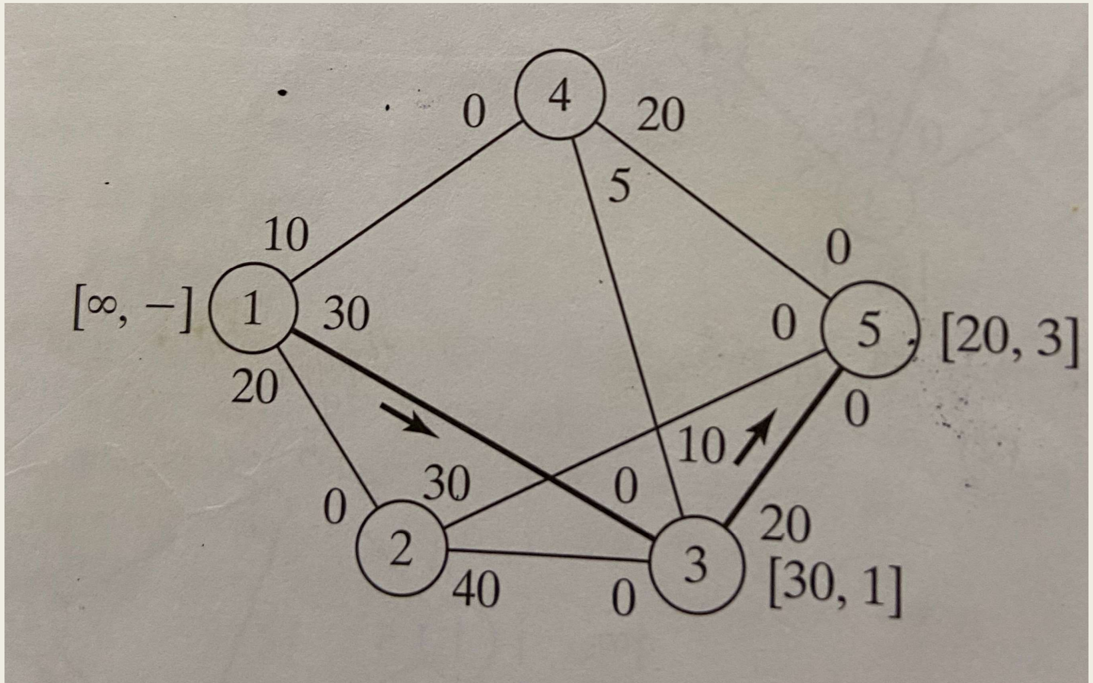
PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO



- A solução do problema proposto requer equipar a rede com uma única origem e um único sorvedouro usando arcos unidirecionais de capacidade infinita representados pelos arcos tracejados.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

Exemplo



(a) $f_1 = 20$

Determine o fluxo máximo na rede do Exemplo 6.4-1 (Figura 6.29). A Figura 6.31 apresenta um resumo gráfico das iterações do algoritmo. Você verá que é útil comparar a descrição das iterações com o resumo gráfico.

Iteração 1. Iguale as capacidades residuais iniciais (c_{ij}, c_{ji}) às capacidades iniciais ($\bar{C}_{ij}$, $\bar{C}_{ji}$).

Etapa 1. Determine $a_1 = \infty$ e rotule o nó 1 com $[\infty, —]$. Determine $i = 1$.

Etapa 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$ $(\neq \varnothing)$.

Etapa 3. $k = 3$ porque $c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\} = 30$. Determine $a_3 = c_{13} = 30$, e rotule o nó 3 com [30,1]. Determine $i = 3$ e repita a etapa 2.

Etapa 2. $S_3 = \{4, 5\}$.

Etapa 3. $k = 5$ e $a_5 = c_{35} = \max\{10, 20\} = 20$. Rotule o nó 5 com [20, 3]. Uma rota de passagem é obtida. Vá para a etapa 5.

Etapa 5. A rota de passagem é determinada pelos rótulos que iniciam no nó 5 e percorrem a rota inversa até o nó 1, isto é, $(\mathbf{5}) \rightarrow [20, \mathbf{3}] \rightarrow (\mathbf{3}) \rightarrow [30, \mathbf{1}] \rightarrow (\mathbf{1})$. Assim, $N_1 = \{1, 3, 5\}$ e $f_1 = \min\{a_1, a_3, a_5\} = \{\infty, 30, 20\} = 20$. As capacidades residuais ao longo da rota N_1 são

$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$
$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

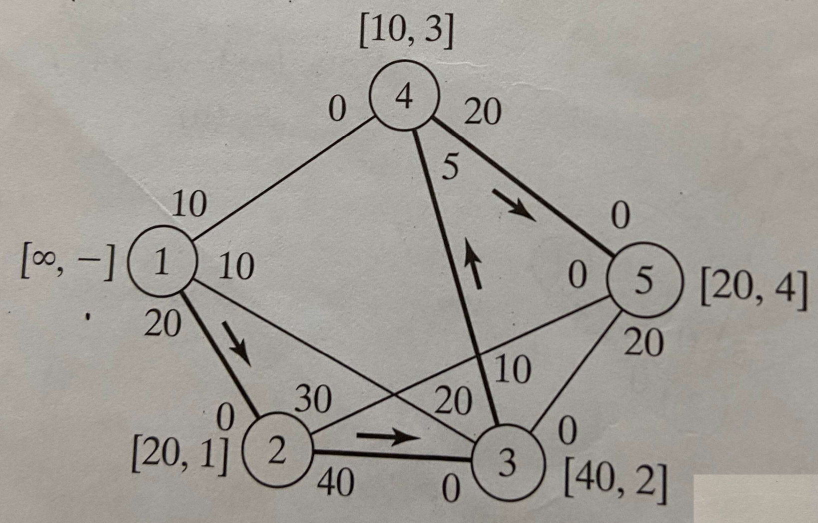
Iteração 2

Etapa 1. Determine $a_1 = \infty$, e rotule o nó 1 com $[\infty, —]$. Determine $i = 1$.

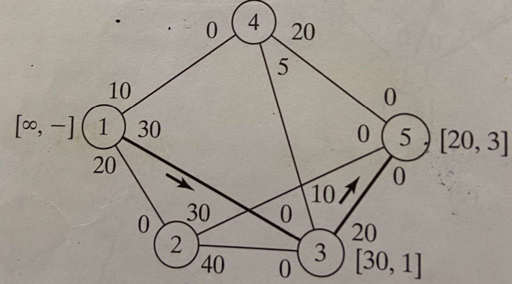
Etapa 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Etapa 3. $k = 2$ e $a_2 = c_{12} = \max\{20, 10, 10\} = 20$. Determine $i = 2$ e repita a etapa 2.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO



(b) $f_2 = 10$

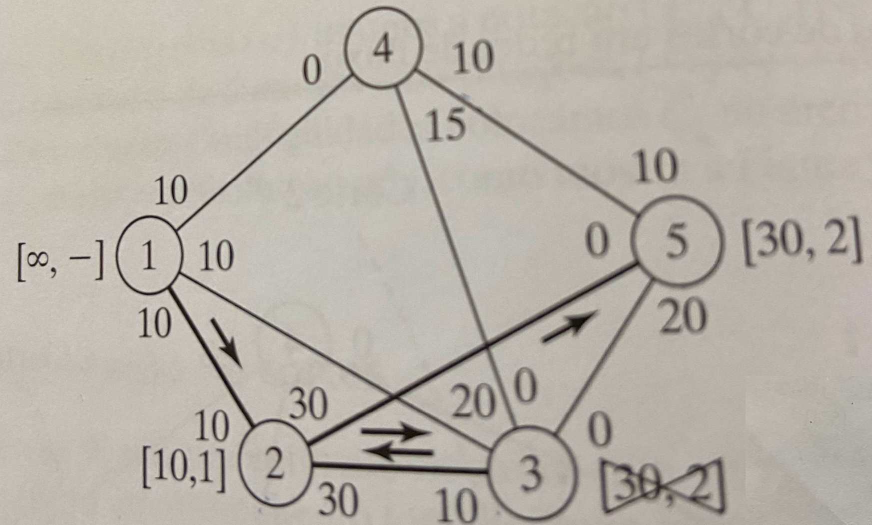


(a) $f_1 = 20$

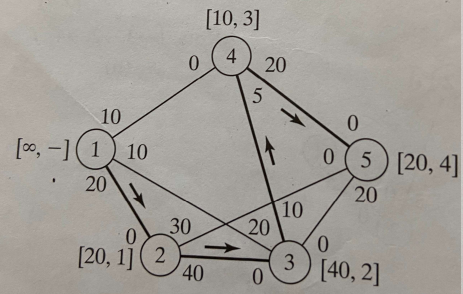
de passagem

Etapa 2. $S_2 = \{3, 5\}$.
Etapa 3. $k = 3$ e $a_3 = c_{23} = 40$. Rotule o nó 3 com [40, 2]. Determine $i = 3$ e repita a etapa 2.
Etapa 2. $S_3 = \{4\}$ (observe que $c_{35} = 0$; portanto, o nó 5 não pode ser incluído em S_3).
Etapa 3. $k = 4$ e $a_4 = c_{34} = 10$. Rotule o nó 4 com [10, 3]. Determine $i = 4$ e repita a etapa 2.
Etapa 2. $S_4 = \{5\}$ (observe que os nós 1 e 3 já estão rotulados; portanto, não podem ser incluídos em S_4).
Etapa 3. $k = 5$ e $a_5 = c_{45} = 20$. Rotule o nó 5 com [20, 4]. Foi conseguida uma rota de passagem. Vá para a etapa 5.
Etapa 5. $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f_2 = \min\{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10$. As capacidades residuais ao longo da rota de N_2 são

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO



(c) $f_3 = 10$



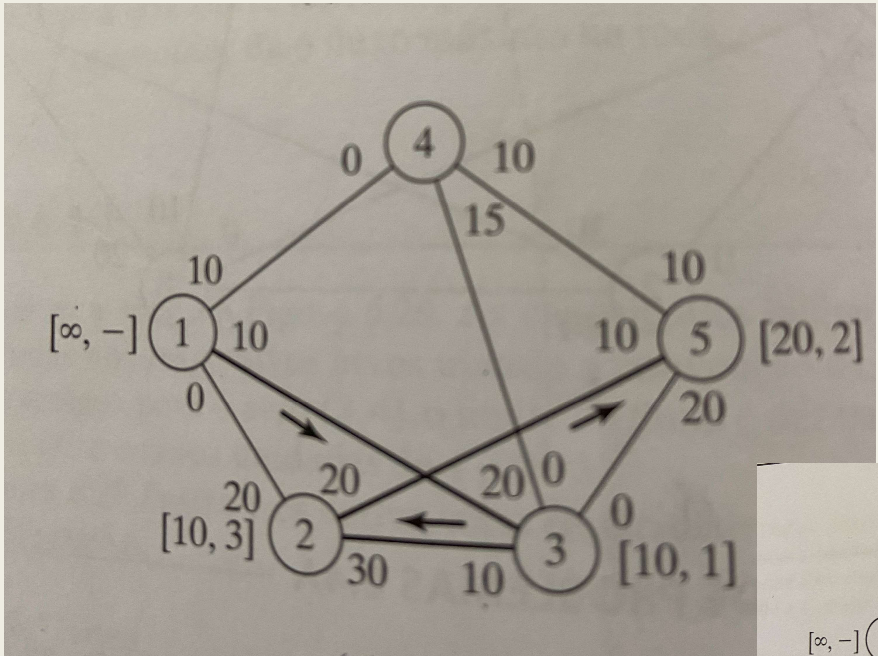
(b) $f_2 = 10$

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$
$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$$
$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$$
$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

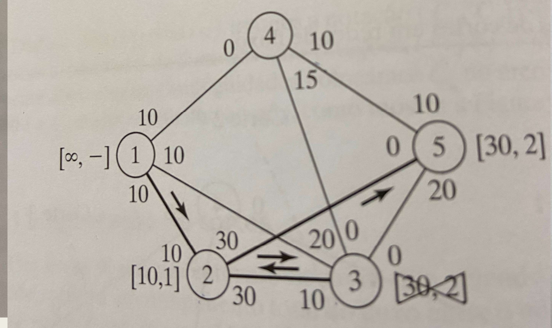
Iteração 3

Etapa 1. Determine $a_1 = \infty$ e rotule o nó 1 com $[\infty, —]$. Determine $i = 1$.
Etapa 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.
Etapa 3. $k = 2$ e $a_2 = c_{12} = \max\{10, 10, 10\} = 10$. (Embora os empates sejam decididos aleatoriamente, o TORA sempre seleciona o nó vinculado que tenha o menor índice. Usaremos essa convenção neste exemplo.) Rotule o nó 2 com $[10, 1]$. Determine $i = 2$ e repita a etapa 2.
Etapa 2. $S_2 = \{3, 5\}$.
Etapa 3. $k = 3$ e $a_3 = c_{23} = 30$. Rotule o nó 3 com $[30, 2]$. Determine $i = 3$ e repita a etapa 2.
Etapa 2. $S_3 = \emptyset$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Vá para a etapa 4 a fim de percorrer a rota inversa.
Etapa 3. *Rota inversa.* O rótulo $[30, 2]$ no nó 3 dá o nó imediatamente precedente $r = 2$. Elimine o nó 3 de qualquer consideração *nessa iteração* cancelando-o. Determine $i = r = 2$, e repita a etapa 2.
Etapa 2. $S_2 = \{5\}$ (observe que o nó 3 foi eliminado na etapa da rota inversa).
Etapa 3. $k = 5$ e $a_5 = c_{25} = 30$. Rotule o nó 5 com $[30, 2]$. Foi conseguida uma rota de passagem; vá para a etapa 5.
Etapa 5. $N_3 = \{1, 2, 5\}$ e $c_5 = \min\{\infty, 10, 30\} = 10$. As residuais ao longo da rota de N_3 são

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO



(d) $f_4 = 10$



(c) $f_3 = 10$

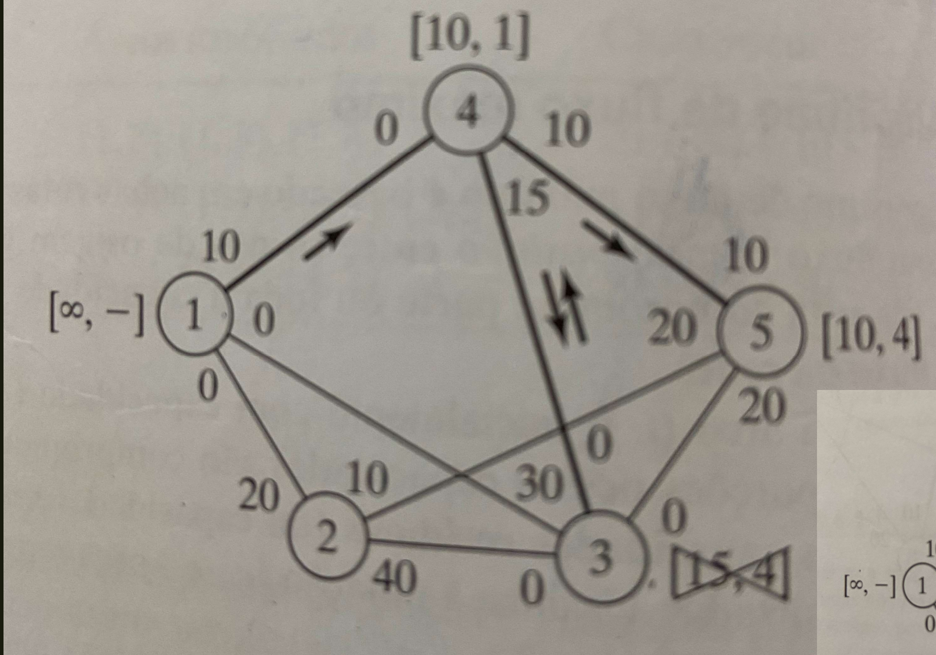
Iteração 4. Essa iteração dá $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ com $f_4 = 10$ (Verifique!).

Iteração 5. Essa iteração dá $N_5 = \{1, 4, 5\}$ com $f_5 = 10$ (Verifique!).

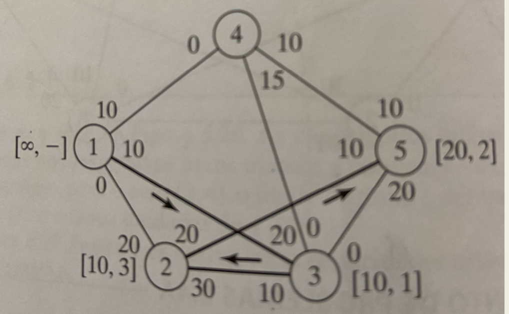
Iteração 6. Todos os arcos que partem do nó 1 têm residuais zero. Portanto, não há mais nenhuma rota de passagem possível. Voltamos à etapa 6 para determinar a solução.

Etapa 6. Fluxo máximo na rede é $F = f_1 + f_2 + \dots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. O fluxo nos diferentes arcos são calculados subtraindo as últimas residuais (c_{ij}, c_{ji}) nas iterações 6 das capacidades iniciais $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$, como mostra a Tabela 6.7.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO



(e) $f_5 = 10$



(d) $f_4 = 10$

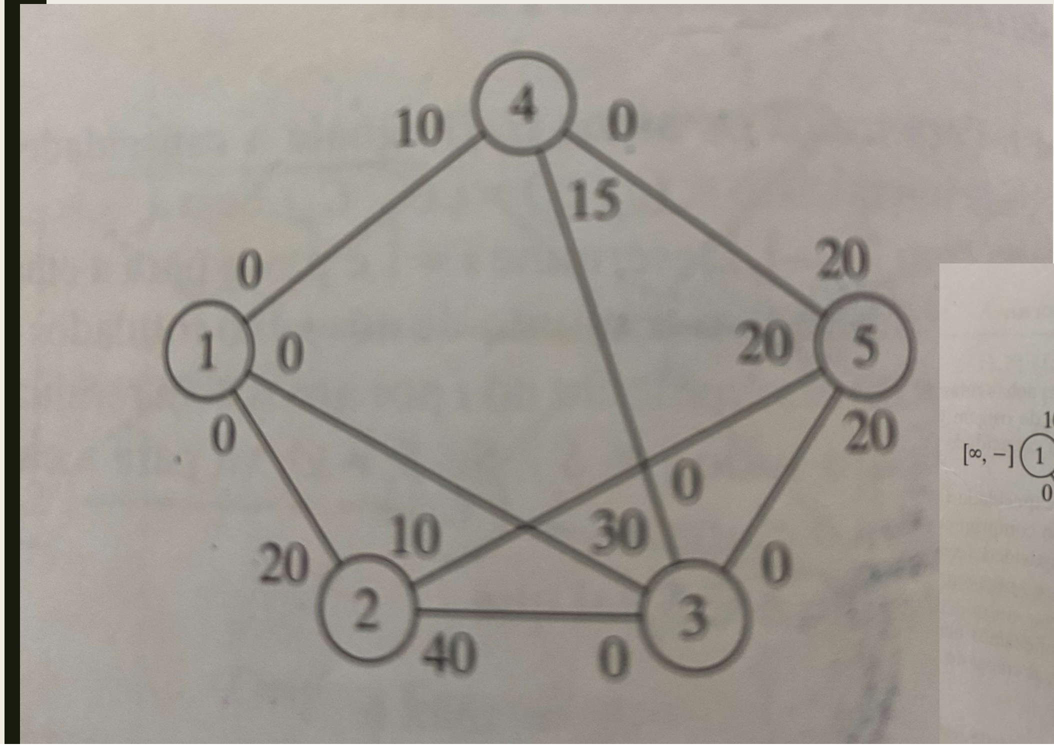
Iteração 4. Essa iteração dá $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ com $f_4 = 10$ (Verifique!).

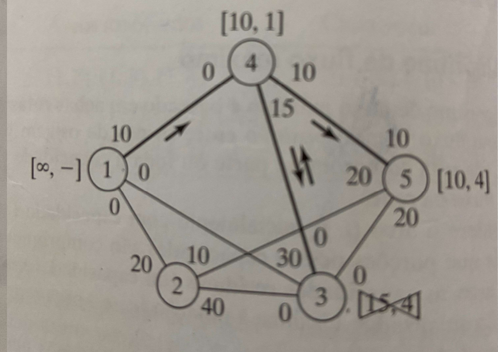
Iteração 5. Essa iteração dá $N_5 = \{1, 4, 5\}$ com $f_5 = 10$ (Verifique!).

Iteração 6. Todos os arcos que partem do nó 1 têm residuais zero. Portanto, não há mais nenhuma rota de passagem possível. Voltamos à etapa 6 para determinar a solução.

Etapa 6. Fluxo máximo na rede é $F = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. O fluxo nos diferentes arcos são calculados subtraindo as últimas residuais (c_{ij}, c_{ji}) nas iterações 6 das capacidades iniciais $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$, como mostra a Tabela 6.7.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO





(e) $f_5 = 10$

Iteração 4. Essa iteração dá $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ com $f_4 = 10$ (Verifique!).

Iteração 5. Essa iteração dá $N_5 = \{1, 4, 5\}$ com $f_5 = 10$ (Verifique!).

Iteração 6. Todos os arcos que partem do nó 1 têm residuais zero. Portanto, não há mais nenhuma rota de passagem possível. Voltamos à etapa 6 para determinar a solução.

Etapa 6. Fluxo máximo na rede é $F = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. O fluxo nos diferentes arcos são calculados subtraindo as últimas residuais (c_{ij}, c_{ji}) nas iterações 6 das capacidades iniciais $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$, como mostra a Tabela 6.7.

PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

Obtenha o fluxo máximo entre os vértices 1 e 5 do grafo: