Problema de Transporte

(Redes)

O Problema de Transporte consiste em determinar o menor custo (ou o maior lucro) em transportar produtos de várias origens para vários destinos.

Aplicação direta em Logística.

O Problema de Transporte é também um problema de P.L., porém devido a sua importância e ao mau desempenho do Simplex para este tipo de problema, este será estudado de maneira especifica.

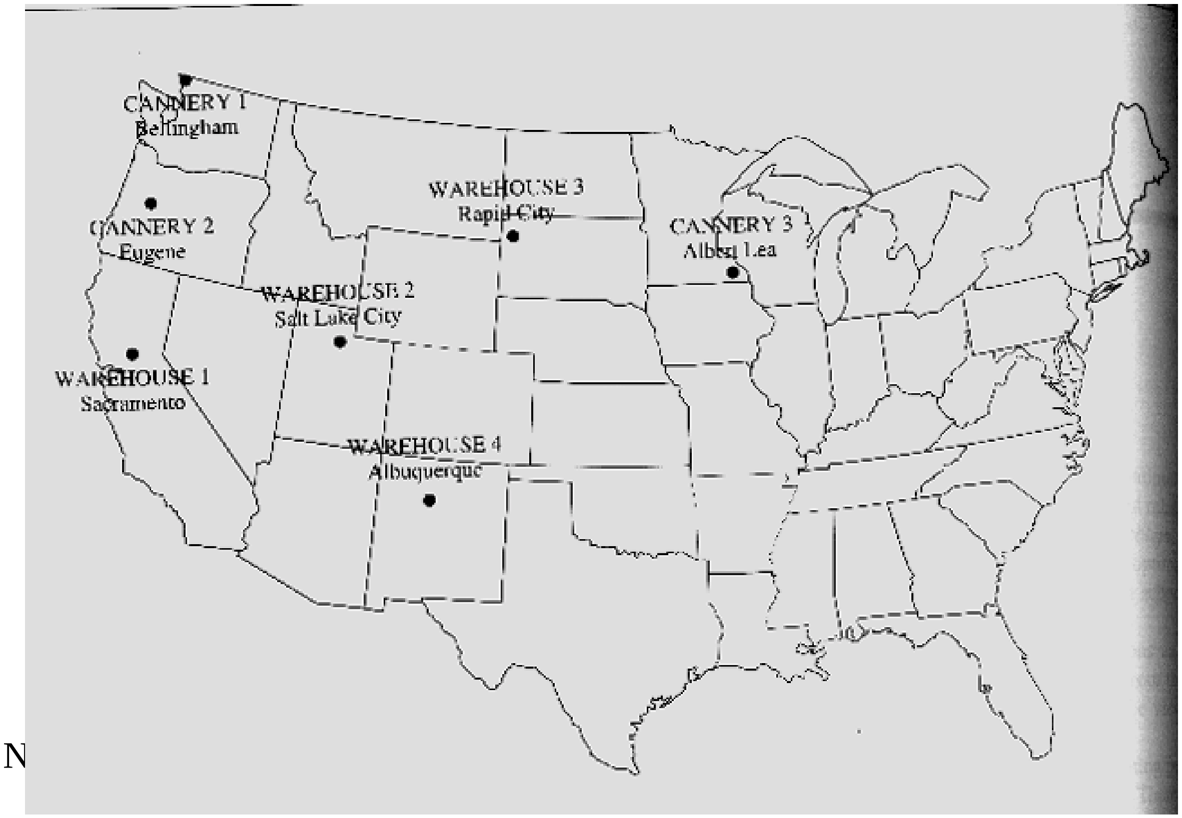
Exemplos:

1) Transportar produtos de m fábricas para n estoques;

2) Transportar produtos de m estoques para n lojas.

<u>Outro Exemplo</u>

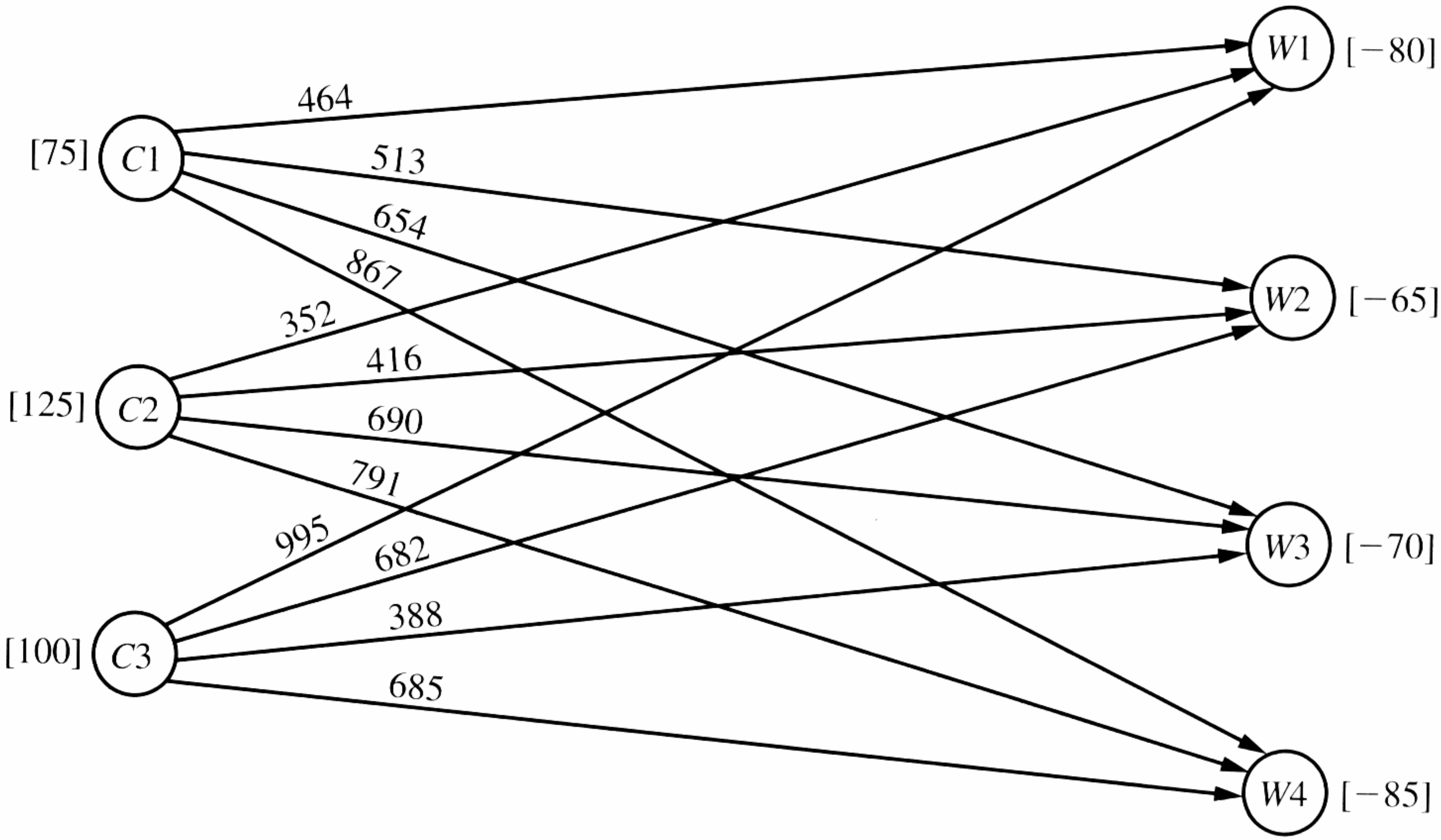
Uma companhia enlata ervilhas nas suas unidades “Cannery1, Cannery2, Cannery3” e transporta as latas de ervilha por caminhão para os seus estoques “Warehouse1, Warehouse2, Warehouse3, Warehouse4”.



A tabela abaixo mostra os custos de transporte, a disponibilidade nas unidades “Cannery” e as necessidades nos estoques.

		Custo ($) transporte por caminhão				
		Warehouse (estoque) - Destino				
		1	**2**	**3**	**4**	**Disponibilidade**
Origem	**Cannery1**	464	513	654	867	75
	Cannery2	352	416	690	791	125
	Cannery3	995	682	388	685	100
	Demanda	80	65	70	85	

A representação esquemática abaixo ilustra o problema



A função objetivo, a ser minimizada, é:

$$
\begin{aligned}
Z = {} & 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} \\
& + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} \\
& + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}
\end{aligned}
$$

As restrições são:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & = & 75 \\
 & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & = & 125 \\
 & & & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & = & 100 \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & = & 80 \\
 & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & = & 65 \\
 & & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & = & 70 \\
 & & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & = & 85
\end{array}
$$

com

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$$

O modelo generalizado fica:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \text{disponibilidade}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \text{demanda}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \left(i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots n\right)$$

Algoritmo

Como o Problema de Transporte é um problema de P.L., o Simplex pode ser utilizado. Porém, devido as características específicas do Problema de Transporte, uma versão modificada do Simplex, denominado, “Método Simplex de Transporte” torna a resolução deste tipo de problema muito mais eficiente, quando comparado ao Simplex tradicional.

O algoritmo todo pode ser executado realizando operações sobre uma tabela com a seguinte forma:

Origem	Destino					Oferta
	1	2	...	j	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1j} x_{1j}	c_{1n} x_{1n}	s_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2j} ...	c_{2n} x_{2n}	s_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	...
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	... ...	c_{ij} x_{ij}	c_{in} x_{in}	s_i
...	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mj} x_{mj}	c_{mn} x_{mn}	s_m
necessidade	d_1	d_2	...	d_j	d_n	

c_{ij} é o custo de transporte da origem i para o destino j;

x_{ij} é a quantidade transportada da origem i para o destino j;

d_j é a demanda do destino j;

s_i é a oferta da origem i;

m é o número de origens e n é o número de destinos.

Exemplo

Considere a seguinte tabela abaixo:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6	5	8	10
2	13	12	1	20
3	7	9	5	12
4	10	6	4	13
necessidade	8	32	15	

1º Passo: Solução Inicial

Como no Simplex tradicional, faz-se necessário achar uma solução viável inicial. A maneira mais simples para esta tarefa é através do Método do Canto Noroeste.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6 8	5 2	8	~~10~~ ~~2~~ 0
2	13	12 20	1	~~20~~
3	7	9 10	5 2	~~12~~ ~~2~~ 0
4	10	6	4 13	~~13~~ 0
necessidade	~~8~~ 0	~~32~~ ~~30~~ ~~10~~ 0	~~15~~ ~~13~~ 0	

2º Passo: Critério de Otimalidade

Como no Simplex tradicional, uma solução é analisada se pode ou não ser melhorada observando-se os coeficientes das variáveis não básicas na função-objetivo.

a) Escrever a função-objetivo em termos das variáveis não básicas.

Multiplicar cada restrição de linha pelo número $-u_i$ e cada restrição de coluna pelo número $-v_j$ e somar as novas linhas e colunas na função-objetivo de tal maneira que os coeficientes das variáveis básicas sejam todos nulos.

Se x_{ij} é básico: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

Essas igualdades compõem um sistema de m + n – 1 equações com m + n incógintas. A solução desse sistema é obtida atribuindo-se um valor arbitrário a uma das incógnitas e calculando as demais.

De posse desses valores, calcula-se os coeficientes das variáveis não-básicas:

Se x_{ij} é não-básico: coeficiente = $c_{ij} - u_i - v_j$

Se todos esses valores forem não-negativos a solução é ótima.

Se houver coeficientes negativos, implica que a solução poderá ser melhorada (minimizada).

b) A variável que entra na base é a variável cujo coeficiente negativo tenha o maior valor absoluto.

c) A introdução de uma nova variável na base ocasiona uma reação em cadeia para compensar as restrições de linha (oferta) e coluna (demanda).

O valor da variável que entra deve ser o maior valor possível, sem tornar nenhuma variável básica negativa. A variável básica que tiver seu valor anulado em conseqüência da variável que entra será a variável que sai da base.

d) Voltar ao item a) até que a solução seja ótima.

Continuando o exemplo, após as alocações iniciais, tinhamos:

Origem	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
1	6 8	5 2	8	10
2	13	12 20	1	20
3	7	9 10	5 2	12
4	10	6	4 13	13
necessidade	8	32	15	

V. B.	**Coeficiente**	**Substituindo c_{ij}**	**Arbitrando $u_1=0$**	**V. N.B.**	**Coeficiente**	**Valor**
x_{11}	$c_{11}-u_1-v_1=0$	$6-u_1-v_1=0$	$v_1=6$	x_{13}	$c_{13}-u_1-v_3$	$8-0-1 = 7$
x_{12}	$c_{12}-u_1-v_2=0$	$5-u_1-v_2=0$	$v_2=5$	x_{21}	$c_{21}-u_2-v_1$	$13-7-6 = 0$
x_{22}	$c_{22}-u_2-v_2=0$	$12-u_2-v_2=0$	$u_2=7$	x_{23}	$c_{23}-u_2-v_3$	$1-7-1 = -7$
x_{32}	$c_{32}-u_3-v_2=0$	$9-u_3-v_2=0$	$u_3=4$	x_{31}	$c_{31}-u_3-v_1$	$7-4-6= -3$
x_{33}	$c_{33}-u_3-v_3=0$	$5-u_3-v_3=0$	$v_3=1$	x_{41}	$c_{41}-u_4-v_1$	$10-3-6 = 1$
x_{43}	$c_{43}-u_4-v_3=0$	$4-u_4-v_3=0$	$u_4=3$	x_{42}	$c_{42}-u_4-v_2$	$6-3-5= -2$

A solução não é ótima, pois existe variáveis não-básicas com coeficientes negativos. A variável x_{23} entra na base.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	8 (6)	2 (5)	(8)	10
2	(13)	$20-\theta$ (12)	θ (1)	20
3	(7)	$10+\theta$ (9)	$2-\theta$ (5)	12
4	(10)	(6)	13 (4)	13
necessidade	8	32	15	

Para que não haja variáveis básicas negativas, o valor de θ deve ser 2.

A nova solução fica:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6 8	5 2	8	10
2	13	12 18	1 2	20
3	7	9 12	5 0	12
4	10	6	4 13	13
necessidade	8	32	15	

A variável que sai da base é x_{33}

Continuando o exemplo, precisamos verificar se a solução é ótima:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6 8	5 2	8	10
2	13	12 18	1 2	20
3	7	9 12	5	12
4	10	6	4 13	13
necessidade	8	32	15	

V. B.	**Coeficiente**	**Substituindo c_{ij}**	**Arbitrando u_1=0**	**V. N.B.**	**Coeficiente**	**Valor**
x_{11}	$c_{11}-u_1-v_1=0$	$6-u_1-v_1=0$	$v_1 = 6$	x_{13}	$c_{13}-u_1-v_3$	8-0+6 = 14
x_{12}	$c_{12}-u_1-v_2=0$	$5-u_1-v_2=0$	$v_2 = 5$	x_{21}	$c_{21}-u_2-v_1$	13-7-6 = 0
x_{22}	$c_{22}-u_2-v_2=0$	$12-u_2-v_2=0$	$u_2 = 7$	x_{31}	$c_{31}-u_3-v_1$	7-4-6 = -3
x_{32}	$c_{32}-u_3-v_2=0$	$9-u_3-v_2=0$	$u_3 = 4$	x_{33}	$c_{33}-u_3-v_3$	5-4+6= 7
x_{23}	$c_{23}-u_2-v_3=0$	$1-u_2-v_3=0$	$v_3= -6$	x_{41}	$c_{41}-u_4-v_1$	10-10-6 = -6
x_{43}	$c_{43}-u_4-v_3=0$	$4-u_4-v_3=0$	$u_4 = 10$	x_{42}	$c_{42}-u_4-v_2$	6-10-5= -9

A solução não é ótima, pois existe variáveis não-básicas com coeficientes negativos. A variável x_{42} entra na base.

Prosseguindo o algoritmo (você deverá verificar isto), a solução ótima é:

Origem	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
1	6	5 10	8	10
2	13	12 5	1 15	20
3	7 8	9 4	5	12
4	10	6 13	4	13
necessidade	8	32	15	

O custo do transporte é:

$$C = 10*5 + 5*12 + 15*1 + 8*7 + 4*9 + 13*6 = 295$$

O caso de sistemas não equilibrados

Podem existir casos em que a quantidade total de oferta é maior ou menor que a quantidade total de demanda. Nestes casos, dizemos que o sistema não está equilibrado.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6	5	8	5
2	13	12	1	20
3	7	9	5	12
4	10	6	4	13
necessidade	8	32	15	50 / 55

No exemplo dado, a necessidade (demanda) total é maior (55) de que a oferta total (50). Neste caso, cria-se uma origem auxiliar para receber a diferença entre oferta e demanda. Os custos de transporte para origens ou destinos auxiliares é infinito.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6	5	8	5
2	13	12	1	20
3	7	9	5	12
4	10	6	4	13
A	∞	∞	∞	5
necessidade	8	32	15	55 / 55

Na solução do modelo, as quantidades transportadas de origens auxiliares ficam faltando nos destinos. As quantidade transportadas para destinos auxiliares, na verdade, ficam estocadas nas origens.

Uma solução viável para o exemplo anterior é:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	6 5	5	8	5
2	13 3	12 17	1	20
3	7	9 12	5	12
4	10	6 3	4 10	13
A	∞	∞	∞ 5	5
necessidade	8	32	15	55 55

A quantidade $x_{A3} = 5$ transportada da origem A para o destino 3, na verdade, fica faltando no destino 3.

O Problema da Degenerescência

Existe menos variáveis básicas de que o número necessário para a solução (menos equações de que as desejadas: 2, 3 ou mais equações a menos que o número de variáveis). Assim não é possível determinar um conjunto único de valores para u e v.

Neste caso, a solução é dita "degenerada".

A solução é criar variáveis básicas auxiliares, quantas forem necessárias para que o número de equações seja apenas um a menos que o número de variáveis. Essas variáveis básicas auxiliares devem ter um valor tão próximo de zero que não alteram as condições de contorno do problema (restrições de origem e destino).

Deve-se tomar o cuidado ao acrescentar variáveis básicas auxiliares em células que possibilitem uma única atribuição dos valores de u_i e v_j. Isto é realizado por inspeção.

Exemplo

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9	8	10
2	13	12	6	20
3	7	9	5	10
4	3	2	8	15
necessidade	8	30	17	

A solução inicial pelo Método do Canto Noroeste é:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12 8	9 2	8	10
2	13	12 20	6	20
3	7	9 8	5 2	10
4	3	2	8 15	15
necessidade	8	30	17	

V. B.	**Coeficiente**	**Substituindo c_{ij}**	**Arbitrando $u_1=0$**	**V. N.B.**	**Coeficiente**	**Valor**
x_{11}	$c_{11}-u_1-v_1=0$	$12-u_1-v_1=0$	$v_1=12$	x_{13}	$c_{13}-u_1-v_3$	8-0-5 = 3
x_{12}	$c_{12}-u_1-v_2=0$	$9-u_1-v_2=0$	$v_2=9$	x_{21}	$c_{21}-u_2-v_1$	13-3-12 = -2
x_{22}	$c_{22}-u_2-v_2=0$	$12-u_2-v_2=0$	$u_2=3$	x_{23}	$c_{23}-u_2-v_3$	6-3-5 = -2
x_{32}	$c_{32}-u_3-v_2=0$	$9-u_3-v_2=0$	$u_3=0$	x_{31}	$c_{31}-u_3-v_1$	7-0-12= -5
x_{33}	$c_{33}-u_3-v_3=0$	$5-u_3-v_3=0$	$v_3=5$	x_{41}	$c_{41}-u_4-v_1$	3-3-12 = -12
x_{43}	$c_{43}-u_4-v_3=0$	$8-u_4-v_3=0$	$u_4=3$	x_{42}	$c_{42}-u_4-v_2$	2-3-9= -10

A solução não é ótima. A variável x_{41} possui o menor coeficiente (-12).

Origem	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
1	12 / $8-\theta$	9 / $2+\theta$	8	10
2	13	12 / 20	6	20
3	7	9 / $8-\theta$	5 / $2+\theta$	10
4	3 / θ	2	8 / $15-\theta$	15
necessidade	8	30	17	

θ entra com valor 8.

Nova solução.

Origem	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
1	12 0	9 10	8	10
2	13	12 20	6	20
3	7	9 0	5 10	10
4	3 8	2	8 7	15
necessidade	8	30	17	

V. B.	**Coeficiente**	**Substituindo c_{ij}**	**Arbitrando u_1=0**
x_{12}	$c_{12}-u_1-v_2=0$	$9-u_1-v_2=0$	$v_2=9$
x_{22}	$c_{22}-u_2-v_2=0$	$12-u_2-v_2=0$	$u_2=3$
x_{33}	$c_{33}-u_3-v_3=0$	$5-u_3-v_3=0$	$u_3=?$
x_{41}	$c_{41}-u_4-v_1=0$	$3-u_4-v_1=0$	$u_4=?$
x_{43}	$c_{43}-u_4-v_3=0$	$8-u_4-v_3=0$	$v_1=?$
			$v_3=?$

o sistema possui 5 equações e 7 variáveis (incógnitas). Não existe solução única.

Como tem-se 5 equações e 7 variáveis (incógnitas), faz-se necessário acrescentar um variável básica auxiliar ε (muito próximo de zero) e assim tem-se 6 equações e 7 variáveis (o que torna possível resolver o sistema, pois uma variável pode-se atribuir um valor arbitrário).

O problema é em qual célula deve-se acrescentar ε ?

O ε deve ser acrescentado em qualquer célula que possibilita solução única para o sistema (isto é feito por inspeção).

Retomando o sistema, tinha-se:

$9-u_1-v_2=0$	**Arbitrando $u_1=0$**
$12-u_2-v_2=0$	$v_2=9$
$5-u_3-v_3=0$	$u_2=3$
$3-u_4-v_1=0$	$u_3=?$
$8-u_4-v_3=0$	$u_4=?$
	$v_1=?$
	$v_3=?$

Se acrescentarmos a seguinte equação ao sistema

$c_{31}-u_3-v_1=0$

Não será possível determinar o valor de u_3 ou v_1, pois estes já não foram possível de serem determinados no sistema acima. Assim, acrescentar ε na célula (3,1) não ajuda a resolução do problema.

Porém, acrescentando ε na célula (3,2), por exemplo, o sistema fica:

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	$\boxed{12}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{8}$	10
2	$\boxed{13}$	20 $\boxed{12}$	$\boxed{6}$	20
3	$\boxed{7}$	ε $\boxed{9}$	10 $\boxed{5}$	10
4	8 $\boxed{3}$	$\boxed{2}$	7 $\boxed{8}$	15
necessidade	8	30	17	

V. B.	**Coeficiente**	**Arbitrando u_1=0**	**V. N.B.**	**Coeficiente**	**Valor**
x_{12}	$9-u_1-v_2=0$	$v_2=9$	x_{11}	$c_{11}-u_1-v_1$	12-0-0 = 12
x_{22}	$12-u_2-v_2=0$	$u_2=3$	x_{13}	$c_{13}-u_1-v_3$	8-0-0 = 8
x_{33}	$5-u_3-v_3=0$	$u_3=0$	x_{21}	$c_{21}-u_2-v_1$	13-3-0 = 10
x_{41}	$3-u_4-v_1=0$	$u_4=3$	x_{23}	$c_{23}-u_2-v_3$	6-3-5= -2
x_{43}	$8-u_4-v_3=0$	$v_1=0$	x_{31}	$c_{31}-u_3-v_1$	7-0-0 = 7
$\mathbf{x_{32}}$	$\mathbf{9-u_3-v_2=0}$	$v_3=5$	x_{42}	$c_{42}-u_4-v_2$	2-3-9= -10

A solução não é ótima. A variável x_{42} possui o menor coeficiente (-10).

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9 10	8	10
2	13	12 20	6	20
3	7	9 $\varepsilon-\theta$	5 $10+\theta$	10
4	3 8	2 θ	8 $7-\theta$	15
necessidade	8	30	17	

θ entra com valor ε.

Nova solução.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9 10	8	10
2	13	12 20	6	20
3	7	9	5 10	10
4	3 8	2 ε	8 7	15
necessidade	8	30	17	

V. B.	**Coeficiente**	**Substituindo c_{ij}**	**Arbitrando u_1=0**	**V. N.B.**	**Coeficiente**	**Valor**
x_{12}	$c_{12}-u_1-v_2=0$	$9-u_1-v_2=0$	$v_2=9$	x_{11}	$c_{11}-u_1-v_1$	12-0-10 = 2
x_{22}	$c_{22}-u_2-v_2=0$	$12-u_2-v_2=0$	$u_2=3$	x_{13}	$c_{13}-u_1-v_3$	8-0-15 = -7
x_{33}	$c_{33}-u_3-v_3=0$	$5-u_3-v_3=0$	$u_3= -10$	x_{21}	$c_{21}-u_2-v_1$	13-3-10 = 0
x_{41}	$c_{41}-u_4-v_1=0$	$3-u_4-v_1=0$	$u_4= -7$	x_{23}	$c_{23}-u_2-v_3$	6-3-15= -12
x_{42}	$c_{42}-u_4-v_2=0$	$2-u_4-v_2=0$	$v_1=10$	x_{31}	$c_{31}-u_3-v_1$	7+10-10 = 7
x_{43}	$c_{43}-u_4-v_3=0$	$8-u_4-v_3=0$	$v_3=15$	x_{32}	$c_{32}-u_3-v_2$	9+10-9= 10

A solução não é ótima. A variável x_{23} possui o menor coeficiente (-12).

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9 10	8	10
2	13	12 20-θ	6 θ	20
3	7	9	5 10	10
4	3 8	2 ε+θ	8 7- θ	15
necessidade	8	30	17	

θ entra com valor 7.

Nova solução.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9 10	8	10
2	13	12 13	6 7	20
3	7	9	5 10	10
4	3 8	2 7	8	15
necessidade	8	30	17	

A variável básica foi eliminada. O problema continua até a solução ótima.

Observação

No caso em que faz-se necessário acrescentar mais de um ε, deve-se escolher arbitrariamente valores diferentes para os ε´s, apesar de todos serem muito próximos de zero.

Exemplo:

$\varepsilon < \varepsilon'$

O Caso de Maximização

Pode haver casos, no Problema de Transporte em que se queira maximizar o objetivo, ao invés de minimizar. Por exemplo, se os coeficientes c_{ij} representarem os lucros obtidos em transportar de i para j (ao invés dos custos de transportar de i para j).

Neste caso, pode-se utilizar o mesmo algoritmo descrito anteriormente, com a ressalva de multiplicar por –1 os coeficientes da função-objetivo ($-c_{ij}$).

O Caso de Impossibilidade de Transporte

Pode ocorrer que o transporte de uma origem i' para um destino j' não possa ser realizado. Neste caso, basta proceder normalmente fazendo com que o custo de transporte de i' para j' seja muito grande. Para isto adota-se um símbolo M que representa este custo. No exemplo abaixo, o transporte de 2 para 2 é impossível.

Origem	Destino			Oferta
	1	2	3	
1	12	9	8	10
2	13	M	6	20
3	7	9	5	10
4	3	2	8	15
necessidade	8	30	17	

Observação Importante

Para Problemas de Transporte, onde toda oferta s_i e toda demanda d_j são valores inteiros, todas as variáveis básicas (alocações) em qualquer solução viável (incluindo a solução ótima) são também valores inteiros.