O problema de Designação

Charles V. Neu

charlesneu@gmail.com

Maio de 2013

O problema de designação

- Também conhecido por Problema de Atribuição ou Alocação.
- “A melhor pessoa para a tarefa” é uma descrição adequada do problema de designação. A situação pode ser ilustrada pela designação de trabalhadores com graus variáveis de habilidade a determinadas tarefas.
- Uma tarefa que combine com a habilidade de um trabalhador custa menos do que uma tarefa para a qual o trabalhador não seja tão habilidoso.

O problema de designação

- É possível afirmar também que consiste em determinar a maneira ótima de se alocar *n* tarefas à *n* máquinas de modo que nenhuma tarefa deixe de ser executada e que todas as máquinas tenham uma tarefa designada a elas.
- O objetivo do problema é determinar a designação de trabalhadores a tarefas, de forma a minimizar o custo.

O problema de designação

O problema geral de designação com *n* trabalhadores e *n* tarefas é representado na tabela abaixo.

		Tarefas				
		1	**2**	**...**	**n**	
Trabalhador	**1**	c_{11}	c_{12}	...	C_{1n}	**1**
	2	c_{21}	c_{22}	...	C_{2n}	**1**
	:	:	:	:	:	:
	n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}	**1**
		1	**1**	**...**	**1**	

O problema de designação

- O problema de designação é um caso especial do problema de transporte no qual os trabalhadores representam as origens e as tarefas representam os destinos;
- A quantidade fornecida (demandada) em cada origem (destino) é exatamente igual a 1;
- O custo de “transportar” o trabalhador *i* para a tarefa *j* é c_{ij}.

O problema de designação

- O problema de designação pode ser resolvido diretamente como um problema de transporte comum;
- O fato de todas as quantidades fornecidas e demandadas serem iguais a 1 levou ao desenvolvimento de um algoritmo de solução simples denominado Método Húngaro.

O método húngaro

- Embora o novo método de solução pareça não ter relação alguma com o problema de transporte, na realidade a raiz do algoritmo é o método simplex, exatamente como a do problema de transporte.

O método húngaro

O Método Húngaro consta de 3 etapas:

1ª -Na matriz de custo original, identificar o mínimo de cada linha e o subtrair de todas as entradas da linha.

2ª -Na matriz resultante da etapa 1, identificar o mínimo de cada coluna e o subtrair de todas as entradas da coluna.

3ª-Identificar a solução ótima como a designação viável associada com os elementos zero da matriz obtida na etapa 2.

O método húngaro

- Exemplo:

  Os três filhos de Joe Klyne – John, Karen e Terri – querem ganhar algum dinheiro para gastar durante uma excursão da escola até o zoológico local. O Sr. Klyne escolheu três tarefas para seus filhos:

1 – cortar a grama

2 – pintar a porta da garagem

3 – lavar os carros da família

O método húngaro

- Para evitar a concorrência prevista entre os irmãos, ele pediu que seus filhos apresentassem propostas (fechadas) do que eles consideravam que fosse um pagamento justo para cada uma das três tarefas. Ficou combinado que os três concordariam com a decisão do pai sobre quem executaria qual tarefa. A Tabela a seguir resume as propostas recebidas. Com base nessas informações, como o Sr. Klyne deve designar as tarefas?

O método húngaro

Resolução:

Problema de designação do Sr. Klyne

	Cortar	Pintar	Lavar
John	$ 15	$ 10	$ 9
Karen	$ 9	$ 15	$ 10
Terri	$ 10	$ 12	$ 8

O método húngaro

Etapa 1 da resolução:

	Cortar	Pintar	Lavar	*mínimo linha*
John	15	10	9	$p_1=9$
Karen	9	15	10	$p_2=9$
Terri	10	12	8	$p_3=8$

Matriz resultante da Etapa 1

	Cortar	Pintar	Lavar
John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0

O método húngaro

Etapa 2 da resolução:

	Cortar	Pintar	Lavar
John	**6**	**1**	**0**
Karen	**0**	**6**	**1**
Terri	2	4	0

mínimo da coluna: $q_1 = 0,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0$

Matriz resultante da Etapa 2

	Cortar	Pintar	Lavar
John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

O método húngaro

Etapa 3 da resolução:

	Cortar	Pintar	Lavar
John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

Tabela de custos original

	Cortar	Pintar	Lavar
John	\$ 15	\$ 10	\$ 9
Karen	\$ 9	\$ 15	\$ 10
Terri	\$ 10	\$ 12	\$ 8

O método húngaro

As células com entradas zero sublinhadas dão a solução ótima:

- John pintará a porta da garagem;
- Karen cortará a grama;
- Terri lavará os carros da família.

O custo total para o Sr. Klyne é: $9 + $10 + $8 = $27

Essa quantia também será sempre igual a:

$(p1 + p2 + p3) + (q1 + q2 + q3) = (9 + 9 + 8) + (0 + 1 + 0) = \$\, 27$

O método húngaro

- As etapas do método húngaro apresentadas funcionam bem no exemplo precedente porque as entradas zero na matiz final produzem uma designação viável (uma tarefa distinta é designada a cada filho).
- Em alguns casos, os zeros criados pelas etapas 1 e 2 podem não resultar em uma solução viável diretamente e serão necessárias mais etapas para achar a designação ótima (viável). O exemplo a seguir mostra essa situação.

O método húngaro

Exemplo 2:

Considere que a situação discutida no exemplo anterior seja estendida para quatro filhos e quatro tarefas, conforme tabela a seguir.

	Tar 1	Tar 2	Tar 3	Tar 4
Filho 1	$ 1	$ 4	$ 6	$ 3
Filho 2	$ 9	$ 7	$ 10	$ 9
Filho 3	$ 4	$ 5	$ 11	$ 7
Filho 4	$ 8	$ 7	$ 8	$ 5

O Método Húngaro

Aplicar as etapas 1 e 2 do método húngaro.

		Tarefa		
	1	2	3	4
1	0	3	2	2
Filho 2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

O método húngaro

- As localizações das entradas zero não permitem designar tarefas únicas a todos os filhos. Por exemplo, se designarmos a Tarefa 1 ao Filho 1, então a coluna 1 será eliminada e o Filho 3 não terá uma entrada zero nas três colunas restantes.

- Esse obstáculo pode ser superado com a adição das seguintes etapas:

O método húngaro

Etapa 2a: Se não for possível garantir nenhuma designação viável (com todas as entradas zero) pelas etapas 1 e 2,

i) Traçar o número mínimo de linhas horizontais e verticais na última matriz reduzida que abrangerá todas as entradas zero;

ii) Selecionar a menor entrada não abrangida, subtrair essa entrada de todas as entradas não abrangidas e então a adicionar a todas as entradas na interseção de duas linhas;

O Método Húngaro

Tarefa

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
Filho 2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

	1	2	3	4
1	0	2	1	1
Filho 2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

O Método Húngaro

- Se não for possível encontrar nenhuma designação viável entre as entradas zero resultantes, repita a etapa 2a. Caso contrário, passar para a etapa 3.

O Método Húngaro

		1	2	3	4
	1	$\underline{0}$	2	1	1
Filho	2	3	0	$\underline{0}$	2
	3	0	$\underline{0}$	3	2
	4	4	2	0	$\underline{0}$

O Método Húngaro

O custo ótimo associado é

$1+ $10 + $5 + $5 = $ 21

O mesmo custo também é determinado pela soma dos p_i e q_j e pela entrada que foi subtraída depois que as células selecionadas foram determinadas, isto é,

($1 + $7 + $4 + $5) + ($0 + $0 + $3 + $0) + $1 = $ 21

Exercício

- Resolver o problema de designação da Tabela abaixo pelo método húngaro:

(a)

	Tar 1	Tar 2	Tar 3	Tar 4	Tar 5
Trab 1	$3	$8	$2	$10	$3
Trab 2	$8	$7	$2	$9	$7
Trab 3	$6	$4	$2	$7	$5
Trab 4	$8	$4	$2	$3	$5
Trab 5	$9	$10	$6	$9	$10

(b)

	Tar 1	Tar 2	Tar 3	Tar 4	Tar 5
Trab 1	$3	$9	$2	$3	$7
Trab 2	$6	$1	$5	$6	$6
Trab 3	$9	$4	$7	$10	$3
Trab 4	$2	$5	$4	$2	$1
Trab 5	$9	$6	$2	$4	$5

Legenda: Trab i = Trabalhador i, Tar i = Tarefa i, i = (1,2,3,4,5)

Referências

- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional: uma visão geral**. 8. ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**: modelagem em Excel. São Paulo: Campus, 2006.