涡面元法在二维非定常运动机翼受力计算中的应用

宋雯婧
（中国船舶重工集团公司第七一〇研究所，湖北 宜昌 443003）

摘　要　基于势流理论，利用涡面元法计算二维机翼非定常状态下的受力，给出了计算所用到的数学模型、数值方法，分析了影响到结果精度的多种因素。将涡面元法运用于轮机流体动力性能的计算，并与试验值相比较，分析产生误差的原因，为以后的进一步计算做好准备。

关键词　涡面元法；二维机翼；轮机

Applications of Vortex Panel Method on Two-dimensional Airfoil's Stress Computation in Nonsteady Motion State

Song Wenjing
(710 Research & Development Institute, CSIC, Yichang 443003, China)

Abstract Based on the potential flow theory, the stress of two-dimensional airfoil in nonsteady motion state is computed using vortex panel method. The article also gives the mathematical model and numerical methods and analyzes the factors which influence the accuracy of results. It applies the vortex panel method on calculation of hydrodynamic parameter of turbine and compares them with experimentation results, which makes preparation for the further calculation.

Key words vortex panel method; two-dimensional airfoil; turbine

0　引言

机翼在非定常运动状态时，叶片尾缘将拖出尾涡，计算其流体动力时必须要考虑尾涡系的影响。在非定常状态下，由于压力计算中包括了速度势的时间导数项，在引入 Kutta 条件以及计算压力分布时应该考虑速度势时间导数的影响。此外，在考虑复杂边界的影响时，还应对边界条件加以适当的处理。本文就以上一系列问题进行了探讨和计算。

1　基本方程和边界条件

设流动为不可压缩的势流，机翼运动产生的扰动速度势为 $\phi(x,z)$，流体的扰动速度为 $V=\nabla\phi$，速度势控制方程为 Laplace 方程：

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ 。} \tag{1}$$

边界条件包括：

1) 无穷远处产生的扰动为零，即

$$\nabla\phi=0, \quad r\to\infty \text{ 。} \tag{2}$$

2) 物体表面不可穿透条件，即

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{S_A} = \left(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}_A+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\right)\cdot\boldsymbol{n} \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为物体表面的单位法向矢量；方向指向物体内部；$\boldsymbol{U}$ 为机翼参考点的平动速度；$\boldsymbol{\Omega}$ 为机翼绕参考点的转动角速度；$\boldsymbol{r}$ 为机翼表面的点在局部坐标系

收稿日期：2007-11-08

下的矢径；V_A 为均匀来流速度。

3) 在机翼的尾缘处满足压力相等的 Kutta 条件，即

$$P_u = P_d \quad 。 \tag{4}$$

式中，P_u 和 P_d 分别表示机翼尾缘上下表面对应点的压力。

2 数值方法

2.1 基本方程

涡面元法的原理就是采用基于速度场的方法，在机翼表面 S_B 布置源汇，在中弧线 S_M 上布置线性涡；用离散的点涡近似模拟尾涡面 S_w。

机翼表面划分为 N 个面元，中弧面划分为 M 个面元。划分中弧面面元时，为了避免出现奇异性，取翼型前端导圆的圆心为面元起点，该位置处，涡的强度为 $\gamma_0 = 2\gamma_f$，中弧面的终点处 $\gamma(C_f) = 0$，这样，中弧面上涡的强度分布函数可表示为

$$\gamma(l) = 2\gamma_f \left(C_f - l\right)/C_f \quad 。 \tag{5}$$

式中，$C_f = \sum_{j=1}^{M} \int_{S_w} \mathrm{d}l$ 为中弧线的弧长，中弧线上分布涡的总强度可表示为

$$\Gamma_f = \int_{S_w} \gamma(l)\,\mathrm{d}l = C_f \gamma_f \quad 。 \tag{6}$$

尾涡面用随着时间步离散的点涡系近似代替，尾涡的总强度为 Γ_w。设 Δt 为时间步长。第 k 个时间步对应的离散变量表示为 $\sigma_i^{(k)}$，$\gamma_f^{(k)}, \Gamma_f^{(k)}, \Gamma_w^{(k)}$。这样，速度势在机翼表面各控制点上满足方程（3），可得以下方程

$$\sum_{j=1}^{N} A_{i,j}\sigma_j + A_{i,N+1}\cdot\gamma_f + \sum_{j=1}^{k} C_{i,j}\cdot\gamma_w^{(j)} = n_i\cdot\left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i\right),$$

$$(i=1，2，\ldots N) \quad 。 \tag{7}$$

方程组(7)含有 N 个方程，N+3 个未知数，即当前时间步下机翼表面离散单元的分布源强度 σ_i，中弧线上分布涡强度 γ_f 和当前时间步下的尾涡强度 $\gamma_w^{(k)}$。此外，还有一个隐含未知数，即当前时间步下新生成尾涡的位置 $\gamma_{w,k}^{(k)}$。通过对 Kutta 条件和尾涡的处理可以使方程组封闭。

2.2 尾涡和 Kutta 条件的处理

本文采用的 Kutta 条件为尾缘处上下表面的压力相等，由伯努利方程可得

$$\begin{aligned}\frac{p_u - p_d}{\rho} = {} & \frac{\partial\phi_d}{\partial t} - \frac{\partial\phi_u}{\partial t} + \left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_u\right)\cdot\nabla\phi_u - \\ & \left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_d\right)\cdot\nabla\phi_d + \\ & \frac{1}{2}\left[\left(\nabla\phi_d\right)^2 - \left(\nabla\phi_u\right)^2\right] = 0 \quad 。\end{aligned} \tag{8}$$

式中，代表机翼尾缘上表面变量的下标为 u，机翼尾缘下表面变量的下表为 d，$\boldsymbol{r}$ 为局部坐标系下的矢径。

式(8)含有速度项的平方项，当机翼运动方式复杂，流场变化剧烈时，迭代的过程非常缓慢，甚至出现发散的情况，需要对其加以改进。

如果机翼表面的分块单元数 N 足够大，则机翼尾缘上下表面很接近，这时有

$$\boldsymbol{r}_u \approx \boldsymbol{r}_d \approx \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r}_d\right) = \bar{\boldsymbol{r}}_e \quad 。 \tag{9}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{r}}_e$ 为尾缘处的平均矢径，将其带入式(8)，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\phi_u - \phi_d\right)}{\partial t} = \frac{\partial\Gamma_f}{\partial t} \approx {} & \left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\bar{\boldsymbol{r}}_e\right)\cdot\left(\nabla\phi_u - \nabla\phi_d\right) + \\ & \frac{1}{2}\left(\nabla\phi_d - \nabla\phi_u\right)\left(\nabla\phi_d + \nabla\phi_u\right) = \\ & \left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\bar{\boldsymbol{r}}_e - \bar{\boldsymbol{V}}\right)\cdot\left(\nabla\phi_u - \nabla\phi_d\right) \quad 。\end{aligned} \tag{10}$$

式中，$\bar{V} = \frac{1}{2}\left(\nabla\phi_u + \nabla\phi_d\right)$ 为尾缘上下表面的平均速度矢量，具体求解过程中给出 $\bar{V}$ 的初值，就可以使方程线性化，且容易收敛。

将 $\frac{\partial\Gamma_f}{\partial t}$ 项进行处理，代入式(6)可得

$$C_f\gamma_f^{(k)} + \gamma_w^{(k)} = C_f\gamma_f^{(k-1)} \quad 。 \tag{11}$$

在每个控制点上满足式(10)，尾缘的上下表面分别对应第 N 个和第一个面元，则将其离散可得

$$\sum_{j=1}^{N} A_{N+1,j}\sigma_j + A_{N+1,N+1}\cdot\gamma_f + \sum_{j=1}^{k} C_{N+1,j}\cdot\gamma_w^{(j)} = -\frac{\gamma_w^{(k)}}{\Delta t} \quad 。 \tag{12}$$

新生尾涡 $\gamma_w^{(k)}$ 的位置 $\gamma_{w,k}^{(k)}$ 可由下式确定

$$\gamma_{w,k}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{r}}_e - \beta\left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\bar{\boldsymbol{r}}_e - \bar{\boldsymbol{V}}\right)\Delta t \quad 。 \tag{13}$$

其中 β 为常数系数，通常选取 $\beta = 0.4 \sim 0.6$。这样(7)，(11)，(12)及(13)所组成的方程组就有 N+3 个方程，N+3 个未知数，方程组封闭，可通过迭代的方法直接求解。之后可根据公式求得任意时刻机翼表

面上点的速度势，然后根据伯努利方程可求得机翼表面的压力分布。

定义机翼表面压力分布系数

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho V_A^2} \quad 。 \tag{14}$$

则机翼受力为

$$F = \left(F_x, F_y\right) = 0.5\rho V_A^2 \cdot \int_{S_b} C_p \, n \mathrm{d}S \quad 。 \tag{15}$$

2.3 涡面元法的应用

为了验证方法的准确性，以 1980 年 Strickland 等人作的一系列轮机试验的试验值做为比较。轮机的二维剖面及其受力分别如图 1、图 2 所示。图 1 的外侧圆为叶片运动轨迹。

全局坐标系以水轮机的转轴中心 o 为圆点，x 轴与来流速度 V_A 方向一致，局部坐标系以叶片转轴 o_2

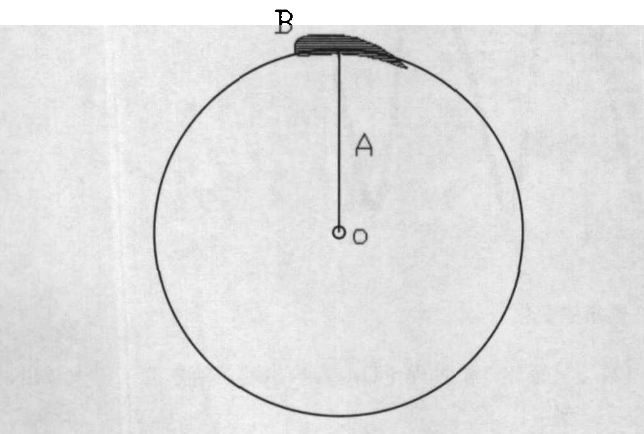

图1 轮机叶片二维剖面图

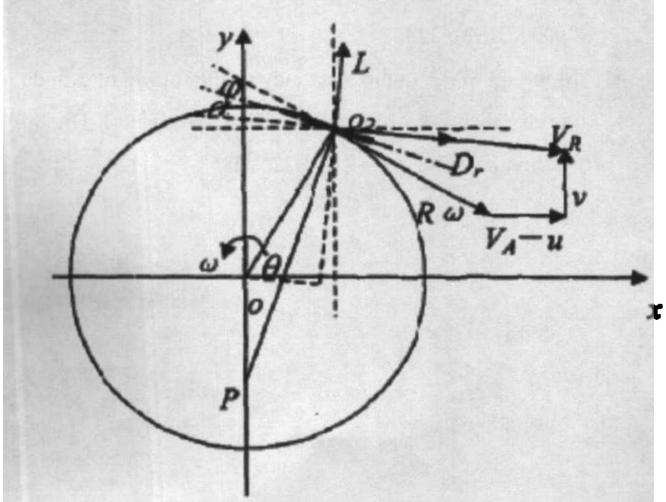

图 2 轮机叶片受力图

为圆点，弦长方向为 x 轴，方向从前缘指向尾缘。若来流稳定，当水轮机工作足够长时间后，转子将以恒定的角速度旋转。设水流以等速 V_A 沿全局坐标系下的 x 轴的正向流向叶片，水轮机角速度为 ω。叶片在转动过程中受到水流作用的升力 L，阻力 D_r，但是一般来说，在水轮机的研究中，以切向力 F_t 和径向力 F_n 为衡量标准，这些力之间的关系如下式

$$F' = \left(F_t, F_n\right) = \left(D_r, L\right)\begin{pmatrix} cos(\alpha+\varphi) & sin(\alpha+\varphi) \\ -sin(\alpha+\varphi) & cos(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} 。 \tag{16}$$

在这个试验中，轮机为固定偏角，所以 $\varphi = 0$，α 为叶片的安装角，即叶片轴线与轨迹圆切线的夹角。该试验主要参数如表 1 所示。

表 1 Strickland 实验轮机的主要参数

名称	参数
水轮机直径 D (m)	1.22
叶片弦长 C(m)	0.1524
叶片展长 b(m)	1.1
叶片翼型	NACA0015
叶片数 Z	1
对应的密实度	0.040
弦长半径比 C/R	0.250
叶片形状	矩形直叶片
旋转角速度 $R\omega$(m/s)	0.457
拖车速度 Va(m/s)	0.183，0.091 和 0.061
对应的速比 λ	2.5，5.0 和 7.5
叶片雷诺数 $Re=R\omega/\nu$	67000

以 X 轴正向为0°角所在处，轮机逆时针旋转，计算时以275°角为起始计算点，速比2.5时的结果比对如图3、图4所示。

由图3、4可以看出，计算结果与试验值基本吻合，但切向力在某些位置角处明显高于试验值。这是因为在某些角度处，由于叶片与来流的夹角过大，超过了叶片的失速角，计算结果有些失真，而且实际的流体是有粘性的，在某些角度处它对于切向力的影响不可忽略，而对于法向力则没什么影响，但是本文的计算基于势流理论，因此没有考虑流体粘性的影响，同时，还要考虑到上一次的圆周运动之后形成的尾流对于切向力的影响。

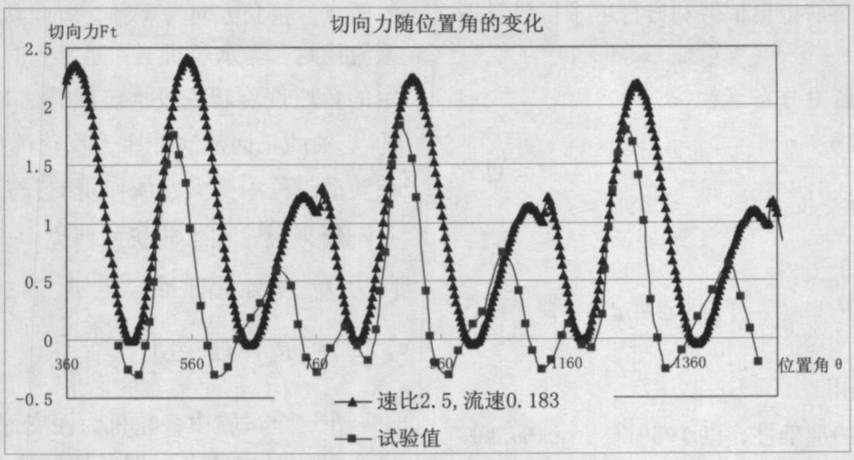

图 3　切向力随位置角的变化

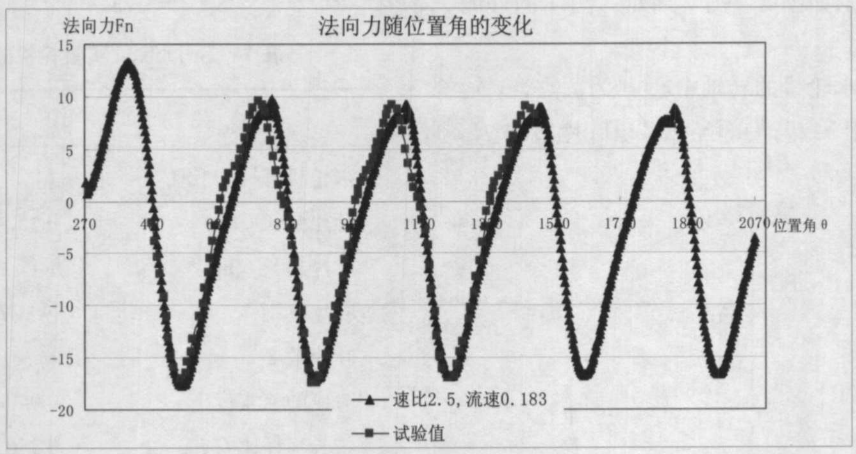

图 4　法向力随位置角的变化

3　结束语

本文的方法在计算切向力时结果有些偏高，但从法向力的计算结果来看还是适用的，可以用于计算任意速比下的法向力。

参考文献

[1]　戴遗山．船舶在波浪中运动时的频域与时域势流理论[M]．北京：国防工业出版社，2003

[2]　吴德铭．机翼理论[M]．哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2003

[3]　Ponta F，Dutt G S. An improved vertical-axis water-current axis water-current[J]．Renewable Energy，2000，20(2): 223~241

[4]　Moore D W. A numerical study of the roll-up of a finite vortex sheet[J]．Journal of Fluid Mechanics Digital Archive，1974，63（2）：225~235