**《关于NACA23021翼型的初步研究》**

目录

[Ⅰ---Course Related 2](#_Toc13731)

[(1) 作者 2](#_Toc27354)

[(2) 组内得分 2](#_Toc16462)

[Ⅱ---Introduction 2](#_Toc13909)

[Ⅲ---Theory 2](#_Toc12295)

[1. NACA23021翼型介绍 3](#_Toc13006)

[2. CP(压力系数）的计算 4](#_Toc4439)

[3. 面源法（Source panel method/SPM） 5](#_Toc24014)

[3.1 势能Φ 5](#_Toc10788)

[3.2 法向速度Vn与切向速度Vt 6](#_Toc12832)

[4. 涡面法(Vortex panel method/VPM) 7](#_Toc3230)

[4.1 法向速度Vn 7](#_Toc14720)

[4.2 切向速度Vt 8](#_Toc692)

[5. 面源和涡面结合法（Source panel and Vortex panel method/SPVP) 8](#_Toc26809)

[5.1 法向速度Vn 8](#_Toc7737)

[5.2 切向速度Vt 8](#_Toc444)

[6. 网格无关性 9](#_Toc23323)

[6.1. 对划分的网格进行细化 9](#_Toc21370)

[6.2.获得网格无关的解是国际学术界接受数值计算论文的基本要求 9](#_Toc27734)

[6.3.增加面元的数量，逐步等比例增加数量，最后验证网格无关性 10](#_Toc11656)

[7. 由压强系数（Cp)积分求升力系数（CL）、力矩系数（CM) 10](#_Toc20879)

[7.1 翼型总受力分析 10](#_Toc19920)

[7.2翼型的细致受力分析 11](#_Toc636)

[7.3 CL的求解 12](#_Toc221)

[7.4 CM的求解 12](#_Toc9852)

[8. 茹科夫斯基定理 12](#_Toc12681)

[9. 薄翼理论 13](#_Toc16916)

[10. xfoil的使用 13](#_Toc19219)

[11. 对于质点的速度推导 13](#_Toc20775)

[11.1 X方向速度Vx 13](#_Toc10470)

[11.2 Y方向速度Vy 13](#_Toc15399)

[Ⅳ---Experiment And Wrong Result 13](#_Toc27033)

[1. 2023.11.19之前---正八边形的面源法求解、初步作出翼型剖面 14](#_Toc18321)

[2. 2023.11.21---程序更改，将.dat 文件修改为函数输入，出现异常数据 15](#_Toc26353)

[3. 2023.11.22----程序更改，将函数导入换成Xfoil输入 16](#_Toc22633)

[4. 2023.11.28----程序更改，加入库塔条件，使用矩阵形式 16](#_Toc25321)

[5. 2023.12.12----修改代码结构，封装函数 16](#_Toc32158)

[6. 2023.12.20---完善代码，得到最终结果 17](#_Toc14864)

[Ⅴ---Final Result 17](#_Toc28023)

[1. VPM（涡面源法推导） 17](#_Toc11707)

[1.1 势函数Φ(x) 17](#_Toc24438)

[1.2 法向速度Vn 17](#_Toc11483)

[1.3 切向速度Vt 17](#_Toc11869)

[1.4 积分项的求解KL的求解 17](#_Toc30841)

[1.5求解γ 20](#_Toc19244)

[1.6 VPM的Cp计算 21](#_Toc10539)

[2. 翼型剖面 21](#_Toc4443)

[3. Cp计算 22](#_Toc1268)

[3.1 方法一：面源法SPM 22](#_Toc19870)

[3.2 方法二：涡面法VPM 28](#_Toc20851)

[3.3 方法三：面源涡面结合法SPVP 29](#_Toc5097)

[3.4 三种方法比对 32](#_Toc27733)

[4. 网格无关性 32](#_Toc9884)

[4.1 VPM的网格无关性 32](#_Toc1108)

[4.2 SPVP的网格无关性 33](#_Toc32760)

[5. CL\_Calculation 33](#_Toc24406)

[6. 升力系数和力矩系数（LE）与攻角的关系，与薄翼理论做比较 35](#_Toc22604)

[7. 做出时间线，验证沿翼型上下表面的流体质点同时到达后缘的说法 36](#_Toc15979)

[Ⅵ---Conclusion 36](#_Toc5755)

[Ⅶ---Future work 37](#_Toc14002)

# Ⅰ---Course Related

## 作者

**敖洋智、金家桐、刘馨玥、段嵩涛、李一飞**

## 工作

敖洋智：负责理论推导、代码书写、报告书写

金家桐：

刘馨玥：

段嵩涛：

李一飞：

# Ⅱ---Introduction

# Ⅲ---Theory

该部分仅仅介绍相关的理论原理，不涉及代码实现以及具体应用，代码实现的推导化简以及原理的具体使用方法将会在Ⅴ---Final Result中进行推导

## NACA23021翼型介绍

NACA翼型是[美国国家航空咨询委员会](https://baike.baidu.com/item/%E7%BE%8E%E5%9B%BD%E5%9B%BD%E5%AE%B6%E8%88%AA%E7%A9%BA%E5%92%A8%E8%AF%A2%E5%A7%94%E5%91%98%E4%BC%9A/10281374?fromModule=lemma_inlink" \t "https://baike.baidu.com/item/NACA%E7%BF%BC%E5%9E%8B/_blank)（NACA）[开发](https://baike.baidu.com/item/%E5%BC%80%E5%8F%91/9400971?fromModule=lemma_inlink" \t "https://baike.baidu.com/item/NACA%E7%BF%BC%E5%9E%8B/_blank)的一系列[翼型](https://baike.baidu.com/item/%E7%BF%BC%E5%9E%8B/8649251?fromModule=lemma_inlink" \t "https://baike.baidu.com/item/NACA%E7%BF%BC%E5%9E%8B/_blank)。每个翼型的代号由“NACA”这四个字母与一串数字组成，将这串数字所描述的几何参数代入特定方程中即可得到翼型的精确形状。

NACA五位数字翼型

NACA继四位数字翼型后又提出的一个低速翼型系列。

该翼型系列的厚度分布与四位数字系列相同，但中弧线参数有更大的选择，可使最大弯度位置靠前而提高最大升力系数，降低[最小阻力系数](https://baike.baidu.com/item/%E6%9C%80%E5%B0%8F%E9%98%BB%E5%8A%9B%E7%B3%BB%E6%95%B0/22043114?fromModule=lemma_inlink" \t "https://baike.baidu.com/item/NACA%E7%BF%BC%E5%9E%8B/_blank)，但失速性能欠佳。

五位数字的含义：

NACA XYWZZ

X ——设计升力系数为X\*3/20

Y ——最大弯度位置为Y/20

W——中弧线为简单型取0，否则取1(有拐点)

ZZ——翼型厚度ZZ%

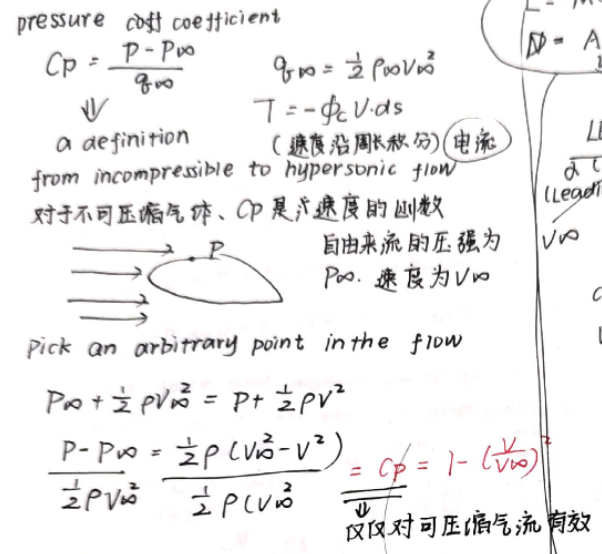
故NACA 23021表示：

设计升力系数为2\*3/20(即0.3)

最大弯度位置为3/20（即0.15）

中弧线为简单型，相对厚度为21%。

## CP(压力系数）的计算



压力系数Cp的定义为：

压力系数Cp为无量纲量

由伯努利方程

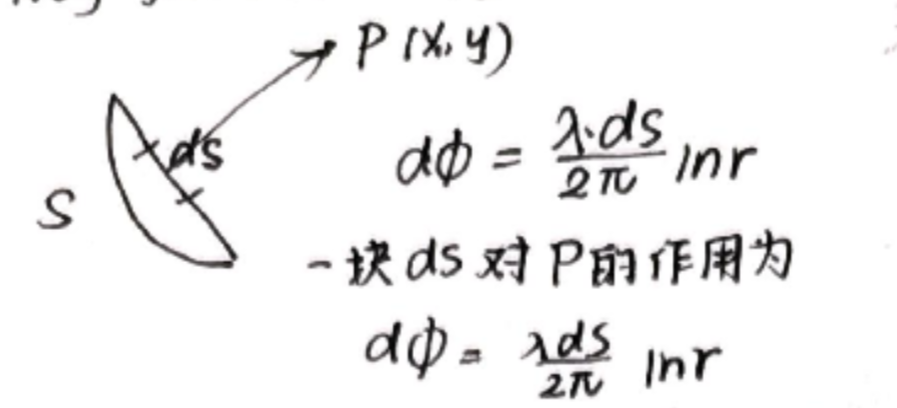
由于所研究的对象为不可压缩气流故==constant

又因为

故

## 面源法（Source panel method/SPM）

### 势能Φ



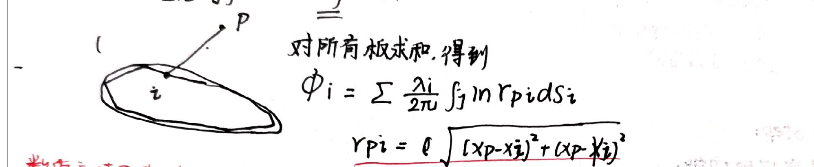
假设板子上的涡量为常数---

故ds对于P点的势能为

P点的作用为

其中

现对所有微元板子进行求和，得到翼型对于任意点P的势能之和



其中

现使P点落在每一块微元板的控制点（即板子的中点处），势能表示为

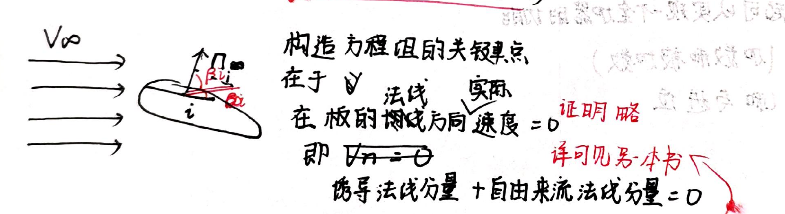
其中

### 法向速度Vn与切向速度Vt

#### 3.3.1 法向速度Vn

在翼型表面任意点（显然，包括控制点）的实际法向速度由翼型诱导出的速度Vn和来流速度在法向分量组成

由法向速度的定义可知，由翼型诱导出的法向速度Vn表示为：



来流在翼型表面的法向分量为

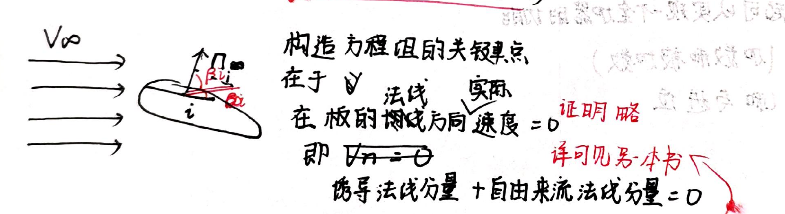
由于翼型为刚体，即在翼型的法向方向没有速度，即

故

#### 3.3.2 切向速度Vt

在翼型表面任意点的实际切向速度由翼型诱导出的速度Vt和来流速度在切向分量组成

由切向速度的定义可知，由翼型诱导出的切向速度Vt表示为：



来流在翼型表面的法向分量为

故

切向速度与Cp的求解直接相关

## 涡面法(Vortex panel method/VPM)

### 4.1 法向速度Vn

涡面法和面源法的不同仅仅在于速度势函数的不同

故

这里与面源法（SPM）的不同在于当i=j时，翼型在法向的诱导速度为零

### 4.2 切向速度Vt

故

## 面源和涡面结合法（Source panel and Vortex panel method/SPVP)

该方法为两者的结合法，相较于前两种方法，其鲁棒性更强。此部分为相关的理论介绍，故只给出Vn和Vt的表达式，更为细节的代码实现推导，将会在Final\_Result给出。

### 5.1 法向速度Vn

特别的当j=i时，

，

法向速度由三部分组成，第一部分为自由来流在表面法向方向的分量，第二部分是各个板子对于i板的面源诱导速度，第三部分是各个板子对于i板的涡面诱导速度。此处各个板子的λ各个板子不一，γ各个板子一致。即，可以理解为，γ为λ的补充项，可以增强算法的鲁棒性。

### 5.2 切向速度Vt

当j=i时， ，

法向速度由三部分组成，第一部分为自由来流在表面切向方向的分量，第二部分是各个板子对于i板的面源诱导速度，第三部分是各个板子对于i板的涡面诱导速度。此处各个板子的λ各个板子不一，γ各个板子一致。即，可以理解为，γ为λ的补充项，可以增强算法的鲁棒性。

## 网格无关性

从有限元分析的原理上看，网格划分的越密，求解结果的精度越高。但在实际工程的设计和应用中，网格数量的技据增加会导致计算的实践成本大幅增加，而且当网格数量达到一定数量后，计算的精度的提高并不明显。因此在工程应用中，应该选择满足计算精度的网格，要对模型不同的部位重要程度进行区分，关键部分和关键节点需要提高计算精度，可以选择细化网格，而远离约束和载荷的部位或受约束和载荷影响较小的部位可适当选择较为粗糙的网格进行离散，将有限的资源和时间用到结果的关键部位和节点。

### 6.1. 对划分的网格进行细化

这是一种提高结构模型的有效途径，但随之而来的是对计算效率和精度的平衡，大多数计算集的软硬件性能都有一定的限制，需要选择合适的划分方法和网格数量，用较低的计算成本获得尽可能理想的结果。

### 6.2.获得网格无关的解是国际学术界接受数值计算论文的基本要求

在求解过程中，通常保持约束和载荷不变，逐步细化网格，对模型计算，比较不同数量网格条件下的计算结果，判断结果与网格的无关性。实际计算中，在网格细密到对结果的影响可以忽略不记时，可认为获得了网格无关性。

网格无关性的验证步骤

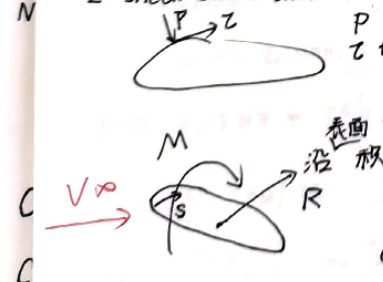
1. 根据模型初步确定一个网格数量，例如总数十万网格
2. 在保持其他的条件不变的情况下，逐步增大网格数量（注意要成比例增加）
3. 观察数值解的变化趋势，如果相邻两次的解的误差在5%和10%之间，一般认为网格对结果的影响在可接受的范围内，验证完成。
4. 初步的网格数量也很重要，如果太少的话，可能会出现前几次数值解的误差也不大，但并不能验证网格无关性。所以初步的网格数量不能太低，具体的数量要结合自己的模型的复杂程度而定

### 6.3.增加面元的数量，逐步等比例增加数量，最后验证网格无关性

在NACA23021的翼型求解中，网格划分表现为控制点nodes的多少，控制点越多，意味着面元的数量越多，即网格数量越多。

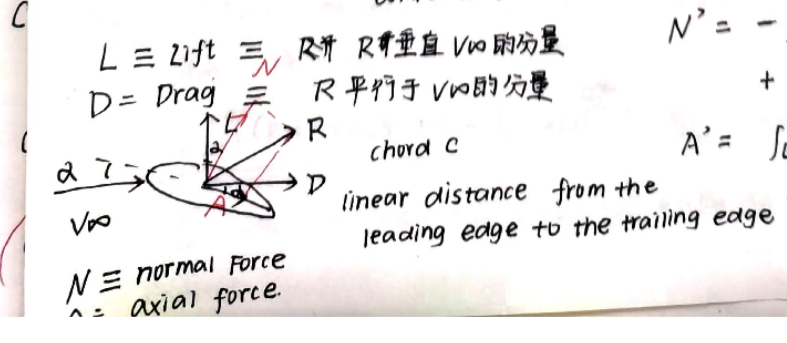
## 由压强系数（Cp)积分求升力系数（CL）、力矩系数（CM)

### 翼型总受力分析



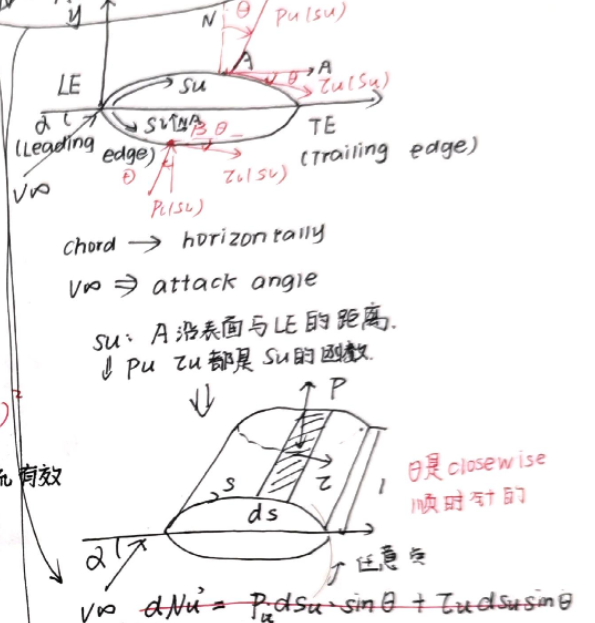
在NACA23021翼型表面受到了切向的切应力τ和法向的压力p，将各个单位表面的τ和p积分后得到总力矩M和总受力R

N为垂直于弦线的合力，A为平行于弦线的合力，L为竖直向上的升力（方向垂直于自由来流，竖直向上），D为阻碍翼型前进的阻力（方向平行于自由来流，但方向与自由来流相反）



由理论力学知识可知

### 7.2翼型的细致受力分析



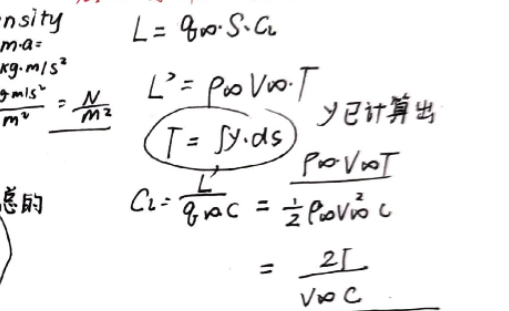
相关坐标系建立如图，以前缘（Leading edge）作为原点，弦线C为X轴，垂直于弦线的直线为Y轴，来流速度与弦线成α角，法向量的夹角θ定义为顺时针，su，sl分别为上表面和下表面沿表面距离原点的距离，pu，pl分别为上下表面ds所受的压力，τu，τl分别为上下表面ds所受的切应力，设翼型的长度为1

取一小段ds进行受力分析，并从LE积分到TE得到N,A

### 7.3 CL的求解

### 7.4 CM的求解

## 茹科夫斯基定理



茹科夫斯基定理是使用环量求解总升力，由升力可以由定义求出升力系数

茹科夫斯基定理如下：

其中L为升力，Γ为总环量，其求解方式为

γ为每个微元板的涡量

故求得

## 薄翼理论

当翼型的厚度几乎为零时，翼型可以由中弧线上的一系列涡面来代替，故可以研究中弧线上的涡面来研究翼型的相关升力，力矩等。薄翼理论推导如下

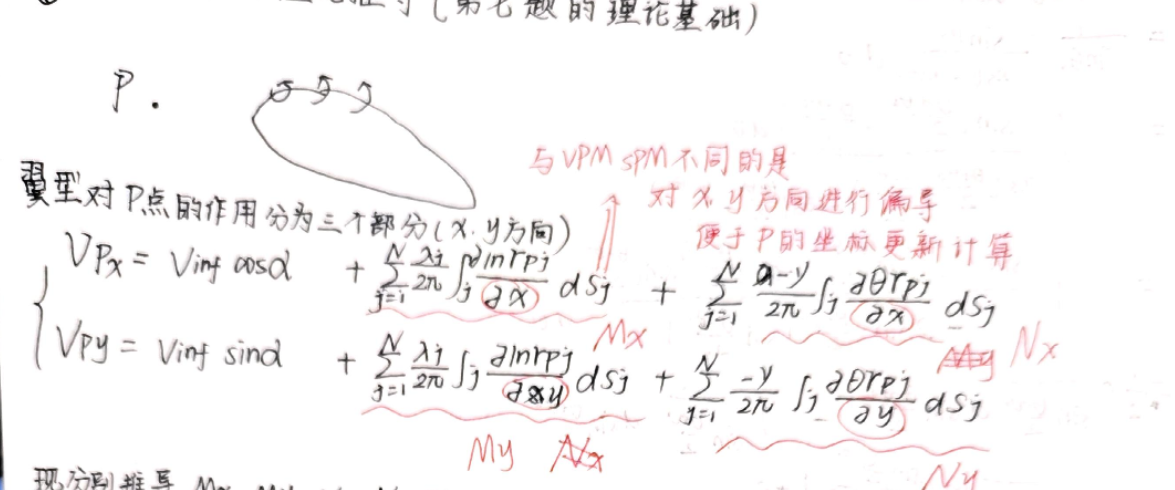
## xfoil的使用

在本次实验中，本小组主要使用Xfoil导入相关翼型的坐标点以及Cp的标准曲线用于对比。

将相关的可执行文件放入工程文件中，即可以在matlab中进行相关的调用，实现可更改性。

## 对于质点的速度推导

该部分和涡面法和面源法推导较为类似。



### X方向速度Vx

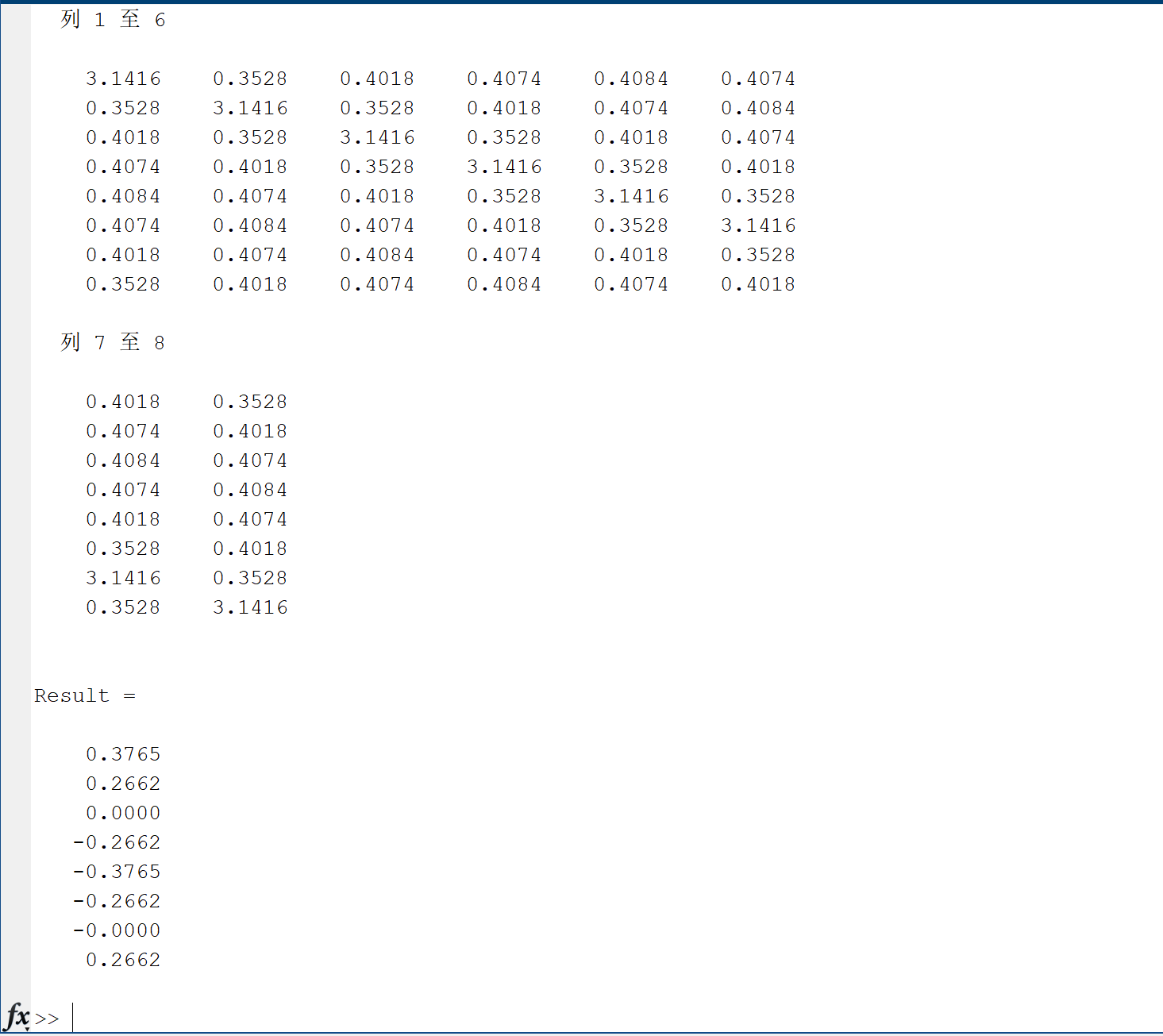
### Y方向速度Vy

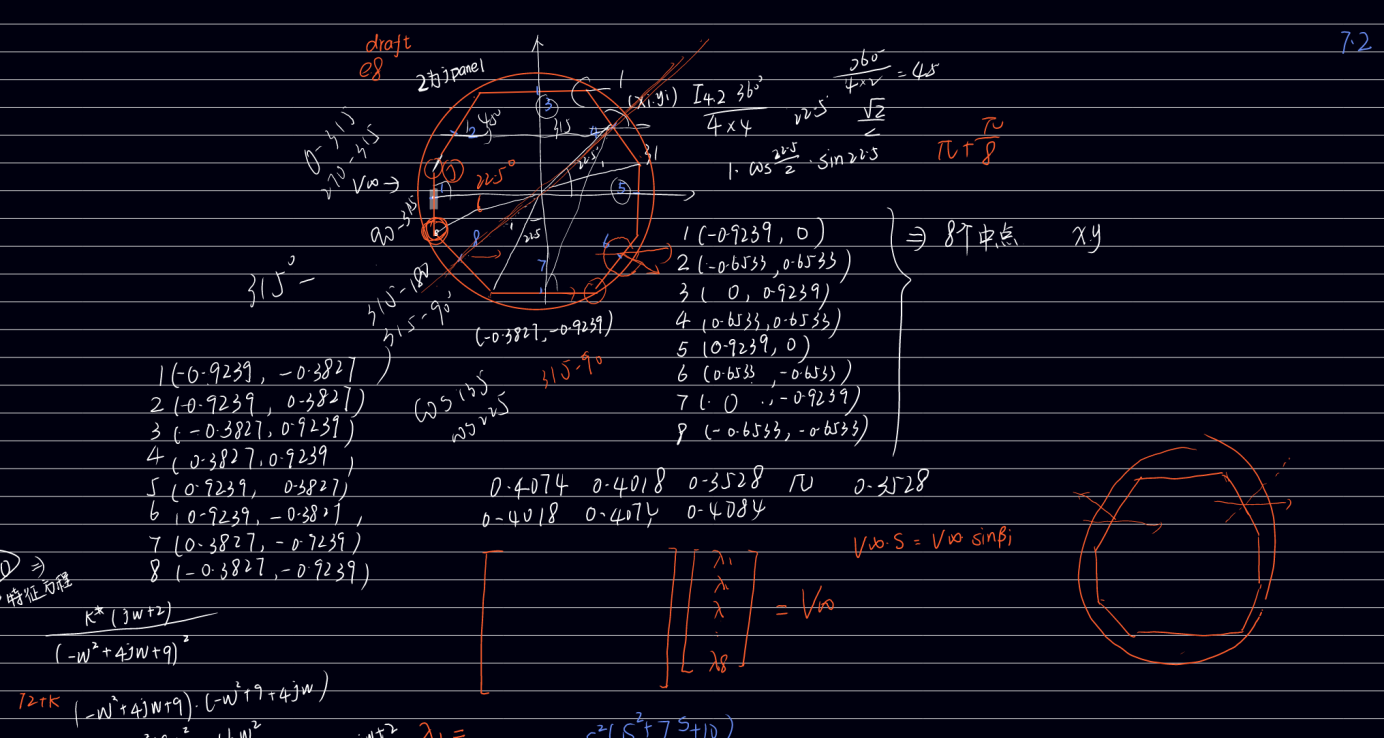
# Ⅳ---Experiment And Wrong Result

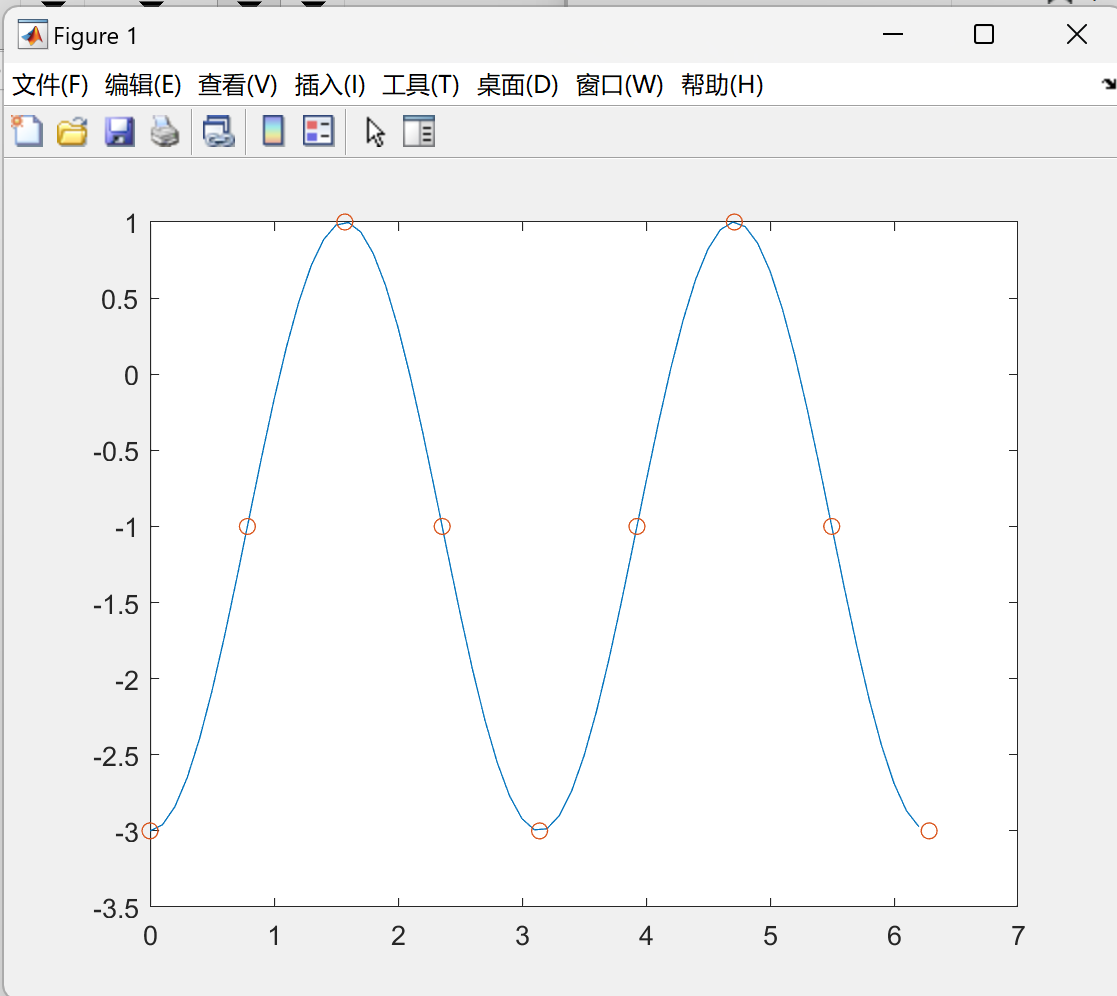
该部分主要介绍相关的过程性尝试，是对工作开展的时间点计算，不包括所有工作细节，最终结果将在Final\_Result中详细给出。

## 2023.11.19之前---正八边形的面源法求解、初步作出翼型剖面

该阶段的工作主要为将课本上的相关内容进行理解和推导，做出关于面源法的正八边形的求解推导，对数值方法求解翼型的升力特性有了初步的了解，以下是相关记录。

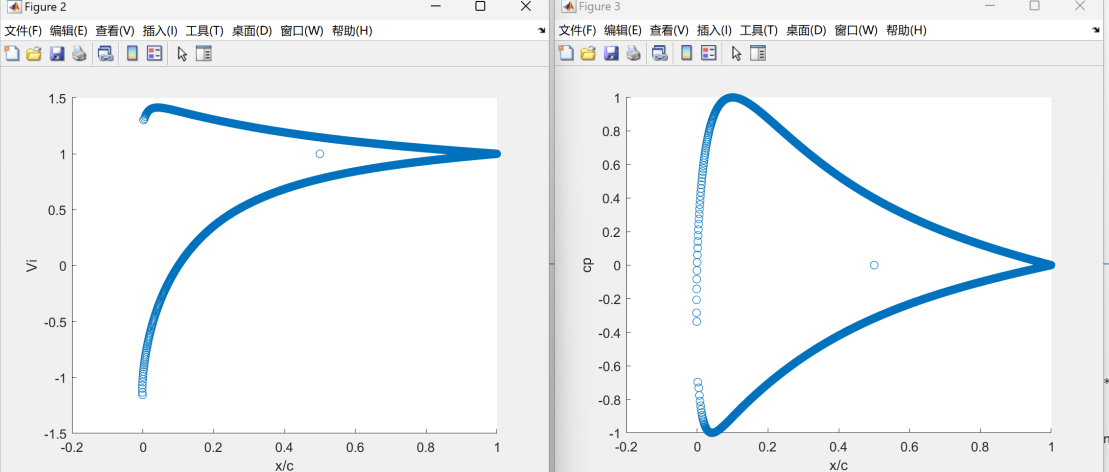






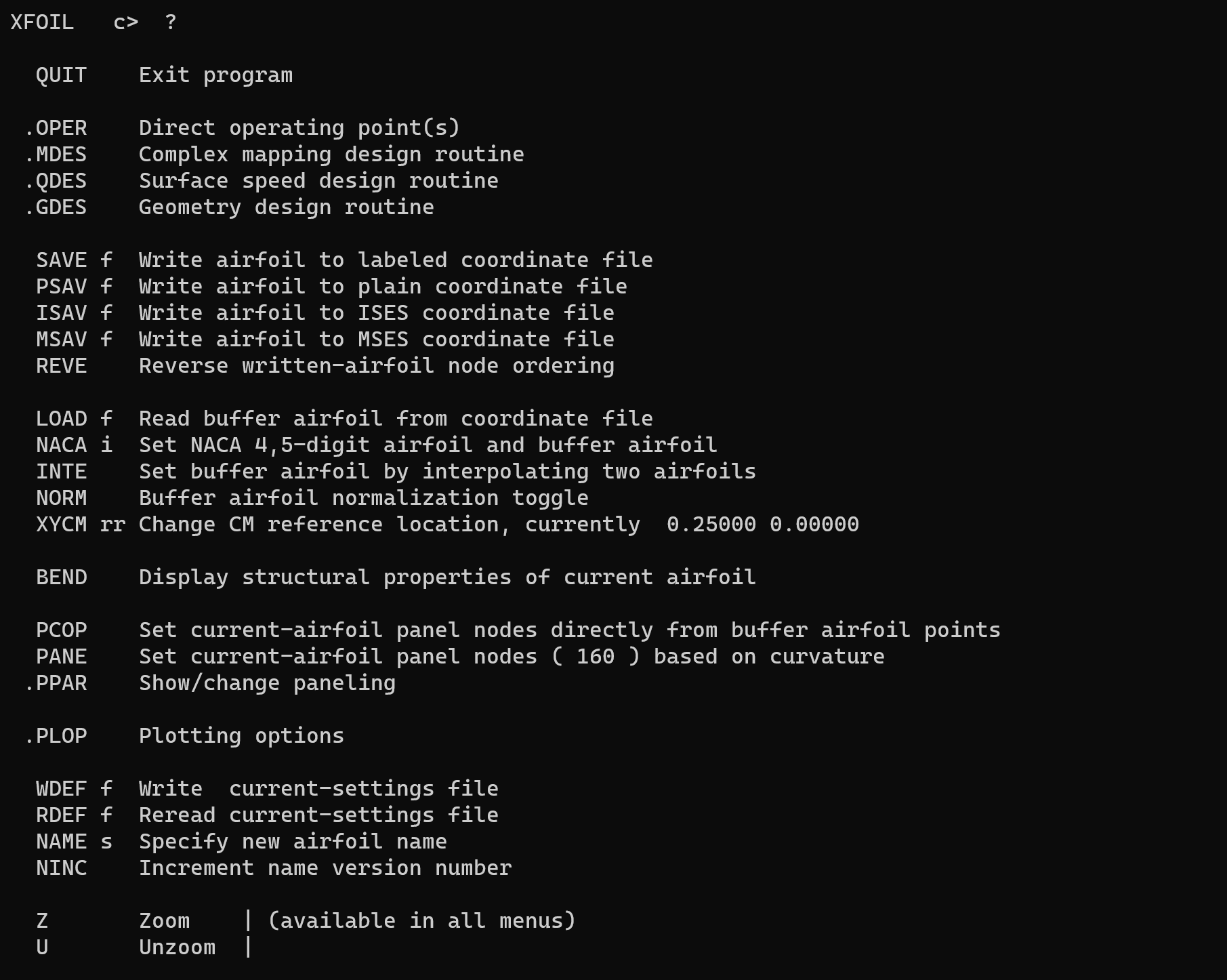
## 2023.11.21---程序更改，将.dat 文件修改为函数输入，出现异常数据

本小组在最开始时，首先使用的是官网上的.dat文件，文件中有着相关坐标数据，但是只有34个坐标点，考虑到后期需要进一步进行验证网格无关性，故将.dat文件输入坐标值，改为函数输入，并加入初步书写的面源法，发现有一个异常数据，可能是函数生成曲线代码有相关问题。且该阶段的Cp、V计算有着很大的模型误差。



## 2023.11.22----程序更改，将函数导入换成Xfoil输入

由于函数输入是由本小组书写，相较于Xfoil的专业插件有着很大的差距。为了增强模型的准确度，小组将函数输入改为Xfoil输入，一方面可以更好地对比Cp的准确值，另一方面可以更好地进行网格无关性的验证。从该阶段开始，本小组工作开始参考Github开源项目，并在此基础上进行理解和优化。Xfoil的终端显示如下图。



## 2023.11.28----程序更改，加入库塔条件，使用矩阵形式

之前的工作由于对于方法不够熟悉，所以并未仔细考虑翼型满足库塔条件的相关问题。且尚未从理论矩阵推导的角度对面源法和涡面法进行细致分析。从该时间点开始，本小组开始理论推导，并将理论进行编程化，将相关的方程组转化为矩阵形式，便于matlab代码理解和书写。

## 2023.12.12----修改代码结构，封装函数

为了增强函数的重复利用性，本小组在该阶段进一步优化代码，将代码进行函数封装，例如将翼型导入封装，将SPM，VPM的相关积分运算进行封装，极大简便了后期的调用和更改。

## 2023.12.20---完善代码，得到最终结果

本阶段实现了所有任务要求，本小组在本阶段的主要任务为完善结果显示，实现更为完善的可视化结果。

# Ⅴ---Final Result

本部分将会进行一部分侧重于实践的理论推导，主要侧重于理论的编程化。

## VPM（涡面源法推导）

### 势函数Φ(x)

势函数的细节推导已在理论推导部分给出，此部分只给出势函数Φ(x)的表达式

### 法向速度Vn

Vn即势函数在表面法向法向上求偏导即可，

故

### 切向速度Vt

Vt即势函数在表面切向方向求偏导即可，

故

### 积分项的求解KL的求解

令

其中，由几何性质可知，

#### K项的推导

结合

可以推得

故K可以表示为

其中

结合公式

得

#### L项的推导

结合

推得

同理，

其中

### 1.5求解γ

由于翼型为刚体，所以在表面切向方向的速度Vn = 0，根据该等式，可以列出若干不等式，先对三个板子进行分析

得到矩阵形式为

由三个拓展为n个得

### 1.6 VPM的Cp计算

求得γ后，代入

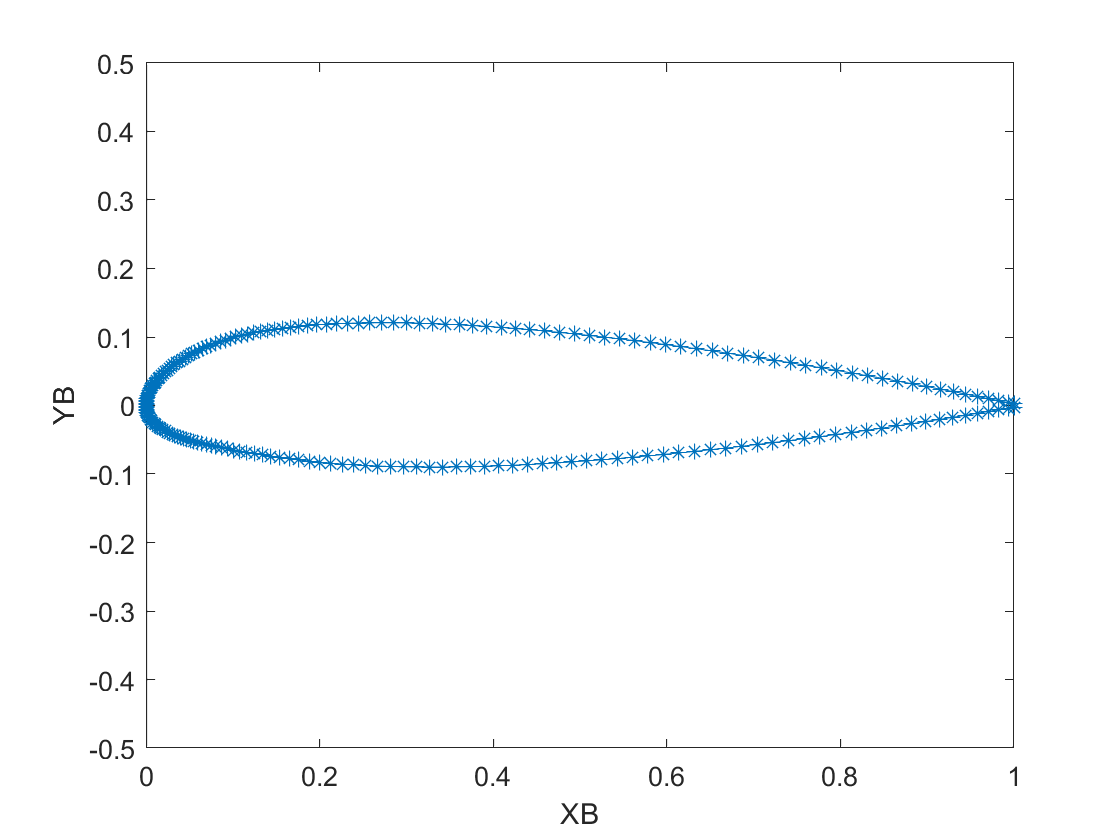
=

再将Vt代入

即可计算出每个控制点的Cp值

## 翼型剖面

使用Xfoil导入翼型的边界点200个，使用plot函数将翼型的剖面画出来，如图所示：



## Cp计算

此部分将会对理论推导部分进行进一步的补充

### 3.1 方法一：面源法SPM

#### 3.1.1 积分项的IJ表达式的推导

I的推导如下：

I的表达式为：

根据求导法则得

故

代入β和Φ的关系，XC和XB，YC和YB的关系

得

故I可以表示为

其中

由积分公式

得：

J的推导：

J的表达式为

其中

同理J的表达式为

#### 3.1.2 矩阵形式推导

先对三个板子进行推导，再进一步推广

对于第一块板子有

1. 三块板子同理，故

化成矩阵形式为

加入库塔条件后

对三个板子情况作进一步的拓展，得

计算得：

#### 3.1.3 Cp结果

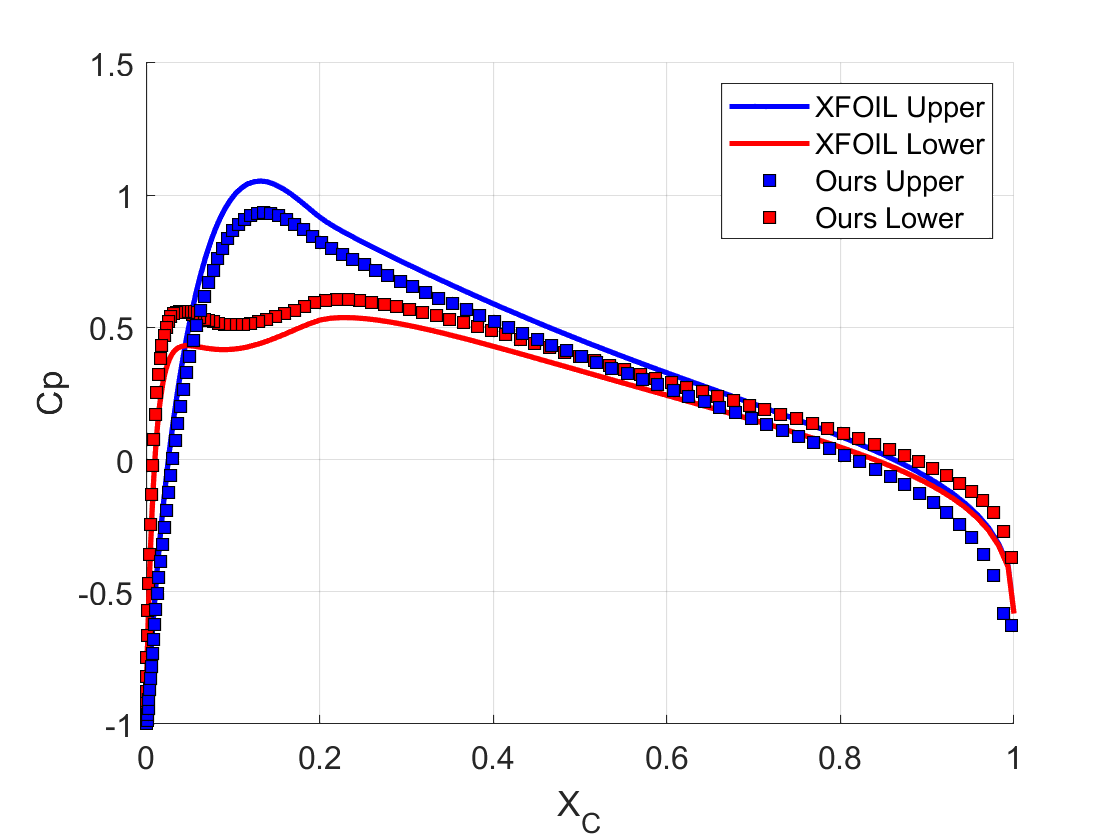


表 1压力分布0°攻角

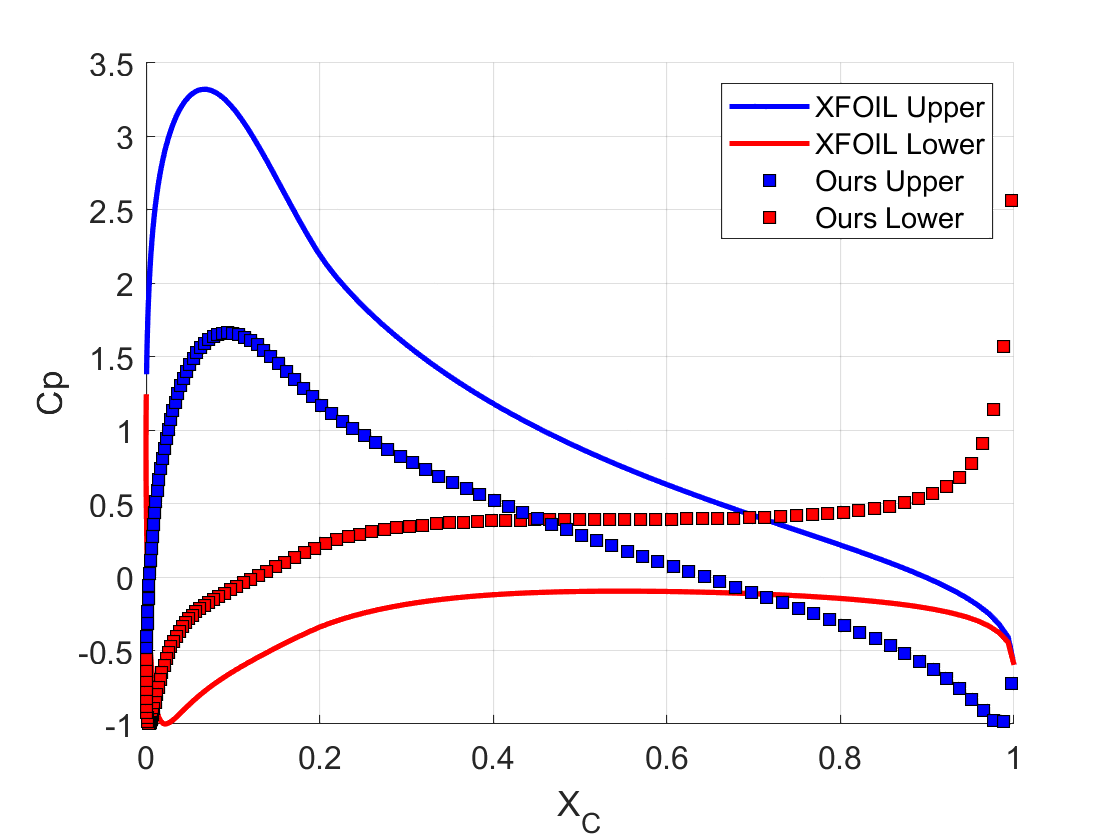


表 2压力系数10°攻角

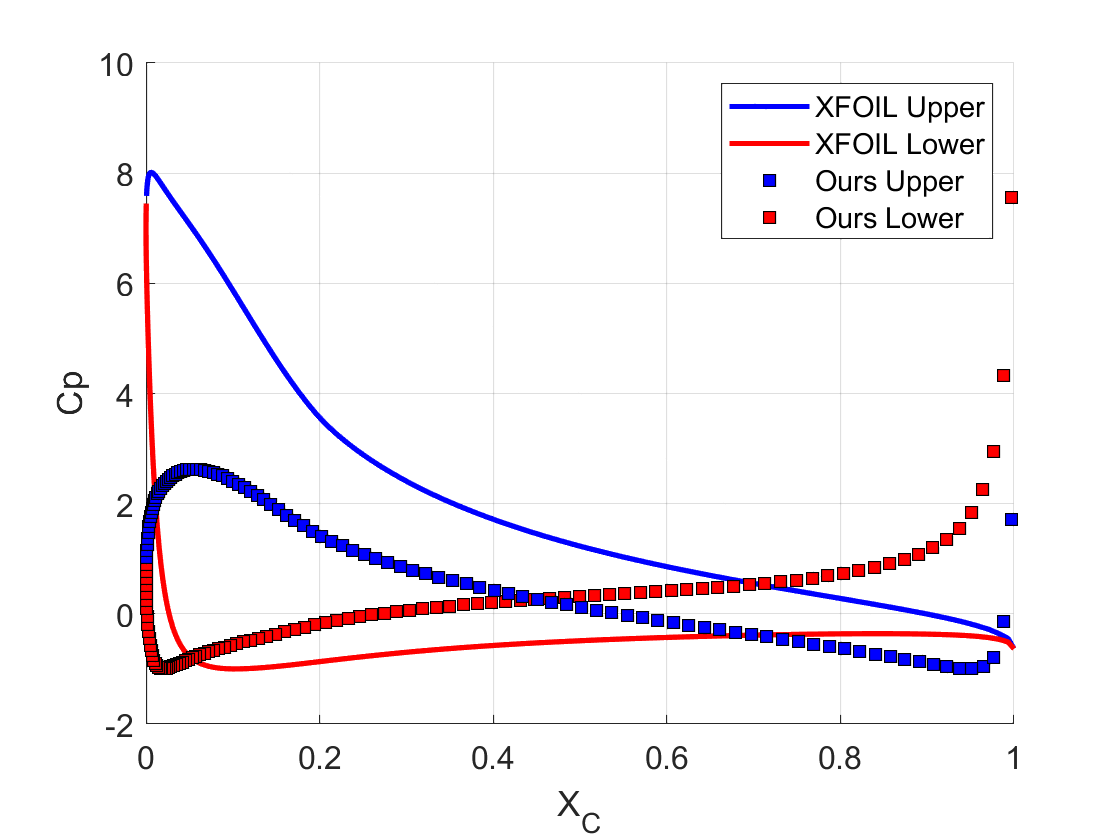


表 3压力系数20°攻角

可以很明显的看到，在有攻角时，SPM方法误差较大。原因在于SPM方法无法计算有环量的形状。具有较大的局限性。

### 3.2 方法二：涡面法VPM

这一部分已在之前推导，故这里直接给出结果

#### 3.2.1 Cp结果

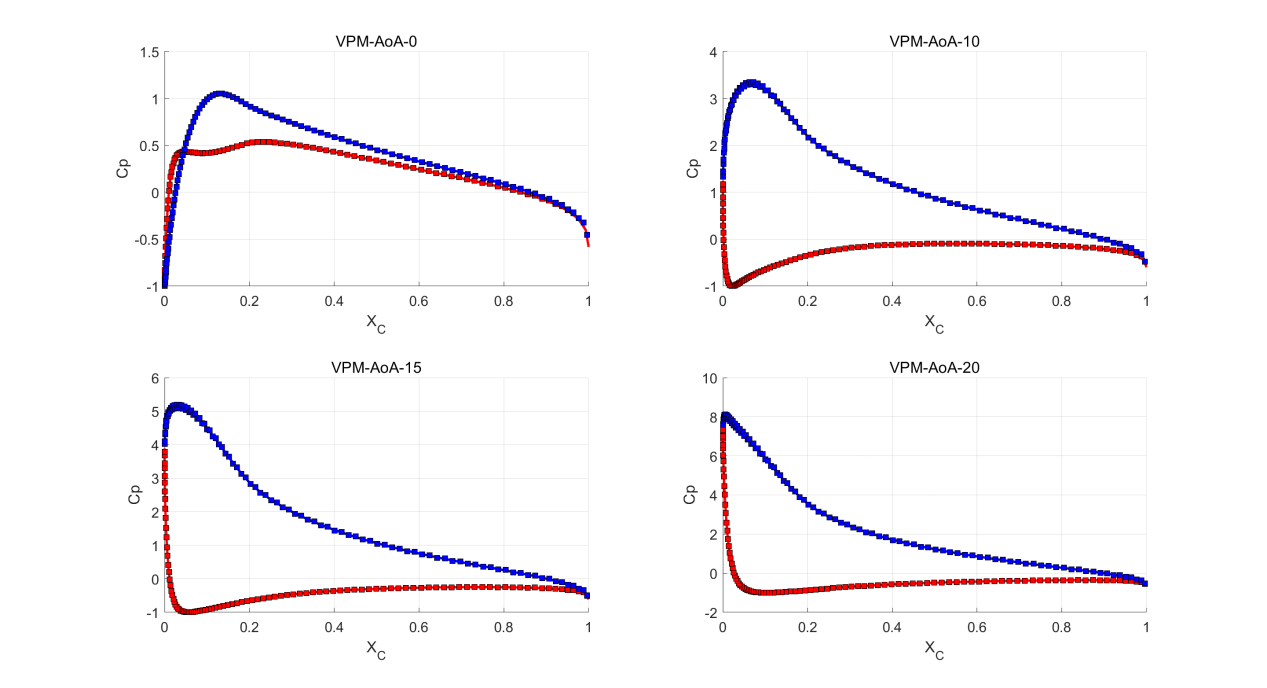


表 4VPM\_Cp计算-0-10-15-20攻角

### 3.3 方法三：面源涡面结合法SPVP

#### 3.3.1 矩阵形式推导

当j=i时， ，

当j=i时， ，

先研究五个板子，从而进行N个板子的进一步推广

得到矩阵形式为

可以发现该矩阵无法求解，需要进一步添加方程

#### 3.3.2 库塔条件的加入

加入切向方向的库塔方程

由

得

将该库塔条件加入矩阵，可以得到

根据

即可求得结果

#### 3.3.3 Cp结果

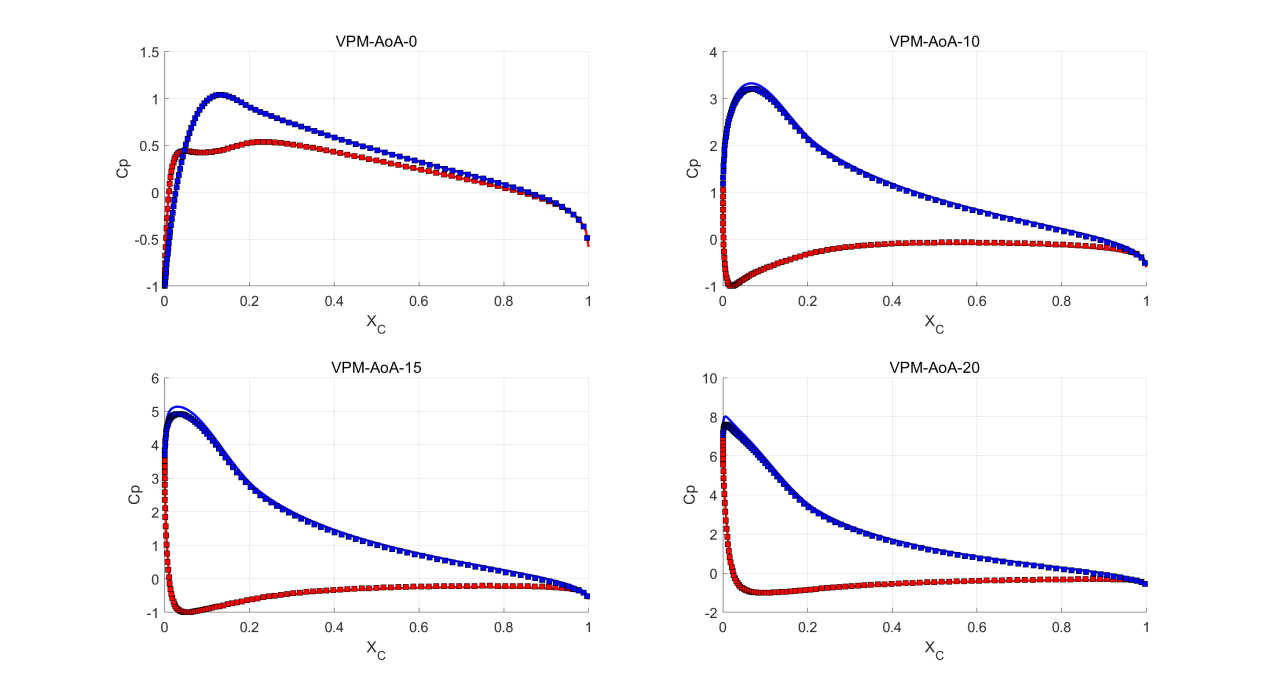


表 5 SPVPM\_Cp计算-0-10-15-20攻角

可以发现该种方法在变化较大的凸点有一定的误差

### 3.4 三种方法比对

现阶段的节点选择为200个，展示还未从网格无关性的鲁棒性研究三种方法的差异性，从Cp计算的准确性来看，SPVP和VPM的具有较强的准确性。

## 网格无关性

从网格无关性理论可以得到验证网格无关性的步骤，本小组将只从VPM和SPM两种方法对网格无关性进行研究，并作两种方法的对比，并用于后续的计算。

### VPM的网格无关性

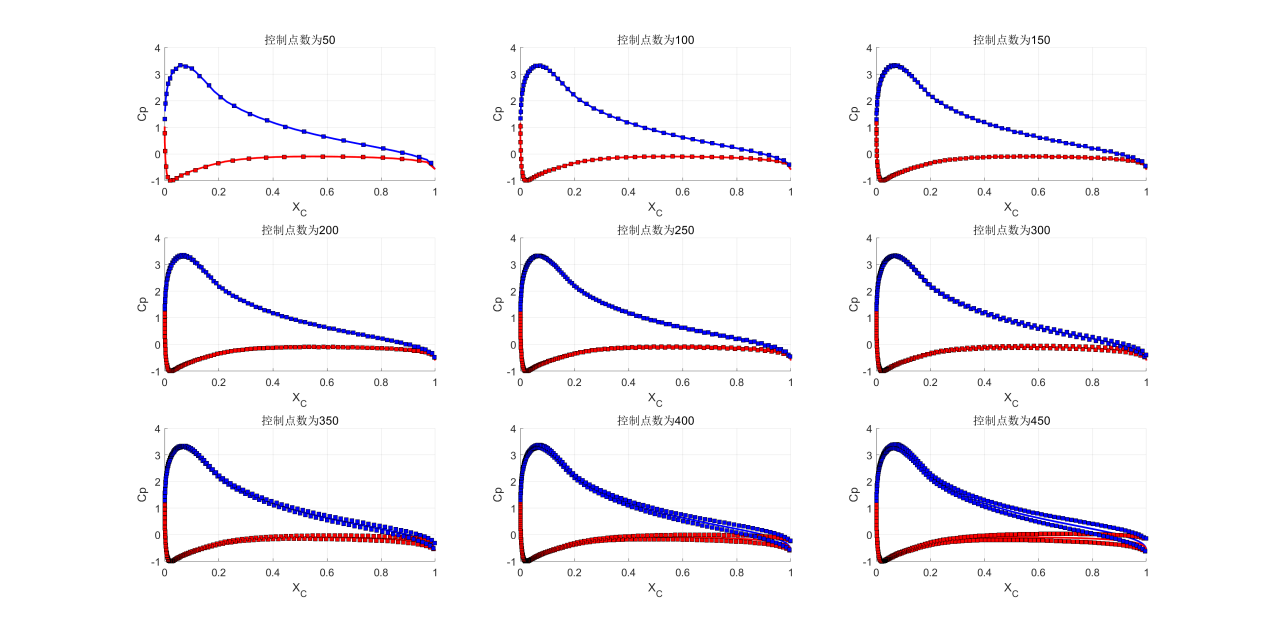
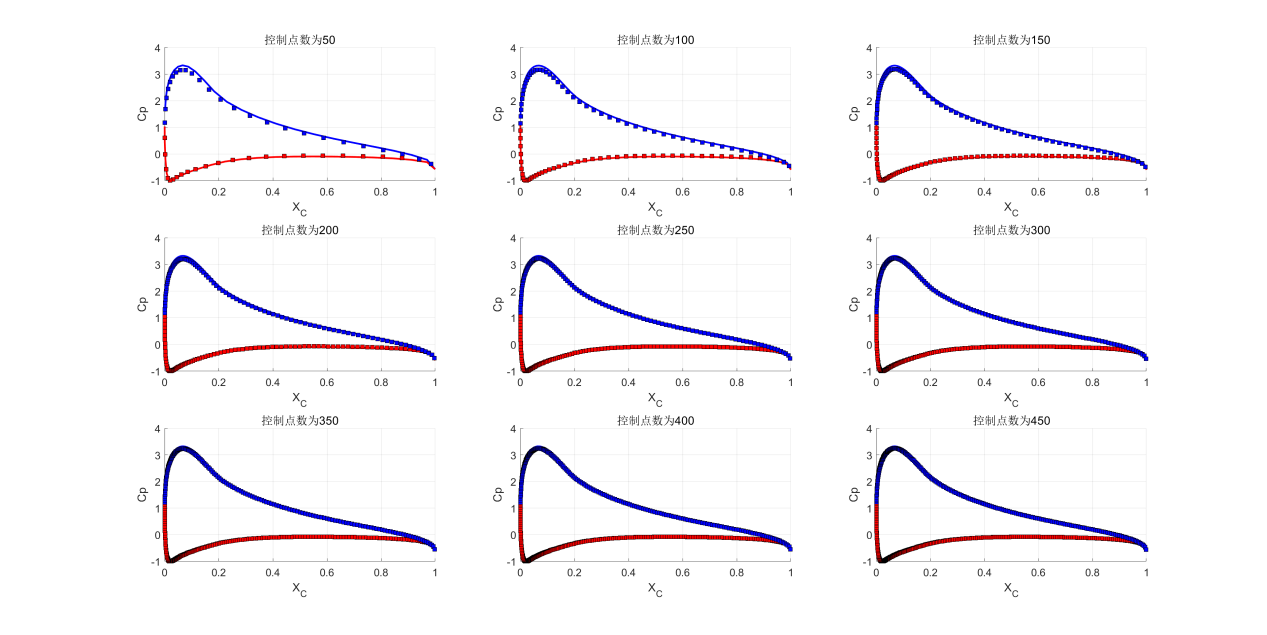


表 6 VPM的网格无关性

可以很明显的看到，该种方法在网格数达到一定的数量时，曲线出现很大误差，鲁棒性较差，故该种方法不具有网格无关性

### SPVP的网格无关性

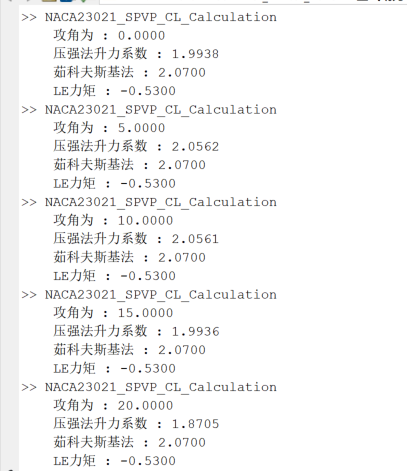


由图可以看到，该种方法虽然在节点数较少时在凸点有较大误差，但当网格数量增加到一定数量时，SPVP方法的逐渐收敛，最终收敛到Cp曲线，而且较为稳定。

根据以上的对比，后续计算将会采用SPVP方式。

## CL\_Calculation

分别使用压强积分和茹科夫斯基定理计算升力，得到以下结果



两者的差异不大

## 升力系数和力矩系数（LE）与攻角的关系，与薄翼理论做比较

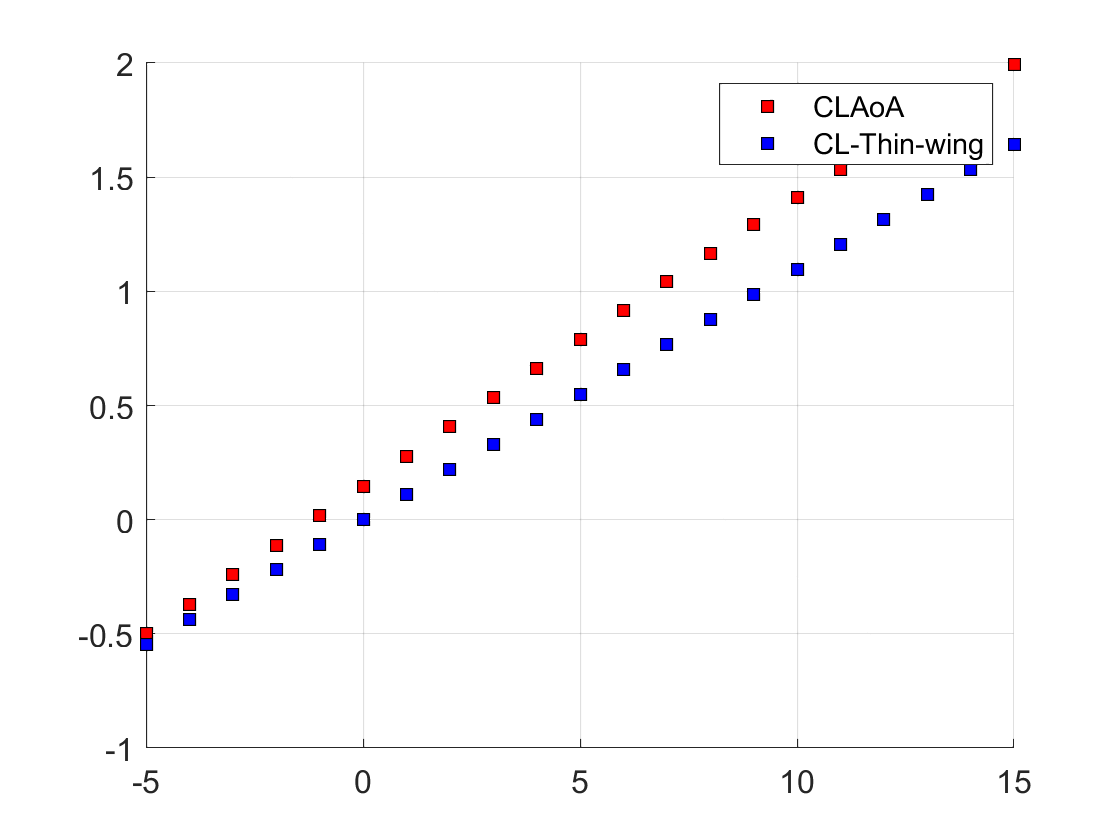


表 7 升力系数和攻角的关系-Cp和薄翼理论

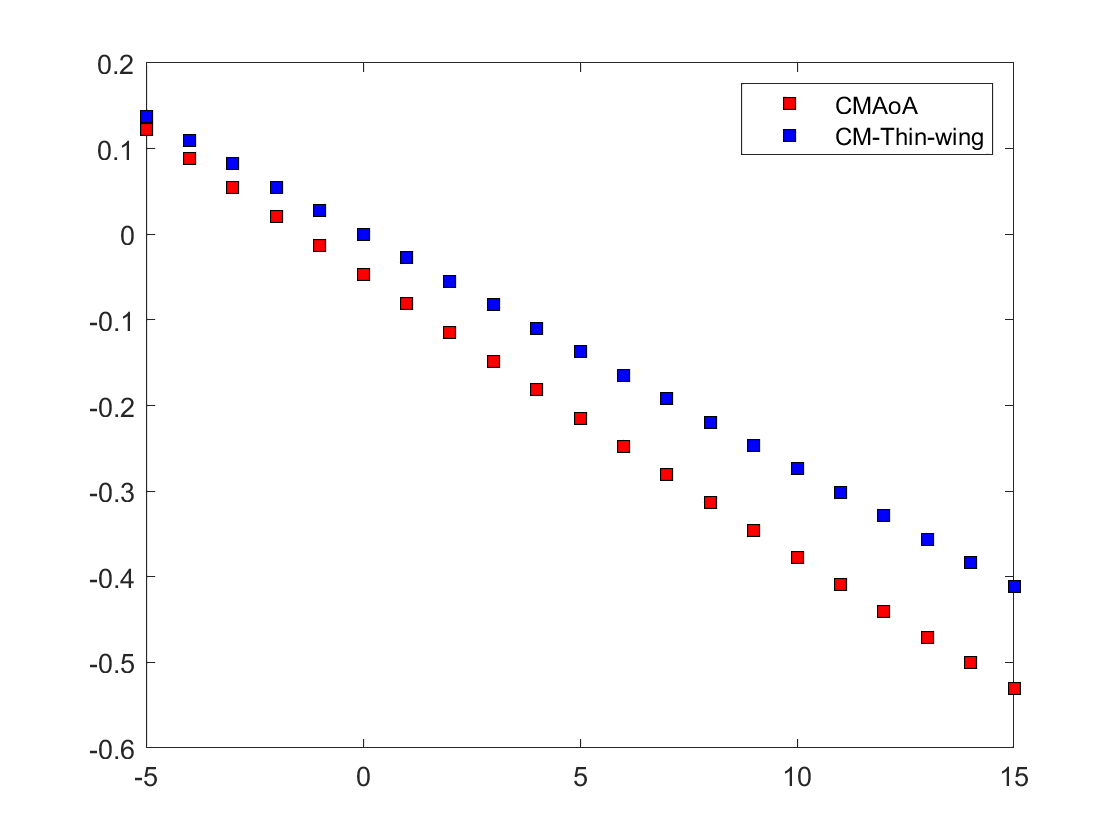


表 8 CM与攻角的关系-Cp和薄翼理论

## 做出时间线，验证沿翼型上下表面的流体质点同时到达后缘的说法

# Ⅵ---Conclusion

本小组从多方面，多角度研究该问题，尝试多种方法，查阅大量资料，自主证明理论公式且推导实践解法。先介绍了完成数值任务所需要的理论基础，再介绍了小组工作的时间线，最后给出了小组的最终结果。主要对比了SPM、VPM、SPVP三种方法的异同，最终确定了SPVP的优越性，并进行了后续的计算。本次任务收获很多。以下是小组成员的总结

敖洋智：在本次数值计算中，尝试了各种方法，对数值计算方法有了初步的了解。借着本次数值作业，对翼型的几何性质，薄翼理论，茹科夫斯基定理等基本理论有了更为深刻的理解，并对数值作业的全部所需理论进行理论推导，加强了我的理论推导能力，巩固了我的数学计算能力。深刻体会到了理论公式到实践计算的沟壑，对矩阵转化，积分的多项式转化，函数封装等编程技巧有了更为深刻的理解，本次数值计算作业极大地提升了我的编程能力，同时也掌握了许多可视化技巧。

# Ⅶ---Future work

本小组在本次数值作业中未探究的问题

1. SPVP算法鲁棒性的数学理论基础，第二、使用二阶方法增强鲁棒性（涡量γ在同一块板子上呈线性变化，不再是常量）

在之后的空闲时间内，小组成员将会在各自的时间内做进一步研究