Практичне заняття 1

- **План**
- Контроль знань з відповідних розділів фізики та математики.
- Елементи векторного аналізу. Системи координат у просторі.
- Поняття “ротор” rot, «дивергенція» div, «градієнт» grad в різних системах координат стосовно характеристик електромагнітного поля.
- Коефіцієнти Ляме.

- Для опису фізичних полів прийнято використовувати їх **математичні моделі - скалярні і векторні поля.**
- У довільній системі координат (x_1 , x_2 , x_3) скалярне поле **φ набуває вигляду деякої функції φ (x_1 , x_2 , x_3),** приймаючої чисельні значення – **дійсні або комплексні.**

- Градієнт скалярного поля
- (1)

$$grad\ \varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathbf{1}_{x1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\mathbf{1}_{x2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\mathbf{1}_{x3}\ ,$$

- x_1, x_2, x_3 є коефіцієнтами пропорційності між диференціалами узагальнених координат і нескінченно малими ребрами елементарного паралелепіпеда на потрібній точці простору.
- Наведемо значення коефіцієнтів Ляме для найбільш уживаних **координатних систем:**

- декартова система координат *(x, y, z)*

$$h_x = h_y = h_z = 1\,;$$

- циліндрична система координат $(\rho, \phi\ , z)$

- $h_{\rho}=1,\ h_{\varphi}=\rho,\ h_{z}=1;$

- сферична система координат $(r,\ \vartheta\ ,\ \phi)$

$$h_r = 1\,,\ \ h_{\vartheta} = r\,,\, h_{\varphi} = r\sin\vartheta\,.$$

- Саме градієнт обчислюють таким чином:
- в декартовій системі координат

$$grad \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z ;$$

- в циліндричній системі координат

$$grad \equiv \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z ;$$

- в сферичній системі координат

$$grad \equiv \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{1}_\vartheta + \frac{1}{r\sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi .$$

- Опис диференційних властивостей векторного поля дещо складніший. Векторне поле **A** задають **трьома проекціями на одиничні вектори (орти)** обраної системи координат:

$$A = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3) \cdot 1_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \cdot 1_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \cdot 1_{x_3}$$

- Векторне поле **A** прийнято характеризувати скалярним полем - **дивергенцією *div*A і векторних полем - ротором *rot*A.**
- Значення дивергенції дорівнює **щільності джерел цього поля в заданій точці простору**.
- Трактування ротора векторного поля складніше: можна вважати, що він в даному разі характеризує **ступінь відмінності досліджуваного поля від однорідного.**

- Дивергенцію векторного поля **A** обчислюють диференціюванням його проекцій за певними правилами:
- в декартовій системі координат

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{2}$$

в циліндричній системі координат

$$div\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{3}$$

- в сферичній системі координат

$$div A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{4}$$

- В довільній ортогональній криволінійній системі координат

$$div\ A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_{x_3})\right].$$

- (5)

- Проєкції ротора векторного поля мають вид:
- в декартовій системі координат

$$(rot\ \mathrm{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(rot\ \mathrm{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(rot\ \mathrm{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};$$

- (6)

- в циліндричній системі координат

$$(rot\ \mathrm{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$(rot\ \mathrm{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(rot\ \mathrm{A})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right];$$

(7)

- в сферичній системі координат

$$(rot\,\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\ A_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right],$$

$$(rot\,\mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right],$$

$$(rot\,\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right].$$

(8)

- Ротор векторного поля **A** в довільній системі координат визначають через проекції вихідного поля і коефіцієнти Ляме:

$$rot\,\mathbf{A} = \frac{1_{x_1}}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_3}\right] + \frac{1_{x_2}}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_1}\right] + \frac{1_{x_3}}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_2}\right] \quad (9)$$

- Диференційні операції зі скалярними та векторними полями зручно записувати із застосуванням оператора Гамільтона ∇.
- За визначенням

$$grad U = \nabla U, \quad div A = \nabla A, \quad rot A = [\nabla A]. \quad (10)$$

- В декартовій системі координат оператор Гамільтона є символічний вектор

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z\,. \qquad (11)$$

- З диференційних векторних операцій другого порядку широке застосування в електродинаміці знаходить оператор **∇²**, закон дії якого на векторне поле ***A*** описують співвідношенням

$$\nabla^2 \mathrm{A} = grad\ \ div\, \mathrm{A} - rot\ \ rot\ \mathrm{A}\ . \tag{12}$$

- Диференційну операцію другого порядку, що діє на скалярне поле, задають оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv div\ \ grad\ \ .$$

- Оператор Лапласа в різних координатних системах записують наступним чином:
- в декартовій системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad (13)$$

- в циліндричній системі координат

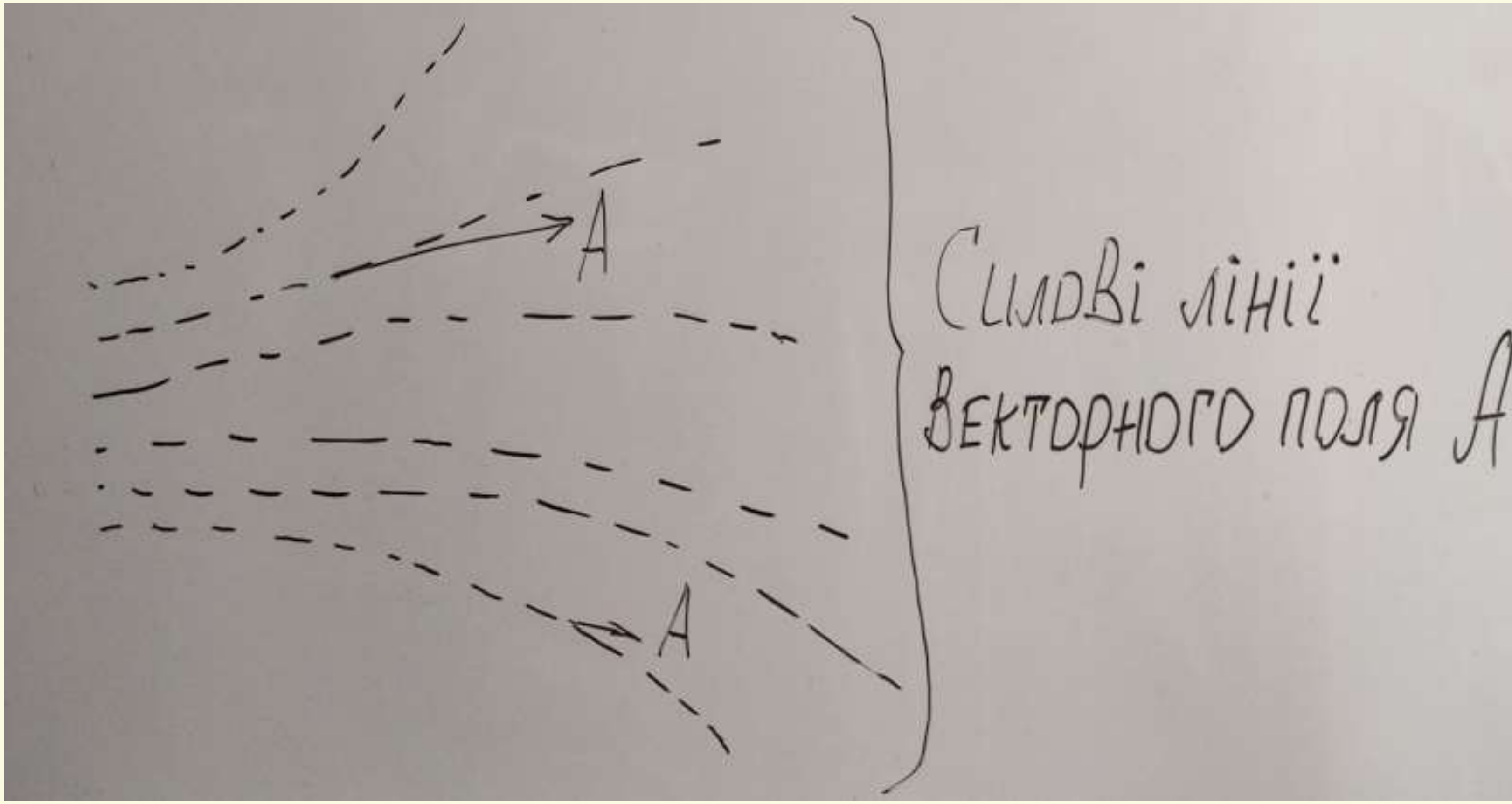
$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad (14)$$

- в сферичній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \qquad (15)$$

- Для графічного зображення векторних полів прийнято будувати картину їх силових ліній.
- У кожній точці силової лінії вектор поля
- дотичен до неї. Там, де інтенсивність поля більше, силові лінії проводять частіше, і навпаки.

Силові лінії векторного поля

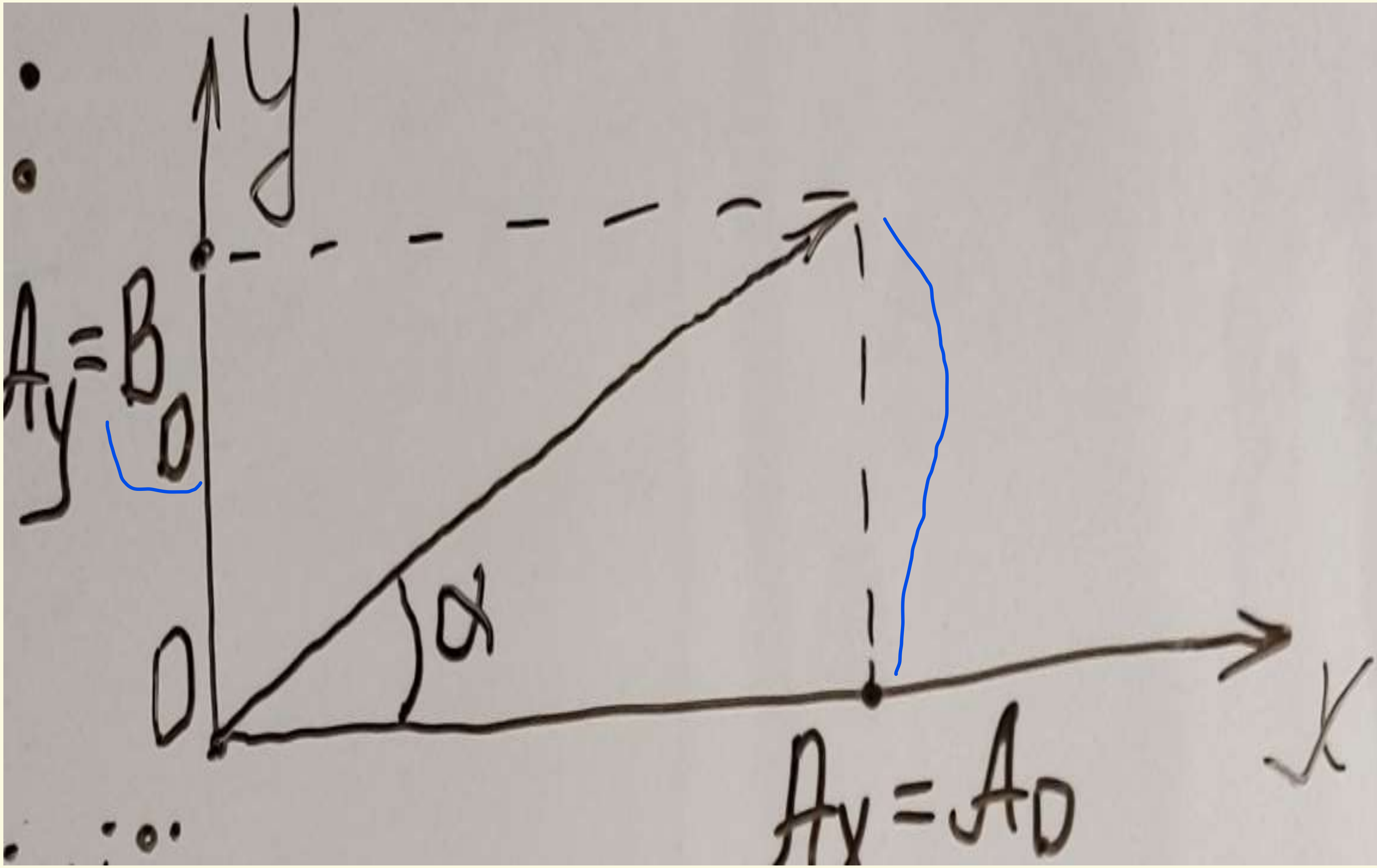


- **Приклад 1.** У декартовій системі координат проекції векторного поля **A** постійні в кожній точці простору: $A_x = A_0$, $A_y = B_0$, $A_z = 0$.

- **Побудувати картину силових ліній векторного поля**.
- **Рішення.** Оскільки одна з декартових складових векторного поля відсутня, силові лінії повинні представляти собою родину плоских кривих, що лежать в площинах, паралельних площині *xy*, Вектор поля в кожній точці дотичен до силової лінії, звідки випливає диференційне рівняння силових ліній

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_0}{A_0} = tg\,\alpha \qquad (П1)$$

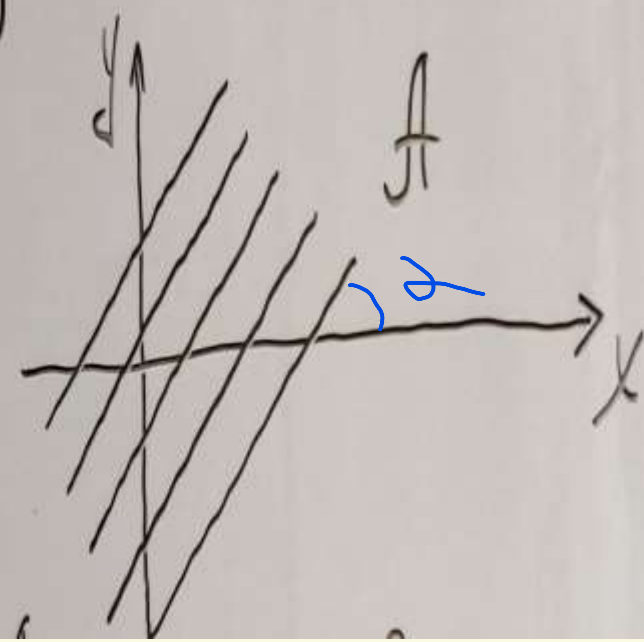
Вектор поля в точці



Диференційне рівняння силових ліній

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_0}{A_0} = tg\,\alpha \Rightarrow y = \frac{B_0}{A_0} \cdot x + C, \text{ де } C = const$$

Таким чином, маємо сімейство прямих ліній з кутом нахилу α до вісі x.



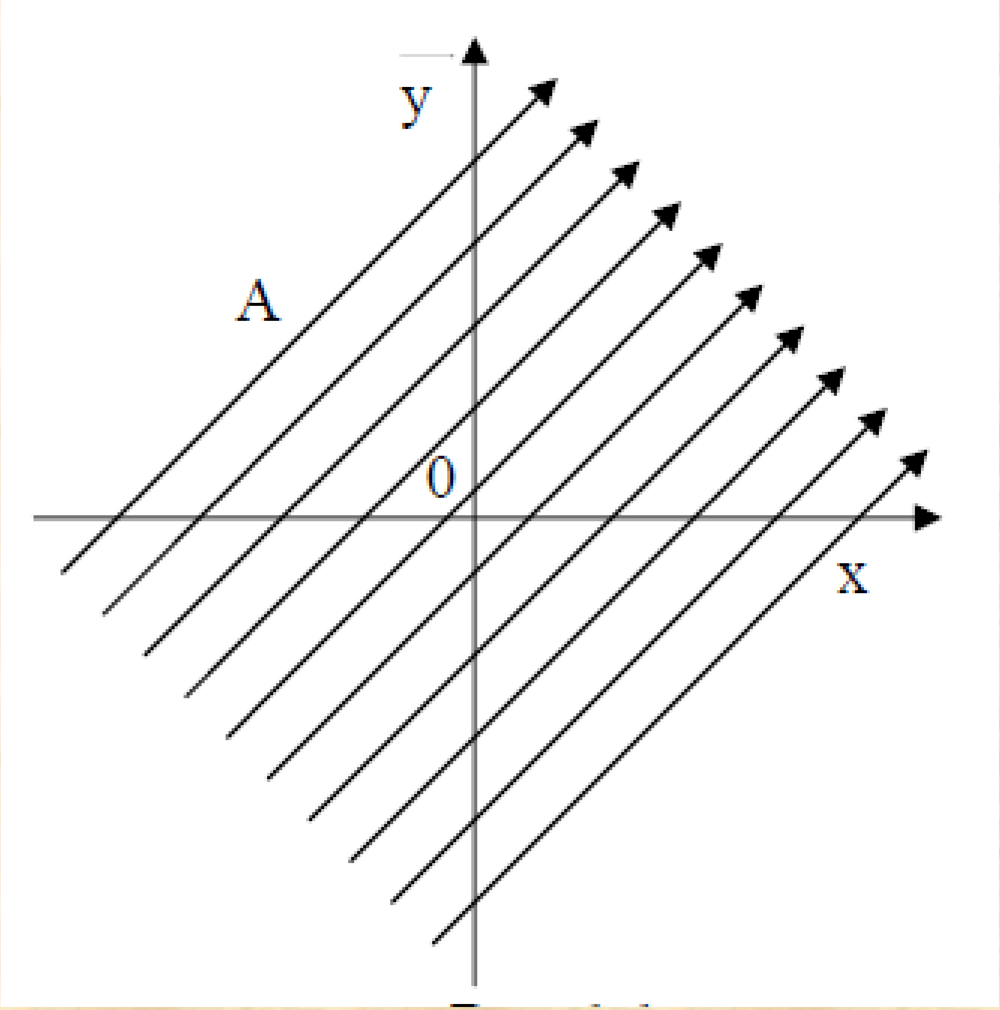


Рис. П1.

- **Приклад 2.** Векторне поле A, задовольняє у всіх точках даній області умові *div*A = 0, називають **соленоїдом** (полем без джерел). При виконанні умови *rot*A = 0 поле **A** є
- **потенційним векторним полем**.
- Якщо таке поле характеризує силу, діючу на матеріальну точку, то робота зовнішніх сил при обході замкнутого контуру дорівнюватиме нулю.

- В декартовій системі координат векторне поле **A** має єдину складову $A_y = 15x^2$.
- Перевірити, чи є поле: а) соленоїдом; б) потенційним.
- **Рішення.** Картину силових ліній поля A в площині *xy* наведено на рис. П2. Обчислюючи дивергенцію цього поля за формулою (2), отримаємо, що
- $div A = \partial A_y / \partial y = 0$. Отже, досліджуване поле є соленоідним. Однак, відповідно до (6) $rot A = 30x\mathbf{1}_z$, тому поле не потенційне.

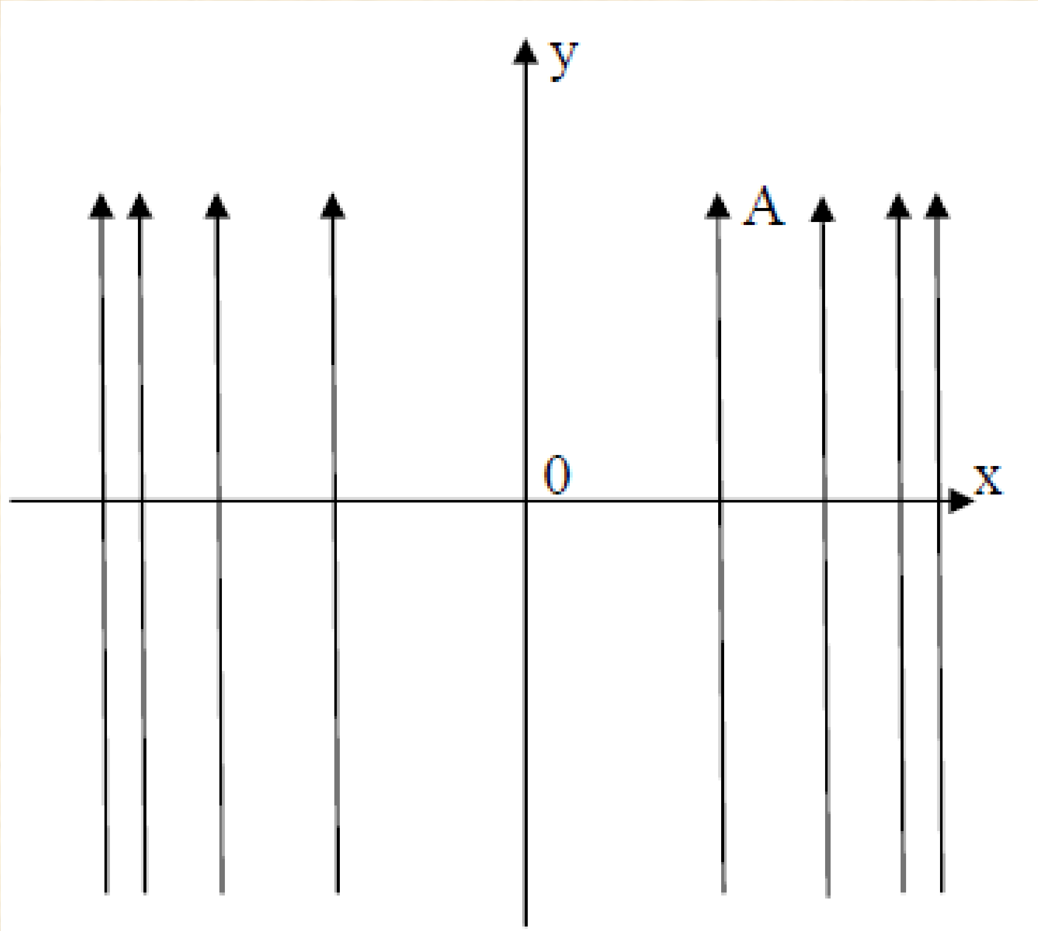


Рис. П2.

- **Завдання 1**
- Скалярне поле ϕ задано в декартовій системі координат виразом
- ϕ = (№ за списком) $x^2 y \cos z + 2z^2$.
- Обчислити векторне поле *grad* ϕ.

- **Завдання 2**
- Визначити дивергенцію і ротор векторного поля, що має в декартовій системі координат єдину складову
- A_x = (№ за списком) *sin* [(№ за списком)*x* / π].