Diskretna matematika 1

Domagoj Kovačević
Mario Krnić
Anamari Nakić
Mario Osvin Pavčević

VERZIJA OD: RUJAN 2019.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

I Kombinatorika

II Teorija grafova

I Kombinatorika

1. Funkcije izvodnice

1.1 Osnovna ideja. Račun s funkcijama izvodnicama

Uvod

Kombinatorika je matematička disciplina koja se bavi problemima svrstavanja, raspoređivanja i prebrojavanja elemenata konačnih skupova i struktura. Na prvoj godini studija naučili smo tri temeljna pravila koja smo koristili prilikom prebrojavanja konačnih skupova:

- **pravilo sume**: ako skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata te ako su A i B disjunktni tj. $A \cap B = \emptyset$, onda njihova unija $A \cup B$ ima $m+n$ elemenata. Slično vrijedi i za disjunktnu uniju bilo kojeg konačnog broja skupova.

  Na primjer, ako u studijskoj grupi ima m djevojaka i n momaka, onda u toj grupi ima $m+n$ studenata (ili kažemo da jednog studenta možemo odabrati na $m+n$ načina).
- **pravilo produkta**: ako skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, onda njihov Kartezijev produkt $A \times B$ ima mn elemenata. Slično vrijedi i za Kartezijev produkt bilo kojeg konačnog broja skupova.

  To znači da za studijsku grupu iz prethodnog primjera možemo na mn načina odrediti par koji se sastoji od jednog momka i jedne djevojke (ili kažemo da jedan "par" iz te studijske grupe možemo odabrati na mn načina).
- **pravilo jednakosti (bijekcije)**: ako postoji bijekcija između skupova A i B onda oni imaju jednak broj elemenata.

  Pravilo jednakosti koristimo onda kada je umjesto zadanih objekata jednostavnije prebrojati neke druge objekte koji su sa zadanima u bijekciji.

Gornja pravila smo koristili prilikom raznih problema prebrojavanja, među kojima su posebno važna:

(I) prebrojavanja **uređenih** odabira objekata
  - bez ponavljanja objekata,
  - s ponavljanjima objekata,

(II) prebrojavanja **neuređenih** odabira objekata
  - bez ponavljanja objekata,

- s ponavljanjima objekata,

Prisjetimo se, kod uređenih odabira poredak objekata je bitan, dok kod neuređenih odabira poredak objekata nije bitan. Odabiri tipa (I) zovu se **permutacije**, a odabiri tipa (II) zovu se **kombinacije**. Navedene probleme prebrojavanja smo detaljno izučavali na prvoj godini studija (vidi skriptu [2]). U ovom poglavlju dat ćemo jedan posve novi pristup opisanim problemima prebrojavanja.

* * *

Riječ je o sasvim novoj analitičkoj metodi pomoću koje ćemo efikasno rješavati mnoge probleme prebrojavanja. **Funkcije izvodnice** predstavljaju jedan od najmoćnijih računskih alata u kombinatorici. Grubo govoreći, nizu brojeva pridružujemo red potencija čija je suma odgovarajuća funkcija koju nazivamo pripadna funkcija izvodnica. Prema tome, funkcija izvodnica zamjenjuje čitav niz brojeva.

Definicija 1.1 Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih (ili kompleksnih) brojeva. Pripadna obična funkcija izvodnica je formalni red potencija

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \tag{1.1}$$

Funkciju izvodnicu niza doista treba gledati kao sažet zapis niza $(a_n)_{n\geq 0}$. Naime, ako znamo funkciju izvodnicu $f(x)$, onda ona prema MacLaurinovoj formuli određuje red (1.1) s pripadnim koeficijentima

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{1.2}$$

pri čemu $f^{(n)}(0)$ označava n-tu derivaciju funkcije $f(x)$ u točki $x = 0$. Također ćemo koristiti oznaku $\langle x^n \rangle f(x) = a_n$, koja označava da je koeficijent od $f(x)$ uz x^n jednak a_n.

Opisani redovi potencija su formalni u smislu da ne razmatramo pitanje njihove konvergencije. Drugim riječima, funkcije izvodnice ne smatramo običnim funkcijama, osim kad je varijabla u području konvergencije, što ćemo prešutno pretpostavljati. Stoga ćemo funkciju izvodnicu, kad god je to moguće, prikazati eksplicitnim analitičkim izrazom (zatvorenom formulom), odnosno izračunati sumu pripadnog reda.

Navedimo sada osnovna pravila koja ćemo koristiti u računu s funkcijama izvodnicama, a slijede neposredno iz definicije.

A. **Svojstvo linearnosti.** Pretpostavimo da su $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ funkcije izvodnice nizova $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$, te neka su λ i μ zadani brojevi. Onda nizu $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\geq 0}$ odgovara funkcija izvodnica $\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)x^n$.

B. **Pravilo deriviranja i integriranja.** Ako je $f(x)$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$, onda formalnim deriviranjem iz (1.1) dobivamo

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Posebno, kako je $x \cdot f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n$, slijedi da je $xf'(x)$ funkcija izvodnica niza $(na_n)_{n\geq 0}$. Slično, formalnim integriranjem iz (1.1) dobivamo

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}a_{n-1}x^n.$$

Posebno, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ je funkcija izvodnica niza $\left(\frac{1}{n+1}a_n\right)_{n\geq 0}$.

C. **Pravilo množenja (konvolucije)**. Neka su $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ i $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ funkcije izvodnice nizova $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$. Tada je $f(x)\cdot g(x)$ funkcija izvodnica niza $(c_n)_{n\geq 0}$, gdje je $c_0=a_0b_0, c_1=a_0b_1+a_1b_0,\dots,c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i},\dots$.

Pogledajmo sada neke primjere funkcija izvodnica zadanih nizova.

■ **Primjer 1.1** (a) Neka je $c\neq 0$ bilo koja konstanta. Funkcija izvodnica niza $a_n=c^n$, $n\geq 0$, jednaka je $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(cx)^n=\frac{1}{1-cx}$. Uočimo kako smo zatvorenu formu $\frac{1}{1-cx}$ funkcije izvodnice dobili korištenjem formule za sumu geometrijskog reda. Posebno, ako je $c=1$ funkcija izvodnica niza $a_n=1$, $n\geq 0$, je

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n. \tag{1.3}$$

(b) Odredimo sada funkcije izvodnice nizova $a_n=n$ i $b_n=n^2$, $n\geq 0$. Formalnim deriviranjem jednakosti (1.3) slijedi da je $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$, odakle množenjem sa x dobivamo jednakost

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n. \tag{1.4}$$

Prema tome, $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ je funkcija izvodnica niza $a_n=n$, $n\geq 0$. Sada, deriviramo li prethodnu relaciju još jednom imamo da je $\frac{x+1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}$, odakle množenjem sa x slijedi jednakost

$$\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n.$$

Dakle, $g(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ je funkcija izvodnica niza $b_n=n^2$, $n\geq 0$.

(c) Primjenom relacija (1.3) i (1.4) lagano možemo odrediti funkciju izvodnicu niza $a_n=3n+5$, $n\geq 0$. Imamo redom:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+5)x^n=3\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+5\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-x}=\frac{5-2x}{(1-x)^2}.$$

■

Neka je α bilo koji realan broj i $n\in\mathbb{N}_0$. **Binomni koeficijent** općenito definiramo sa

$$\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\qquad \binom{\alpha}{0}=1.$$

S pojmom binomnog koeficijenta susreli smo se u slučaju kada je $\alpha=N\geq n$ prirodan broj. Tada vrijedi formula

$$\binom{N}{n}=\binom{N}{N-n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Prisjetimo se, prvi znak jednakosti u prethodnoj relaciji je **svojstvo simetrije** binomnog koeficijenta. Binomni koeficijenti imaju važno kombinatorno značenje, o čemu će biti govora u nastavku. No, zadržimo se još malo na samoj algebarskoj definiciji. Za ilustraciju binomnog koeficijenta $\binom{\alpha}{n}$, gdje je α bilo koji realan broj, uočimo da je

$$\begin{aligned}
\binom{2}{3} &= \frac{2\cdot 1\cdot 0}{3!} = 0,\\
\binom{-3}{3} &= \frac{(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{3!} = -10,\\
\binom{1.5}{4} &= \frac{1.5\cdot 0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1.5)}{4!} = \frac{3}{128},\\
\binom{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Nadalje, ako je $\alpha = -N$, $N\in\mathbb{N}$, onda je

$$\binom{-N}{n} = \frac{(-N)\cdot(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{(N+n-1)\cdots(N+1)N}{n!} = (-1)^n\binom{N+n-1}{n}.$$

Dobivena formula

$$\binom{-N}{n} = (-1)^n\binom{N+n-1}{n} \tag{1.5}$$

u literaturi je poznata pod nazivom **gornja negacija** i bit će nam od velike pomoći prilikom računanja binomnih koeficijenata.

■ **Primjer 1.2** Neka je α bilo koji realan broj. Pokažimo da je zatvorena forma funkcije izvodnice niza binomnih koeficijenata $a_n = \binom{\alpha}{n}$, $n\geq 0$, jednaka $(1+x)^\alpha$, tj. da vrijedi

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n. \tag{1.6}$$

Da bismo to pokazali, krenimo od poznatog MacLaurinovog razvoja $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ funkcije $f(x)$ u red potencija. Za funkciju $f(x)=(1+x)^\alpha$ je

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

odakle za $x=0$ dobivamo $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$, čime je jednakost (1.6) dokazana. Red na desnoj strani relacije (1.6) naziva se **binomni red**. Ako je $\alpha = N$ prirodan broj, onda je suma na desnoj strani relacije (1.6) konačna i predstavlja dobro nam znani **binomni teorem**. U slučaju kada je $\alpha=-N$, $N\in\mathbb{N}$, relacija (1.6) poprima oblik

$$(1+x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{N+n-1}{n}x^n, \tag{1.7}$$

pri čemu smo koristili gornju negaciju (1.5). Uočimo da je geometrijski red poseban slučaj binomnog reda. Naime, uvrstimo li u relaciju (1.7) $N=1$ te x zamijenimo sa $-x$, dobivamo geometrijski red (1.3). ■

U Primjeru 1.1 određivali smo zatvorene forme funkcija izvodnica zadanih nizova. No, vještina koja će nam trebati je upravo obrnuti postupak: iz zatvorenog oblika prepoznati koeficijente razvoja u red dane funkcije. Uočimo da smo taj postupak proveli u Primjeru 1.2 kod razvoja u binomni red. Ponovimo još jedanput (vidi skriptu [1]), svaku analitičku funkciju $f(x)$ možemo razviti u

MacLaurinov red $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pri čemu su odgovarajući koeficijenti u razvoju dani relacijom (1.2). U Primjeru 1.2 ta je funkcija bila dana formulom $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ te smo lagano odredili njezinu n-tu derivaciju u nuli. Međutim, općenito nije lako odrediti formulu za n-tu derivaciju funkcije. Stoga ćemo za određivanje koeficijenata razvoja u red koristiti poznate razvoje u red (npr. geometrijski i binomni red) i razne algebarske trikove (npr. rastav na parcijalne razlomke, formalna derivacija i integral poznatog razvoja). Kako bismo uvježbali opisani postupak riješimo sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1.1 Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica dana formulom $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.
Prvi način. Koristimo formulu za formalni produkt redova potencija i razvoj (1.3). Imamo redom:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdje je $a_n=\sum_{i=0}^{n} 1\cdot 1=\sum_{i=0}^{n} 1=n+1$.
Drugi način. Iskoristimo li binomni red (1.6) i formulu za gornju negaciju (1.5) imamo:

$$\begin{aligned} f(x)=(1-x)^{-2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n\binom{n+2-1}{n}x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n. \end{aligned}$$

Dakle, $a_n=n+1$, $n\geq 0$. ∎

Zadatak 1.2 (a) Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n=\dfrac{2n}{n^2+4n+3}$, $n\geq 0$.

(b) Odredite niz čija je funkcija izvodnica $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4x+3}$.

Rješenje. (a) Rastavimo prvo izraz $\dfrac{2n}{n^2+4n+3}$ na parcijalne razlomke. Stavimo li

$$\frac{2n}{n^2+4n+3}=\frac{A}{n+3}+\frac{B}{n+1},$$

sređivanjem dobivamo da je $2n=(A+B)n+A+3B$. Zbog toga je $A+B=2$ i $A+3B=0$. Rješenje tog sustava je $A=3$ i $B=-1$, pa je

$$a_n=\frac{2n}{n^2+4n+3}=\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+1},\ n\geq 0.$$

Prema tome, trebamo odrediti funkcije izvodnice ova dva niza. Funkciju izvodnicu prvog niza možemo zapisati kao

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n+3}x^n=\frac{3}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}x^{n+3}=\frac{3}{x^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}-x-\frac{1}{2}x^2\right).$$

S druge strane, formalnim integriranjem razvoja u geometrijski red dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-x|.$$

Konačno, iz prethodnih dviju relacija slijedi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n+3} x^n = -\frac{3}{x^3} \ln|1-x| - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x}.$$

Slično, funkcija izvodnica drugog niza je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\frac{1}{x} \ln|1-x|,$$

pa oduzimanjem dobivamo traženu funkciju izvodnicu:

$$f(x) = -\frac{3}{x^3} \ln|1-x| - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \ln|1-x|.$$

(b) Iskoristimo li rastav na parcijalne razlomke dobiven u (a) dijelu zadatka i razvoj (1.3) u geometrijski red dva puta, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{x^2+4x+3} = \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} - (-1)^n \right) x^n. \end{aligned}$$

Prema tome, opći član traženog niza je $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)$, $n \geq 0$.

■

Sada, nakon što smo naučili računati s funkcijama izvodnicama, vrijeme je da istražimo njihovu ulogu u kombinatorici. Već smo istaknuli kako je osnovna ideja pokušati direktno naći zatvorenu formu funkcije izvodnice za problem koji promatramo, te onda razvojem u red naći koeficijente koji će imati odgovarajuće kombinatorno značenje.

Obične funkcije izvodnice koriste se za prebrojavanje skupova, odnosno općenitije, za prebrojavanje neuređenih odabira objekata. Stoga ćemo se prvo prisjetiti kombinatornog značenja binomnog koeficijenta $\binom{N}{n}$, u slučaju kada je N prirodan broj. Bilo koji n-člani podskup skupa S zove se n-**kombinacija** skupa S. Na prvoj godini studija naučili smo da je broj n-članih podskupova (n-kombinacija) N-članog skupa upravo jednak binomnom koeficijentu $\binom{N}{n}$.

■ **Primjer 1.3** Pokažimo pomoću funkcija izvodnica da je broj n-članih podskupova N-članog skupa $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ jednak $\binom{N}{n}$. U tu svrhu promotrimo produkt

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_N),$$

pri čemu se izraz $1+x_i$ odnosi na element x_i skupa S, $i = 1, 2, \ldots, N$. Kada množimo ovaj izraz, iz svakog faktora biramo 1 ili x_i. Izbor jedinice znači da odgovarajući element nije u podskupu, dok izbor elementa x_i znači da taj element pripada podskupu. Nadalje, ukoliko bismo se oslobodili zagrada u gornjem produktu, dobili bismo sumu s 2^N članova. Svaki član te sume jednoznačno određuje podskup skupa S. Očito, svakom n-članom podskupu od S odgovara produkt od n različitih vrijednosti x_i. Drugim riječima, svakom n-članom podskupu odgovara produkt $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$, pri čemu je $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq N$. Nas samo zanima koliko ima takvih produkata, pa ih i ne želimo razlikovati. Stoga stavimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = x$. Tada gornji produkt postaje $(1+x)^N$, a svaki n-člani podskup postaje x^n. Dakle, funkcija izvodnica za broj podskupova N-članog skupa S je $f(x) = (1+x)^N$, a ukupan broj n-članih podskupova tog skupa jednak je koeficijentu uz x^n u razvoju funkcije $f(x) = (1+x)^N$ u red. Razvoj funkcije $f(x)$ u red znamo, to je binomni red (1.6) s konačnom sumom, odnosno

$$(1+x)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i.$$

Dakle, koeficijent uz x^n jednak je $\binom{N}{n}$ što smo i htjeli pokazati. ■

■ **Primjer 1.4** U košari se nalaze dvije jabuke, dvije kruške, jedna naranča i jedan limun. Odredimo na koliko načina možemo odabrati četiri voćke iz košare! Slično kao u prethodnom primjeru promatramo produkt

$$(1+x_1+x_1^2)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3)(1+x_4).$$

Izraz $1+x_1+x_1^2$ odnosi se na jabuke te predstavlja broj odabranih jabuka koji može biti 0, 1 ili 2. Na isti način izraz $1+x_2+x_2^2$ predstavlja broj odabranih krušaka. Konačno, izrazi $1+x_3$ i $1+x_4$ odnose se na limune i naranče jer njihov broj može biti 0 ili 1. Naravno, ukoliko bismo se oslobodili zagrada u gornjem produktu dobili bismo članove oblika $x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4}$, pri čemu vrijedi $0 \leq i_1, i_2 \leq 2$ i $0 \leq i_3, i_4 \leq 1$. Budući da odabiremo četiri voćke, nas zanimaju članovi kod kojih je $i_1+i_2+i_3+i_4 = 4$. Ukoliko identificiramo varijable, odnosno stavimo $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$, svaki od tih članova poprima oblik x^4, dok gornji produkt postaje $(1+x+x^2)^2(1+x)^2$. Dakle, funkcija izvodnica za broj odabira voćaka iz košare je $f(x) = (1+x+x^2)^2(1+x)^2$, a mi tražimo koeficijent uz x^4 u pripadnom razvoju u red. Funkciju $f(x)$ razvijamo direktno, korištenjem formula za kvadrat binoma i trinoma. Laganim računom dobivamo da je

$$f(x) = 1+4x+8x^2+10x^3+8x^4+4x^5+x^6.$$

Kako je $\langle x^4 \rangle f(x) = 8$, traženi broj načina jednak je 8. Uočimo da funkcija izvodnica daje i više informacija nego što se tražilo. Naime, iz prethodnog razvoja možemo iščitati sve moguće odabire voćaka. Na primjer, tri voćke možemo odabrati na 10 načina. ■

U prethodna dva primjera identificirali smo različite objekte kako bismo dobili odgovarajuću funkciju izvodnicu. Od sada ćemo taj postupak izostavljati i odmah formirati funkciju izvodnicu kao funkciju jedne varijable.

U Primjeru 1.4 odabirali smo četiri voćke među kojima je moglo biti jednakih. Preciznije, odabirali smo neuređene četvorke u kojima su se neki elementi mogli ponavljati. Prisjetimo se, n-**kombinacija s ponavljanjem** skupa S je bilo koja neuređena n-torka elemenata iz S, pri čemu se elementi mogu ponavljati.

Kombinacije s ponavljanjem možemo također definirati pomoću pojma multiskupa. **Multiskup** je objekt poput skupa u kojem se elementi mogu ponavljati (poredak elemenata nije bitan). Na primjer, multiskup $M = \{a,a,b,c,c,d,d,d\}$ sadrži 8 elemenata, odnosno 2 elementa a, jedan element b, dva elementa c i tri elementa d, što skraćeno zapisujemo u obliku $M = \{a^2,b,c^2,d^3\}$. Također kažemo da je $M = \{a^2,b,c^2,d^3\}$ multiskup na skupu $S = \{a,b,c,d\}$. Nadalje, u multiskupu $N = \{x_1^3, x_2^5, x_3, x_4^\infty\}$ element x_4 se ponavlja neograničen broj puta. Prema tome, n-kombinacija s ponavljanjem skupa S je bilo koji n-člani multiskup na skupu S. Drugim riječima, n-kombinacija s ponavljanjem skupa $S = \{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ je n-kombinacija multiskupa $M = \{x_1^\infty, x_2^\infty, \ldots, x_N^\infty\}$. Uočimo kako smo u Primjeru 1.4 prebrojili sve 4-kombinacije multiskupa $M = \{x_1^2, x_2^2, x_3, x_4\}$.

■ **Primjer 1.5** Odredimo funkciju izvodnicu za niz a_n brojeva n-kombinacija s ponavljanjem N-članog skupa $S = \{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$. U svakoj kombinaciji s ponavljanjem, svaki element x_i, $1 \leq i \leq N$, se ili uopće ne pojavljuje ili se pojavljuje jedanput ili dvaput ili triput itd, pa to pišemo kao sumu

$1+x+x^2+x^3+\cdots$. Prema tome, funkcija izvodnica niza a_n je

$$f(x) = \left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^N = \left(\frac{1}{1-x}\right)^N = (1-x)^{-N}.$$

Sada funkciju $f(x)$ razvijamo svođenjem na binomni red. Preciznije, korištenjem razvoja (1.7) imamo

$$(1-x)^{-N} = (1+(-x))^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{N+n-1}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{N+n-1}{n}x^n.$$

Dakle, broj n-kombinacija s ponavljanjem N-članog skupa jednak je

$$a_n = \langle x^n\rangle(1-x)^{-N} = \binom{N+n-1}{n}.$$

■

Prisjetimo se još jedne važne interpretacije kombinacija s ponavljanjem. Naime, broj n-kombinacija s ponavljanjem N-članog skupa jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1+x_2+\cdots+x_N = n, \tag{1.8}$$

odnosno broju uređenih N-torki $(x_1,x_2,\ldots,x_N)\in\mathbb{N}_0^N$ koje zadovoljavaju jednakost (1.8). Uočimo još da je broj rješenja jednak broju **rasporeda n jednakih predmeta u N različitih kutija**. Tu činjenicu moramo imati na umu jer ćemo mnoge probleme prebrojavanja svoditi na jednadžbe ovog oblika, uz još neke dodatne uvjete.

U prethodnih nekoliko primjera opisali smo osnovnu ideju o upotrebi funkcija izvodnica u kombinatorici. Dakako, pomoću funkcija izvodnica možemo dokazivati i neke važne kombinatorne identitete.

Zadatak 1.3 Neka je $\alpha\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$. Dokažite **Pascalov identitet** za binomne koeficijente:

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}.$$

Rješenje. Iskoristit ćemo razvoj (1.6) u binomni red te izraziti koeficijent uz x^n na dva načina. Uočimo da vrijedi identitet

$$(1+x)^\alpha = (1+x)(1+x)^{\alpha-1} = (1+x)^{\alpha-1} + x(1+x)^{\alpha-1}.$$

Sada ćemo, služeći se razvojem (1.6), odrediti koeficijent uz x^n za lijevu i desnu stranu prethodnog identiteta. Imamo redom $\langle x^n\rangle(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{n}$, $\langle x^n\rangle(1+x)^{\alpha-1} = \binom{\alpha-1}{n}$ i $\langle x^n\rangle x(1+x)^{\alpha-1} = \langle x^{n-1}\rangle(1+x)^{\alpha-1} = \binom{\alpha-1}{n-1}$, odakle direktno slijedi traženi identitet. ■

1.2 Primjene funkcija izvodnica u kombinatorici

U prethodnoj točki smo pomoću funkcija izvodnica izveli formule za broj n-kombinacija (bez ponavljanja i s ponavljanjem) N-članog skupa S. Sada ćemo još neke probleme prebrojavanja riješiti uz pomoć funkcija izvodnica. Općenito, funkcija izvodnica za broj kombinacija s ponavljanjem N-članog skupa $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ jednaka je produktu od N faktora. Ako zahtijevamo da se element x_i u kombinaciji pojavljuje ili samo n_1 puta, ili n_2 puta, …, ili n_j puta, onda i-ti faktor u funkciji izvodnici ima oblik $x^{n_1}+x^{n_2}+\cdots+x^{n_j}$. S druge strane, svakoj n-kombinaciji (s ponavljanjem) odgovara jedno rješenje jednadžbe (1.8), odnosno jedan raspored n jednakih predmeta u N različitih kutija, što ćemo koristiti u zadacima koji slijede.

U Primjerima 1.3, 1.4 i 1.5 prvo smo odredili zatvorene forme odgovarajućih funkcija izvodnica, zatim ih razvili u red te naposlijetku iščitali odgovarajuće koeficijente razvoja. Često nije sasvim jednostavno funkciju izvodnicu razviti u red oblika (1.1), niti je to potrebno. U zadacima koji slijede, odgovarajuće funkcije izvodnice nećemo razviti u red do kraja, nego ćemo ih svesti na oblik iz kojeg lagano možemo odrediti traženi koeficijent razvoja.

Zadatak 1.4 Bacamo tri različite igraće kocke. Na koliko načina zbroj dobivenih brojeva može biti 14?

Rješenje. Uočimo da je ekvivalentno naći broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3=14$, takvih da je $1 \le x_i \le 6$, $i=1,2,3$. Stoga, svakoj komponenti x_1,x_2,x_3 pridružujemo izraz $x+x^2+\cdots+x^6$, pa je pripadna funkcija izvodnica jednaka $f(x)=\left(x+x^2+\cdots+x^6\right)^3$. Sada, primjenom formule za sumu geometrijskog reda imamo da je

$$f(x)=x^3(1+x+x^2+\cdots+x^5)^3=x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}.$$

Dakle, dovoljno je gledati koeficijent uz x^{11} razvoja funkcije $g(x)=(1-x^6)^3(1-x)^{-3}$. Prema tome, funkciju $g(x)$ trebamo svesti na oblik iz kojeg ćemo lagano iščitati koeficijent uz potenciju x^{11}. Kubiranjem izraza $1-x^6$ i razvojem funkcije $(1-x)^{-3}$ u binomni red (1.6) imamo redom

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1-3x^6+3x^{12}-x^{18}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-x)^n \\ &= \left(1-3x^6+3x^{12}-x^{18}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n. \end{aligned}$$

Iz dobivenog oblika funkcije $g(x)$ lagano možemo iščitati koeficijent uz potenciju x^{11}. Prema tome, broj načina bacanja triju kocki sa zbrojem 14 jednak je

$$\langle x^{14}\rangle f(x)=\langle x^{11}\rangle g(x)=\binom{11+2}{2}-3\binom{5+2}{2}=\binom{13}{2}-3\binom{7}{2}=15.$$

■

Zadatak 1.5 Na koliko se načina mogu 24 jabuke podijeliti među četvero djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 jabuka?

Rješenje. Razdiobu jabuka koje svako dijete može dobiti prikazujemo u obliku $x^3+x^4+\cdots+x^8$. Kako je riječ o četvero djece, to je pripadna funkcija izvodnica jednaka $f(x)=(x^3+x^4+\cdots+x^8)^4$. Sada, primjenom formule za sumu geometrijskog reda imamo da je

$$f(x)=x^{12}(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4=x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4=x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4}.$$

Prema tome, dovoljno je gledati koeficijent uz x^{12} razvoja funkcije $g(x)=(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Iz binomnog teorema znamo da je

$$(1-x^6)^4=1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+x^{24},$$

no iz ovog razvoja dovoljno je gledati samo prva tri člana, jer preostale dvije potencije ne utječu na koeficijent uz x^{12}. Štoviše, izraz $(1-x)^{-4}$ razvijamo u binomni red (1.6). Zbog toga je

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-4x^6+6x^{12}-\cdots)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}(-x)^n \\ &= (1-4x^6+6x^{12}-\cdots)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n. \end{aligned}$$

Prema tome, traženi broj podjela jabuka jednak je

$$\langle x^{12}\rangle g(x) = \binom{12+3}{3} - 4\binom{6+3}{3} + 6\binom{3}{3} = \binom{15}{3} - 4\binom{9}{3} + 6\binom{3}{3} = 125.$$

■

Uočimo kako je prethodni zadatak ekvivalentan određivanju broja cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+\cdots+x_8=24$, takvih da je $3\le x_i\le 8$, $i=1,2,\ldots,8$. U idućem zadatku ćemo problem određivanja broja cjelobrojnih rješenja nejednadžbe svesti na određivanje broja cjelobrojnih rješenja odgovarajuće jednadžbe oblika (1.8).

Zadatak 1.6 Neka je a_n broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $x_1+x_2+x_3\le n$, gdje je $x_1\in\{2,3,4\}\cup\{7,8,9,\ldots\}$, $100\le x_2\le 110$ i $x_3\ge 5$. Odredite funkciju izvodnicu niza $(a_n)_{n\ge 0}$ i pomoću nje izračunajte a_{112}.

Rješenje. Uvedimo nepoznanicu $x_4=n-x_1-x_2-x_3$ koja označava koliko se zbroj $x_1+x_2+x_3$ razlikuje od n. Očito je $x_4\ge 0$, pa je ekvivalentno tražiti broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3+x_4=n$, uz dodatni uvjet $x_4\ge 0$. Tražena funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x^3+x^4+x^7+x^8+x^9+\cdots)(x^{100}+\cdots+x^{110})(x^5+x^6+x^7+\cdots)(1+x+x^2+\cdots) \\ &= x^2\cdot x^{100}\cdot x^5\left(1+x+x^2+x^5\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)(1+x+x^2+\cdots+x^{10})\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2 \\ &= x^{107}\left(\frac{1-x^3}{1-x}+\frac{x^5}{1-x}\right)\cdot\frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} \\ &= x^{107}(1-x^3+x^5)(1-x^{11})(1-x)^{-4} \\ &= x^{107}(1-x^3+x^5)(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}(-x)^n \\ &= x^{107}(1-x^3+x^5)(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n. \end{aligned}$$

Očito, koeficijent uz x^{112} jednak je koeficijentu uz x^5 razvoja funkcije $g(x)=(1-x^3+x^5)(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$, pa imamo

$$a_{112} = \langle x^5\rangle g(x) = \binom{8}{3} - \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 47.$$

■

Promotrimo na kraju ove točke i jedan nešto složeniji problem.

Zadatak 1.7 Na raspolaganju imamo kovanice od 1,2 i 5 kuna. Na koliko načina možemo usitniti novčanicu od 20 kuna

(a) ako ćemo upotrijebiti najviše četiri kovanice od 1 kune,

(b) bez ikakvih ograničenja na broj pojedinih kovanica?

Rješenje. (a) Označimo sa n_1, n_2, n_5 redom broj kovanica od 1, 2 i 5 kuna. Očito, tražimo broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $n_1 + 2n_2 + 5n_5 = 20$ takvih da je $0 \leq n_1 \leq 4$. Drugim riječima, treba odrediti broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, pri čemu je $0 \leq x_1 \leq 4$, x_2 je nenegativan paran broj i x_3 je nenegativni višekratnik broja 5. Tražena funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\\
&= \frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\\
&= \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.
\end{aligned}$$

Rastavimo sada dobiveni izraz na parcijalne razlomke. Stavimo li

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x},$$

oslobađanjem nazivnika i sređivanjem po potencijama dobivamo da je

$$(-A+C)x^2 + (B-2C)x + A + B + C = 1,$$

pa mora vrijediti $A = C$, $B = 2C$ i $A + B + C = 1$. Rješavanjem tog sustava dobivamo $A = C = \frac{1}{4}$ i $B = \frac{1}{2}$. Sada lagano razvijamo funkciju $f(x)$ u red korištenjem razvoja (1.6). Imamo redom:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-1)^n x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3+(-1)^n}{4}x^n.
\end{aligned}$$

Iznos od n kuna može se uz zadane uvjete usitniti na $a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}$ načina, pa je $a_{20} = 11$.

(b) Ukoliko nemamo nikakvih ograničenja za broj kovanica, tražena funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}.
\end{aligned}$$

Dobivena zatvorena forma nije pogodna za rastavljanje na parcijalne razlomke jer se faktoriziranjem nazivnika pojavljuju kvadratni faktori s iracionalnim koeficijentima. S druge strane, promatrajući početni oblik funkcije izvodnice, nakon provedenih množenja tipični član razvoja će biti oblika

$$x^{n_1+2n_2+5n_5},$$

pri čemu je $n_1, n_2, n_5 \geq 0$. Svaki takav član daje jedan način usitnjavanja neke svote, a nas zanimaju slučajevi kada je $n_1 + 2n_2 + 5n_5 = 20$. Sada se traženi koeficijent $\langle x^{20} \rangle f(x)$ dobiva strpljivim računanjem, ili još bolje, pogodnim računalnim programom za množenje polinoma. Dobiva se $\langle x^{20} \rangle f(x) = 29$.

■

U (a) dijelu prethodnog zadatka dobili smo funkciju izvodnicu koju smo lagano razvili u red, dok u (b) dijelu zadatka to nismo bili u stanju napraviti. Naravno, rezultat smo mogli dobiti i listanjem svih mogućnosti, ali uvijek ostaje sumnja jesmo li neke izostavili. Međutim, metoda funkcija izvodnica daje sistematski način za takva računanja kod znatno složenijih pitanja.

Matematički računalni alati kao što su *Mathematica* ili *Matlab* omogućavaju da se za funkciju $f(x)$ zapisanu kao produkt polinoma vrlo lako očita koeficijent uz bilo koju potenciju od x, a da se sama funkcija $f(x)$ simbolički ne izračunava. To je od znatne koristi ako imamo polinome s velikim brojem članova, a nismo u stanju funkciju $f(x)$ razviti u red.

1.3 Eksponencijalne funkcije izvodnice

Obične funkcije izvodnice koristili smo kod prebrojavanja rasporeda u kojima poredak elemenata nije bio bitan (kombinacije skupova i multiskupova, rasporedi jednakih predmeta u različite kutije itd.). U slučajevima kada je poredak objekata bitan korisnije su tzv. **eksponencijalne funkcije izvodnice**.

Definicija 1.2 Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih (ili kompleksnih) brojeva. Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je formalni red potencija

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n. \tag{1.9}$$

■

Uočimo da je eksponencijalna funkcija izvodnica za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ u stvari obična funkcija izvodnica za niz $(a_n/n!)_{n\geq 0}$. Pravila za računanje s eksponencijalnim funkcijama izvodnicama ista su kao za obične funkcije izvodnice jer se također radi o formalnim redovima potencija.

Prilikom određivanja zatvorene forme eksponencijalne funkcije izvodnice, često će nam od velike pomoći biti razvoj eksponencijalne funkcije u red:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.10}$$

■ **Primjer 1.6** Odredimo eksponencijalne funkcije izvodnice nizova
(a) $a_n = 1$ (b) $b_n = n!$ (c) $c_n = n^2$, $n \geq 0$.

(a) Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je upravo razvoj (1.10), tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

(b) Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(b_n)_{n\geq 0}$ je

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(c) Formalnim deriviranjem reda (1.10) i množenjem sa x dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = xe^x.$$

Ponovno deriviranje daje

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = (1+x)e^x,$$

odakle množenjem sa x dobivamo eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza $(c_n)_{n\geq 0}$, odnosno

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = x(1+x)e^x.$$

■

Najvažniji uređeni odabiri objekata s kojima smo se upoznali na prvoj godini studija su permutacije. Prisjetimo se, n-**permutacija** N-članog skupa S, $n \leq N$, je bilo koja uređena n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ međusobno različitih elemenata x_i iz S. Ukoliko je $n = N$ n-permutaciju nazivamo jednostavno permutacijom. S druge strane, uređenu n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne nužno različitih elemenata skupa S nazivamo n-**permutacijom s ponavljanjem**.

Obrazložimo sada zašto su eksponencijalne funkcije izvodnice pogodne za prebrojavanje uređenih odabira objekata. U tu svrhu, krenimo od obične funkcije izvodnice za broj n-kombinacija N-članog skupa. Naime, u Primjeru 1.3 smo pokazali da je funkcija izvodnica niza $a_n = \binom{N}{n}$ jednaka $(1+x)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i$. Shvatimo li taj razvoj kao eksponencijalnu funkciju izvodnicu, vidimo da ona predstavlja eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza $(b_n)_{n\geq 0}$, pri čemu je $a_n = b_n/n!$. Zbog toga je $b_n = n! a_n = n! \binom{N}{n} = N(N-1)\cdots(N-n+1)$, odnosno $(1+x)^N$ je eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(b_n)_{n\geq 0}$. S druge strane, b_n je jednak umnošku binomnog koeficijenta $\binom{N}{n}$ i $n!$. Kako $\binom{N}{n}$ predstavlja sve n-člane podskupove, množenjem s $n!$ dobivamo sve uređene n-torke elemenata n-članog podskupa. Zbog toga niz $(b_n)_{n\geq 0}$ predstavlja broj n-permutacija N-članog skupa. U idućem primjeru ćemo broj n-permutacija N-članog skupa izvesti direktno, no imajmo na umu da uređenim odabirima objekata odmah pridružujemo eksponencijalnu funkciju izvodnicu.

■ **Primjer 1.7** Odredimo broj n-permutacija (s ponavljanjem i bez ponavljanja) N-članog skupa S pomoću pripadnih eksponencijalnih funkcija izvodnica.

Neka je a_n broj n-permutacija s ponavljanjem N-članog skupa S. Svaki element N-članog skupa S se u n-permutaciji s ponavljanjem ili ne pojavljuje ili se pojavljuje jedanput ili dvaput ili triput itd, pa to pišemo kao sumu $1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$. Prema tome, eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^N = e^{Nx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} x^n.$$

Zbog toga vrijedi $\langle x^n \rangle f(x) = \dfrac{N^n}{n!} = \dfrac{a_n}{n!}$, odakle je $a_n = N^n$, što znamo od prije.

S druge strane, neka je b_n broj n-permutacija (bez ponavljanja) N-članog skupa S, $n \leq N$. Svaki element N-članog skupa se u n-permutaciji ili ne pojavljuje ili se pojavljuje jedanput, pa je eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(b_n)_{n\geq 0}$ jednaka

$$g(x) = \left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)^N = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} x^n.$$

Zbog toga je $\langle x^n \rangle g(x) = \dbinom{N}{n} = \dfrac{b_n}{n!}$, odakle je $b_n = n! \dbinom{N}{n} = N(N-1)\cdots(N-n+1)$, što smo dobili i prije. U slučaju kada je $N = n$ dobivamo da je broj permutacija N-članog skupa jednak $N!$.

■

Permutacije s ponavljanjem možemo također definirati pomoću pojma multiskupa. Naime, n-permutacija multiskupa $M = \{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_N^{n_N}\}$ je bilo koja uređena n-torka elemenata iz skupa $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, pri čemu se element x_i može pojavljivati najviše n_i puta. Prema tome, n-permutacija s ponavljanjem skupa $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ je, u stvari, n-permutacija multiskupa $S = \{x_1^\infty, x_2^\infty, \dots, x_N^\infty\}$.

Zadatak 1.8 Koliko različitih riječi duljine 4 možemo sastaviti od slova riječi ANANAS?

Rješenje. Jasno je da svaka riječ duljine n predstavlja n-permutaciju multiskupa $M = \{A^3, N^2, S\}$. Neka je a_n broj riječi duljine n koje se mogu sastaviti od slova riječi ANANAS. Funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right),$$

zato jer se slovo A može pojaviti najviše 3 puta, slovo N najviše 2 puta te slovo S najviše jedanput. Kada izmnožimo gornji izraz, koeficijent uz x^n će biti $\frac{a_n}{n!}$. Dobivamo,

$$f(x) = 1 + 3x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{19}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{12}x^6.$$

Stoga je $\frac{a_4}{4!} = \frac{19}{12}$, odakle je $a_4 = 38$. ∎

Uočimo kako eksponencijalna funkcija izvodnica dobivena u prethodnom zadatku sadrži informaciju o svim mogućim riječima koje se mogu sastaviti od slova riječi ANANAS. Na primjer, od slova te riječi možemo sastaviti $a_3 = 3! \cdot \frac{19}{6} = 19$ riječi duljine 3.

Zadatak 1.9 Ternarni niz duljine n je uređena n-torka sastavljena od znamenki 0, 1 i 2. Koliko ima ternarnih nizova duljine n

(a) koji sadrže bar jednu nulu i bar jednu jedinicu,
(b) koji sadrže paran broj jedinica i neparan broj nula?

Rješenje. (a) Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ broj traženih nizova duljine n. Eksponencijalna funkcija izvodnica tog niza je

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right),$$

zato jer se nula i jedinica pojavljuju barem jedanput. Sada, iskoristimo li razvoj eksponencijalne funkcije u red imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^x - 1)^2 e^x = \left(e^{2x} - 2e^x + 1\right) e^x = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{n!} x^n, \end{aligned}$$

odakle je $a_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

(b) Neka je $(b_n)_{n\geq 0}$ broj traženih nizova duljine n. Kako je broj jedinica paran, a broj nula neparan, pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(b_n)_{n\geq 0}$ je

$$g(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right).$$

Uočimo da su izrazi koji sadrže samo parne ili samo neparne potencije razvoji hiperbolnih funkcija $\operatorname{sh} x$ (sinus hiperbolni) i $\operatorname{ch} x$ (kosinus hiperbolni) u red. Naime, kako je

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

slijedi da je

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \text{i} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Zbog toga je

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) e^x = \frac{1}{4}\left(e^{3x} - e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{4} \cdot \frac{x^n}{n!},$$

odakle je $b_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$.

■

Prisjetimo se na kraju još jedne važne interpretacije permutacija. Naime, svaka n-permutacija s ponavljanjem jednoznačno određuje funkciju $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}$ sa n-članog u N-člani skup. Slično, n-permutacija bez ponavljanja jednoznačno određuje injekciju sa n-članog u N-člani skup. To slikovito možemo opisati **rasporedom n različitih predmeta u N različitih kutija**. Naime, svaka funkcija sa n-članog u N-člani skup jednoznačno određuje jedan raspored n različitih predmeta u N različitih kutija, dok injekcija jednoznačno određuje takav raspored da u svakoj kutiji bude najviše jedan predmet.

U Primjeru 1.7 smo pokazali da ukupno ima N^n funkcija sa n-članog u N-člani skup. Među njima je $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ injekcija ako je $n \le N$, odnosno $N!$ bijekcija ako je $N = n$. Preostaje još prebrojati surjekcije. Na prvoj godini studija taj smo broj dobili pomoću formule uključivanja-isključivanja, no sada ćemo broj surjekcija izvesti pomoću pripadne eksponencijalne funkcije izvodnice.

Zadatak 1.10 Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za broj surjekcija sa n-članog skupa na m-člani skup te pomoću nje nađite taj broj.

Rješenje. Neka je a_n broj surjekcija sa n-članog skupa na m-člani skup. Sukladno prethodnoj diskusiji taj je broj jednak broju rasporeda n različitih predmeta u m različitih kutija tako da niti jedna kutija nije prazna. Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\ge 0}$ je

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^m = (e^x - 1)^m,$$

zato jer je u svakoj kutiji barem jedan predmet. Sada, primjenom binomnog teorema i razvoja eksponencijalne funkcije u red, te zamjenom poretka sumacije slijedi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i (e^x)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i e^{(m-i)x} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} (m-i)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{i} (-1)^i (m-i)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Dakle, traženi broj surjekcija je $a_n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$. ■

1.4 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.11 Odredite funkciju izvodnicu niza
(a) $a_n = 5^n$, $n \geq 0$,
(b) $b_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$.

Zadatak 1.12 Odredite funkciju izvodnicu za niz $(a_n)_{n\geq 0}$, gdje je a_n broj podskupova nekog n-članog skupa.

Zadatak 1.13 Odredite funkcije izvodnice za nizove

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 1, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zadatak 1.14 Odredite funkciju izvodnicu niza

$$a_n = \frac{n^3}{n^2+3n+2}, \quad n \geq 0.$$

Zadatak 1.15 Neka je $f(x)$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$. Izrazite pomoću $f(x)$ funkciju izvodnicu niza $b_n = n^2 a_n$, $n \geq 0$. Služeći se dobivenim rezultatom odredite funkciju izvodnicu niza

$$b_n = n^2\binom{\alpha}{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.16
(a) Neka je $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj. Po definiciji stavljamo $H_0 = 0$. Odredite funkciju izvodnicu niza $(H_n)_{n\geq 0}$.
(b) Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Odredite funkciju izvodnicu niza $(s_n)_{n\geq 0}$, gdje je

$$s_n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \cdots + \binom{\alpha}{n}.$$

(c) Poopćite (a) i (b) dio zadatka.

Zadatak 1.17 Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica
(a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$,
(b) $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)(1-2x)}$.

Zadatak 1.18 Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica $f(x) = \sqrt{1-x^3}$. Služeći se dobivenim rezultatom izračunajte $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$.

Zadatak 1.19 Funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ dana je formulom $f(x) = (1+x+x^2)^{2019}$. Izračunajte $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots$.

Zadatak 1.20 Odredite funkciju izvodnicu za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ u sljedeća dva slučaja: a_n je broj rasporeda n jednakih kuglica
(a) u 4 različite kutije,
(b) u 4 različite kutije tako da niti jedna kutija nije prazna.

Zadatak 1.21 Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

takvih da je $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $0 \leq x_3 \leq 12$.

Zadatak 1.22 Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

takvih da je $x_1, x_2 \geq -3$, $-5 \leq x_3 \leq 5$ i $x_4 \geq 0$.

Zadatak 1.23 Ante, Marko i Luka trebaju međusobno podijeliti 12 bombona. Ante ne želi manje od 2 bombona, Marko želi najviše 8 bombona, a Luka nema nikakvih posebnih želja. Na koliko načina njih trojica mogu podijeliti bombone?

Zadatak 1.24 Troje djece treba podijeliti 8 jabuka. Prvo dijete može dobiti samo paran broj jabuka, a drugo najviše 4 jabuke. Na koliko se načina mogu podijeliti jabuke tako da svako dijete dobije barem jednu jabuku, a da prethodni uvjeti budu zadovoljeni?

Zadatak 1.25 Na koliko načina Anica, Marica, Pero i Ivica mogu podijeliti 40 jagoda tako da Ivica dobije barem jednu, Pero barem dvije, a Marica i Anica najviše 5 jagoda?

Zadatak 1.26 Četiri djevojke Ane, Mare, Luce i Kate trebaju međusobno podijeliti 24 jednake ruže. Na koliko načina one to mogu napraviti tako da Ane dobije barem 6, a najviše 11 ruža, a preostale djevojke barem 2, a najviše 7 ruža?

Zadatak 1.27 U vrećici se nalazi 40 bombona koje trebaju podijeliti Ivan, Ana, Marko i Marina. Na koliko načina oni mogu raspodijeliti te bombone ako Ivan i Ana moraju dobiti paran broj bombona, ali najviše 12, a Marko i Marina neparan broj bombona, ali najviše 13?

Zadatak 1.28 Pismeni ispit iz diskretne matematike sastoji se od 5 zadataka, od kojih svaki nosi maksimalno 20 bodova. Student je redom osvojio 18, 2, 5, 5, 10 bodova, dakle ukupno 40 bodova. Na koliko mu načina profesor može pokloniti 5 bodova koji mu nedostaju za prolaz (tj. povećati broj bodova na nekim zadacima tako da zbroj bude 45)?

Zadatak 1.29 Na koliko se načina može 10 čokoladica i 15 bombona raspodijeliti na šestero djece tako da svako dijete dobije jednu ili dvije čokoladice i ne više od 4 bombona?

Zadatak 1.30 Za dva niza znamenki duljine n, sastavljenih od znamenki $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ kažemo da su *ekvivalentni* ako je jedan niz permutacija drugog. Na primjer, 10075, 01057, 00751 su ekvivalentni nizovi duljine 5.

(a) Koliko ukupno ima klasa ekvivalencije među svim nizovima duljine 5?
(b) Koliko ukupno ima klasa ekvivalencije među nizovima duljine 5 kod kojih se znamenke $5,7,9$ mogu pojaviti najviše jednom?

Zadatak 1.31 U novčaniku imamo 7 kovanica od jedne kune, 5 kovanica od dvije kune, 4 kovanice od 5 kuna, 6 novčanica od deset kuna i 3 novčanice od dvadeset kuna. Napišite funkciju izvodnicu za broj načina na koje možemo platiti račun od n kuna.

Zadatak 1.32 Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza

(a) $a_n = 5^n$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geq 0$.

Zadatak 1.33 Odredite običnu funkciju izvodnicu niza čija je eksponencijalna funkcija izvodnica $f(x) = (1-x)e^{-x}$.

Zadatak 1.34 Koliko različitih riječi duljine 5 možemo sastaviti od slova riječi MONOTON?

Zadatak 1.35 Zgrada ima 5 katova. U prizemlju je u lift ušlo 8 ljudi. Na koliko načina oni mogu izaći iz lifta tako da na svakom katu izađe barem jedan, ali najviše dva čovjeka?

Zadatak 1.36 Svemirska istraživanja su pokazala da organska materija na Marsu posjeduje DNK sastavljenu od četiri simbola: X, Y, Z, W. Poznato je da se u svakom nizu marsovskih DNK pojavljuje neparan broj simbola X, paran broj simbola Y te barem jedan simbol Z. Za simbol W nema nikakvih ograničenja. Koliko postoji marsovskih nizova DNK duljine n koji zadovoljavaju navedene uvjete?

Zadatak 1.37 Koliko ima binarnih nizova duljine n koji imaju barem dvije nule i neparan broj jedinica?

Zadatak 1.38 U vlaku se nalazi $n \geq 2$ putnika. Na koliko načina oni mogu izaći na četiri stanice tako da na prvoj stanici izađe najviše jedan putnik, na drugoj stanici paran broj putnika, na trećoj barem jedan putnik, a na četvrtoj svi koji su ostali u vlaku? Putnike i stanice međusobno razlikujemo!

Rješenja zadataka

1.11 (a) Primjenom formule za sumu geometrijskog reda slijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \frac{1}{1-5x}.$$

(b) Koristimo formalnu derivaciju i integral geometrijskog reda tj. imamo

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt \\ &= x \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln|1-x|. \end{aligned}$$

1.12 Znamo da je $a_n = 2^n$, pa je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$.
1.13 Funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je

$$f(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots = x(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

Kako bismo našli funkciju izvodnicu niza $(b_n)_{n\geq 0}$, krenimo od razvoja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right).$$

Integriranjem dobivamo funkciju izvodnicu niza $(b_n)_{n\geq 0}$, tj.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}.$$

1.14 Nakon dijeljenja polinoma i rastavljanja na parcijalne razlomke, niz $(a_n)_{n\geq 0}$ se može zapisati u obliku

$$a_n = n - 3 - \frac{1}{n+1} + \frac{8}{n+2}.$$

Sada, formalnim deriviranjem geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ te množenjem sa x dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, odnosno funkcija izvodnica niza $b_n = n$ ima oblik $\frac{x}{(1-x)^2}$. Funkcija izvodnica niza $c_n = -3$ je $-\frac{3}{1-x}$, a formalnim integriranjem geometrijskog reda dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln|1-x|,$$

tj. funkcija izvodnica niza $d_n = -\frac{1}{n+1}$ ima oblik $\frac{1}{x}\ln|1-x|$. Slično, funkcija izvodnica niza $e_n = \frac{8}{n+2}$ je $\frac{8}{x^2}\left(-\ln|1-x| - x\right)$, pa je funkcija izvodnica zadanog niza jednaka

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} + \frac{1}{x}\ln|1-x| + \frac{8}{x^2}\left(-\ln|1-x| - x\right).$$

1.15 Formalnim deriviranjem razvoja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ slijedi $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, odnosno $xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$. Deriviranjem prethodne relacije slijedi $f'(x) + xf''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1}$, odakle množenjem sa x dobivamo jednakost

$$xf'(x) + x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n.$$

Dakle, funkcija izvodnica niza $b_n = n^2 a_n$, $n \geq 0$, je $g(x) = xf'(x) + x^2 f''(x)$. Ako je $a_n = \binom{\alpha}{n}$, onda je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$, zbog razvoja u binomni red. Prema tome, funkcija izvodnica niza $b_n = n^2 \binom{\alpha}{n}$ je

$$g(x) = xf'(x) + x^2 f''(x) = \alpha x(1+x)^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)x^2(1+x)^{\alpha-2} = \alpha x(1+\alpha x)(1+x)^{\alpha-2}.$$

1.16 (a) Funkcija izvodnica niza $a_n = 1$, $n \geq 0$, je $f(x) = \frac{1}{1-x}$, zato jer je

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Formalnim integriranjem prethodne relacije dobivamo

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln\frac{1}{1-x},$$

odnosno $g(x) = \ln\frac{1}{1-x}$ je funkcija izvodnica niza $b_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $b_0 = 0$. Sada, kako je $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, slijedi da je niz $(H_n)_{n\geq 0}$ konvolucija nizova $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$. Prema pravilu produkta slijedi da je funkcija izvodnica niza $(H_n)_{n\geq 0}$ jednaka

$$h(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}.$$

(b) Funkcija izvodnica niza $a_n = 1$, $n \geq 0$, je $f(x) = \frac{1}{1-x}$, a funkcija izvodnica niza $b_n = \binom{\alpha}{n}$, $n \geq 0$, je $g(x) = (1+x)^\alpha$, zbog razvoja u binomni red. Konvolucija nizova $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ je upravo niz $(s_n)_{n\geq 0}$, zato jer je $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i}$. Zato je funkcija izvodnica niza $(s_n)_{n\geq 0}$ jednaka

$$s(x) = f(x)g(x) = \frac{(1+x)^\alpha}{1-x}.$$

(c) Traženo poopćenje glasi ovako: ako je $f(x)$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$, onda je $\frac{f(x)}{1-x}$ funkcija izvodnica niza parcijalnih suma, tj. niza $(b_n)_{n\geq 0}$, gdje je $b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
1.17 (a) Imamo da je

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{2-(1-x)}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1,$$

odakle je

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \geq 1. \end{cases}$$

(b) Rastavljanjem na parcijalne razlomke i korištenjem razvoja u geometrijski red slijedi

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(3\cdot 2^n - 2)x^n,$$

odakle je $a_n = 3\cdot 2^n - 2, n \geq 0$.
1.18 Uvrstimo li $y = -x^3$ i $\alpha = \frac{1}{2}$ u razvoj $(1+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} y^k$, dobivamo $\sqrt{1-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-x)^{3k}$, odakle je $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$, $a_{3k} = (-1)^k\binom{1/2}{k}$, $k \geq 0$, odnosno

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{3}}\binom{\frac{1}{2}}{\frac{n}{3}}, & 3 \mid n \\ 0, & 3 \nmid n. \end{cases}$$

Kako je $f^{(n)}(0) = n!\cdot a_n$, slijedi

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{3}} n!\binom{\frac{1}{2}}{\frac{n}{3}}, & 3 \mid n \\ 0, & 3 \nmid n. \end{cases}$$

1.19 Kako je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, slijedi da je

$$\begin{aligned} f(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots. \end{aligned}$$

Oduzimanjem prethodnih dviju relacija dobivamo da je $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$. S druge strane, $f(x) = (1+x+x^2)^{2019}$, pa je $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{3^{2019}-1}{2}$.
1.20 (a) Tražena funkcija izvodnica je $f(x) = (1+x+x^2+\cdots)^4 = (1-x)^{-4}$.
(b) Tražena funkcija izvodnica je $f(x) = (x+x^2+x^3+\cdots)^4 = x^4(1-x)^{-4}$.
1.21 Funkcija izvodnica ima oblik

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^7)(1+x+x^2+\cdots+x^{12}) \\ &= \frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x}\cdot\frac{1-x^{13}}{1-x} = (1-x^8-x^{11}-x^{13}+\ldots)(1-x)^{-3} \\ &= (1-x^8-x^{11}-x^{13}+\ldots)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k\right), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$ i svojstvo simetrije binomnih koeficijenata. Stoga je koeficijent uz potenciju x^{15} jednak $\binom{17}{2}-\binom{9}{2}-\binom{6}{2}-\binom{4}{2}=79$.

1.22 Uz supstitucije $y_1 = x_1+3$, $y_2 = x_2+3$ i $y_3 = x_3+5$, dana jednadžba poprima oblik $y_1+y_2+y_3+x_4 = 31$, uz uvjete $y_1, y_2, x_4 \geq 0$ i $0 \leq y_3 \leq 10$. Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)^3(1+x+x^2+\cdots x^{10})\\
&= \frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1-x^{11}}{1-x} = (1-x^{11})(1-x)^{-4}\\
&= (1-x^{11})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k = (1-x^{11})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k.
\end{aligned}$$

Mi tražimo koeficijent uz potenciju x^{31}, a on je jednak $\binom{34}{3}-\binom{23}{3}=4213$.

1.23 Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x^3+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^8)(1+x+x^2+\cdots)\\
&= \frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = (x^2-x^{11})(1-x)^{-3}\\
&= (x^2-x^{11})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-x)^k = (x^2-x^{11})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k,
\end{aligned}$$

odakle je $\langle x^{12}\rangle f(x) = \binom{12}{2}-\binom{3}{2}=63$.

1.24 Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x^4+x^6+\cdots)(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3+\cdots)\\
&= x^4(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+\cdots)\\
&= x^4\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = x^4(1+x^2)(1-x)^{-2}\\
&= (x^4+x^6)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-x)^k = (x^4+x^6)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,
\end{aligned}$$

odakle je $\langle x^8\rangle f(x) = 5+3=8$.

1.25 Ako Ivica odmah dobije jednu jagodu, a Pero dvije, preostaje podijeliti 37 jagoda tako da Anica i Marica dobiju najviše 5 jagoda. Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)^2(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2 = (1-x^6)^2(1-x)^{-4}\\
&=(1-2x^6+x^{12})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k = (1-2x^6+x^{12})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k,
\end{aligned}$$

pa je $\langle x^{37}\rangle f(x) = \binom{40}{3}-2\binom{34}{3}+\binom{28}{3}=1\,188$.

1.26 Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^6+x^7+\ldots+x^{11})(x^2+x^3+\ldots+x^7)^3 = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4}\\
&= x^{12}\left(1-4x^6+6x^{12}-\ldots\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-4}{k}x^k\\
&= x^{12}\left(1-4x^6+6x^{12}-\ldots\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^4,
\end{aligned}$$

pa je $\langle x^{24}\rangle f(x) = \binom{15}{3}-4\binom{9}{3}+6\binom{3}{3}=125$.

1.27 Tražena funkcija izvodnica je

$$f(x) = (1+x^2+\ldots+x^{12})^2(x+x^3+\ldots+x^{13})^2 = x^2\left(\frac{1-x^{14}}{1-x^2}\right)^4,$$

a mi trebamo odrediti koeficijent uz potenciju x^{40}. Uvedemo li supstituciju $x^2 = y$, dovoljno je naći koeficijent uz y^{19} u izrazu

$$\left(\frac{1-y^7}{1-y}\right)^4 = (1-y^7)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} y^k = (1-y^7)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} y^k,$$

a on je jednak $\binom{22}{3} - 4\binom{15}{3} + 6\binom{8}{3} = 56$.
1.28 Traženi broj načina jednak je broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$, uz uvjete $x_1 \leq 2$, $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Pripadna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2)(1+x+x^2+\cdots)^4 = (1+x+x^2)(1-x)^{-4} \\ &= (1+x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n, \end{aligned}$$

a rješenje je koeficijent uz potenciju x^5. Dakle, dobivamo $\langle x^5 \rangle f(x) = \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3} = 111$.
1.29 Podijelimo najprije čokoladice. Naravno, to možemo napraviti pomoću funkcije izvodnice, ali možemo i direktno. Naime, ako svako dijete odmah dobije po jednu čokoladicu, ostaje odabrati četvero djece koja će dobiti po još jednu čokoladicu, a to možemo napraviti na $\binom{6}{4} = 15$ načina. Za podjelu bombona funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+x^3+x^4)^6 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^6 = (1-x^5)^6(1-x)^{-6} \\ &= (1-6x^5+15x^{10}-20x^{15}+\cdots) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-6}{k} (-x)^k \\ &= (1-6x^5+15x^{10}-20x^{15}+\cdots) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^k, \end{aligned}$$

pa je $\langle x^{15} \rangle f(x) = -20\binom{5}{5} + 15\binom{10}{5} - 6\binom{15}{5} + \binom{20}{5} = 1246$. Konačno, ukupan broj raspodjela jednak je $15 \cdot 1246 = 18\,690$.
1.30 Svaka klasa ekvivalencije jednoznačno je određena brojem nula, jedinica, dvojki,... i devetki. Ako sa x_i označimo broj pojavljivanja znamenke i u klasi ekvivalencije, onda u klasi ekvivalencije duljine 5 mora vrijediti $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_9 = 5$.

(a) Tražimo broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja gornje jednadžbe. Taj broj jednak je broju 5-kombinacija s ponavljanjem 10-članog skupa, a on je jednak $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5} = 2002$.

(b) Tražimo broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_9 = 5$ za koje vrijedi $0 \leq x_5, x_7, x_9 \leq 1$. Odgovarajuća funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^3(1+x+x^2+\cdots)^7 = (1+x)^3(1-x)^{-7} \\ &= (1+3x+3x^2+x^3) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} (-x)^n \\ &= (1+3x+3x^2+x^3) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+6}{6} x^n, \end{aligned}$$

pa je $\langle x^5 \rangle f(x) = \binom{11}{6} + 3\binom{10}{6} + 3\binom{9}{6} + \binom{8}{6} = 1372$.

1.31 Broj načina isplate jednak je broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 = n,$$

takvih da je $0 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 4$, $0 \leq x_4 \leq 6$ i $0 \leq x_5 \leq 3$. Odgovarajuća funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}) \\ \cdot (1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}). \end{aligned}$$

1.32 (a) Tražena eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!} = e^{5x}.$$

(b) Krenimo od reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. Podijelimo li obje strane prethodne relacije sa x, dobivamo traženu eksponencijalnu funkciju izvodnicu, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

1.33 Razvijmo funkciju $f(x) = (1-x)e^{-x}$ u red. Imamo

$$\begin{aligned} f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!} x^n, \end{aligned}$$

pa je $a_n = (-1)^n (n+1)$. Sada trebamo naći običnu funkciju izvodnicu niza $(a_n)_{n \geq 0}$. Krenimo od relacije $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$, koju dobivamo množenjem geometrijskog reda sa x. Deriviranjem te relacije dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$. Konačno, zamijenimo li u posljednjoj jednakosti x sa $-x$ dobivamo da je obična funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n \geq 0}$ jednaka $\frac{1}{(1+x)^2}$.

1.34 Tražimo broj 5-permutacija multiskupa $\{O^3, N^2, M, T\}$. Neka je a_n broj n-permutacija multiskupa $\{O^3, N^2, M, T\}$. Tada je pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica jednaka

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) (1+x)^2.$$

Kada izmnožimo gornji izraz, koeficijent uz x^n će biti $\frac{a_n}{n!}$. Dobivamo da je

$$f(x) = \frac{1}{12}x^7 + \frac{7}{12}x^6 + \frac{25}{12}x^5 + \frac{19}{4}x^4 + \frac{43}{6}x^3 + 7x^2 + 4x + 1,$$

pa je $a_5 = 5! \cdot \frac{25}{12} = 250$.

1.35 Uočimo da je traženi broj jednak broju rasporeda 8 različitih predmeta u 5 različitih kutija tako da je u svakoj kutiji barem jedan, ali najviše dva predmeta. Odgovarajuća eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \left(\frac{x^2}{2}\right)^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{5}{k}}{2^{5-k}} x^{10-k}.$$

Nas zanima koeficijent uz potenciju x^8, a dobivamo ga za $k=2$. Prema tome, označimo li traženi broj načina s a_8 imamo da je

$$a_8 = 8!\cdot\frac{\binom{5}{2}}{2^3} = 50400.$$

1.36 Neka je a_n traženi broj. Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) \\ &= \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x\cdot(e^x-1)\cdot e^x = \frac{e^{4x}-e^{3x}+e^{-x}-1}{4}, \end{aligned}$$

odakle je $\langle x^n\rangle f(x) = \frac{4^n-3^n+(-1)^n}{4n!}$, odnosno $a_n = n!\langle x^n\rangle f(x) = \frac{4^n-3^n+(-1)^n}{4}$.

1.37 Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ traženi niz. Pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right) \\ &= (e^x-x-1)\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^{2x}-1-xe^x+xe^{-x}-e^{-x}+e^{-x}). \end{aligned}$$

Sada, razvojem eksponencijalne funkcije u red imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^n}{n!}-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2(n-1)!}-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n!}+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{n!}-\frac{1}{2(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!}-\frac{1}{2n!}+\frac{(-1)^n}{2n!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-n-1+(-1)^{n-1}(n-1)}{2n!}x^n, \end{aligned}$$

odakle je $a_n = n!\langle x^n\rangle f(x) = \frac{2^n-n-1+(-1)^{n-1}(n-1)}{2}$.

1.38 Zbog uvjeta zadatka, tražena eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) \\ &= (1+x)\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot(e^x-1)\cdot e^x \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x+xe^{3x}+xe^x-e^{2x}-1-xe^{2x}-x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}-x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n-1}}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n-1}}{n!}x^n-x\right), \end{aligned}$$

odakle je

$$\langle x^n\rangle f(x) = \frac{(n+3)3^{n-1}-(n+2)2^{n-1}+n+1}{2n!}.$$

Dakle, traženi broj izlazaka iz vlaka jednak je $n!\langle x^n\rangle f(x) = \frac{(n+3)3^{n-1}-(n+2)2^{n-1}+n+1}{2}$.

1.5 Istraživački problemi

Problem 1.1 Na raspolaganju imamo kovanice od 1,2 i 5 kuna.

(a) Služeći se funkcijom izvodnicom dobivenom u Zadatku 1.7 i pogodnim računalnim alatom, izračunajte na koliko se načina mogu usitniti novčanice od 100 i 200 kuna pomoću danih kovanica.

(b) Napišite algoritam i odgovarajući računalni program za broj načina usitnjavanja bilo kojeg iznosa kuna pomoću danih kovanica.

Problem 1.2 Neka je X diskretna **slučajna varijabla** koja poprima nenegativne cjelobrojne vrijednosti, dana zakonom razdiobe

$$p_n = P(X = n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti) slučajne varijable X definiramo kao

$$G_X(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n.$$

Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne varijable X definiramo kao $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$.

(a) Dokažite da je matematičko očekivanje slučajne varijable X jednako derivaciji pripadne funkcije izvodnice u točki $x = 1$, odnosno $E(X) = G_X'(1)$.

(b) Simetričan novčić bacamo n puta. Neka slučajna varijabla X označava broj pisama koja su se pojavila u tih n bacanja. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable X te pomoću nje izračunajte $E(X)$.

(c) Simetričan novčić bacamo sve dok se ne pojavi pismo. Neka slučajna varijabla X označava redni broj pokusa u kojem se pojavilo pismo. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable X te pomoću nje izračunajte $E(X)$.

(d) **Poissonova slučajna varijabla** X s parametrom $\lambda > 0$ dana je zakonom razdiobe

$$p_n = P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n \geq 0.$$

Odredite funkciju izvodnicu Poissonove slučajne varijable X te pomoću nje izračunajte $E(X)$.

(e) Pokus A izveden je m puta, a pokus B n puta. Vjerojatnost uspjeha u pokusu A je p, a vjerojatnost uspjeha u pokusu B je r. Neka su X i Y slučajne varijable koje označavaju broj uspjeha u tim pokusima redom, te neka je Z slučajna varijabla koja bilježi ukupan broj uspjeha u oba pokusa. Dokažite da je $G_Z(x) = G_X(x)G_Y(x)$ i $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

Problem 1.3 **Particija broja** $n \in \mathbb{N}$ je prikaz broja n kao sume prirodnih brojeva. Pritom poredak sumanada nije važan. Na primjer, sve particije broja 5 su: $5 = 1+1+1+1+1$, $5 = 2+1+1+1$, $5 = 2+2+1$, $5 = 3+1+1$, $5 = 3+2$, $5 = 4+1$ te $5 = 5$. Označimo sa $p(n)$ ukupan broj particija broja $n \in \mathbb{N}$. Napomenimo da je vrlo teško naći eksplicitnu formulu za brojeve $p(n)$ te da ti brojevi vrlo brzo rastu. Tako je $p(5) = 7$, $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$ itd. Po definiciji još stavljamo $p(0) = 1$.

(a) Odredite funkciju izvodnicu za niz brojeva $p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n), \ldots$.

(b) Služeći se funkcijom izvodnicom dobivenom u (a) dijelu zadatka i pogodnim računalnim alatom, izračunajte ukupan broj particija brojeva 70 i 120.

(c) Neka je $p_k(n)$ ukupan broj particija od n u točno k dijelova, odnosno ukupan broj prikaza broja n kao sume točno k sumanada. Napišite algoritam i odgovarajući računalni program za broj particija od n u točno k dijelova.

(d) Služeći se (c) dijelom zadatka, napišite računalni program za ukupan broj particija prirodnog broja n.

Detaljnije o particijama brojeva zainteresirani čitatelj može pronaći u knjigama [3] i [6].

Problem 1.4 Služeći se eksponencijalnom funkcijom izvodnicom i pogodnim računalnim alatom, odredite ukupan broj riječi duljine 12 koje se mogu sastaviti od slova riječi OTORINOLARINGOLOGIJA.

Problem 1.5 **Deranžman** na skupu $\{1,2,\dots,n\}$ je bijekcija $f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$ bez fiksnih točaka, tj. bijekcija takva da je $f(i)\neq i$ za svako $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Neka je D_n ukupan broj deranžmana na skupu $\{1,2,\dots,n\}$ te neka je $D_0=1$.

(a) Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza $(D_n)_{n\geq 0}$.

(b) Služeći se (a) dijelom zadatka, odredite eksplicitnu formulu za D_n.

2. Rekurzivne relacije

2.1 Uvod

Znamo da nizove realnih brojeva $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (ili $(a_n)_{n\geq 0}$) možemo zadavati na različite načine. Jedan način su rekurzivne relacije.

■ **Primjer 2.1** Neka je niz $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dan rekurzivnom relacijom

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2, \tag{2.1}$$

uz početne uvjete $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Tada je opći član niza a_n dan izrazom

$$a_n = 2^n + 3^n. \tag{2.2}$$

Niz (2.2) zadovoljava početne uvjete ($a_0 = 2^0 + 3^0 = 2$ i $a_1 = 2^1 + 3^1 = 5$). Ostaje još provjeriti rekurzivnu relaciju (2.1),

$$\begin{aligned} 2^n + 3^n = a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} &= 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) = \\ &= (10-6)2^{n-2} + (15-6)3^{n-2}. \end{aligned}$$

Prvih 5 članova niza su 2, 5, 13, 35 i 97. Lako se vidi da ti članovi zadovoljavaju rekurzivnu relaciju (2.1), početne uvjete i (2.2). ■

Postavlja se pitanje kako smo do toga došli. Najprije pretpostavljamo da a_n ima oblik $a_n = x^n$ za neki $x \in \mathbb{R}$. Ispostavlja se da je pretpostavka dobra i da nas ona stvarno vodi prema rješenju. Dakle, $a_n = x^n$ uvrštavamo u (2.1) i dobivamo

$$x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2}, \quad n \geq 2, \tag{2.3}$$

a dijeljenjem s x^{n-2} za $n \geq 2$ dobivamo

$$x^2 = 5x - 6. \tag{2.4}$$

To je kvadratna jednadžba čija su rješenja $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Uočimo sada da nizovi $a_n = 2^n$ i $a_n = 3^n$ zadovoljavaju (2.1) jer $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$ zadovoljavaju (2.4), a tada nizovi $a_n = 2^n$ i $a_n = 3^n$ zadovoljavaju (2.3). Kako je (2.1) linearna rekurzivna relacija, niz

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n$$

također zadovoljava (2.1) za bilo koji izbor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Ostaje još odrediti λ_1 i λ_2 tako da su zadovoljeni početni uvjeti. Dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice kojemu su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1$ rješenja. Zašto je pretpostavka $a_n = x^n$ bila dobra? Zato što smo od beskonačno mnogo uvjeta danih u (2.1) dobili samo jedan: (2.4). Taj uvjet je bilo lako riješiti. Pažljiv čitatelj zasigurno ima brojna pitanja, no morat će se strpiti do Odjeljka 2.3.

Ovaj primjer je bitan za razumijevanje cijele teorije linearnih rekurzivnih relacija. Kada shvatimo taj primjer, možemo gledati primjere u kojima rješenja kvadratne jednadžbe nisu prirodni brojevi nego realni ili kompleksni ili se javljaju dvostruka rješenja. Istovremeno ćemo gledati primjere višeg stupnja (od 2). Nakon toga ćemo rješavati rekurzivne relacije u kojima se javlja i neka funkcija koja ovisi o n.

Naziv poglavlja je "Rekurzivne relacije". Možda bi bilo ispravnije staviti naziv "Linearne rekurzivne relacije s konstantim koeficijentima" jer ćemo samo njih gledati. Mi ćemo najčešće, zbog jednostavnosti, pisati rekurzivne relacije ili samo relacije.

Polje brojeva koje koristimo će biti polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Kada bude trebalo, ograničit ćemo se na polje realnih brojeva $\mathbb{R}$. U većini primjera ćemo koristiti polje realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Čitatelj će vrlo brzo uočiti sličnost između linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima i linearnih rekurzivnih relacija s konstantnim koeficijentima. Čak se za rekurzivne relacije ponekad rabi naziv diferencijske jednadžbe koji je sličan nazivu diferencijalne jednažbe iako potječe od riječi "diferencija" (razlika), koje se javljaju u rekurzivnim relacijama.

Obično se niz brojeva označava s (a_n), $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ili $(a_n)_{n\geq 0}$. Druge dvije oznake su malo preciznije, pogotovo ako niz ne ide od 0 nego od nekog drugog broja. No, mi ćemo zbog jednostavnosti uglavnom rabiti prvu oznaku.

■ **Primjer 2.2** Povijesno, najpoznatiji primjer rekurzivnih relacija nam daje **Fibonaccijeve brojeve**. Fibonacci je analizirao razmnožavanje zečeva. Znamo da par zečeva nakon rođenja, prvi mjesec ne dobiva mlade, a nakon toga svaki mjesec dobiva par (zečicu i zeca). Poznato je da ne umiru i da ih želja za mladima nikada ne prolazi. Fibonaccija je zanimao broj parova zečeva nakon n mjeseci. Označimo broj parova zečeva nakon n mjeseci s f_n. Tada je broj parova f_n jednak broju parova prethodnog mjeseca, f_{n-1} uvećan za broj parova od prije dva mjeseca, f_{n-2} jer su oni već zreli za potomke. To daje relaciju

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Ostaje nam još postaviti početne uvjete. Pretpostavljamo da smo 1. mjesec upravo dobili par koji se rodio pa je time $f_1 = 1$ i $f_2 = 1$. Mogli smo staviti i $f_0 = 0$. Rješenje ovog problema je niz (f_n) dan izrazom

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 0. \tag{2.5}$$

U Odjeljku 2.3 ćemo vidjeti kako se gornja formula može dobiti. Nekoliko prvih članova tog niza su $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$. ■

2.2 Linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Definicija 2.1 **Linearna rekurzivna relacija reda** $r \in \mathbb{N}$ s konstantnim koeficijentima je izraz oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n), \quad \text{za } n \geq r \tag{2.6}$$

gdje su koeficijenti $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, a $f(n)$ je funkcija varijable n. Ako je $f(n) = 0$, kažemo da je rekurzivna relacija **homogena**. Niz (a_n) je **rješenje** relacije (2.6) ako članovi niza zadovoljavaju (2.6). Kažemo da je niz

$$a_n = \varphi(n, \lambda_1, \ldots \lambda_r), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C} \tag{2.7}$$

opće rješenje ako se svako rješenje može dobiti iz (2.7) određenim odabirom koeficijenata $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Ponekad ćemo neko određeno rješenje zvati **partikularnim rješenjem**. **Početni uvjeti** su zadane vrijednosti za $a_0, \ldots, a_{r-1}$. ■

Napomena 2.1 Već smo navikli da se diskutira postojanje i jedinstvenost rješenja (u teriji diferencijalnih jednadžbi su o tome govorili netrivijalni teoremi). Ovdje je situacija vrlo jednostavna. Ako su dani početni uvjeti, tada rješenje postoji i jedinstveno je. Naime, ako su zadani početni uvjeti $a_0, \ldots, a_{r-1}$, tada (2.6) za $n = r$ daje a_r, za $n = r+1$ daje a_{r+1}, za $n = r+2$ daje a_{r+2} itd. Npr. u Primjeru 2.1, početni uvjeti su $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$, a tada nam (2.1) za $n = 2$ daje $a_2 = 13$, za $n = 3$, $a_3 = 35$, za $n = 4$, $n_4 = 97$ itd. Postojanje općeg rješenja u ovom trenutku izgleda kao vrlo težak problem, ali ćemo uskoro vidjeti da sva rješenja formiraju vektorski prostor (to je posljedica linearnosti rekurzivne relacije), a u Teoremu 2.6 ćemo vidjeti kako se opće rješenje može zapisati. Sam zapis ne mora biti jedinstven (to ćemo vidjeti u Pododjeljku 2.3).

Napomena 2.2 Naši nizovi najčešće kreću od 0, no to ne mora biti tako. Npr. možemo gledati rekurzivnu relaciju $a_n = 2a_{n-1}$ za $n \geq 3$ uz početni uvjet $a_2 = 2$ ($a_n = 2^{n-1}$). Pojam partikularnog rješenja se često veže uz nehomogenu rekurzivnu relaciju (2.6). U Teoremu 2.2 ćemo vidjeti kako jedno partikularno rješenje daje opće rješenje zadane rekurzivne relacije.

Primjer 2.1 je tipičan primjer homogene linearne rekurzivne relacije reda 2 s konstantnim koeficijentima i početnim uvjetima $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Ako bismo samo gledali relaciju (2.1), tada je opće rješenje oblika

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n. \tag{2.8}$$

Za početne uvjete $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$, vrijedi da je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1$. Za bilo koji izbor početnih uvjeta a_0 i a_1 dobivamo sustav

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 = a_0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 = a_1 \end{cases}.$$

Determinanta ovog sustava je 1 pa sustav uvijek ima jedinstveno rješenje, a time je (2.8) doista opće rješenje. Slijedeći primjer nam daje nehomogenu jednadžbu.

■ **Primjer 2.3** Promotrimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 1, \tag{2.9}$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$. U Odjeljku 2.4 ćemo vidjeti da je $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Sada se najprije prisjetimo da izraz $\frac{n(n+1)}{2}$ predstavlja zbroj $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, a nakon toga shvatimo da relacija (2.9) uz početni uvjet $a_0 = 0$ daje upravo taj zbroj. Relacija (2.9), za $n = 1$ daje $a_1 = a_0 + 1 = 0 + 1 = 1$, za $n = 2$ daje $a_2 = a_1 + 2 = 0 + 1 + 2 = 3$ itd. Opće rješenje relacije (2.9) ima oblik

$$a_n = \lambda_1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

i lako se vidi da je $\lambda_1 = a_0$, odnosno za bilo koji izbor početnog uvjeta a_0, a time i određenog rješenja, postoji λ_1 tako da se iz općeg rješenja dobije odabrano rješenje. ■

Sljedeći primjeri nisu linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima. Relacija

$$a_n = a_{n-1}^2 + \sin a_{n-2} + \ln a_{n-3} + \sqrt{a_{n-4}} + a_{n-1}a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

nije linearna, a relacija

$$a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2} + \ln(n^2 + n + 1)a_{n-3}, \quad n \geq 3$$

nema konstantne koeficijente.

Definicija 2.2 Za zadanu rekurzivnu relaciju (2.6) kažemo da je rekurzivna relacija

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r}, \quad \text{za } n \geq r \tag{2.10}$$

pripadna homogena rekurzivna relacija. Njezina rješenja označavamo s (a_n^h). ■

Napomena 2.3 Često ćemo rješenja relacije (2.10) zvati homogenim rješenjima rekurzivne relacije (2.6), iako to nije posve ispravno. Također ćemo se pozivati na tu relaciju kada budemo govorili o homogenim rekurzivnim relacijama.

Teorem 2.1 Skup rješenja homogene relacije (2.10) je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Dimenzija tog prostora je r.

Dokaz. Neka su (a_n) i (b_n) dva niza koji zadovoljavaju (2.10). Trebamo pokazati da i niz $(\alpha a_n + \beta b_n)$ zadovoljava (2.10) za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tj. da skup rješenja od (2.10) čuva linearnu kombinaciju. Računamo lijevu stranu relacije (2.10)

$$\begin{aligned} &c_1(\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}) + \cdots + c_r(\alpha a_{n-r} + \beta b_{n-r}) = \\ &\alpha(c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r}) + \beta(c_1 b_{n-1} + \cdots + b_r a_{n-r}) = \alpha a_n + \beta b_n \end{aligned}$$

i vidimo da dobivamo desnu stranu relacije (2.10).
Da bismo dobili dimenziju, moramo najprije shvatiti kako izgledaju vektori. Naši vektori su beskonačni nizovi brojeva i na čitav niz gledamo kao na jedan vektor. No, kako su svi članovi tog niza osim prvih r članova definirani s tih prvih r članova (to su početni uvjeti) dovoljno je gledati samo te početne članove. Dakle, gledamo nizove od r brojeva, a vektorski prostor tih nizova ima dimenziju r. ■

■ **Primjer 2.4** Prostor rješenja Prmjera 2.1 je dvodimenzionalan i jedan izbor baze su vektori

$$e_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ -6 \\ -30 \\ -114 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ 5 \\ 19 \\ 89 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Dakle, dovoljno je uzeti vektore $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Rješenja na koja smo "navikli", $a_n = 2^n$ i $b_n = 3^n$ imaju oblik $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = f_1 + 2f_2$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = f_1 + 2f_3$. ■

Napomena 2.4 Možemo zaključiti da skup od r nizova tvori bazu vektorskog prostora rješenja relacije (2.10) ako i samo ako je determinanta matrice čiji su stupci početni uvjeti danih nizova različita od 0.

Napomena 2.5 Spomenuli smo sličnost između diferencijalnih jednadžbi i rekurzivnih relacija. Kod diferencijalnih jednadžbi također imamo teorem koji tvrdi da je prostor rješenja homogene linearne jednadžbe stupnja n vektorski prostor dimenzije n.

Napomena 2.6 Iz dokaza se vidi da rekurzivna relacija mora biti homogena.

■ **Primjer 2.5** U sljedećem odjeljku ćemo vidjeti da relacija

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

ima opće rješenje

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Dobivamo sustav $\lambda_1 \cdot 1 = a_0$ i $\lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 = a_1$ koji ima jedinstveno rješenje. ■

Teorem 2.2 Neka je (a_n^p) neko partikularno rješenje nehomogene relacije (2.6). Tada sva rješenja relacije (2.6) imaju oblik

$$a_n = a_n^h + a_n^p \tag{2.11}$$

gdje su (a_n^h) rješenja pripadne homogene relacije (2.10).

Napomena 2.7 Teorem ima dvije tvrdnje: nizovi $(a_n^h + a_n^p)$ su rješenja nehomogene relacije (2.6) i sva rješenja su tog oblika. Osim toga teorem nam daje mogućnost da problem rješavanja relacije (2.6) podijelimo na dva dijela: nalaženje svih rješenja pripadne homogene relacije (taj problem je obrađen u Odjeljku 2.3) te nalaženje jednog partikularnog rješenja i (taj problem je obrađen u Odjeljku 2.4). Konačno, teorem kaže da sva rješenja leže u skupu koji je nastao "translacijom" vektorskog potprostora.

Dokaz. Pokažimo da su nizovi dani relacijama (2.11) rješenja relacije (2.6). Kako je niz (a_n^h) rješenje relacije (2.10), a niz (a_n^p) rješenje relacije (2.6), dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^h + a_n^p = c_1 a_{n-1}^h + \cdots + c_r a_{n-r}^h + c_1 a_{n-1}^p + \cdots + c_r a_{n-r}^p + f(n) = \\ &= c_1(a_{n-1}^h + a_{n-1}^p) + \cdots + c_r(a_{n-r}^h + a_{n-r}^p) + f(n) = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n), \end{aligned}$$

a to znači da je niz (a_n) rješenje nehomogene relacije (2.6).
Pretpostavimo sada da je niz (a_n^q) neko partikularno rješenje nehomogene relacije 2.6. Tada za niz $(a_n^q - a_n^p)$ vrijedi

$$\begin{aligned} & a_n^q - a_n^p = c_1 a_{n-1}^q + \cdots + c_r a_{n-r}^q + f(n) - (c_1 a_{n-1}^p + \cdots + c_r a_{n-r}^p + f(n)) = \\ & c_1(a_{n-1}^q - a_{n-1}^p) + \cdots + c_r(a_{n-r}^q - a_{n-r}^p), \end{aligned}$$

a to znači da je niz $(a_n^q - a_n^p)$ rješenje homogene relacije (2.10) odnosno $a_n^q - a_n^p = a_n^h$. ■

U Primjeru 2.3 smo vidjeli nehomogenu relaciju. Sada su $a_n^h = \lambda_1$ rješenja pripadne homogene relacije $a_n = a_{n-1}$, a $a_n^p = \frac{n(n+1)}{2}$ je jedno partikularno rješenje.

■ **Primjer 2.6** Promotrimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + n, \quad n \geq 2.$$

Već znamo (Primjer 2.1) da homogena rješenja imaju oblik

$$a_n^h = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n,$$

a u Odjeljku 2.4 ćemo vidjeti kako se određuje partikuralrno rješenje a_n^p. Dobiva se da je $a_n^p = \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$ pa vrijedi

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}.$$

Za zadane početne uvjete a_0 i a_1, λ_1 i λ_2 se lako izračunaju. ■

2.3 Homogene rekurzivne relacije

Sada ćemo generalizirati Primjer 2.1. Neka je zadana homogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima (2.10). Koristimo **Eulerovu supstituciju** odnosno pretpostavljamo da su rješenja oblika $a_n = x^n$ za neki $x \in \mathbb{C}$. Time relacija (2.10) prelazi u

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \cdots + c_r x^{n-r}, \quad \text{za } n \geq r, \tag{2.12}$$

a dijeljenjem s x^{n-r} dobivamo **karakterističnu jednadžbu** (po varijabli x)

$$x^r = c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r. \tag{2.13}$$

Uočimo da smo u relaciji (2.10) odnosno (2.12) imali beskonačno mnogo relacija (za svaki n) dok karakteristična jednadžba, (2.13), ima samo jednu relaciju. Karakteristična jednadžba ima stupanj r, a time i r rješenja (nultočki). Razlikujemo situacije kada imamo samo jednostruke nultočke i višestruke nultočke. Nakon toga ćemo pogledati situacije kada imamo realne koeficijente, kompleksne nultočke, a želimo izraziti a_n koristeći samo realne brojeve.

Jednostruki korijeni

■ **Primjer 2.7** Za **Vandermondeovu determinantu** vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \cdots & x_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_j - x_i)$$

Formula se lako može pokazati indukcijom. Nama će biti bitno da je Vandermondeova determinanta različita od 0 ako su x_i međusobno različiti brojevi. ■

Teorem 2.3 Ako su svi korijeni $x_1, \ldots, x_r$ karakteristične jednadžbe linearne homogene rekurzivne relacije (2.10) međusobno različiti, tada opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \cdots + \lambda_r x_r^n. \tag{2.14}$$

Napomena 2.8 Uočimo da su korijeni x_i različiti od 0 jer je slobodni koeficijent karakteristične jednadžbe, c_r različit od 0. Slična tvrdnja vrijedi i kada rješenja nisu međusobno različita.

Dokaz. Moramo dokazati dvije tvrdnje: relacija (2.14) zadovoljava relaciju (2.10) te da je to opće rješenje. Kako je x_i korijen karakteristične jednadžbe, x_i zadovoljava relaciju (2.13), a nakon množenja s x^{n-r} dobivamo relaciju (2.12). To znači da niz (x_i^n) zadovoljava rekurzivnu relaciju (2.10). Tada je i linearna kombinacija (2.14) također rješenje relacije (2.10). Da bismo pokazali da se svako rješenje relacije (2.10) može napisati u obliku (2.14), dovoljno je raspisati početne uvjete.

$$\begin{array}{cccccc}
\lambda_1 x_1^0 & +\lambda_2 x_2^0 & +\cdots+ & \lambda_r x_r^0 & = & a_0 \\
\lambda_1 x_1^1 & +\lambda_2 x_2^1 & +\cdots+ & \lambda_r x_r^1 & = & a_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_1 x_1^{r-1} & +\lambda_2 x_2^{r-1} & +\cdots+ & \lambda_r x_r^{r-1} & = & a_{r-1}
\end{array}$$

Dobiva se sustav od r jednadžbi s r nepoznanica. Determinanta sustava je Vandermondeova determinanta koja je različita od 0 (Primjer 2.7) pa sustav ima jedinstveno rješenje. ■

Napomena 2.9 Mogli smo dokazivati i da nizovi (x_i^n) tvore bazu rješenja (koristeći Napomenu 2.4), a dokaz ponovno koristi Vandermondeovu determinantu. Ta tvrdnja jača jer sada tvrdimo da je zapis (2.14) jedinstven. No, uočimo da smo u dokazu teorema dokazali i jedinstvenost zapisa (2.14).

Zadatak 2.1 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad n \geq 3$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$.

Rješenje. Sada karakteristična jednadžba ima oblik $x^3 = 6x^2 - 11x + 6 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i $x_3 = 3$ su rješenja, opće rješenje ima oblik $a_n = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2^n + \lambda_3 \cdot 3^n$, a rješenje koje zadovoljava početne uvjete ima oblik $a_n = 2^n$. ■

Višestruki korijeni

■ **Primjer 2.8** Neka su $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$ i $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $r_1 + \cdots + r_k = r$. Tada je vrijednost generalizirane Vandermondeove determinante

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
x_1 & x_1 & \cdots & x_1 & \cdots & x_k & x_k & \cdots & x_k \\
x_1^2 & 2x_1^2 & \cdots & 2^{r_1-1}x_1^2 & \cdots & x_k^2 & 2x_k^2 & \cdots & 2^{r_k-1}x_k^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{r-1} & (r-1)x_1^{r-1} & \cdots & (r-1)^{r_1-1}x_1^{r-1} & \cdots & x_k^{r-1} & (r-1)x_k^{r-1} & \cdots & (r-1)^{r_k-1}x_k^{r-1}
\end{vmatrix}$$

jednaka

$$Z \cdot \prod_{i=1}^{k} x_i^{\binom{r_i}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)^{r_i r_j}$$

za neki $Z \in \mathbb{Z}$ i $Z \neq 0$. Nama će biti bitno da je generalizirana Vandermondeova determinanta različita od 0 ako su x_i međusobno različiti brojevi i svi različiti od 0. ■

■ **Primjer 2.9** Pogledajmo primjer kada je $k=2$, $r=5$, $r_1=2$ i $r_2=3$. Vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1^2 & 2x_1^2 & x_2^2 & 2x_2^2 & 4x_2^2 \\ x_1^3 & 3x_1^3 & x_2^3 & 3x_2^3 & 9x_2^3 \\ x_1^4 & 4x_1^4 & x_2^4 & 4x_2^4 & 16x_2^4 \end{vmatrix} = x_1x_2^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2-x_1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2-x_1^2 & 2x_2 & 4x_2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & 3x_2^2 & 9x_2^2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4-x_1^4 & 4x_2^3 & 16x_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_2^2(x_2-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & x_2+x_1 & 2(x_2-x_1) & 2x_2 \\ 3x_1^2 & x_2^2+x_1x_2+x_2^2 & 3(x_2^2-x_1^2) & 6x_2^2 \\ 4x_1^3 & x_2^3+x_2^2x_1+x_2x_1^2+x_1^3 & 4(x_2^3-x_1^3) & 12x_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x_1x_2^3(x_2-x_1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & x_2-x_1 & 2 & 1 \\ 3x_1^2 & x_2^2+x_1x_2-2x_1^2 & 3(x_2+x_1) & 3x_2 \\ 4x_1^3 & x_2^3+x_2^2x_1+x_2x_1^2-3x_1^3 & 4(x_2^2+x_2x_1+x_2^2) & 6x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x_1x_2^2(x_2-x_1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x_2+2x_1 & 3x_2+3x_1 & 3x_2 \\ x_2^2+2x_2x_1+3x_1^2 & 4x_2^2+4x_2x_1+4x_1^2 & 6x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_2^2(x_2-x_1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2+2x_1 & x_2-x_1 & 2x_2-2x_1 \\ x_2^2+2x_2x_1+3x_1^2 & 2x_2^2-2x_1^2 & 5x_2^2-2x_2x_1-3x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x_1x_2^2(x_2-x_1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x_2+2x_1 & 5x_2+3x_1 \end{vmatrix} = 2x_1x_2^3(x_2-x_1)^6$$

U ovom primjeru je $Z=2$. ■

Sada pretpostavljamo da karakteristična jednadžba (2.13) ima višestruka rješenja. Dakle, pretpostavljamo da korijen x_i ima kratnost r_i za $i \in \{1,\dots,k\}$. Znamo da je $r_1+\cdots+r_k=r$ i da su svi korijeni različiti od 0 jer je $c_r \neq 0$. Želimo pokazati da su nizovi $(n^i x_i^n)$ za $i \in \{0,\dots,r_i-1\}$ također rješenja relacije (2.10). Npr. rekurzivna relacija $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ima rješenja: $a_n = 2^n$ i $a_n = n2^n$. No, naprije nam treba

Lema 2.4 Ako je x_i nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti r_i, tada je x_i nultočka j-te derivacije polinoma $P^{(j)}(x)$ kratnosti $r_i - j$ za $j \in \{0,\dots,r_i-1\}$.

Dokaz. Koristimo poznatu činjenicu da je x_i nultočka polinoma $P(x)$ ako i samo ako je $P(x)$ oblika $P(x) = (x-x_i)^{r_i} Q(x)$ za neki polinom $Q(x)$ koji nije djeljiv s $x-x_i$ odnosno kome x_i nije nultočka. Dovoljno je pokazati da jednim deriviranjem, kratnost nultočke pada za 1. Formula za derivaciju umnoška nam daje

$$P'(x) = r_i(x-x_i)^{r_i-1}Q(x) + (x-x_i)^{r_i}Q'(x).$$

S obzirom da je kratnost nultočke x_i od $r_1(x-x_i)^{r_i-1}Q(x)$ jednaka r_i-1, a kratnost od $(x-x_i)^{r_i}Q'(x)$ jednaka r_i dobivamo da je kratnost nultočke x_i od $P'(x)$ jednaka r_i-1. ■

Vjerojatno nije jasna veza između rješenja koja želimo dobiti i deriviranja. No deriviranjem izraza x^n dobivamo nx^{n-1}, a nakon množenja s x i nx^n i to je izraz koji nam treba.

Propozicija 2.5 Ako je x_i nultočka kratnosti r_i karakteristične jednadžbe (2.13), tada su nizovi

$$(x_i^n),\ (nx_i^n),\ \ldots,\ (n^{r_i-1}x_i^n)$$

rješenja rekurzivne relacije (2.10).

Dokaz. Nultočka x_i kratnosti r_i zadovoljava karakterističnu jednadžbu (2.13). S obzirom da množenje s x^{n-r} ne mijenja kratnost nultočke, x_i je nultočka kratnosti r_i relacije (2.12), a to znači da niz (x_i^n) zadovoljava relaciju (2.10). No relaciju (2.12) možemo derivirati i nakon toga pomnožiti s x. Dobivamo

$$nx^n = c_1(n-1)x^{n-1} + \cdots + c_r(n-r)x^{n-r}, \quad \text{za } n \geq r. \tag{2.15}$$

Lema 2.4 nam kaže da je x_i nultočka derivacije kratnosti $r_i - 1$, a tada i relacije (2.15). No relacija (2.15) nam sada kaže da je niz (nx_i^n) rješenje rekurzivne relacije (2.10). Postupak sada možemo ponoviti još $r_i - 2$ puta (počinjemo s deriviranjem relacije (2.15)) i time dobiti da su dani nizovi rješenja rekurzivne relacije (2.10). ■

Teorem 2.6 Ako korijeni $x_1, \ldots, x_k$ karakteristične jednadžbe homogene linearne rekurzivne relacije (2.10) imaju kratnosti $r_1, \ldots, r_k$, tada opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 n x_1^n + \cdots + \lambda_{r_1} n^{r_1-1} x_1^n + \lambda_{r_1+1} x_2^n + \lambda_{r_1+2} n x_2^n + \cdots + \lambda_r n^{r_k-1} x_k^n. \tag{2.16}$$

Dokaz. Ponovno moramo dokazati dvije tvrdnje: relacija (2.16) zadovoljava relaciju (2.10) te da je to opće rješenje. No sada je prva tvrdnja pokazana u Propoziciji 2.5. Da bismo pokazali da se svako rješenje relacije (2.10) može napisati u obliku (2.16), dovoljno je raspisati početne uvjete. Dobiva se sustav od r jednadžbi s r nepoznanica. Determinanta sustava je generalizirana Vandermondeova determinanta koja je različita od 0 (Primjer 2.8) pa sustav ima jednistveno rješenje. ■

■ **Primjer 2.10** Promotrimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 15a_{n-2} - 10a_{n-3} - 60a_{n-4} + 72a_{n-5}, \quad n \geq 5$$

uz početne uvjete $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = -4$ i $a_4 = 741$. Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = (x+3)^2(x-2)^3 = 0.$$

To znači da nultočka $x_1 = -3$ ima kratnost 2, a $x = 2$ kratnost 3. Dobivamo

$$a_n = \lambda_1(-3)^n + \lambda_2 n(-3)^n + \lambda_3 2^n + \lambda_4 n 2^n + \lambda_5 n^2 2^n.$$

Ostaje još vidjeti da možemo dobiti rješenje koje zadovoljava početne uvjete. Početni uvjeti nam daju sustav

$$\begin{array}{llllllr}
\lambda_1\cdot(-3)^0 & +\lambda_2\cdot 0\cdot(-3)^0 & +\lambda_3\cdot 2^0 & +\lambda_4\cdot 0\cdot 2^0 & +\lambda_5\cdot 0^2\cdot 2^0 & = & 2\\
\lambda_1\cdot(-3)^1 & +\lambda_2\cdot 1\cdot(-3)^1 & +\lambda_3\cdot 2^1 & +\lambda_4\cdot 1\cdot 2^1 & +\lambda_5\cdot 1^2\cdot 2^1 & = & 0\\
\lambda_1\cdot(-3)^2 & +\lambda_2\cdot 2\cdot(-3)^2 & +\lambda_3\cdot 2^2 & +\lambda_4\cdot 2\cdot 2^2 & +\lambda_5\cdot 2^2\cdot 2^2 & = & 55\\
\lambda_1\cdot(-3)^3 & +\lambda_2\cdot 3\cdot(-3)^3 & +\lambda_3\cdot 2^3 & +\lambda_4\cdot 3\cdot 2^3 & +\lambda_5\cdot 3^2\cdot 2^3 & = & -4\\
\lambda_1\cdot(-3)^4 & +\lambda_2\cdot 4\cdot(-3)^4 & +\lambda_3\cdot 2^4 & +\lambda_4\cdot 4\cdot 2^4 & +\lambda_5\cdot 4^2\cdot 2^4 & = & 741
\end{array}$$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$) jer je determinanta sustava različita od 0. Naime, u Primjeru 2.9 smo izračunali ovu generaliziranu Vandermondeovu determinantu za bilo x_1 i x_2. U ovom primjeru je determinanta sustava jednaka $2\cdot(-3)\cdot 2^3\cdot(2+3)^6 = -750\,000$.
■

Napomena 2.10 Imamo isti komentar kao u Napomeni 2.9. U iskazu Teorema 2.6 kažemo da opće rješenje postoji, ali ne i da je zapis (2.16) jednistven. No, jedinstvenost se vidi u dokazu. Lako se vidi da nizovi dani u Propoziciji 2.5 tvore bazu prostora rješenja relacije (2.10) koristeći Napomenu 2.4 i (ponovno) Primjer 2.8.

U Primjeru 2.5 smo već vidjeli rekurzivnu relaciju s dvostrukim nultočkama karakterističnog polinoma. Uočimo da nismo zahtijevali da nultočke budu realni brojevi. Promotrimo sada primjer kada imamo dvostruke kompleksne nultočke karakteristične jednadžbe.

Zadatak 2.2 Zadana je rekurzivna relacija

$$a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4},$$

uz početne uvjete $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ i $a_3 = 6$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

pa su $x_{1,2} = i$ i $x_{3,4} = -i$ dvostruke nultočke. To znači da opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 i^n + \lambda_2 n i^n + \lambda_3 (-i)^n + \lambda_4 n (-i)^n,$$

Početni uvjeti nam daju

$$a_n = (-3i)i^n + (-1+2i)ni^n + (3i)(-i)^n + (-1-2i)n(-i)^n. \tag{2.17}$$

Lako se vidi da je $a_4 = -8$, $a_5 = -14$, $a_6 = 12$, itd. Uočimo da su λ_1 i λ_3 te λ_2 i λ_4 konjugirano kompleksni. U sljedećem odjeljku ćem vidjeti kako se to rješenje može zapisati samo pomoću realnih funkcija. ∎

Kompleksni korijeni

U prethodna dva pododjeljka smo opisali rješenja homogene rekurzivne relacije (2.10), a rješenja karakteristične jednadžbe (2.13) su mogli biti i kompleksni brojevi. Sada želimo opisati rješenja koristeći samo realne brojeve i funkcije. Gledamo samo rekurzivne relacije s realnim koeficijentima čija rješenja su nizovi s realnim članovima.

Prisjetimo se najprije De Moivreove formule. Za kompleksni broj z vrijedi

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je $x_1 = |x_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, rješenje karakteristične jednadžbe. Tada znamo da je niz (x_1^n) rješenje rekurzivne relacije (2.10) i vrijedi

$$x_1^n = c_1 x_1^{n-1} + \cdots + c_r x_1^{n-r}, \quad \text{za } n \geq r,$$

a korištenjem De Moivreove formule dobivamo

$$\begin{aligned} |x_1|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = c_1|x_1|^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) + \cdots + \\ + c_r|x_1|^{n-r}(\cos(n-r)\varphi + i\sin(n-r)\varphi). \end{aligned}$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela slijedi (koristimo da su koeficijenti c_j realni)

$$|x_1|^n \cos n\varphi = c_1|x_1|^{n-1}\cos(n-1)\varphi + \cdots + c_r|x_1|^{n-r}\cos(n-r)\varphi$$

i

$$|x_1|^n \sin n\varphi = c_1|x_1|^{n-1}\sin(n-1)\varphi + \cdots + c_r|x_1|^{n-r}\sin(n-r)\varphi,$$

a to znači da su nizovi $(|x_1|^n \cos n\varphi)$ i $(|x_1|^n \sin n\varphi)$ također rješenja relacije (2.6). Bitno je naglasiti da su to sada realni izrazi.

Dakle, umjesto kompleksnih nizova (x_1^n) i $(\overline{x_1}^n)$ uzimamo realne nizove $(|x_1|^n \cos n\varphi)$ i $(|x_1|^n \sin n\varphi)$. Kako se nizovi (x_1^n) i $(\overline{x_1}^n)$ mogu izraziti pomoću nizova $(|x_1|^n \cos n\varphi)$ i $(|x_1|^n \sin n\varphi)$ (kao linearna kombinacija), skup nizova u kojem smo nizove $(|x_1|^n \cos n\varphi)$ i $(|x_1|^n \sin n\varphi)$ zamijenili nizovima $(|x_1|^n \cos n\varphi)$ i $(|x_1|^n \sin n\varphi)$ i dalje generira prostor svih rješenja relaicije (2.10). S obzirom se broj generatora nije promijenio, ti generatori i dalje tvore bazu vektorskog prostora rješenja. To znači da su dobivene realne funkcije i dalje linearno nezavisne. Cijelo vrijeme, govorimo o kompleksnim vektorskim prostorima.

U slučaju da dana nultočka x_1 ima višestruku kratnost, dovoljno je dodati potencije od n i gornja diskusija ostaje nepromijenjena.

Zadatak 2.3 Zadan je niz (a_n) rekurzivnom relacijom

$$a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

i početnim uvjetima $a_0 = 2$ i $a_1 = 4$. Niz ima oblik $2, 4, -2, -4, 2, 4, \ldots$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 + 1 = 0$, a opće rješenje je $a_n = \lambda_1 i^n + \lambda_2(-i)^n$. Iz početnih uvjeta dobivamo

$$a_n = (1-2i)i^n + (1+2i)(-i)^n, \quad n \geq 0. \tag{2.18}$$

Umjesto toga možemo pisati $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ pa opće rješenje možemo zapisati u obliku

$$a_n = \mu_1 \cos\frac{n\pi}{2} + \mu_2 \sin\frac{n\pi}{2}. \tag{2.19}$$

Za zadane početne uvjete vrijedi

$$a_n = 2\cos\frac{n\pi}{2} + 4\sin\frac{n\pi}{2}.$$

To smo mogli dobiti iz (2.18) jer je $i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ i $(-i)^n = \cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}$. Možemo i opće rješenje (2.19) dobiti iz općeg rješenja $a_n = \lambda_1 i^n + \lambda_2(-i)^n$ jer su λ_1 i λ_2 konjugirano kompleksni brojevi (ako su članovi niza realni brojevi). ∎

∎ **Primjer 2.11** Sada ćemo nastaviti Zadatak 2.2. Rješenja karakteristične jednadžbe su ponovno i i $-i$, ali sada su to dvostruka rješenja. Opće rješenje smo zapisali u obliku

$$a_n = \lambda_1 i^n + \lambda_2 n i^n + \lambda_3(-i)^n + \lambda_4 n(-i)^n$$

pa sada pišemo

$$a_n = \mu_1 \cos\frac{n\pi}{2} + \mu_2 n\cos\frac{n\pi}{2} + \mu_3 \sin\frac{n\pi}{2} + \mu_4 n\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Za zadane početne uvjete dobivamo sustav jednadžbi $\mu_1 = 0$, $\mu_3 + \mu_4 = 2$, $-\mu_1 - 2\mu_2 = 4$ i $-\mu_3 - 3\mu_4 = 6$. Sustav se lako rješava pa je

$$a_n = -2n\cos\frac{n\pi}{2} + 6\sin\frac{n\pi}{2} - 4n\sin\frac{n\pi}{2}.$$

To smo lako mogli dobiti iz (2.17). ∎

Zadatak 2.4 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$.

Rješenje. Niz ima oblik $1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, \ldots$. Najprije rješavamo karakterističnu jednadžbu $x^2 - 2x + 2 = 0$. Kako su $x_1 = 1 + i$ i $x_2 = 1 - i$, nultočke, opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 (1+i)^n + \lambda_2 (1-i)^n$$

Početni uvjeti nam daju

$$a_n = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots.$$

Ako želimo samo realne funkcije i realne koeficijente, tada opće rješenje ima oblik

$$a_n = \mu_1 \cos \frac{n\pi}{4} + \mu_2 \sin \frac{n\pi}{4},$$

a

$$a_n = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

zadovoljava početne uvjete. ∎

Zadatak 2.5 Odredimo opći član niza $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$.

Rješenje. Rekurzivna relacija ima oblik $a_n = a_{n-3}$, a početni uvjeti su $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Karakteristična jednadžba glasi

$$x^3 - 1 = 0,$$

a njeni korijeni su $x_1 = 1$ i $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Iz toga slijedi

$$a_n = \lambda_1 \cdot 1^n + \lambda_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n + \lambda_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n,$$

a tada nam početni uvjeti daju

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n.$$

Ako koristimo samo realne brojeve i relacije, tada je

$$a_n = 1 - \cos \frac{2n\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$$

za $n \geq 0$. ∎

Zadatak 2.6 Odredimo opće rješenje rekurzivne relacije $a_{n+2} = -a_n - 6a_{n-1} - 4a_{n-2}$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba im oblik

$$x^4 + x^2 + 6x + 4 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 4) = 0.$$

Dana jednadžba ima jedno dvostruko realano rješenje: $x_1 = -1$ i dva konjugirano kompleksna rješenja: $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}i$. Tada opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 n(-1)^n + \lambda_3(1+\sqrt{3}i)^n + \lambda_4(1-\sqrt{3}i)^n$$

odnosno

$$a_n = \mu_1(-1)^n + \mu_2 n(-1)^n + \mu_3 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \mu_4 2^n \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Iskorisitili smo formulu $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. ■

2.4 Određivanje partikularnog rješenja

Sada gledamo nehomogene rekurzivne relacije (2.6). Teorem 2.2 nam kaže da je dovoljno naći jedno partikularno rješenje. Sljedeći teorem nam daje upravo jedno partikularno rješenje za određen izbor funkcije $f(n)$.

Teorem 2.7 Neka je dana nehomogena relacija (2.6). Ako je $f(n) = P(n)b^n$ gdje je $P(n)$ polinom stupnja d, a $b \in \mathbb{N}$, tada partikularno rješenje ima oblik $a_n^p = n^e Q(n) b^n$ gdje je e kratnost nultočke b karakteristične jednadžbe odgovarajuće homogene rekurzivne relacije, a $Q(n)$ polinom stupnja d.

Napomena 2.11 Teorem ne dokazujemo. Samo komentiramo što bi trebalo dokazati. Teorem tvrdi da se rješenje uvijek može naći ako pretpostavimo da je tog oblika.

Korolar 2.8 Neka je dana nehomogena relacija (2.6). Ako je $f(n) = b^n$ gdje $b \in \mathbb{N}$, tada partikularno rješenje ima oblik $a_n^p = \nu n^e b^n$ gdje je e kratnost nultočke b karakteristične jednadžbe odgovarajuće homogene rekurzivne relacije, a $\nu \in \mathbb{C}$.

Korolar 2.9 Neka je dana nehomogena relacija (2.6). Ako je $f(n) = P(n)$ gdje je $P(n)$ polinom stupnja d, tada partikularno rješenje ima oblik $a_n^p = n^e Q(n)$ gdje je e kratnost nultočke 1 karakteristične jednadžbe odgovarajuće homogene rekurzivne relacije, a $Q(n)$ polinom stupnja d.

Propozicija 2.10 Pretpostavimo da je dana nehomogena rekurzivna relacija (2.6). Ako je $f(n) = f_1(n) + \cdots + f_k(n)$ gdje su funkcije $f_j(n)$ oblika funkcije $f(n)$ iz Teorema 2.7, za $j = 1, \ldots, k$, tada partikularno rješenje ima oblik $a_n^p = a_n^{(1)} + \cdots + a_n^{(k)}$ gdje su $a_n^{(j)}$ partikularna rješenja nehomogenih rekurzivinih relacija

$$a_n^{(j)} = c_1 a_{n-1}^{(j)} + \cdots + c_r a_{n-r}^{(j)} + f_j(n), \quad n \geq r \tag{2.20}$$

za $j = 1, \ldots, k$.

Dokaz. Tvrdnja se dobiva direktim uvrštavanjem relacija (2.20) u (2.6). ■

Zadatak 2.7 Neka je $a_0 = 1$. Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 1. \tag{2.21}$$

Rješenje. Homogeno rješenje je dano izrazom $a_n^h = \lambda \cdot 1^n = \lambda$. Koristeći Teorem 2.7 ili Korolar 2.8, pretpostavljamo da je partikularno rješenje oblika

$$a_n^p = v2^n$$

To uvrštavamo u (2.21) i dobivamo $v = 2$ pa je rješenje oblika

$$a_n = a_n^h + a_n^p = \lambda + 2^{n+1}.$$

Početni uvjet nam daje $\lambda = -1$ pa je $a_n = 2^{n+1} - 1$, što smo i očekivali. ■

Definicija 2.3 Tvrdnja Propozicije 2.10 se zove **princip superpozicije**. ■

■ **Primjer 2.12** Promotrimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} - n + 2 + 3^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

uz početni uvjet $a_0 = 2$.
Rješenje pripadne homogene relacije je $a_n = \lambda \cdot 2^n$. Sada gledamo dvije nehomogene rekurzivne relacije:

$$a_n = 2a_{n-1} - n + 2$$

i

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Rješenje prve pretpostavljamo u obliku $a_n^{(1)} = v_1 + v_2 n$ i dobivamo $a_n^{(1)} = n$. Rješenje druge pretpostavljamo u obliku $a_n^{(2)} = v_3 \cdot 3^n$ i dobivamo $a_n^{(2)} = 3^n$. Dakle vrijedi

$$n = 2(n-1) - n + 2, \quad n \geq 1$$

i

$$3^n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Sada to zbrojimo i dobivamo

$$n + 3^n = 2(n - 1 + 3^{n-1}) - n + 2 + 3^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

To znači da je $a_n^p = n + 3^n$ partikularno rješenje zadane rekurzivne relacije. Početni uvjet nam daje $\lambda = 1$ odnosno

$$a_n = 2^n + n + 3^n,$$

za $n \geq 1$. ■

Zadatak 2.8 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (6n-4)3^n, \quad n \geq 2 \tag{2.21}$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 12$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x_1 = 3$ je dvostruka nultočka pa homogeno rješenje ima oblik $a_n^h = \lambda_1 3^n + \lambda_2 n 3^n$ Partikularno rješenje pišemo u obliku $a_n^p = n^2(\nu_1 + \nu_2 n)3^n$ i to uvrštavamo u (2.21). Dobivamo $\nu_1 = 1$ i $\nu_2 = 1$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 3^n + \lambda_2 n 3^n + n^2 3^n + n^3 3^n.$$

Početni uvjeti nam daju $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1$ pa traženo rješenje ima oblik

$$a_n = 3^n + n3^n + n^2 3^n + n^3 3^n = (1 + n + n^2 + n^3)3^n = \frac{n^4 - 1}{n - 1} 3^n.$$

Lako se vidi da je $a_0 = 1$, $a_1 = 12$, $a_2 = 135$, $a_3 = 1080$, itd. ∎

Zadatak 2.9 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n+3} + 8n + 24n(-1)^n + (9n^2 - 3n + 2)2^{n-3}, \quad n \geq 3$$

uz početne uvjete $a_0 = 5$, $a_1 = -7$ i $a_2 = 87$.

Rješenje. Najprije rješavamo karakterističnu jednadžbu kako bismo našli nultočke,

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2 = 0.$$

To znači da nultočka $x_1 = 1$ ima kratnost 1, a $x_2 = -1$ ima kratnost 2 pa homogeno rješenje ima oblik $a_n^h = \lambda_1 + \lambda_2(-1)^n + \lambda_3 n(-1)^n$. Sada tražimo partikularno rješenje. Pišemo $a_n^p = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + a_n^{(3)}$ gdje je $a_n^{(1)}$ vezan uz $8n$, $a_n^{(2)}$ uz $24n(-1)^n$ i $a_n^{(3)}$ uz $(9n^2 - 3n + 3)2^n$. S obzirom da $x_1 = 1$ ima kratnost 1, $a_n^{(1)}$ tražimo u obliku $a_n^{(1)} = n(\nu_1 n + \nu_2)$ i to uvrštavamo u relaciju

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n+3} + 8n, \quad n \geq 3.$$

Dobivamo $\nu_1 = 1$ i $\nu_2 = 3$ pa je $a_n^{(1)} = n^2 + 3n$. S obzirom da $x_2 = -1$ ima kratnost 2, $a_n^{(2)}$ tražimo u obliku $a_n^{(2)} = n^2(\nu_3 n + \nu_4)(-1)^n$ i to uvrštavamo u relaciju

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n+3} + 24n(-1)^n, \quad n \geq 3.$$

Dobivamo $\nu_3 = 2$ i $\nu_4 = 9$ pa je $a_n^{(2)} = (2n^3 + 9n^2)(-1)^n$. S obzirom da 2 nije nultočka karakteristične jednadžbe, $a_n^{(3)}$ tražimo u obliku $(\nu_5 n^2 + \nu_6 n + \nu_7)2^n$ i to uvrštavamo u relaciju

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n+3} + (9n^2 - 3n + 2)2^{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Dobivamo $\nu_5 = 1$, $\nu_6 = -1$ i $\nu_7 = 2$ pa je $a_n^{(3)} = (n^2 - n + 2)2^n$. To znači da opće rješenje ima oblik

$$a_n = a_n^h + a_n^p = \lambda_1 + \lambda_2(-1)^n + \lambda_3 n(-1)^n + n^2 + 3n + (2n^3 + 9n^2)(-1)^n + (n^2 - n + 2)2^n.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$ pa traženo rješenje ima oblik

$$a_n = 1 + 2(-1)^n + 3n(-1)^n + n^2 + 3n + (2n^3 + 9n^2)(-1)^n + (n^2 - n + 2)2^n$$

za $n \geq 0$. ∎

■ **Primjer 2.13** Primjer 2.3 se može riješiti **teleskopiranjem**,

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = a_0 + 1 + \cdots + n = \lambda_1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

U svakom koraku smo koristili (2.9), a na kraju formulu $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Promotrimo još jedan primjer koji ćemo riješiti teleskopiranjem. Zadana je rekurzivna relacija

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

uz početni uvjet $a_1 = 1$. Računamo a_n slično kao u prethodnom slučaju,

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2(2(2a_{n-3} + 1) + 1) + 1 = \cdots = \\ &= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

Koristili smo formulu za zbroj članova geometrijskog reda $q^{n-1} + \cdots + 1 = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ i početni uvjet $a_1 = 1$. ■

Zadatak 2.10 Odredite broj nizova duljine n sastavljenih od elemenata skupa $\{0, 1, 2\}$ takvih da nikoje dvije 0 nisu susjedne.

Rješenje. Gledamo prvi član niza. Na tom mjestu može biti 0, 1 ili 2. Ako je na prvom mjestu 0, tada nakon nule može biti 1 ili 2, a nakon toga bilo koji niz duljine a_{n-2}. Ako je na prvom mjestu 1 ili 2 tada nakon toga može biti bilo koji niz duljine a_{n-1}. To nam daje rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Početne uvjete sami postavljamo. Jasno je da je $a_1 = 3$. Nizova duljine 2 ima 8 jer moramo izbaciti niz 00. Dakle, $a_2 = 8$. Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Nultočke su $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Tada opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 (1 - \sqrt{3})^n + \lambda_2 (1 + \sqrt{3})^n, \quad n \geq 1.$$

Sada koristimo početne uvjete. Dobivamo sustav

$$\begin{array}{llcl} \lambda_1(1-\sqrt{3}) & +\lambda_2(1+\sqrt{3}) & = & 3 \\ \lambda_1(1-\sqrt{3})^2 & +\lambda_2(1+\sqrt{3})^2 & = & 8 \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{llcl} \lambda_1(1-\sqrt{3}) & +\lambda_2(1+\sqrt{3}) & = & 3 \\ \lambda_1(4-2\sqrt{3}) & +\lambda_2(4+2\sqrt{3}) & = & 8 \end{array}$$

Rješenje sustava su $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1 + \sqrt{3})^n$$

za $n \geq 1$. ■

2.5 Rješavanje rekurzivnih relacija pomoću funkcija izvodnica

Rekurzivne relacije možemo rješavati pomoću funkcija izvodnica. Uočimo da su uvijek zadani početni uvjeti i tražimo rješenje koje zadovoljava dane početne uvjete. Nećemo tražiti opće rješenje. Uočimo također pomak indeksa u sumi i tu moramo biti oprezni.

Korištenje funkcija izvodnica za rješavanje rekurzivnih relacija ćemo pokazati na primjerima. Najprije ćemo ponovno riješiti Primjer 2.1.

■ **Primjer 2.14** Ponovno gledamo Primjer 2.1 odnosno rekurzivnu relaciju (2.1) i početne uvjete $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Neka je (a_n) rješenje koje zadovoljava (2.1) i početne uvjete. Sada gledamo funkciju izvodnicu $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i tražimo relaciju koju zadovoljava kako bismo je mogli izračunati. Zbog toga krećemo od zadane rekurzivne relacije. Napišimo je za nekoliko vrijednosti broja $n \geq 2$ i odmah pomnožimo svaku relaciju s x^n. Dobivamo

$$\begin{aligned}
n = 2: \quad & a_2x^2 = 5xa_1x - 6x^2a_0 \\
n = 3: \quad & a_3x^3 = 5xa_2x^2 - 6x^2a_1x \\
n = 4: \quad & a_4x^4 = 5xa_3x^3 - 6x^2a_2x^2 \\
& \ldots \\
n = n: \quad & a_nx^n = 5xa_{n-1}x - 6x^2a_{n-2}x^{n-2} \\
& \ldots
\end{aligned}$$

Zbrojimo li dobivene izraze (po stupcima) dobivamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(obratimo pažnju na indeks sumacije), odnosno

$$g(x) - a_0 - a_1 x = 5x\,(g(x) - a_0) - 6x^2 g(x).$$

Početni uvjeti nam daju

$$g(x) - 2 - 5x = 5xg(x) - 10x - 6x^2 g(x)$$

odnosno

$$(1 - 5x + 6x^2)g(x) = 2 - 5x.$$

Uočimo da uz $g(x)$ nije polinom iz karakteristične jednadžbe nego polinom u kojem koeficijenti iz karakteristične jednadžbe idu u "suprotnom smjeru". Zbog toga njegove nultočke nisu 2 i 3 nego $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$. To se nije dogodilo slučajno nego će se uvijek događati. Konačno dobivamo

$$g(x) = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2} = \frac{2-5x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$$

odnosno

$$g(x) = (2^n + 3^n)x^n$$

a to znači da je $a_n = 2^n + 3^n$, što smo znali i prije. ■

Zadatak 2.11 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.22}$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 4$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 4x + 4 = 0$, a to znači da imamo dvostruku nultočku $x_1 = 2$. Postupak rješavanja pomoću funkcija izvodnica se ne mijenja. To znači da (2.22) množimo s x^n za svaki $n \geq 2$ i sve to zbrajamo. Dobivamo

$$g(x) - a_0 - a_1 x = 4x(g(x) - a_0) - 4x^2 g(x),$$

odnosno

$$(1 - 4x + 4x^2)g(x) = 1.$$

Na kraju dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{1 - 4x + x^2} = \frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n x^n.$$

To znači da je $a_n = (n+1)2^n$. ∎

U prethodnom primjeru smo rješavali rekurzivnu relaciju za koju karakteristična jednadžba ima dvostruko rješenje. Sada ćemo pogledati nehomogenu relaciju i riješiti je korištenjem funkcija izvodnica.

Zadatak 2.12 Riješimo Zadatak 2.7 ($a_n = a_{n-1} + 2^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$) pomoću funkcija izvodnica.

Rješenje. Dakle, množimo (2.21) s x^n, $n \geq 1$ i zbrajamo sve izraze. Ovaj put imamo i funkciju $f(n)$ i moramo prepoznati izraz $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$. U ovom primjeru je to lako jer je riječ o sumi geometrijskog reda pa dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 1 = \frac{1}{1-2x}.$$

Vrijedi

$$g(x) - a_0 = xg(x) + \frac{1}{1-2x} - 1.$$

Sada nam početni uvjet daje

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \\ &= 2(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots) - (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \\ &= (2-1) + (4-1)x + (8-1)x^3 + \cdots + (2^{n+1} - 1)x^n + \cdots. \end{aligned}$$

To znači da je $a_n = 2^{n+1} - 1$, a to smo dobili u Zadatku 2.7. ∎

Zadatak 2.13 Riješimo rekurzivnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + n2^n, \quad n \geq 1,$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$.

Rješenje. Dajemo samo skicu. Vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n2^n x^n = \frac{2x}{(1-x)^2}$, dobivamo

$$g(x) = \frac{2x}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{2}{1-x} + \frac{2}{(1-2x)^2} - \frac{4}{1-2x}$$

pa je $a_n = 2 + 2(n+1) \cdot 2^n - 4 \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$. Sada je $a_1 = 2$, $a_2 = 10$ itd. ■

Nizove možemo zadavati rekurzivnim relacijama, eksplicitno i pomoću funkcija izvodnica. U prethodna tri odjeljka smo vidjeli kako odrediti eksplicitnu formulu za članove niza ako je niz zadan rekurzivnom relacijom. U ovom odjeljku smo određivali eksplicitnu formulu tako da smo najprije odredili funkciju izvodnicu. Sada ćemo pogledati primjer u kojem računamo samo funkciju izvodnicu iz rakurzivne relacije, no račun je malo složeniji.

Zadatak 2.14 Odredimo samo funkciju izvodnicu niza $(a_n)_{n \geq 1}$ određenog rekurzivnom relacijom

$$a_n + 2a_{n-1} + 4a_{n-2} = \frac{5^n}{n}, \quad n \geq 3$$

uz početne uvjete $a_1 = 1$ i $a_2 = 0$.

Rješenje. Uočimo da funkcija izvodnica ima oblik $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Rekurzivnu relaciju množimo s x^n za $n \geq 3$ i zbrajamo. Dobivamo

$$(f(x) - a_2 x^2 - a_1 x) + 2x(f(x) - a_1 x) + 4x^2 f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n}$$

odnosno

$$(1 + 2x + 4x^2) f(x) = x + 2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n}.$$

Sada računamo $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n}$. Izraz $\sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \frac{1}{1-5x}$ integriramo i dobivamo

$$\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{5} \ln|1-5x|$$

odnosno

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5x)^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-5x| - 5x - \frac{25x^2}{2}.$$

Konačno,

$$f(x) = \frac{x + 2x^2 - \ln|1-5x| - 5x - \frac{25x^2}{2}}{1 + 2x + 4x^2} = -\frac{8x + 21x^2 + \ln(1-5x)^2}{2 + 4x + 8x^2}.$$

Članove niza, a_n, ne računamo. ■

2.6 Riješeni zadaci

Zadatak 2.15 Izračunajmo sumu

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Rješenje. Rekurzivna relacija ima oblik

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3, \; n \geq 1$$

uz početni uvjet $S_1 = 1$ (mogli bismo staviti i $S_0 = 0$). Kako karakteristična jednadžba ima oblik $x - 1 = 0$, odnosno $x_1 = 1$, partikularno rješenje pišemo u obliku

$$S_n^p = v_1 n^4 + v_2 n^3 + v_3 n^2 + v_4 n.$$

Uvrštavanjem tog izraza u rekurzivnu relaciju dobivamo $v_1 = \frac{1}{4}$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{4}$ i $v_4 = 0$ odnosno

$$S_n^p = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Sada dodajemo i opće rješenje pripadne homogene jednadžbe $S_n^h = \lambda$,

$$S_n = \lambda + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

i uvrštavanjem u početni uvjet $S_1 = 1$ dobivamo $\lambda = 0$ odnosno

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Znamo da je to dobra formula. ■

Zadatak 2.16 Vrijeme potrebno za predaju signala s_1 je t_1 sekundi, signala s_2 je t_2 sekundi, ..., a signala s_m je t_m sekundi, $t_i \in \mathbb{N}$. Neka je b_n broj različitih poruka (nizova signala) čije slanje traje točno n sekundi, $n \in \mathbb{N}$. Odredimo rekurzivnu relaciju za b_n. Izračunajmo b_{2010}, ako je zadano $m = 3$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$.

Rješenje. Neka je $n \geq t_i, \forall i$. Kako poruka može završavati signalom s_i, micanjem tog signala, dobivamo poruku duljine $n - t_i$. To nam daje

$$b_n = \sum_{i=1}^{m} b_{n-t_i}, \; n \geq \max_i \{t_i\}.$$

Uz to vrijedi $b_0 = 1$.

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}, \; n \geq 3, \; b_0 = 1, \; b_1 = 2.$$

Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 2x - 1 = 0$, nultočke su oblika $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ pa opće rješenje ima oblik

$$b_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo $A = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ i $B = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ pa je

$$b_{2010} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^{2010} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^{2010}.$$

Uočimo da je to prirodan broj. ■

Zadatak 2.17 Neka je C_n broj različitih načina popločavanja pruge dimenzije $n \times 1$ pločama dimenzije 1×1 i 2×1. Odredimo rekurzivnu relaciju za niz C_n, početne uvjete i riješimo rekurziju.

Rješenje. Zadnja ploča može biti dimenzije 1×1, a prije toga C_{n-1} popločavanja ili dimenzije 2×1, a prije toga C_{n-2} popločavanja. To nam daje rekurzivnu relaciju

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Lako se vidi da je $C_1 = 1$ i $C_2 = 2$. To nam daje "pomaknuti" Fibonaccijev niz (uočite pomak za jedno mjesto), odnosno

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

■

Zadatak 2.18 Riješimo rekurziju

$$a_n - 4n_{n-2} = 2^n + 4^n,$$

uz početne uvjete $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{4}{3}$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 4 = 0$ pa su nultočke $x_{1,2} = \pm 2$, a homogeno rješenje je $a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2(-2)^n$. Sada tražimo partikularno rješenje. Partikularno rješenje ima oblik $a_n^p = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$. Za prvo rješenje vrijedi

$$a_n^{(1)} = v_1 n 2^n.$$

Uvrštavajući to rješenje u jednadžbu

$$a_n - 4a_{n-2} = 2^n$$

dobivamo $v_1 = \frac{1}{2}$. Drugo rješenje ima oblik

$$a_n^{(2)} = v_2 4^n.$$

Uvrštavajući to rješenje u jednadžbu

$$a_n - 4a_{n-2} = 4^n$$

dobivamo $v_2 = \frac{4}{3}$. Sada za

$$a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2(-2)^n + \frac{1}{2}2^n + \frac{4}{3}4^n$$

uvrštavamo početne uvjete i dobivamo $\lambda_1 = -\frac{7}{4}$ i $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. Dakle,

$$a_n = -\frac{7}{4}2^n + \frac{3}{4}(-2)^n + \frac{1}{2}2^n + \frac{4}{3}4^n$$

za $n \geq 0$. ■

Zadatak 2.19 Kvadrat stranice 1 podijelimo dijagonalom na dva pravokutna trokuta, a svaki od ta dva trokuta podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta, itd ... novonastale trokute dijelimo dalje na isti način. Neka je t_n broj trokuta nakon n podjela. Odredimo rekurzivnu relaciju za t_n i funkciju izvodnicu za t_n.

Rješenje. Lako se vidi da je $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ i općenito $t_n = 2^n$ za $n \geq 1$, ali i $a_0 = 0$. Krenimo s funkcijom $\frac{1}{1-2x}$. Množenjem s $2x$ koeficijenti uz x^n za $n \geq 1$ ostaju nepromijenjeni, a konstantni član postaje 0, što i trebamo. Dakle $f(x) = \frac{2x}{1-2x}$. ■

Zadatak 2.20 Nađite rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n + \lambda_3 \cdot (-1)^n + \lambda_4, \ \ n \geq 0.$$

Rješenje. Nultočke su $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. To nam daje karakterisičnu jednadžbu

$$(x-2)^2(x+1)(x-1) = (x^2-4x+4)(x^2-1) = x^4-4x^3+3x^2+4x-4 = 0$$

i rekurzivnu relaciju

$$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n = 0.$$

za $n \geq 4$. ■

Zadatak 2.21 Komunikacijskim kanalima mogu se poredati poruke koristeći se samo trima slovima a, b i c. Dopustive poruke su one kod kojih se na susjednim mjestima ne pojavljuje simbol a. Koliko ima dopustivih poruka duljine n?

Rješenje. Neka je a_n broj dopustivih poruka duljine n. Ako poruka završava simbolom a tada prije simbola a mogu biti simboli b ili c, a prije toga bilo što, a to je $2a_{n-2}$ poruka. Ako poruka završava simbolima b ili c tada prije toga može biti bilo što, a to je $2a_{n-1}$ poruka. To nam daje rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \ n \geq 3$$

uz početne uvjete $a_1 = 3$ i $a_2 = 8$. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 2x - 2 = 0$, rješenja su $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ pa opće rješenje rekurzivne jednadžbe ima oblik

$$a_n = \lambda_1(1+\sqrt{3})^n + \lambda_2(1-\sqrt{3})^n, \ n \geq 1.$$

Uvrštavajući početne uvjete dobivamo $\lambda_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ i $\lambda_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ pa je broj poruka dan izrazom

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \cdot (1-\sqrt{3}), \ n \geq 1.$$

za $n \geq 1$. ■

Zadatak 2.22 Odredite rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = \lambda_1 + \lambda_2 2^n + \lambda_3 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \lambda_4 2^n \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Rješenje. Iz rekurzivne relacije nalazimo nultočke karakteristične jednadžbe $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}) = 1 \pm \sqrt{3}i$. To nam daje karakterističnu jednadžbu

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i) &= (x^2-3x+2)(x^2-2x+4) = \\ &= x^4-5x^3+12x^2-16x+8 = 0.\end{aligned}$$

To znači da rekurzivna relacija ima oblik $a_{n+4} - 5a_{n+3} + 12a_{n+2} - 16a_{n+1} + 8a_n = 0$. ■

Zadatak 2.23 Odredimo rekurzivnu relaciju za broj nizova duljine n, sastavljenih od znamenki 1, 2, 3, u kojima nikoje dvije neparne znamenke nisu susjedne. Koliko ima takvih nizova duljine 100?

Rješenje. Označimo s a_n broj nizova duljine n. Tada nizovi mogu završavati znamenkom 2 i takvih ima a_{n-1}. Mogu završavati i neparnom znamenkom. No, kako dvije uzastopne znamenke ne mogu biti neparne prije toga je morala biti znamenka 2, a prije toga bilo što, pa takvih nizova ima $2a_{n-2}$. Dobivamo

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

uz početne uvjete $a_1 = 3$ i $a_2 = 5$. Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot (-1)^n, \; n \geq 1.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ pa je

$$a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n, \; n \geq 1$$

i $a_{100} = \frac{4}{3} \cdot 2^{100} - \frac{1}{3}$. ∎

Zadatak 2.24 Nađimo opće rješenje rekurzije

$$3^{a_n} = 9^n \cdot 3^{-a_{n-2}}.$$

Rješenje. Možemo pisati

$$3^{a_n} = 3^{2n - a_{n-2}}$$

odnosno

$$a_n = 2n - a_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 + 1 = 0$, rješenja su $\pm i$ pa partikularno rješenje pišemo u obliku $a_n^p = \lambda_1 n + \lambda_2$. Dobivamo $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = \mu_1 \cos\frac{n\pi}{2} + \mu_2 \sin\frac{n\pi}{2} + n + 1.$$

za $n \geq 0$. ∎

Zadatak 2.25 Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju (svaka dva pravca se sijeku i nikoja tri pravca se ne sijeku u istoj točki) dijeli ravninu?

Rješenje. Jedan pravac dijeli ravninu na dva dijela pa stavljamo $a_1 = 2$. Drugi pravac doprinosi još dva nova dijela, a n-ti pravac doprinosi još n novih dijelova jer siječe prethodnih $n-1$ pravaca u $n-1$ točki pa je na njemu n dijelova. Dobivamo rekurzivnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + n$$

čije rješenje je niz (a_n) dan izrazom

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}, \quad n \geq 1.$$

Uočimo da je formula ispravna i za $n = 0$. Nacrtajte sliku. ∎

2.7 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.26 Nađite opće rješenje rerukzije $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n + 2n$.

Zadatak 2.27 Nađite rješenje rekurzije $a_n = 2a_{n-1} + 9a_{n-2} - 18a_{n-3}$, $n \geq 3$ za koje je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 10$.

Zadatak 2.28 Neka je S_n zbroj prvih n kvadrata prirodnih brojeva, $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Napišite rekurzivnu relaciju koju zadovljava S_n i početni uvjet a nakon toga je riješite.

Zadatak 2.29 Riješite rekurzivnu relaciju $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = n + 5^n$, $n \geq 0$ uz početne uvjete $a_0 = 0$, $a_1 = 5$.

Zadatak 2.30 Riješite rekurzivnu relaciju $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + n$, $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ i rješenje zapišite bez korištenja kompleksnih brojeva.

Zadatak 2.31 Nađite opće rješenje rekurzivne relacije $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$.

Zadatak 2.32 Riješite rekurzivnu relaciju $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0$, uz početne uvjete $a_0 = -1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

Zadatak 2.33 Riješite rekurzivnu relaciju $a_n = 4a_{n-1} + 32a_{n-2} - 7n$, $n \geq 2$, uz početne uvjete $a_0 = \frac{1}{5}$ i $a_1 = 1$.

Rješenja zadataka

2.26 $a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n + \frac{1}{9}(-1)^n + 2n + 4$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.
2.27 $a_n = \frac{11}{6}3^n + \frac{1}{6}(-3)^n - 2 \cdot 2^n$.
2.28 $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ i $S_1 = 1$ (može i $S_0 = 0$), $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2.29 $a_n = -\frac{77}{64} + \frac{77}{64}5^n - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20}n5^n$.
2.30 $a_n = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} + n + 2$, $n \geq 0$.
2.31 $a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) \cdot 2^n$, $n \geq 0$.
2.32 $a_n = 4n - 1$.
2.33 $a_n = -\frac{1}{35}8^n - \frac{4}{25}(-4)^n + \frac{1}{5}n + \frac{68}{175}$.

2.8 Istraživački problemi

Zadatak 2.34 Promotrimo ponovno Primjer 2.1. Izračunajte a_{1000} koristeći

1. rekurzivnu relaciju (2.1) i početne uvjete.
2. izraz (2.2).

Uočite da a_{1000} ima 478 znamenaka pa će Vam u oba slučaja trebati računalo.

II

Teorija grafova

3. Pojam grafa

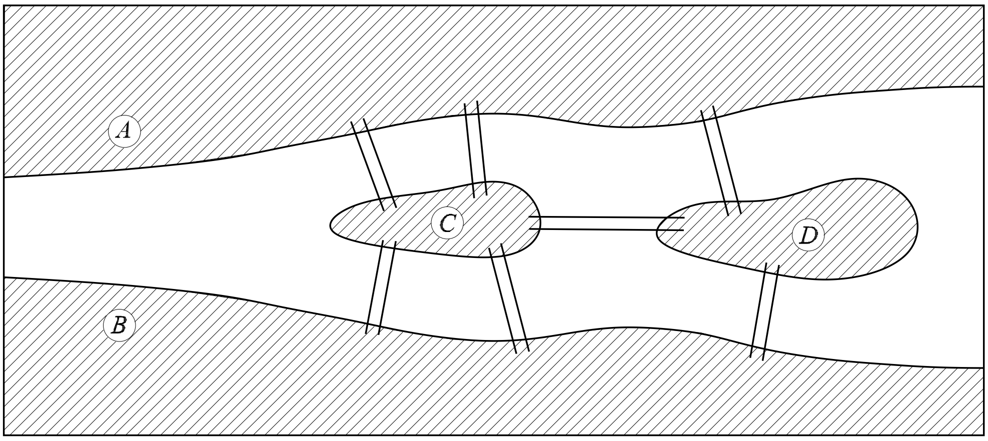
3.1 Povijesni pregled i motivacija

Do sada smo u diskretnoj matematici prvenstveno učili prebrajati konačne skupove i njihove razne podskupove, rabeći pritom ili direktne tehnike prebrajanja (produktno pravilo, formula uključivanja i isključivanja), ili razvijajući druge matematičke alate (funkcije izvodnice, rekurzivne relacije) za tu svrhu. Većina postavljenih problema elementarne, enumerativne kombinatorike odgovarala je na pitanje *koliko* pojedinih objekata ima (preciznije, *koliki* je kardinalitet odgovarajućih podskupova zadanoga skupa), ili *na koliko se načina* nešto može načiniti (konstruirati, složiti, obaviti). Sljedeći korak u proučavanju konačnih objekata je da više ne promatramo samo skupove ili njihove podskupove kao temeljnu strukturu s kojom radimo, nego da promatramo složenije kombinatoričke strukture i njihova svojstva, te da pomoću njih često uspijemo odgovoriti i na pitanja *kako* nešto učiniti. Najjednostavnija i najčešće primjenjivana kombinatorička struktura je *graf*, pri čemu upravo jednostavnost te strukture omogućuje da puno praktičnih problema lagano možemo prevesti, *izmodelirati* u terminima grafova, a tada na dotične grafove primijeniti poznate dokazane teoretske spoznaje, algoritme i apstraktne ideje.

Za razliku od mnogih drugih dijelova matematike, za teoriju grafova se točno može reći kada je zasnovana. U svome članku iz 1736. godine

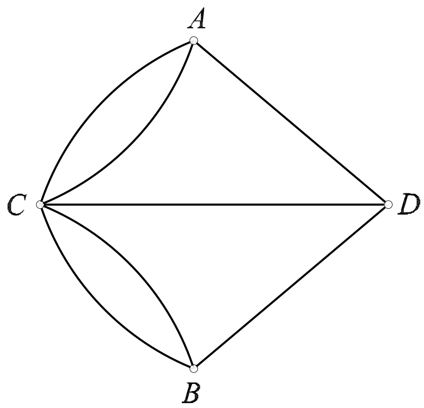
L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis
(Rješenje jednog problema u svezi s geometrijom položaja),
Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanae 8 (1736), 128–140.

švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1783.) obradio je i riješio jedan čuveni stari problem. Pruski grad Königsberg (danas Kalinjingrad, Rusija) leži na rijeci Pregel, koja grad dijeli na četiri teritorija, dva otoka i dva obalna dijela, a koji su u 18. stoljeću bili povezani sa sedam mostova kao na slici.



Pitanje je može li se iz nekog dijela grada Königsberga krenuti u šetnju tako da se svakim mostom prijeđe točno jednom. Evo odmah i neposrednog odgovora. Ako lijeva obala rijeke Pregel (teritorij označen na slici slovom A) nije niti početak niti kraj naše šetnje, onda nam za svaki dolazak na teritorij A i odlazak s njega trebaju dva različita mosta. No, kako je teritorij A spojen s ostalim dijelovima grada trima mostovima, takva je šetnja nemoguća. Dakle, teritorij A morao bi biti početak ili kraj šetnje. Međutim, analogno razmatranje možemo provesti i za preostala tri dijela Königsberga, B, C i D, iz čega proizlazi da bismo u svakom od tih dijelova morali ili početi ili završiti našu šetnju, što je dakako nemoguće.

Vjerujemo da svatko uočava da je prirodni model (skica lišena svih nepotrebnih ukrasa) na kojem se problem königsberških mostova može proučavati sljedeća shema,



a upravo je to primjer jednog (neusmjerenog) grafa. Euler je postavljeno pitanje riješio i u znatno većoj općenitosti, no o tome ćemo detaljnije i preciznije učiti kasnije.

Iako temelji teorije grafova sežu u 18. stoljeće, ta se matematička disciplina kao zasebna teorija intenzivno počela razvijati tek u drugoj polovini 20. stoljeća, a mnoštvo otvorenih problema svjedoči o njenoj aktualnosti i danas. Probleme teorije grafova često je sasvim jednostavno formulirati, no ponekad ih je vrlo teško riješiti.

Svaka se mrežna konfiguracija (cestovna karta, naftovod, strujni krug) može na prirodan način zamijeniti grafom, te se mogu postaviti zanimljiva pitanja koja teorija grafova rješava. Na primjer, zanimljivo je pitanje mogu li se sve ulice zagrebačkog Gornjeg grada učiniti jednosmjernima, a da se pritom može autom dovesti iz bilo koje točke u bilo koju drugu točku, i to naravno u smjeru vožnje. Naravno da to nije moguće ako se zna da ima i slijepih ulica (Visoka), ali razmislite o tom problemu ako se slijepe ulice zanemare.

Ima naravno i kompliciranijih i manje očitih primjena teorije grafova. Jedna takva je čuveni *Problem* 4 *boje*. Naime, može se pokazati da se svaka geografska karta može obojati s 4 boje, tako da su susjedne države obojane različitim bojama. Ove teme spadaju u naprednije teme teorije grafova i mi ćemo ih u nekoj mjeri uspjeti obraditi u okviru kolegija Diskretna matematika 1, za koji je ovaj nastavni materijal i napisan. No, najprije ćemo se precizno upoznati s pojmom grafa, proučiti jednostavna strukturalna svojstva grafova, karakteristične primjere, te upoznati najjednostavnije algoritme optimizacije na grafovima.

Također, neki od problema teorije grafova iziskuju softversko, programsko rješavanje, pa iako se nećemo posebno opsežno u okviru ovog kolegija baviti naprednim algoritmima na grafovima (to bi mogao biti zaseban kolegij), osvijestit ćemo pristup rješavanju nekih problema pomoću računala i očekivati da se zna osmisliti i izvesti iscrpna pretraga prostora pretraživanja koja nalazi rješenje zadanog problema. Osim za zadane zadatke očekujemo da za vlastito zadovoljstvo nađete softversko rješenje i načinite svoje računalne programe i za neke druge probleme koje ćemo proučavati.

3.2 Glavne definicije

Definicija 3.1 **Jednostavni graf** G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) grafa G i konačnog skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo **bridovi**. Skup $V(G)$ zovemo skup vrhova i ako je jasno o kojem je grafu G riječ označavat ćemo ga kraće samo s V, a skup $E(G)$ zovemo skup bridova i označavat ćemo ga i samo s E. Formalno, ponekad ćemo pisati $G = (V(G), E(G))$ ili kraće još i $G = (V, E)$. ■

Oznaka V za skup vrhova dolazi od engleske riječi *vertex* za vrh, a oznaka E za skup bridova pak od engleske riječi *edge* za brid.

Uočimo da smo prethodnom definicijom *jednostavnog* grafa isključili mogućnost da su dva vrha spojena s više bridova (budući smo $E(G)$ definirali kao skup), te da postoji brid koji spaja vrh sa samim sobom (jer smo svaki brid definirali kao dvočlani podskup). Ako pak dopustimo višekratnost bridova, ili ako dopustimo brid koji spaja vrh sa samim sobom (takve bridove zvat ćemo *petljama*), onda redovito govorimo o *općem (generaliziranom) grafu*, ili kratko samo o grafu. U većini modela i strukturalnih problema koje ćemo promatrati svejedno je promatramo li ih u jednostavnom ili općem grafu, pa ćemo to posebno naglašavati samo kad odista bude potrebno.

Definicija 3.2 Za brid $e = \{v, w\}$ kažemo da **spaja** vrhove v i w i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo vw. U toj situaciji kažemo da su vrhovi v i w grafa G **susjedni**. Također, kažemo da je vrh v **incidentan** s bridom e. Naravno, i w je također incidentan s bridom e. ■

Grafički ćemo vrhove grafa prikazivati kružićima, a bridove spojnicama vrhova. Sjecište dviju spojnica je vrh samo ako je nacrtano kružićem.

Glavni zadatak teorije grafova je proniknuti u strukturu pojedinog grafa, te ustanoviti u čemu je bitna (strukturalna) razlika dvaju promatranih grafova. Najprije ćemo stoga definirati kada dva grafa u apstraktnom smislu smatramo jednakima.

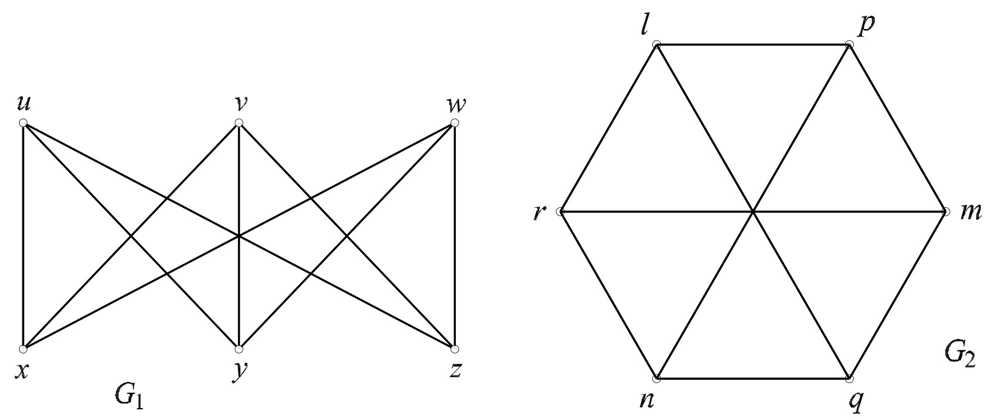
Definicija 3.3 Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespondencija $(1-1$ preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$. Takvu bijekciju zvat ćemo **izomorfizam** grafova. ■

Iz definicije odmah slijedi da za izomorfne grafove G_1 i G_2 vrijedi

$$|V(G_1)| = |V(G_2)|, \quad |E(G_1)| = |E(G_2)|.$$

To je nuždan uvjet izomorfnosti, svakako ne i dovoljan, u što ćemo se uvjeriti na mnoštvu primjera. Evo jednog primjera izomorfnih grafova.

■ **Primjer 3.1** Dani su grafovi:

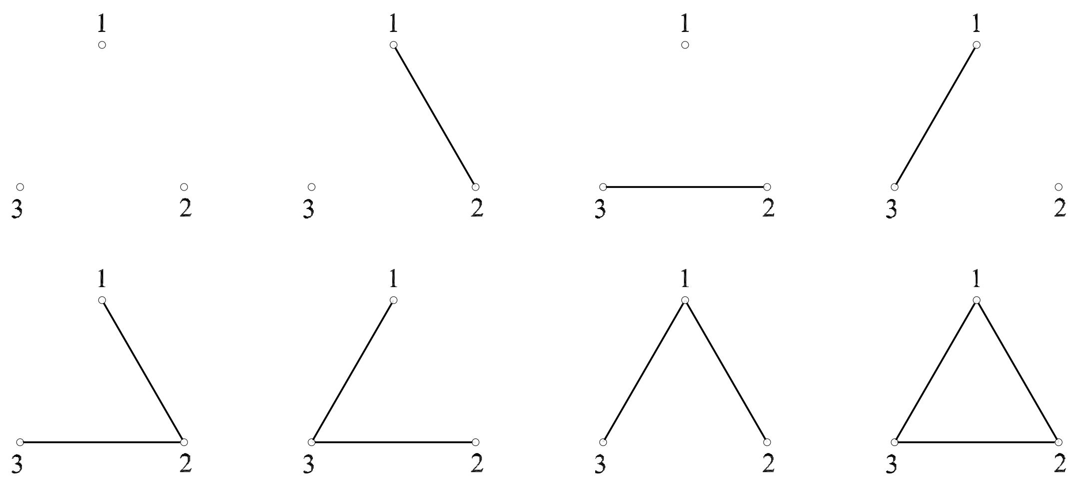


Da bismo ustanovili njihovu izomorfnost, moramo konstruirati bijekciju φ između njihovih skupova vrhova koja čuva susjedstvo. Točnije, $\{v_1, v_2\} \in E(G_1)$ onda i samo onda ako je $\{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} \in E(G_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V(G_1)$. Uvjerite se sami da je bijekcija koja preslikava vrhove $u \mapsto l$, $v \mapsto m$, $w \mapsto n$, $x \mapsto p$, $y \mapsto q$, $z \mapsto r$ izomorfizam zadanih grafova! Pronađite sami neki drugi izomorfizam ovih grafova! ■

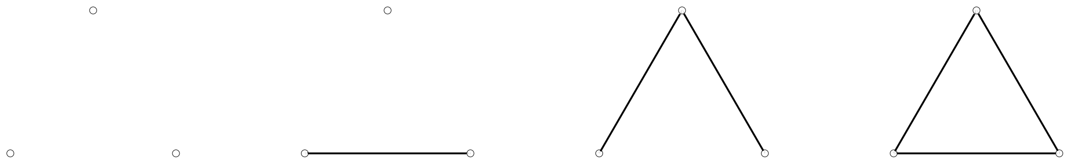
Relacija „izomorfnosti grafova" je relacija ekvivalencije na skupu svih grafova (s n vrhova).

Ovisno o problemu koji proučavamo, vrhovima grafa ponekad će biti dodijeljena imena (oznake, labele), a ponekad neće. Uočimo: dva grafa su izomorfna ako možemo preimenovati vrhove jednog u vrhove onog drugog. U tom smislu, želimo li prebrojiti koliko ima grafova s određenim brojem vrhova, trebamo naglasiti jesu li vrhovi unaprijed označeni (imenovani, labelirani), ili nisu. U drugom slučaju, kad ispitujemo broj grafova s danim brojem neoznačenih vrhova, tražimo zapravo broj svih neizomorfnih grafova s toliko vrhova.

■ **Primjer 3.2** Prebrojimo sve jednostavne grafove s 3 vrha, najprije uzimljući u obzir da su vrhovi unaprijed označeni (dakle, da ih razlikujemo), a onda uz pretpostavku da nisu označeni (do izomorfizma). Izlistajmo sve grafove s obilježena 3 vrha:



Ima ih dakle točno 8. Evo sada svih neizomorfnih grafova s 3 vrha (neobilježenih vrhova):



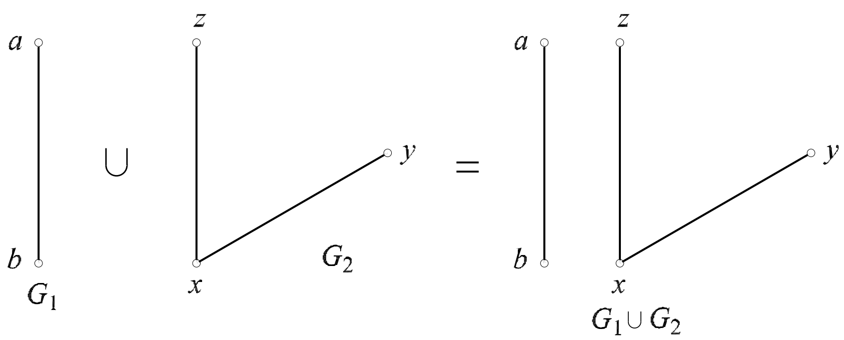
Razmišljali smo pritom „iscrpno”, rastavljajući problem prebrajanja na disjunktne podslučajeve: najprije smo pogledali koliko ima neizomorfnih grafova s 3 vrha i 0 bridova, pa onda onih s jednim bridom, i tako redom. ■

Zadatak 3.1 Koliko ima različitih jednostavnih grafova s n vrhova koji su unaprijed obilježeni?

Rješenje. Brid identificiramo kao dvočlani podskup skupa vrhova. Svaki dvočlani podskup skupa vrhova ili jest, ili nije brid u grafu. Dakle, za svaki od $\binom{n}{2}$ podskupova imamo dvije mogućnosti. Stoga je broj različitih grafova s n vrhova jednak $2^{\binom{n}{2}}$. ■

Uočimo da bi bilo smisleno postaviti pitanje koliko ima neizomorfnih (jednostavnih) grafova s n vrhova. Međutim, to je pitanje toliko teško (nije poznata zatvorena formula) da ga jedva, i to redovito uz pomoć računala, možemo riješiti za neke manje n-ove. Vrlo ambicioznim čitateljima ostavljamo da taj problem programski riješe za neke konkretne ne sasvim male n-ove, recimo za $n = 8$, 9 ili eventualno 10.

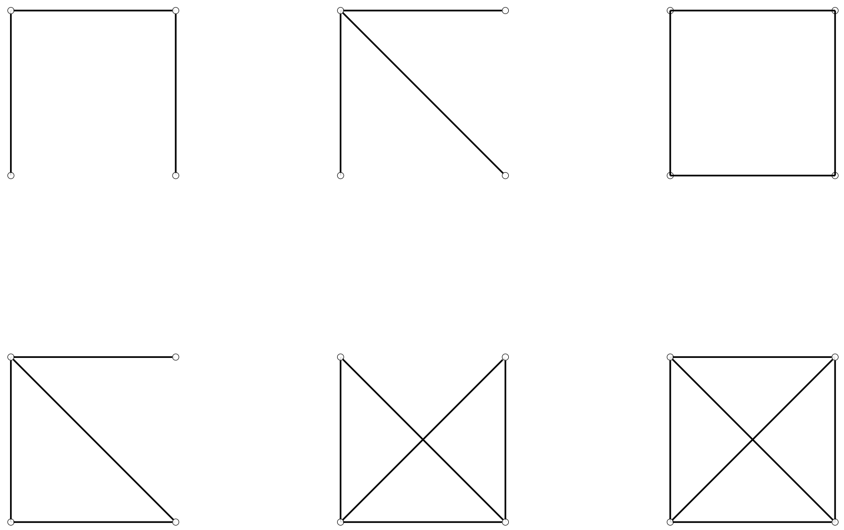
Definicija 3.4 Za zadane disjunktne grafove $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu **uniju** $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$. ■



Koliko god nam se ova definicija čini banalnom (a svakako prirodnom), ona nam omogućuje da definiramo važno svojstvo povezanosti grafa.

Definicija 3.5 Graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**. Svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti**. ■

Uvjerimo se da do izomorfizma postoji samo 6 povezanih jednostavnih grafova s 4 vrha:



Mi ćemo često promatrati i provoditi dokaze samo za povezane grafove. Naime, ako graf nije povezan, uvijek se svaka njegova komponenta povezanosti može promotriti zasebno.

Jedno od pitanja na koje se redovito može vrlo jednostavno odgovoriti, a pokazuje se važnim strukturalnim svojstvom, je koliko susjednih vrhova ima svaki pojedini vrh.

Definicija 3.6 **Stupanj vrha** v grafa G je broj bridova koji su incidentni s v. Označavamo ga s $\deg(v)$. Dogovorno, ako je vrh v petlja, onda ona broju $\deg(v)$ doprinosi s 2. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 zovemo **krajnji vrh**. ■

Posebno, zanimljivo je svakome grafu G pridružiti *niz stupnjeva*. Za graf s n vrhova to je n-torka koja se sastoji od rastućeg niza cijelih brojeva koji predstavljaju stupnjeve svih vrhova u grafu G (zajedno s kratnostima).

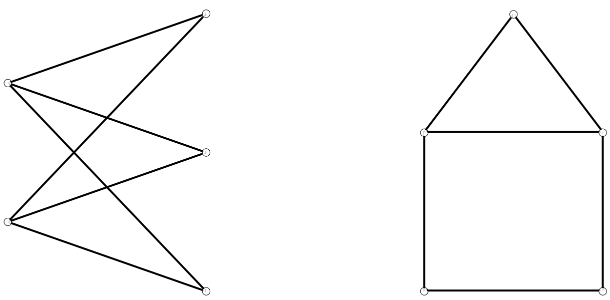
■ **Primjer 3.3** Pogledajmo graf na slici.

Niz stupnjeva ovog grafa je $(1,1,2,2,2)$. Graf ima dva krajnja vrha. ■

Izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva. Prema tome, ako dva grafa nemaju iste nizove stupnjeva, onda nisu izomorfni.

Postavimo si sada ovakvo pitanje: određuje li niz stupnjeva u potpunosti strukturu grafa? Ili, ekvivalentno, ako dva grafa imaju isti niz stupnjeva, jesu li oni nužno izomorfni? Odgovor daje sljedeći primjer.

■ **Primjer 3.4** Zadani su sljedeći grafovi.



Oba zadana grafa imaju niz stupnjeva $(2,2,2,3,3)$. No, s druge strane, evo strukturalne karakteristike koja ih u bitnome razlikuje. U lijevome grafu vrhovi stupnja 3 međusobno nisu susjedni, dok u desnome jesu. To dokazuje da oni nisu izomorfni. Možete li naći primjer dva neizomorfna grafa s 4 vrha koji imaju isti niz stupnjeva? ■

Leonhard Euler već je 1736. godine dokazao sljedeću jednostavnu činjenicu.

Lema 3.1 — o rukovanju. U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi

$$\sum_{v\in G} \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$$

Dokaz. Može se zapravo dokazati i konkretnija jednakost: $\sum_{v\in G} \deg(v) = 2\cdot|E(G)|$. Nju pak dokazujemo prebrajanjem svih „incidencija” grafa, tj. skupa $\{(v,e) \mid v\in V(G), e\in E(G), v\in e\}$ na dva načina. Krenemo li od vrhova, za svaki pojedini vrh takvih incidencija ima točno koliko je stupanj dotičnog vrha. Krenemo li od bridova, vidimo da svaki brid ima „dva kraja”, tj. da je dvočlani podskup, pa sveukupno incidencija ima $2\cdot|E(G)|$. Time smo dokazali ovu jednakost. Kako je desna strana jednakosti očevidno parna, budući je višekratnik broja 2, to parna mora biti i lijeva strana, što upravo dokazuje tvrdnju leme. ■

Ova se jednostavna činjenica zove Lema o rukovanju jer se može interpretirati ovako: Prilikom rukovanja bilo kojeg broja ljudi, broj ruku koji je u to uključen nužno je paran.

Korolar 3.2 Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran.

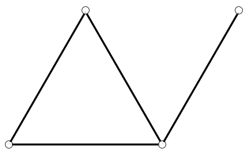
O odnosu među stupnjevima grafa skoro da se ništa više ne može tvrditi, skup stupnjeva može biti vrlo raznolik. Naravno, najpravilniji je slučaj kad je zadan graf u kojem su svi vrhovi istog stupnja.

Definicija 3.7 Za graf G kažemo da je **regularan**, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je G r-regularan ako je $\deg(v) = r$, $\forall v\in V(G)$. Cijeli broj r tada ćemo zvati **stupanj regularnosti** grafa G. ■

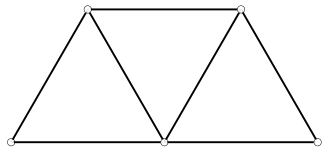
Niz stupnjeva regularnog grafa je konstantan niz. Razmislite postoji li i kako izgleda 1-regularan graf.

Definicija 3.8 **Podgraf** grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$. ■

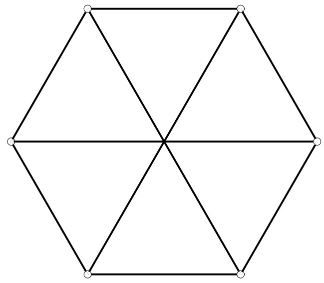
■ **Primjer 3.5** Zadani graf



je podgraf od



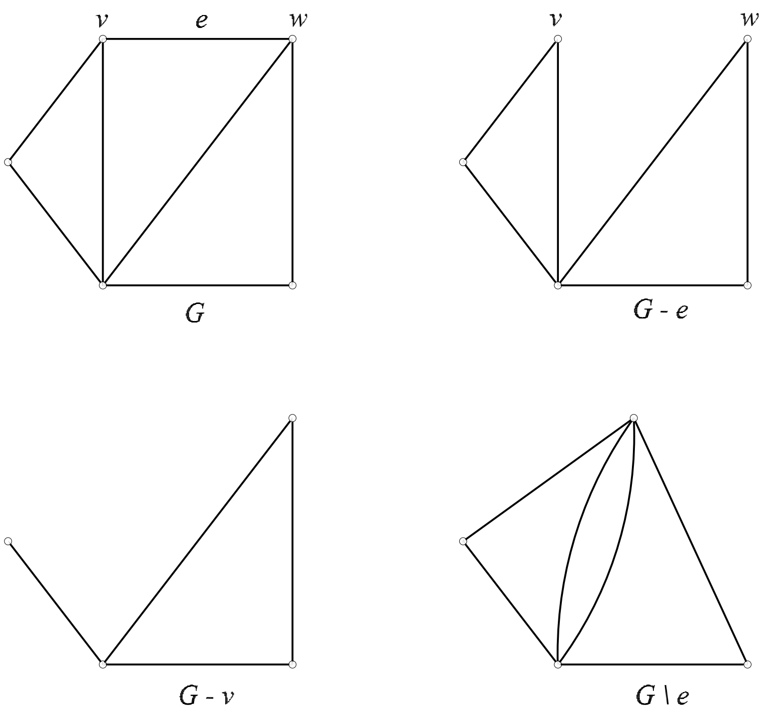
ali nije od



■

Podgrafove često dobivamo iz danog grafa G brisanjem vrhova ili bridova. Ako je e neki brid od G, onda s $G-e$ označavamo graf G bez brida e. Općenitije, ako je $F \subseteq E(G)$, onda je $G-F=(V(G),E(G)\setminus F)$. Ako je v vrh od G, onda je $G-v$ podgraf od G dobiven brisanjem vrha v i svih bridova incidentnih s v. Ako je pak $S \subseteq V(G)$, onda se graf $G-S$ dobiva uklanjanjem svih vrhova iz podskupa S, kao i svih bridova koji su incidentni s bilo kojim od uklonjenih vrhova. Sa $G \setminus e$ označit ćemo graf dobiven kontrakcijom brida e. Točnije, vrhove incidentne s tim bridom slijepimo, uzimljući pritom u obzir sve bridove s kojima su oba slijepljena vrha incidentna. Uočimo da $G \setminus e$ nije podgraf od G.

■ **Primjer 3.6** Brisanje brida ili vrha

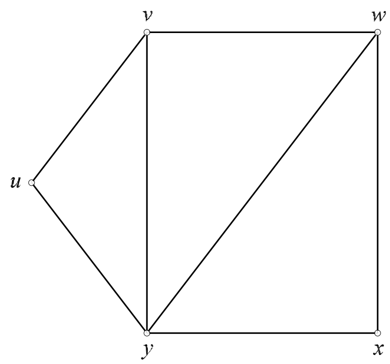


■

Zadatak 3.2 Neka je G graf s n vrhova i m bridova, neka je v vrh od G, takav da je $\deg(v) = k$, te neka je e brid iz G. Koliko vrhova i bridova imaju grafovi $G - e$, $G - v$, $G \setminus e$?

Rješenje. Graf $G - e$ nastao je brisanjem jednog jedinog brida. Dakle ima isto vrhova koliko i G, n, te bridova za jedan manje, $m - 1$. Graf $G - v$ nastaje uklanjanjem vrha v i svih bridova koji su s njime incidentni, a tih je točno $\deg(v)$. Dakle, vrhova je $n - 1$, a bridova $m - k$. Konačno, kontrahiramo li brid e, u novom grafu $G \setminus e$ imamo $n - 1$ vrhova (jer smo dva vrha slijepili), te $m - 1$ bridova (svi osim kontrahiranog brida e). ■

Do sada smo grafove predstavljali grafički, što je vizualno čitatelju najjednostavnije. Međutim, pitanje je kako graf reprezentirati u računalu, ili uopće, kako s grafovima spretno računati. Prvo se zapitajmo, što nam je minimalno potrebno znati da bismo graf imali u potpunosti zadan. Npr, znamo li vrhove grafa (koji su sada fiksno označeni, jer graf reprezentiramo na jedinstven način), vidimo da je sasvim dovoljno poznavati skup bridova. Takav se zapis zove *lista bridova*. Za graf



lista bridova je:

$$\{uv, uy, vw, vy, wx, wy, xy\}.$$

Lista susjedstva je lista (polje) gdje je svaki element liste podskup skupa vrhova koji čine susjedi određenog vrha. U gornjem primjeru ta bi lista izgledala ovako:

$$[u : \{v, y\};\ v : \{u, y, w\};\ w : \{v, y, x\};\ x : \{y, w\};\ y : \{u, v, w, x\}]$$

Definicija 3.9 Označimo li vrhove zadanog grafa G s $V = \{1, 2, \dots, n\}$, onda definiramo **matricu susjedstva** $A = [a_{ij}]$ kao $n \times n$ matricu čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh i s vrhom j. ■

Za jednostavni graf matrica susjedstva je očito simetrična $0-1$ matrica. Za prethodni primjer grafa, uz preimenovanje vrhova $(u, v, w, x, y) = (1, 2, 3, 4, 5)$, dobivamo ovu matricu susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo da zbroj elemenata u pojedinom retku (ili stupcu) točno odgovara stupnju odgovarajućeg vrha. Ako se u vrhu v_i pojavi n petlji, stavit ćemo $a_{ii} = 2n$.

Definicija 3.10 Označimo li dodatno i bridove zadanog grafa G s $E = \{1, 2, \ldots, m\}$, onda definiramo **matricu incidencije** kao $n \times m$ matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vrh } i \text{ incidentan s bridom } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Uočite da svaki stupac matrice incidencije ima na točno dva mjesta 1, dok su na ostalim mjestima nule. Te dvije jedinice točno kazuju koja dva vrha spaja dotični brid. Matrica incidencije za prethodni primjer je npr. (to je sada ovisno o tome kako si numeriramo bridove)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pridijelite sami bridovima ovog grafa labele sukladno ovoj matrici incidencije i uvjerite se da matrica incidencije jednoznačno definira strukturu grafa. Što bi se desilo s matricom incidencije ako biste preimenovali skup vrhova (skup bridova)? Što bi se desilo s matricom susjedstva ako biste preimenovali skup vrhova?

Prije nego krenemo rješavati zadatke, ukazat ćemo na jedan važan elementaran princip zaključivanja koji služi kao tehnika za dokazivanje mnogih tvrdnji u diskretnoj matematici.

Teorem 3.3 — Dirichletov princip. Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kutija s barem 2 predmeta.

Dokaz. Ova tvrdnja je zapravo očevidna. Doista, kad bi u svakoj od m kutija bio najviše jedan predmet, onda bi u svim kutijama bilo najviše m predmeta, a to je kontradikcija s uvjetom $n > m$. ■

Ako bismo na primjer 100 predmeta željeli rasporediti u 9 kutija, navedeni oblik Dirichletovog principa daje nekako premalo informacija. Naime, ravnomjerno raspoređujući predmete u kutije, i izbjegavajući da u nekoj bude previše njih, rasporedit ćemo 99 predmeta tako da je u svakoj kutiji točno 11 predmeta, te ćemo zaključiti da ne možemo izbjeći da se u nekoj od kutija nalazi njih 12. Zato vrijedi zapisati i upamtiti i sljedeći oblik Dirichletovog principa.

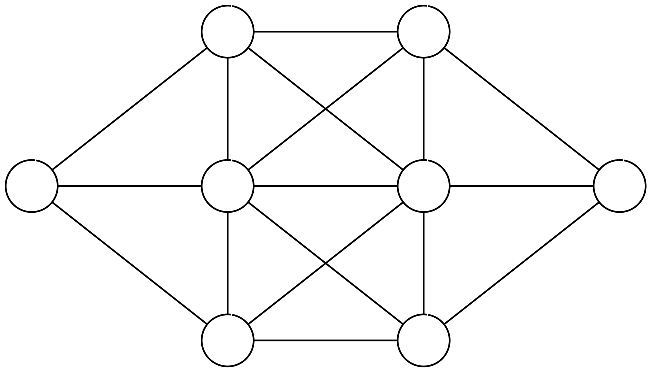
Teorem 3.4 — Poopćeni Dirichletov princip. Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$ predmeta.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da svaka kutija sadrži $\leq \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor$ predmeta. Onda je ukupan broj predmeta u m kutija $\leq m \cdot \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor \leq m \cdot \frac{n-1}{m} = n - 1$, što je kontradikcija. ■

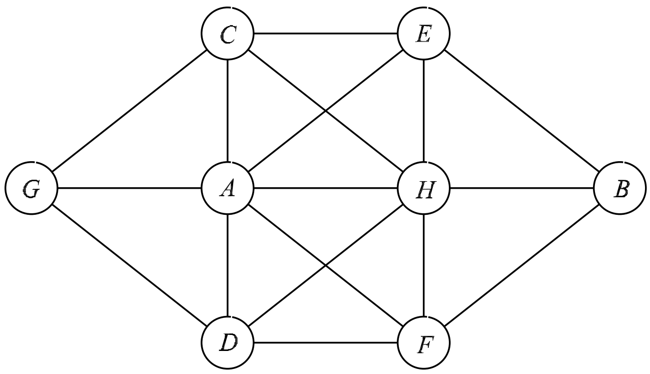
Zadatak 3.3 Ako je G jednostavni graf s najmanje 2 vrha, dokaži da G mora sadržavati barem 2 vrha istoga stupnja.

Rješenje. Općenito, imamo li jednostavni graf s n vrhova, onda stupnjevi pojedinih vrhova mogu biti brojevi $0, 1, \ldots, n-1$. Mogućnosti je dakle n. Međutim, uočimo da je nemoguće da u grafu istodobno postoji vrh stupnja 0 i stupnja $n-1$ (takav bi naime bio susjedan svakom drugom vrhu). Dakle, različitih stupnjeva vrhova grafa ima najviše $n-1$. Sada primijenimo Dirichletov princip, iz kojeg neposredno slijedi da postoje barem dva vrha istoga stupnja. ■

Zadatak 3.4 Smjesti slova A, B, C, D, E, F, G i H u krugove sa slike tako da nijedno slovo nije susjedno s onim slovom s kojim je susjedno u (engleskoj) abecedi.



Rješenje. Iscrpno pretraživanje vodilo bi do ispitivanja 8! mogućnosti. Želimo li si uštedjeti vrijeme, uočimo neravnopravnost slova A i H u odnosu na sva ostala, budući ona imaju samo po jednog susjeda među danim slovima, a ostala slova po dva. S obzirom da dva središnja polja sheme imaju stupanj 6, u njih možemo staviti samo ta dva slova, jer ostala slova, s dva susjeda u abecedi, mogu biti smještena u polja stupnja najviše 5. Uočimo dalje da je svejedno jesmo li stavili slovo A lijevo ili desno, jer je shema simetrična. Nakon ovakvog početka vjerujemo da će svatko moći ispuniti shemu slovima do kraja i naći jedno rješenje. Koliko različitih rješenja ima? Jesu li ona sva međusobno izomorfna? Na ova pitanja ćete lako odgovoriti uočite li sve simetrije zadane sheme. Evo jednog rješenja:



■

Zadatak 3.5 Bridni (linijski) graf $L(G)$ jednostavnog grafa G definira se kao graf čiji su vrhovi u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa G, pri čemu su dva vrha od $L(G)$ susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u G susjedni (tj. incidentni s jednim zajedničkim vrhom). Pokažite da je bridni graf $L(G)$ k-regularnog grafa G s n vrhova regularan. S kojim stupnjem regularnosti?

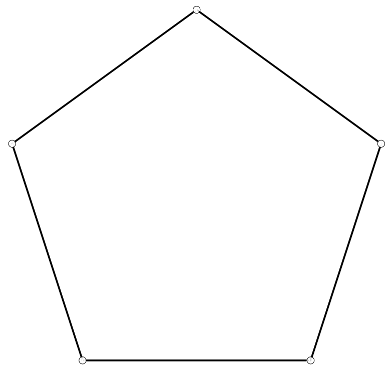
Rješenje. Svaki brid grafa G incidentan je s dva vrha stupnja k. Stoga svaki brid grafa G ima $2(k-1)$ susjednih bridova. Zaključujemo da će korespondentni vrh u bridnom grafu $L(G)$ imati stupanj $2(k-1)$. Dakle, $L(G)$ je $(2k-2)$-regularan graf. ■

Zadatak 3.6 Pokaži da u svakoj grupi od 6 ljudi postoje 3 čovjeka koji se međusobno poznaju ili postoje 3 čovjeka od kojih nitko ne poznaje preostala dva.

Rješenje. Izmodelirajmo rješenje pomoću grafova. Vrhovi grafa bit će naravno promatrani ljudi, a njihovo poznanstvo realizirajmo kao susjedstvo. Pitanje je, dakle, možemo li uvijek garantirati da u jednostavnom grafu sa 6 vrhova postoji „trokut” ili pak tri vrha koja nisu vezana niti jednim bridom. Uočimo, ne smanjujući općenitost, bilo koji od 6 vrhova i nazovimo ga s u. Kako osim u ima 5 drugih vrhova s kojima u može biti susjedan ili nesusjedan, to on mora biti u jednom od ta dva odnosa s barem 3 vrha. Razmotrimo situaciju kad je u susjedan s barem 3 vrha. Tri njegova susjeda neka su v_1, v_2 i v_3. Ako su neki od vrhova v_i međusobno susjedni, onda smo gotovi, jer oni zajedno s vrhom u čine trokut. Ako su pak sva tri vrha v_i međusobno nesusjedna, onda smo našli tri vrha koja nisu vezana niti jednom bridom, pa smo opet dokazali tvrdnju. Analogno se razmotri situacija kad u početku izabrani vrh u ima barem 3 nesusjeda. ■

Zadatak 3.7 Postoji li grupa od 5 ljudi u kojoj se bilo koja izabrana trojica niti međusobno poznaje, niti ne poznaje?

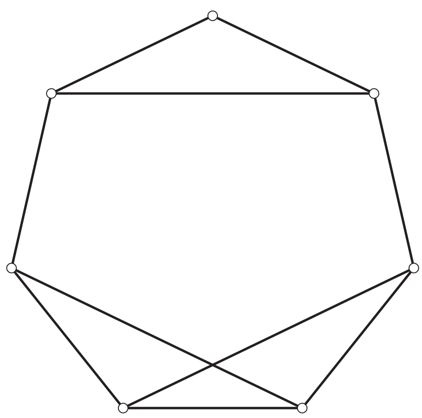
Rješenje. Možda je netko pomislio da ćemo „imitirati” rješenje prethodnog zadatka. No, ovdje grupa od 5 ljudi s traženim svojstvima postoji. Evo je:



■

Zadatak 3.8 Sedam osoba igra turnir u šahu po sljedećem pravilu. Šahist može odigrati najviše 3 partije u jednom danu i nikad ne igra ponovno s igračem s kojom je već igrao. Odredite maksimalni broj partija koje mogu biti odigrane na takvom turniru u jednom danu.

Rješenje. Rješenje ćemo modelirati pomoću grafova. Vrhovi grafa bit će igrači, a partije bridovi. Sada je pitanje koliko najviše bridova može imati graf sa 7 vrhova takav da je stupanj svakog vrha najviše 3. Uočimo prvo da 3-regularan graf sa 7 vrhova ne postoji jer bi suma stupnjeva bila 21 što je u kontradikciji s Lemom o rukovanju. Graf sa zadanim svojstvima može imati najviše 10 bridova, evo i primjera jednog takvog grafa. Ovaj primjer dokazuje egzistenciju traženog grafa.

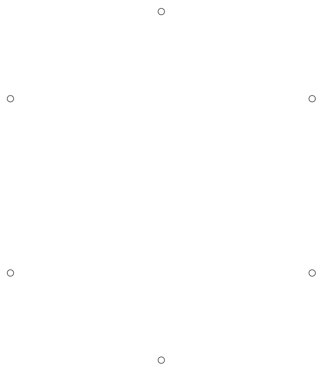


Dakle, u jednom danu turnira može biti odigrano najviše 10 partija. ■

3.3 Primjeri jednostavnih grafova

Kad proučavamo razna strukturalna svojstva grafova, redovito nam treba mnoštvo primjera za koje znamo točno kako izgledaju odnosno kakvu strukturu imaju, pa na njima naše daljnje pretpostavke i ispitivanja jednostavno možemo provjeriti. Stoga ovdje navodimo nekoliko serija jednostavnih grafova i još neke važne sporadične primjere i konstrukcije.

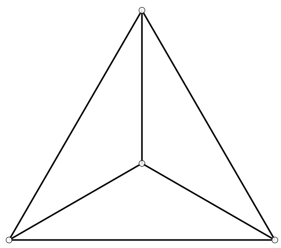
■ **Primjer 3.7** *Nul-graf* je graf čiji je skup bridova prazan skup. Uočimo da su svi nul-grafovi s istim brojem vrhova međusobno izomorfni. Nul-graf s n vrhova označavat ćemo s N_n. U nul-grafu je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.



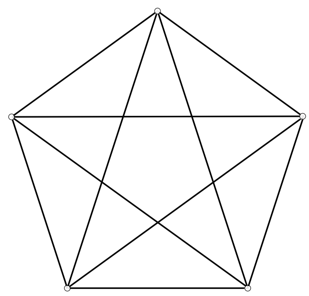
N_6

■

■ **Primjer 3.8** Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna zovemo *potpuni graf*. Potpuni graf s n vrhova označavamo s K_n. Uočimo da potpuni graf ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bridova, te da svaki od n vrhova ima točno $n-1$ susjeda, pa je K_n $(n-1)$-regularan.



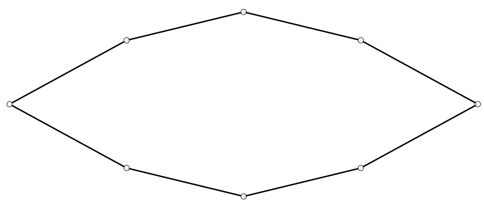
K_4



K_5

■

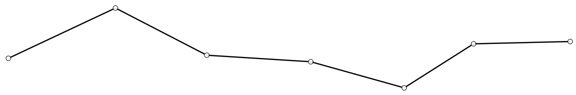
■ **Primjer 3.9** Povezani 2-regularni graf zovemo *ciklički graf* (ili kratko *ciklus*). Ciklički graf s n vrhova označavamo s C_n. Ciklus C_n ima n vrhova i n bridova. Što se općenito može reći o grafu koji je 2-regularan? Uočite da to ne mora biti ciklus, već to može biti i disjunktna unija ciklusa.



C_8

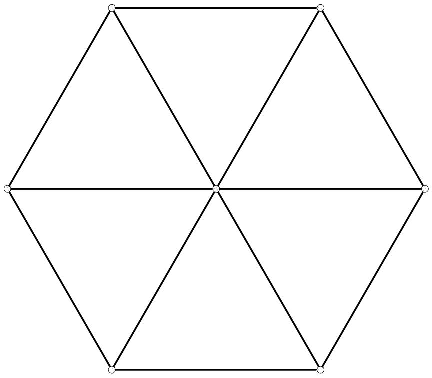
■

■ **Primjer 3.10** Graf koji dobijemo iz cikličkog grafa brisanjem točno jednog brida zovemo *lanac* i označavamo s P_n, ako ima n vrhova.



■

■ **Primjer 3.11** Graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom zovemo *kotač* s n vrhova i označavamo s W_n. Jednostavno se izračuna da je $|E(W_n)| = 2n-2$.

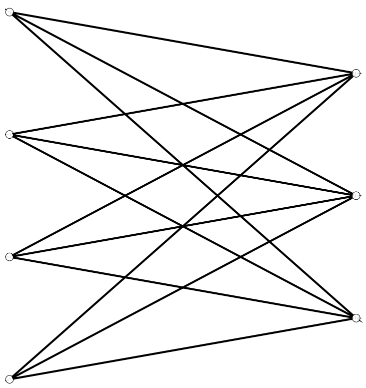


■

Definicija 3.11 Ako skup vrhova grafa G možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid od G spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B, onda kažemo da je G **bipartitan graf**. ■

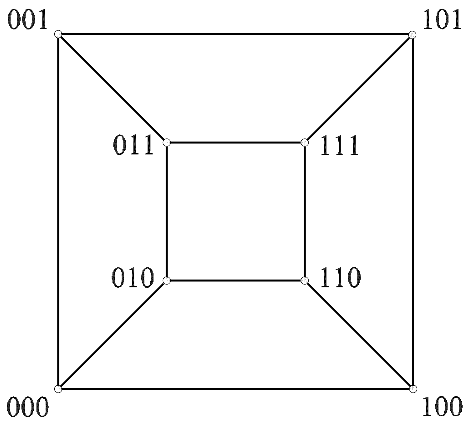
Alternativno možemo reći da je G bipartitan graf ako mu vrhove možemo pobojati u dvije boje, npr. crnu i bijelu, tako da je svaki brid incidentan s jednim crnim i s jednim bijelim vrhom. Uočimo na primjer da je svaki lanac P_n bipartitan. Uvijek je naime moguće krenuti od jednog krajnjeg vrha lanca i naizmjence pobojati sve njegove vrhove.

■ **Primjer 3.12** *Potpuni bipartitni graf* je onaj bipartitni graf s particijom skupa vrhova $V(G) = A \cup B$ kod kojeg je svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim iz B. Ako je $|A| = r$, te $|B| = s$, onda takav graf označavamo s $K_{r,s}$.



Jasno je da vrijedi da graf $K_{r,s}$ ima $r+s$ vrhova i $r \cdot s$ bridova. ■

■ **Primjer 3.13** *k-kocka* Q_k je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in \{0,1\}$, duljine k, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu.



Q_3

Pogledajmo općenito glavna svojstva k-kocke. Jasno je da je broj vrhova k-kocke jednak broju binarnih nizova duljine k, dakle $|V(Q_k)| = 2^k$. Koliko bridova ima takva kocka? Jednostavnije je prvo utvrditi k-regularnost. Naime, svaki vrh je susjedan točno s onim vrhovima s kojima se, shvaćen kao binarni niz, razlikuje na jednoj poziciji. Svaki niz je duljine k, pa ima točno k mjesta na kojima se može razlikovati, dakle točno k susjeda. Sada, kad smo utvrdili k-regularnost, jednostavno je prebrojati skup bridova. Naime, svaki od 2^k vrhova incidentan je s k bridova, no u tom brojanju prebrojali smo svaki brid dvaput. Stoga je

$$|E(Q_k)| = \frac{2^k \cdot k}{2} = k \cdot 2^{k-1}.$$

■

Definicija 3.12 Ako je G jednostavni graf sa skupom vrhova $V(G)$, onda je njegov **komplement** $\overline{G}$ jednostavni graf s istim skupom vrhova $V(G)$, dok su dva vrha u $\overline{G}$ susjedna onda i samo onda ako oni nisu susjedni u grafu G. ■

Označimo li skup svih dvočlanih podskupova skupa V s $\binom{V}{2}$, onda vrijedi da je $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ i u tom smislu je skup bridova komplementarnog grafa komplementaran (u skupovnom smislu) skupu bridova zadanog grafa. Traženje komplementa je dualna operacija, tj. $\overline{\overline{G}}$ je izomorfan s G. Naime, ako su vrhovi u i v susjedni u G, onda oni nisu susjedni u $\overline{G}$, pa su opet susjedni u njegovom komplementu $\overline{\overline{G}}$. Identiteta koja preslikava skup vrhova od G u onaj od $\overline{\overline{G}}$ dakle čuva susjedstvo, pa je izomorfizam.

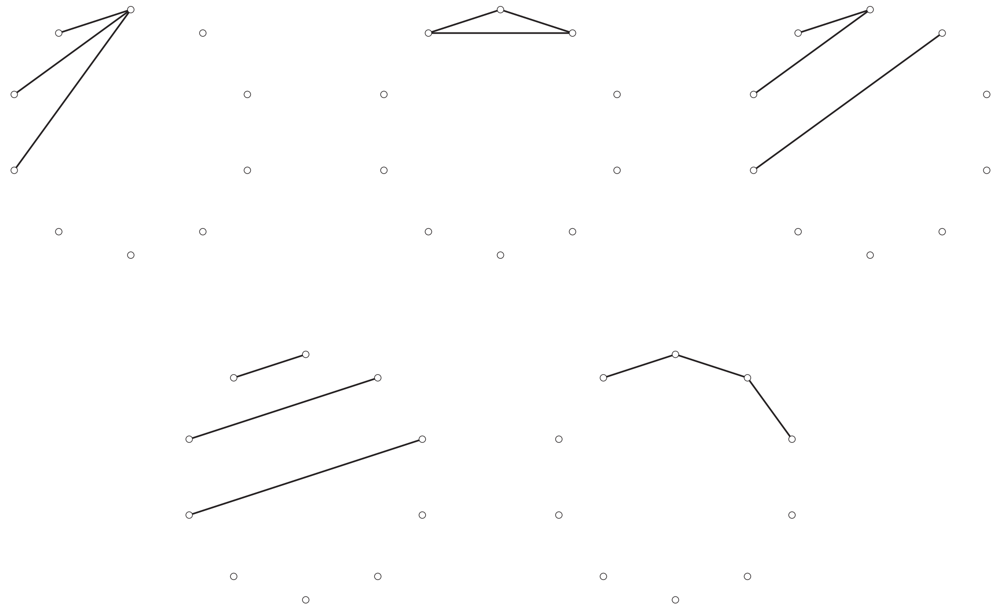
Komplement nul-grafa s n vrhova je potpuni graf s n vrhova: $\overline{N_n} = K_n$. Komplement potpunog bipartitnog grafa je unija dvaju potpunih grafova: $\overline{K_{r,s}} = K_r \cup K_s$.

Ako nam je poznata matrica susjedstva A jednostavnog grafa G, što se može reći o matrici susjedstva $\overline{A}$ njemu komplementarnog grafa $\overline{G}$? Ako su različiti vrhovi i i j susjedni u G, onda je $a_{ij} = 1$. No, u $\overline{G}$ onda i i j nisu susjedni, pa je $\overline{a}_{ij} = 0$. Slično se vidi i za različite nesusjedne vrhove u G, u smislu da je tada $a_{ij} = 0$, i $\overline{a}_{ij} = 1$. Posebno treba obratiti pozornost na dijagonalne elemente, budući su oni u obje matrice susjedstva jednaki 0. Konačno, označimo li s J matricu koja se sastoji od samih jedinica, tj. koja na svim mjestima ima ulaz 1, a s I jediničnu matricu, možemo pisati

$$\overline{A} = J - I - A.$$

Zadatak 3.9 Koliko ima jednostavnih povezanih neizomorfnih grafova s 10 vrhova i 42 brida?

Rješenje. Traženih grafova ima točno 5. Do ovog je zaključka lakše doći prebrojimo li sve neizomorfne grafove s 10 vrhova i 3 brida. Grafovi s ovim svojstvima su komplementi traženih grafova. Izomorfni grafovi imaju izomorfne komplemente, i obratno.



■

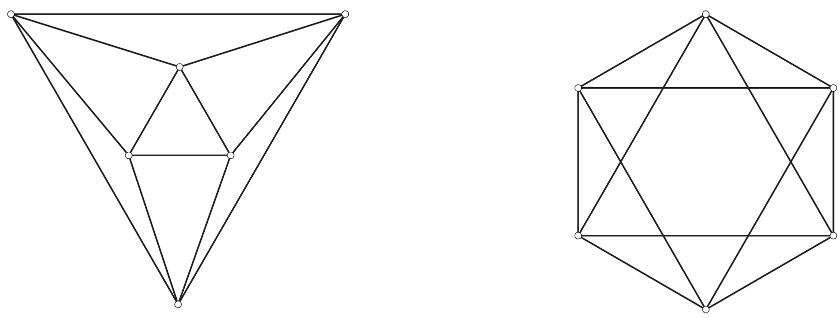
Zadatak 3.10 Za jednostavni graf koji je izomorfan svome komplementu kažemo da je samokomplementaran. Dokažite da ako je G samokomplementaran, onda mu je broj vrhova $n \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Rješenje. Komplement grafa G ima $\binom{n}{2} - |E(G)|$ bridova. Grafovi G i $\overline{G}$ su izomorfni stoga imaju isti broj bridova. Iz toga slijedi da je $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$. ■

3.4 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 3.11 Koliko ima različitih jednostavnih grafova s n vrhova i n bridova koji su unaprijed obilježeni?

Zadatak 3.12 Jesu li grafovi sa slike izomorfni?



Zadatak 3.13 Koliko ima različitih jednostavnih grafova (do izomorfizma) sa 7 vrhova i zbrojem stupnjeva većim od 39?

Zadatak 3.14 Grupi od n osoba pridruženo je m različitih poslova. Svaka osoba kvalificirana je za obavljanje k poslova, a za obavljanje pojedinog posla kvalificirano je k ljudi. Dokažite da je broj osoba jednak broju poslova.

Zadatak 3.15 Graf G zadan je matricom susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite jednostavan povezan graf s istim nizom stupnjeva koji nije izomorfan s G.

Zadatak 3.16 Može li se jednoznačno odrediti struktura jednostavnog grafa s n vrhova kojem je zadan niz stupnjeva $(1,1,2,\dots,2)$? Ispitajte što može biti takav graf! Što ako se doda uvjet da je graf povezan?

Zadatak 3.17 Nađite niz stupnjeva za kotač W_n s n vrhova. Uvjerite se neposredno da je broj vrhova neparnog stupnja paran.

Zadatak 3.18 Postoje li jednostavni povezani grafovi sa sljedećim nizovima stupnjeva? Postoje li bipartitni grafovi sa tim nizovima stupnjeva?
A. $(1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5)$;
B. $(4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4)$;
C. $(1,1,1,1,1,1,2,2,3,3)$;
D. $(3,3,3,3,3,5,5,5)$;
E. $(2,2,2,2,2,2,2)$.

Zadatak 3.19 Dan je niz stupnjeva jednostavnog povezanog grafa G s n vrhova: $(i_1,\dots,i_n)$. Nađite niz stupnjeva njegovog komplementa $\overline{G}$.

Zadatak 3.20 Graf G zadan je matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skicirajte graf G i nađite njegovu matricu incidencije.

Zadatak 3.21 Neka je A matrica susjedstva grafa C_4 (kojem su vrhovi numerirani slijedom, npr. u smjeru kazaljke na satu). Izračunajte A^n.

Zadatak 3.22 Ispitajte za koje n-ove je ciklički graf C_n bipartitan graf. Za koje n-ove je kotač W_n bipartitan?

Zadatak 3.23 Dokažite da je k-kocka Q_k bipartitan graf za svaki $k \geq 2$.

Zadatak 3.24 Može li bipartitan graf sadržavati trokut?

Zadatak 3.25 Uz koje uvjete na parametre su grafovi K_n, $K_{r,s}$ i W_n regularni? S kojim stupnjem regularnosti?

Zadatak 3.26 Postoji li jednostavan povezan 5-regularan graf sa 6, odnosno 7 i 8, vrhova?

Zadatak 3.27 Koliko je bridova potrebno dodati 1-regularnom grafu s n vrhova da bi se dobio 3-regularan graf?

Zadatak 3.28 Koliko vrhova ima 3-regularni graf s 2007 bridova?

Zadatak 3.29 Dokažite da je komplement r-regularnog jednostavnog grafa $(n-r-1)$-regularan.

Zadatak 3.30 Što je komplement 3-kocki Q_3? Možete li prepoznati geometrijsko tijelo u dobivenom komplementarnom grafu?

Zadatak 3.31 Koliko ima različitih samokomplementarnih grafova s 4 i s 5 vrhova?

Zadatak 3.32 Pokažite da K_3 i $K_{1,3}$ imaju iste bridne grafove.

Zadatak 3.33 Pokažite da je bridni graf tetraedra izomorfan s oktaedrom.

Zadatak 3.34 Odredite broj bridova bridnog grafa k-kocke Q_k, $k \geq 2$.

Zadatak 3.35 Triangularni graf $T(n)$ je bridni graf potpunog grafa K_n. Za koje vrijednosti $n \geq 3$ je $T(n)$ bipartitan?

Rješenja zadataka

3.11 $\binom{\binom{n}{2}}{n}$.
3.12 Da.
3.13 2.
3.14 Modeliramo graf G čiji su vrhovi osobe i poslovi. Dva su vrha spojena bridom ukoliko je odgovarajuća osoba kvalificirana za obavljanje odgovarajućeg posla. Dobili smo bipartitni k-regularni graf s $n+m$ vrhova. Svaka osoba je kvalificirana za k poslova pa je $|E(G)| = k \cdot n$. S druge strane, za svaki posao je kvalificirano k osoba, stoga je $|E(G)| = k \cdot m$. Odavde slijedi da je $n = m$.
3.15
3.16 Graf G koji zadovoljava pretpostavke zadatka je disjunktna unija jednog lanca i konačnog broja cikličkih grafova, pri čemu je ukupan broj vrhova od G jednak n. Pretpostavimo li da je G povezan, tada je G lanac s n vrhova.
3.17 $(3, \ldots, 3, n-1)$.
3.18 **A.** Ne. **B.** Q_4. **C.** Ne. **D.** $K_{3,5}$. **E.** C_7 je jedini takav graf, nije bipartitan.
3.19 $(n-1-i_n, \ldots, n-1-i_1)$.
3.20 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3.21 $A^{2k} = \begin{bmatrix} 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} & 0 \\ 0 & 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} \\ 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} & 0 \\ 0 & 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} \end{bmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{2k} & 0 & 2^{2k} \\ 2^{2k} & 0 & 2^{2k} & 0 \\ 0 & 2^{2k} & 0 & 2^{2k} \\ 2^{2k} & 0 & 2^{2k} & 0 \end{bmatrix}.$

3.22 Ciklički graf C_n je bipartitan kada je n paran. W_n nije bipartitan.

3.23 Neka je A skup svih vrhova kocke čija binarna oznaka sadrži paran broj jedinica. Tada je $B = V(Q_k) \setminus A$ skup svih vrhova čija binarna oznaka sadrži neparan broj jedinica. Ujedno je (A, B) particija skupa vrhova koju tražimo.

3.24 Ne.

3.25 K_n je $(n-1)$-regularan. $K_{r,s}$ je regularan za $r = s$. W_n je regularan za $n = 4$.

3.26 Postoji za 6 i 8 vrhova.

3.27 n.

3.28 1338.

3.29

3.30

3.31 Samokomplementarni graf s 4 vrha je jedinstven, s 5 vrhova postoje 2.

3.32

3.33

3.34 $k(k-1)2^{k-1}$.

3.35 Nikad.

4. Povezanost

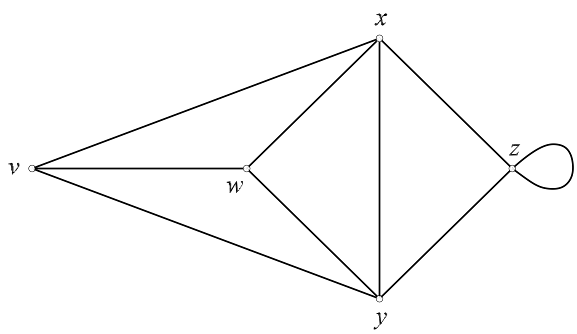
4.1 Šetnje

Ako je graf povezan, onda se po njemu može „šetati”, tj. može se prelaziti iz vrha u vrh ako postoji brid koji povezuje ta dva vrha. Ako pak graf nije povezan, onda možemo šetati po nekoj njegovoj komponenti povezanosti. Definirajmo šetnju preciznije.

Definicija 4.1 Neka je dan graf G. **Šetnja** u G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$, također često u oznaci $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$, u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka. ■

Svaka šetnja određuje dakle slijed vrhova $v_0, v_1, \dots, v_m$. Pri tome vrh v_0 zovemo početni vrh šetnje ili izvor, a vrh v_m završni vrh šetnje ili ponor. Broj bridova u šetnji (skupa s kratnostima onih bridova kojima smo eventualno više puta prošetali) zovemo *duljina šetnje*. Dakle, $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$ je šetnja duljine m. Dopuštamo i da je $m = 0$ i tada govorimo o šetnji duljine nula. Uočite da ovaj zapis za šetnju nije potpuno jedinstven ako u grafu ima višestrukih bridova. Ako je važno istaknuti kojim se od višestrukih bridova između dva vrha doista prošetalo, šetnju ćemo zapisati kao niz susjednih bridova $e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_m$.

■ **Primjer 4.1** Pogledajmo ovaj graf.

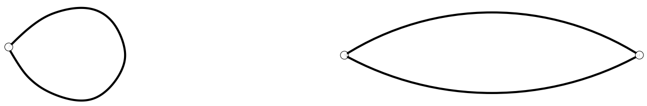


Jedna šetnja u tom grafu je na primjer $v \to w \to x \to y \to z \to z \to y \to w$. To je šetnja duljine 7. ■

Uočimo da je šetnja zapravo preopćenit pojam za većinu primjena. Uvijek postoje u grafu razne šetnje (jedino u nul-grafu su sve šetnje trivijalne, duljine 0). Zato će nas redovito zapravo zanimati neke posebne, karakteristične šetnje, koje ispunjavaju dodatna lijepa svojstva.

Definicija 4.2 Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo **staza**. Ako su, uz to, i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_m$ različiti (osim eventualno početni vrh v_0 i krajnji vrh v_m), onda takvu stazu zovemo **put**. Za stazu ili put kažemo da su **zatvoreni** ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus.

Ciklus koji se sastoji od jednog jedinog brida je petlja. Ciklus od dva brida je dvostruki brid između dva vrha.



U prethodnom primjeru jedna moguća staza je sljedeći niz vrhova $v \to w \to y \to v \to x \to z \to z \to y$; niz vrhova $v \to w \to x \to y \to z$ je put, dok je šetnja $v \to y \to z \to x \to v$ ciklus.

Uočimo da je graf povezan onda i samo onda ako postoji šetnja između bilo koja dva vrha tog grafa. Mi smo povezanost definirali drugačije, no jasno je da je graf povezan onda i samo onda ako između bilo koja njegova dva vrha postoji šetnja. Preciznije, na skupu vrhova $V(G)$ zadanog grafa G možemo definirati relaciju „biti povezan”, na način da kažemo da su vrhovi $u, v \in V(G)$ povezani, i pišemo $u \sim v$, ako postoji šetnja s početkom u u i završetkom u v.

Teorem 4.1 Relacija „biti povezan” definirana na skupu vrhova grafa G je relacija ekvivalencije. Razredi (klase) ekvivalencije te relacije su komponente povezanosti grafa G.

Dokaz. Moramo dokazati tri svojstva relacije ekvivalencije. Pogledamo li šetnju duljine 0 koja počne u bilo kojem vrhu u i odmah u njemu završi, zaključujemo da je svaki vrh u relaciji sa samim sobom, te da je ova relacija refleksivna. Ako je $u \sim v$, za bilo kako izabrane u i v, to znači da postoji šetnja $u \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_s \to v$. No, onda je u tom grafu šetnja i niz vrhova $v \to v_s \to \cdots \to v_1 \to u$, što po definiciji znači da je $v \sim u$, prema tome je relacija povezanosti i simetrična. Konačno, izaberemo li bilo koje u, v i w, takve da je $u \sim v$ i da je $v \sim w$, to znači da postoje šetnje $u \to u_1 \cdots \to u_r \to v$ i $v \to v_1 \to \cdots \to v_s \to w$. No, pogledamo li onda niz susjednih vrhova $u \to u_1 \to \cdots \to u_r \to v \to v_1 \to \cdots \to v_s \to w$, vidimo da su u relaciji i vrhovi u i w, tj. da je $u \sim w$. Ovime je i tranzitivnost dokazana, pa je relacija $\sim$ odista relacija ekvivalencije. Razred ekvivalencije $[u]$ nekog vrha u, sastoji se naravno iz vrha u i svih vrhova do kojih postoji šetnja iz u. No, zbog upravo dokazanih svojstava, to je komponenta povezanosti zadanog grafa G. ∎

Primijetimo dodatno, ako između dva vrha postoji šetnja, onda nužno postoji i put; naime, iz šetnje između neka dva vrha uvijek možemo izbaciti cikluse, te dobiti put između ta dva vrha. U grafu iz prethodnog primjera jedna šetnja između vrhova x i w je $x \to v \to w \to y \to x \to z \to z \to y \to w$, a izbacivanjem ciklusa (u bilo kojem redoslijedu) dolazimo do puta $x \to v \to w$.

Teorem 4.2 G je bipartitan graf onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu G parne duljine.

Dokaz. Treba dokazati oba smjera ekvivalencije iz tvrdnje teorema. Pretpostavimo prvo da je G bipartitan graf. To znači da njegov skup vrhova možemo podijeliti u dva disjunktna skupa, nazovimo ih A i B, tako da svaki brid od G povezuje neki vrh iz A s nekim iz B. Neka je sada $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m \to v_0$ ciklus u G i ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je $v_0 \in A$. Zbog bipartitnosti je tada $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, $\dots$, $v_{2k} \in A$, $v_{2k+1} \in B$. No, jer se ciklus treba zatvoriti, to je

$v_m \in B$, dakle je m neparan broj, pa je svaki ciklus parne duljine. Time je prva implikacija dokazana. Dokaz druge implikacije je tehnički nešto složeniji, pa ga ovdje izostavljamo. ■

Ovaj teorem nam daje lijepu karakterizaciju bipartitnosti koju ćemo često rabiti. Uočimo da je graf bipartitan i ako nema ciklusa (jer i tada izreka vrijedi).

Zapitajmo se što možemo reći o odnosu broja vrhova i broja bridova u nekom grafu. Ako dopustimo ponavljanje bridova i petlje, onda bridova može biti po volji mnogo. Dakle, smisleno je ovo pitanje postaviti samo za jednostavne grafove. Promatramo li jednostavne grafove, opet je važno dodatno pretpostaviti povezanost, budući da nepovezan graf može imati i prazan skup bridova. Neka je G jednostavan povezan graf s n vrhova i m bridova. Ako njegove vrhove povežemo u lanac, to je najmanji broj bridova koji smo mogli upotrijebiti da bismo uopće dobili povezan graf. Dakle, povezan jednostavan graf s n vrhova ima najmanje $n-1$ bridova. Najveći broj bridova postiže se ako su svaka dva vrha susjedna, tj. ako skup bridova čini skup svih dvočlanih podskupova skupa vrhova od G, a takvih je $\binom{n}{2}$. Sveukupno smo dobili

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ako G nije povezan, vrijedi nešto općenitija tvrdnja.

Teorem 4.3 Neka je G jednostavni graf s n vrhova. Ako G ima k komponenata povezanosti, onda za broj bridova m od G vrijedi

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Dokaz. Nejednakost za donju među dokazat ćemo matematičkom indukcijom po broju bridova m grafa G. Bazu indukcije čini već nul-graf. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove koji imaju manje bridova od zadanog grafa G, te neka G ima najmanji mogući broj bridova m, u smislu da micanje bilo kojeg brida nužno povećava broj komponenata povezanosti. Maknemo li sada ipak iz G neki brid, dobivamo graf s n vrhova, $m-1$ bridova, te $k+1$ komponentom povezanosti. Po pretpostavci indukcije, za njega vrijedi ocjena iz iskaza teorema, dakle je $m-1 \geq n-(k+1)$, iz čega neposredno slijedi da je $m \geq n-k$, što smo i trebali dokazati.

Dokažimo još i gornju među. Pretpostavimo (to je očevidno u smislu broja bridova najveći mogući slučaj, no svakako dopustiv) da je svaka komponenta povezanosti od G potpuni graf. Ostaje pitanje, za kakvu particiju skupa vrhova u k komponenata povezanosti se postiže najveća vrijednost za ukupni zbroj bridova, ako je svaka od komponenata povezanosti potpuni podgraf. Pretpostavimo, ne smanjujući općenitost, da komponente povezanosti C_i i C_j imaju n_i odnosno n_j vrhova, te da je $n_i \geq n_j > 1$. Ako bismo u grafu G zamijenili komponente C_i i C_j s potpunim podgrafovima nad n_i+1 odnosno n_j-1 vrhova, grafu G sveukupno ne bismo promijenili broj vrhova, dok bi se broj bridova promijenio točno za

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n_i+1)n_i}{2} - \frac{n_i(n_i-1)}{2}\right] &- \left[\frac{n_j(n_j-1)}{2} - \frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right] \\ &= n_i - n_j + 1 > 0.\end{aligned}$$

Prema tome, zaključujemo da se ukupni broj bridova u grafu G povećava ako većim komponentama povezanosti povećamo broj vrhova, pa je najekstremniji slučaj kad bismo u G imali potpuni podgraf s $n-k+1$ vrhova, te još $k-1$ izoliranih vrhova. Tada je pak ukupni broj bridova dan s

$$m = \binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Ovime je dokazana i gornja granica za broj bridova jednostavnog grafa s n vrhova i k komponenata povezanosti. ■

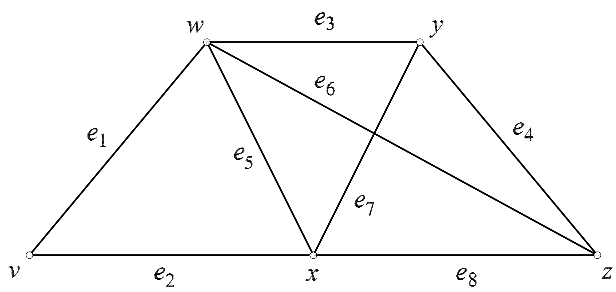
Korolar 4.4 Svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je povezan.

Dokaz. Ako takav graf ne bi bio povezan, imao bi barem dvije komponente povezanosti, no po prethodnom teoremu on bi mogao imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova, suprotno pretpostavci. Dakle je takav jednostavni graf nužno povezan. ■

Prethodnim tvrdnjama ustanovili smo koliko najmanje (i najviše) bridova treba imati jednostavni graf da bi bio povezan. Postavimo si sada nešto preciznije strukturalno pitanje: Koliko najmanje bridova (ili vrhova) moramo ukloniti povezanom grafu da bi on postao nepovezan? Taj broj sigurno je manji ili jednak od najmanjeg stupnja bilo kojeg vrha zadanog grafa, jer uklonimo li baš te bridove incidentne s vrhom najmanjeg stupnja, dobivamo izolirani vrh, a time i nepovezan graf. U primjenama, rješenje ovog pitanja odgovorilo bi nam na primjer na praktično pitanje, koliko ulica istodobno možemo renovirati (tj. izbaciti iz prometne mreže) u nekom gradu, a da promet ipak može (koliko-toliko) funkcionirati.

Definicija 4.3 **Rastavljajući skup** povezanog grafa G je skup bridova čijim uklanjanjem G postaje nepovezan. ■

■ **Primjer 4.2** U grafu na slici



skupovi bridova $B_1 = \{e_1, e_2, e_8\}$ i $B_2 = \{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ su na primjer rastavljajući skupovi, dok $B_3 = \{e_1, e_3, e_8\}$ to nije. ■

Definicija 4.4 Za rastavljajući skup kažemo da je **rezni skup**, ako nijedan njegov pravi podskup nije rastavljajući. ■

Skup bridova B_1 iz prethodnog primjera nije rezni skup (jer je i njegov podskup $\{e_1, e_2\}$ također rastavljajući skup, dok je skup B_2 rezni skup.

Definicija 4.5 Rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida zovemo **most**. ■

Prethodne definicije lagano se mogu proširiti i na nepovezane grafove. *Rastavljajući skup* grafa G je skup bridova od G čijim se uklanjanjem povećava broj komponenata povezanosti od G, dok je *rezni skup* onaj rastavljajući skup čiji nijedan pravi podskup to nije.

Definicija 4.6 Za povezani graf G definiramo **bridnu povezanost** $\lambda(G)$ kao veličinu najmanjeg reznog skupa. Često kažemo da je G k-bridno povezan, ako je $\lambda(G) \geq k$. ■

Dakle, ako za neki graf G kažemo da je k-bridno povezan, to znači da mu možemo ukloniti bilo kojih $k-1$ bridova a da mu se pritom broj komponenata povezanosti neće povećati.

Analogno kao što se mogu uklanjati bridovi, mogu se uklanjati i vrhovi, pri čemu ukloniti vrh iz grafa podrazumijeva, podsjećamo, uklanjanje tog vrha i svih bridova incidentnih s tim vrhom.

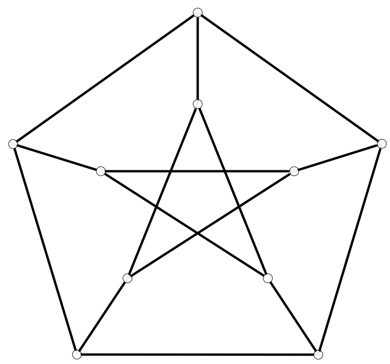
Definicija 4.7 **Separirajući skup** povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem G postaje nepovezan. ■

U prethodnom primjeru, neki od separirajućih skupova su $V_1 = \{w,x\}$, $V_2 = \{w,x,y\}$. Jednočlani separirajući skup zovemo separirajući vrh. Kao i kod uklanjanja bridova, definicija se lagano može poopćiti na nepovezane grafove.

Definicija 4.8 **Vršna povezanost** $\kappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa u G. ■

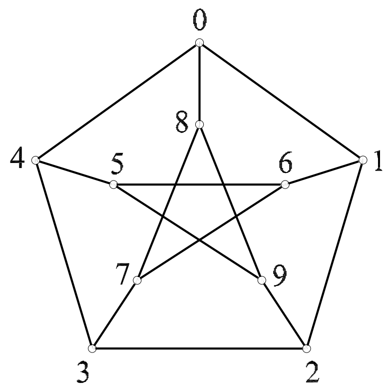
Prema tome, $\kappa(G)$ je najmanji broj vrhova koji treba ukloniti povezanom grafu da bi on postao nepovezan. Ako je $\kappa(G) \geq k$, onda kažemo da je G k-povezan graf.

Zadatak 4.1 Dan je Petersenov graf na slici. Definirajmo *udaljenost* između vrhova v i w kao duljinu najkraćeg puta od v do w i označimo je s $d(v,w)$.



(i) Nađi stazu duljine 5 u Petersenovom grafu.
(ii) Nađi put duljine 9.
(iii) Nađi cikluse duljina 5, 6, 8 i 9.
(iv) Nađi rezne skupove s 3, 4 i 5 bridova.
(v) Uvjeri se da za bilo koja dva vrha v i w vrijedi $d(v,w) = 1$ ili 2.

Rješenje. Uočimo najprije da moramo obilježiti vrhove Petersenovog grafa, želimo li dati odgovore na postavljena pitanja. Na primjer, obilježimo li vrhove ovako



dobivamo sljedeće odgovore. Uočimo da odgovor na (iii) ujedno sadrži odgovore na (i) i (ii). Evo traženih ciklusa. Ciklus duljine 5 je $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0$, duljine 6 je $3 \to 7 \to 6 \to 5 \to 9 \to 2 \to 3$, duljine 8 je $0 \to 4 \to 5 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 1 \to 0$, a duljine 9 na primjer $4 \to 5 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$. Rezni skup od 3 brida je $\{01,04,08\}$, od 4 brida $\{01,08,34,45\}$, a od 5 bridova $\{08,16,45,12,34\}$. Da bismo se uvjerili da je udaljenost bilo koja dva vrha 1 ili 2, podijelimo skup vrhova u skupove $V_1 = \{0,1,2,3,4\}$ i $V_2 = \{5,6,7,8,9\}$. Sada nam je jednostavnije provesti iscrpno pretraživanje, jer se lako vidi da su bilo koja dva vrha iz V_1 udaljena za 1 ili 2, da su bilo koja dva vrha iz V_2 udaljena za 1 ili 2, kao i da je bilo koji vrh iz V_1 udaljen za 1 ili 2 do bilo kojeg vrha iz V_2. ■

Zadatak 4.2 *Struk* grafa G definiramo kao duljinu njegovog najkraćeg ciklusa. Odredi struk sljedećih grafova: K_9, $K_{5,7}$, C_8, W_8, Q_5.

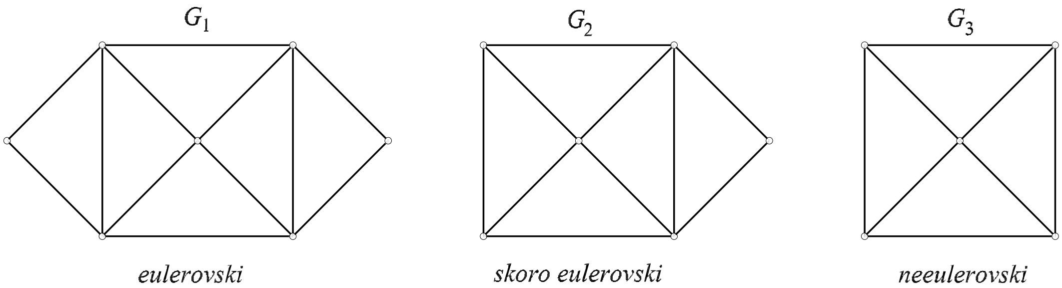
Rješenje. Gledamo najprije K_9. To je jednostavni graf, dakle nema ciklusa duljine 1 ni 2. Pitamo se ima li ciklusa duljine 3, i jasno je da ima, budući su svaka dva vrha susjedna. Dakle, odmah zaključujemo da je struk od K_9 jednak 3. Gledamo li $K_{5,7}$, vidimo da taj jednostavni graf nema trokutova, budući je bipartitan, pa mu je svaki ciklus parne duljine. No, ciklusa duljine 4 definitivno ima, pa je njegov struk jednak 4. Kotač W_8 ima trokutova, pa mu je struk jednak 3. Graf C_8 sastoji se od jednog jedinog ciklusa, duljine 8, pa mu je toliki i struk. Kod kocke s 2^5 vrhova jednostavno nalazimo ciklus duljine 4, na primjer $00000 \to 10000 \to 11000 \to 01000 \to 00000$, dok trokutova iz razloga bipartitnosti ni ovdje nema. Dakle je struk grafa Q_5 jednak 4. ■

4.2 Eulerovski grafovi

U ovom poglavlju bavit ćemo se posebno lijepim (zatvorenim) stazama, naime onim stazama koje prolaze svim bridovima zadanog grafa. Pokazuje se da je činjenica da graf posjeduje takvu zatvorenu stazu koja prolazi svakim bridom važno strukturalno svojstvo grafa.

Definicija 4.9 Za povezani graf G kažemo da je **eulerovski**, ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G. Takvu stazu zovemo **eulerovska staza**. Neeulerovski graf je **skoro eulerovski** (semi-eulerovski), ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G. ■

Evo nekih primjera (ne)eulerovskih grafova.



Graf G_1 je eulerovski, graf G_2 skoro eulerovski, a G_3 nije ni skoro eulerovski, tj. ne postoji staza koja prolazi svakim vrhom. Primijetimo da iz neeulerovskog grafa uvijek možemo doći do eulerovskog dodavanjem bridova, a da je ponekad moguće dobiti eulerovski graf i brisanjem bridova. Za potpunije razumijevanje ove tvrdnje potrebno je dokazati čuveni Eulerov teorem.

Lema 4.5 Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus.

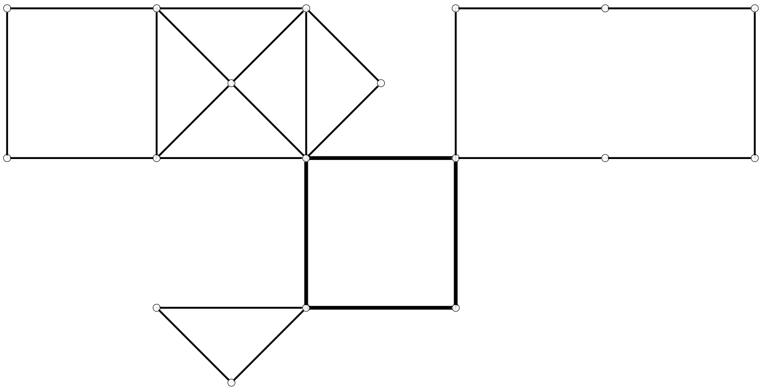
Dokaz. Ako G ima petlji ili višestrukih bridova, rezultat jasno slijedi na trivijalan način. Pretpostavimo zato u daljnjem da je G jednostavan graf. Neka je $v \in V(G)$ neki vrh grafa G. Konstruiramo šetnju $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots$, induktivno birajući v_1 kao susjeda od v, te zatim za svaki i birajući v_{i+1} kao susjeda od v_i različitog od v_{i-1}. Tako možemo birati niz vrhova $\{v_i\}$, jer je stupanj svakog vrha barem 2. S obzirom da je skup vrhova grafa G konačan, u nekome času ćemo izabrati već prethodno izabrani vrh. Ako je v_k prvi takav, onda slijed vrhova između dva pojavljivanja vrha v_k u našoj šetnji tvori ciklus. ■

Činjenica da povezani graf sadrži eulerovsku stazu može se jednostavno karakterizirati znaju li se stupnjevi svih vrhova.

Teorem 4.6 — Euler, 1736. Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je G eulerovski te neka je P eulerovska staza od G. Pri prolasku nekim vrhom, staza P doprinosi stupnju dotičnog vrha za 2 (stazom se jednim bridom u vrh dođe, a drugim bridom iz vrha ode). Budući da P svakim bridom prolazi točno jednom, svaki vrh mora imati stupanj koji je višekratnik broja 2, dakle je paran broj.
($\Longleftarrow$) Ovaj smjer dokazat ćemo matematičkom indukcijom po broju bridova u grafu G. Ako je broj bridova jednak 1, nužno je riječ o petlji (zbog parnosti stupnjeva vrhova), pa je tvrdnja trivijalno ispunjena i time baza indukcije dokazana. Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za sve eulerovske grafove H takve da je broj bridova od H manji od broja bridova od G, tj. da za sve takve H vrijedi da su eulerovski ako im je stupanj svakog vrha paran.

Neka je stupanj svakog vrha u G paran. Kako je G povezan, to je on veći ili jednak 2. Po prethodnoj lemi, G sadrži neki ciklus C. Ako taj C sadrži svaki brid od G, tvrdnju smo dokazali. Ako ne sadrži, onda iz grafa G izbacimo sve bridove uključene u ciklus C. Tako dobijemo novi (moguće nepovezan) graf H, s manje bridova nego je imao G, no i dalje sa svojstvom da je svaki vrh od H parnog stupnja. Po induktivnoj pretpostavci svaka komponenta povezanosti grafa H ima eulerovsku stazu. Budući svaka komponenta od H ima zajednički vrh sa C, eulerovsku stazu za G dobivamo slijedeći vrhove iz C dok ne dođemo do neizoliranog vrha od H, zatim prijeđemo eulerovsku stazu te komponente povezanosti, pa nastavimo po ciklusu C, i tako dalje.



Jasno je da ćemo se na kraju vratiti u vrh ciklusa C iz kojeg smo krenuli, te dobiti eulerovsku stazu za cijeli graf G. ■

Iz dokaza ovog teorema neposredno slijedi

Korolar 4.7 Povezani graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.

Imitirajući dokaz Eulerovog teorema možemo lagano dobiti ekvivalentan rezultat za skoro eulerovske grafove.

Korolar 4.8 Povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.

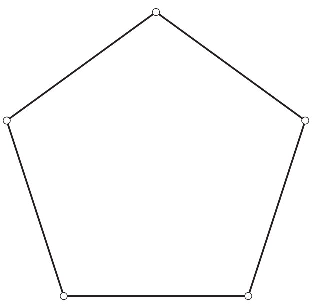
Jasno je da će u ovom slučaju nezatvorena staza kroz svaki brid grafa započeti u jednom vrhu neparnog stupnja i završiti u onom drugom. Prema ovome korolaru, graf königsberških mostova nije skoro eulerovski, jer su 4 njegova vrha neparnog stupnja.

Zadatak 4.3 Za koje n-ove je potpuni graf K_n, $n \geq 3$, eulerovski?

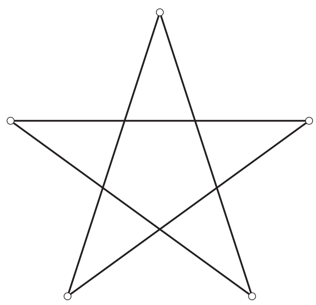
Rješenje. Potpuni graf K_n je regularan, i to stupnja $n-1$, jer je svaki vrh susjedan sa svim ostalima, dakle s njih $n-1$. Prema Eulerovom teoremu, jedini uvjet da bi K_n bio eulerovski je da je $n-1$ paran broj, odnosno da je n neparan. Probajte sami graf K_5 rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa. ■

Zadatak 4.4 Za koje vrijednosti parametra n, $n \geq 5$, je $\overline{C}_n$ eulerovski?

Rješenje. Eulerov teorem se može primijeniti samo na povezane grafove. Pokažimo stoga da je $\overline{C}_n$ povezan. Za početak primjetimo da je $\overline{C}_n$ $(n-3)$-regularan graf. Svaki vrh je povezan sa svim vrhovima osim sa svoja dva susjeda iz C_n. No, tada za svaka dva nesusjedna vrha postoji vrh koji je u $\overline{C}_n$ susjedan s oba vrha.



C_5



$\overline{C}_5$

Zaključujemo da između svaka dva vrha postoji put, pa je $\overline{C}_n$ povezan. Sada možemo primijeniti Eulerov teorem. Graf $\overline{C}_n$ je eulerovski ako i samo ako je n neparan. ■

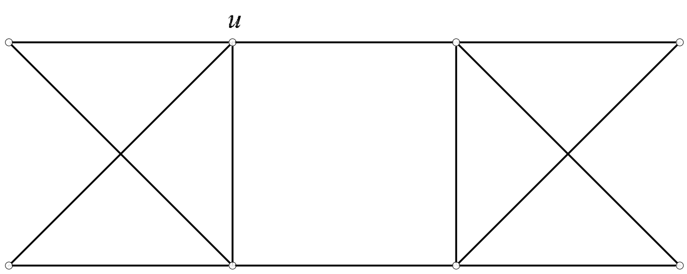
Iako sada znamo ispitivanjem jednostavnog kriterija odgovoriti na pitanje je li graf eulerovski, preostaje nam odgovoriti na pitanje kako najjednostavnije neposredno naći (konstruirati) neku eulerovsku stazu.

Teorem 4.9 — Fleuryev algoritam, 1883. Neka je G eulerovski graf. Tada je sljedeća konstrukcija uvijek moguća i dovodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila:

(i) prebriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega.

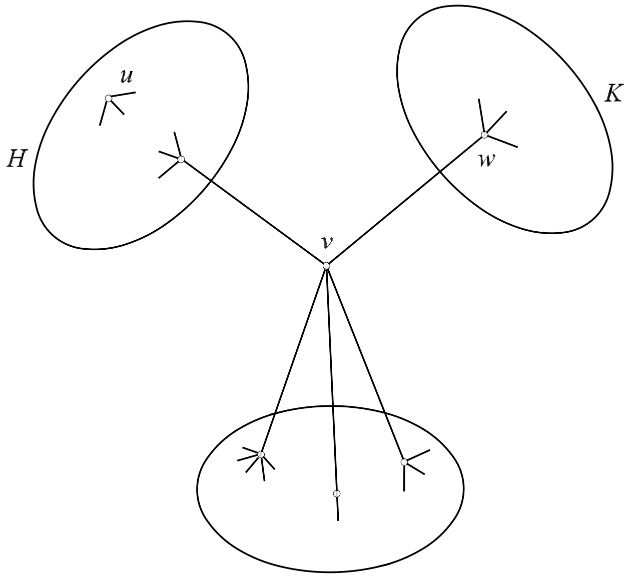
(ii) prijeđi mostom trenutnog grafa samo ako nemaš druge mogućnosti.

Preporučamo čitatelju da se prije udubljivanja u dokaz ovog algoritma sam uvjeri da algoritam radi, na primjer na potpunom bipartitnom grafu $K_{2,4}$, ili na ovom primjeru:



Dokaz. Pokažimo najprije da algoritam neće zapeti niti u jednom koraku, tj. da je u svakom koraku (odlasku iz vrha u kojem smo se zatekli) provediv. Pretpostavimo da smo započeli s algoritmom (dakle, konstrukciju eulerovske staze) u vrhu u, te da smo došli do vrha v. Ako je $v \neq u$, onda je podgraf H koji je ostao nakon svih brisanja povezan, te sadrži samo dva vrha neparnih stupnjeva, u i v. Moramo pokazati da uklanjanje sljedećeg brida ne rastavlja H, što je ekvivalentno (uz poštivanje pravila algoritma), da je vrh v incidentan s najviše jednim mostom. Međutim, ako ne bi bilo tako, onda bi postojao most vw, takav da komponenta povezanosti K grafa $H \setminus vw$, koja sadrži vrh w, ne sadrži u.

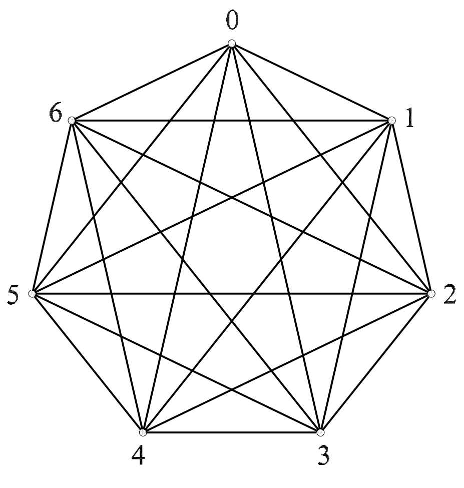
Kako bi vrh w nakon prolaska mostom vw imao neparni stupanj u K, to bi i neki drugi vrh iz komponente K morao imati neparni stupanj (jer je broj vrhova neparnog stupnja u svakom jednostavnom povezanom grafu paran!), suprotno pretpostavci da je $u \notin K$ jedini takav. Argumentacija je slična i ako je $v = u$.



Ostaje pokazati da ovaj postupak vodi do eulerovske staze, no to je jasno jer ne može više biti neprijeđenih bridova od G kad upotrijebimo zadnji brid incidentan s u. U tom bi slučaju naime brisanje nekog ranije prijeđenog brida rastavilo graf, što je u suprotnosti sa zahtjevom (ii). ■

* * *

Evo jedne zanimljive primjene eulerovskih grafova na igru domino. Pogledajmo potpuni graf K_7 sa 7 vrhova. Kako je stupanj svakog vrha u tom grafu jednak 6, on je eulerovski. Označimo vrhove brojevima $0, 1, \ldots, 6$.



Jednu od eulerovskih staza grafa K_7 čini sljedeći niz bridova:

$$01, 12, 23, 34, 45, 56, 60, 02, 24, 46, 61, 13, 35, 50, 03, 36, 62, 25, 51, 14, 40.$$

Uočimo da svaki brid u gornjem slijedu možemo interpretirati kao pločicu domina, na čijoj je jednoj polovici lijevi broj točkica, a na drugoj polovici desni broj točkica. Nakon ove identifikacije gornju eulerovsku stazu možemo shvatiti kao zatvoreni krug domino pločica, pri čemu smo upotrijebili sve pločice osim onih koje imaju isti broj na obje strane. No, njih možemo lako ubaciti naknadno (ubacivanje nije jednoznačno, no svakako je moguće). Tako smo pokazali da se svih 28 pločica domina, igramo li sa pločicama na kojima su brojke od 0 do 6 može, poštujući pravilo priljubljivanja istog broja točkica na obje pločice, posložiti u zatvoreni krug.

Jasno, istom strategijom posložili bismo i sve pločice domina na kojima su točkicama prikazani brojevi od 0 do $2k$, $k \in N$.

4.3 Hamiltonovski grafovi

Nakon što smo u prethodnom poglavlju promatrali grafove koji dopuštaju postojanje zatvorene staze koja prolazi svakim bridom tog grafa točno jednom, promotrimo sada zatvorene staze koje svakim vrhom grafa prolaze točno jednom. Jasno je da su takve staze zapravo putovi, pa kako su zatvorene, one su ciklusi.

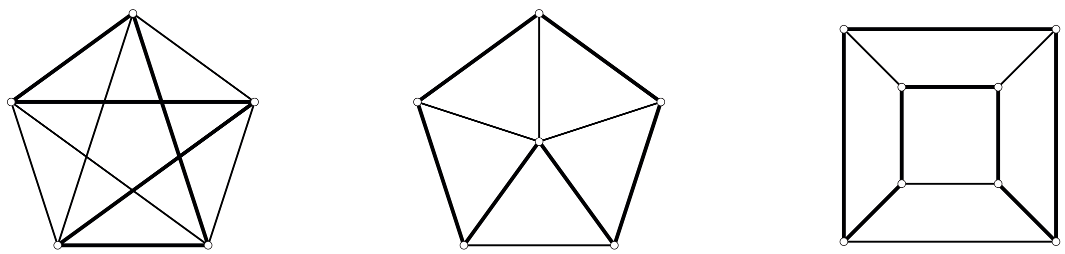
Definicija 4.10 Ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa zovemo **hamiltonovski ciklus**. Graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus zovemo **hamiltonovski graf**. ■

Nehamiltonovski graf u kojem možemo naći put kroz svaki vrh (ali koji nije zatvoren, pa nije ciklus) zovemo *skoro hamiltonovski* graf.

Ustanoviti je li neki graf s n vrhova hamiltonovski možemo dakle tako da u njemu nađemo ciklus duljine n. Ta pretraga je načelno faktorijelne složenosti, budući se treba protrčati kroz sve permutacije skupa od n vrhova grafa i vidjeti je li koja od tih permutacija (n-torki, nizova duljine n) baš hamiltonovski ciklus. Nije poznato postoji li algoritam polinomijalne složenosti za nalaženje hamiltonovskog ciklusa.

Zadatak 4.5 Koji su od grafova K_5, $K_{2,3}$, W_6, Q_3 hamiltonovski?

Rješenje. Na priloženoj slici konstruirali smo hamiltonovske cikluse tamo gdje smo mogli. Uočite da smo s iscrpnom pretragom smjeli započeti u bilo kojem vrhu, jer dotičnim vrhom ionako ciklus mora proći. Potpuni bipartitni graf $K_{2,3}$ nije hamiltonovski.



■

S obzirom na opsežnost iscrpne pretrage postavljamo si prirodno pitanje nalaženja nužnih i dovoljnih uvjeta da povezani graf bude hamiltonovski. No odgovor na to važno pitanje je do danas nepoznat, točnije, nisu općenito poznati strukturalni uvjeti koji bi bili ekvivalentni egzistenciji hamiltonovskog ciklusa u grafu.

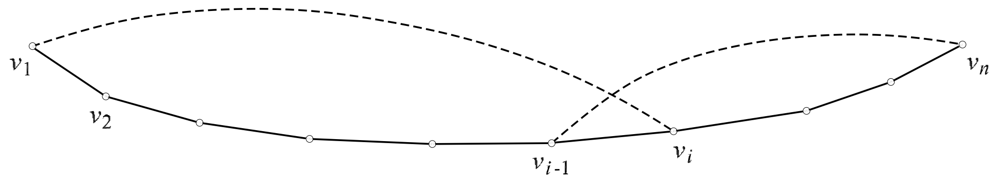
Ipak, ponešto se može reći. Utvrdimo najprije da je potpuni graf s n vrhova uvijek hamiltonovski. Naime, kako su svaka dva vrha susjedna, možemo vrhove obići (nanizati) u bilo kojem redoslijedu, pazeći da se tek nakon što smo obišli svih n vrhova vratimo u početni vrh šetnje. Drugačije formulirano, ovdje je svaka permutacija skupa od n vrhova ciklus. Ako potpunom grafu K_n $(n \geq 4)$ uklonimo brid, on će i dalje biti hamiltonovski. S uklanjanjem bridova možemo nastaviti, no u nekom času više nećemo moći garantirati da je nastali graf hamiltonovski. S druge strane, imamo li hamiltonovski graf, možemo mu dodavati bridove i jasno je da pri tome svojstvo hamiltonovosti ne možemo pokvariti. Intuicija nam govori da uz „dovoljno" bridova u zadanom grafu možemo naći hamiltonovski ciklus. Koliko je u tom smislu doista dovoljno, tvrdnja je sljedećeg teorema.

Teorem 4.10 — Ore, 1960. Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je G nehamiltonovski graf s n vrhova koji zadovoljava danu relaciju za stupnjeve. Dodavanjem bridova zadanome grafu G, brid po brid, možemo postići da graf postane hamiltonovski. Zastanimo u tom dodavanju bridova na korak do hamiltonovosti, u smislu da bismo dodavanjem još samo jednog brida dobili hamiltonovski graf. Uočimo da dodavanjem bridova nismo kvarili relaciju za stupnjeve, dapače, stupnjevi vrhova samo su se mogli povećati. Kako smo sada na korak do hamiltonovosti, to znači da možemo naći (nezatvoreni!) put $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ koji prolazi svakim vrhom. No, budući je G nehamiltonovski, vrhovi v_1 i v_n nisu susjedni, pa za njih vrijedi $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$.



No, to znači da v_1 ima i drugih susjeda osim v_2, kao što i v_n ima i drugih susjeda osim v_{n-1}. Definiramo skupove

$$\begin{aligned} A &= \{i \mid 2 \leq i \leq n,\ v_i \text{ je susjedan s } v_1\} \\ B &= \{i \mid 2 \leq i \leq n,\ v_{i-1} \text{ je susjedan s } v_n\} \end{aligned}$$

Tada je $|A| = \deg(v_1)$ i $|B| = \deg(v_n)$, te vrijedi $|A| + |B| \geq n$. Slijedi da presjek $A \cap B$ nije prazan skup. Dakle, nužno postoji neki v_i, susjedan s v_1, takav da je v_{i-1} susjedan s v_n. Sada je put

$$v_1 \to v_2 \to \cdots v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots v_i \to v_1$$

hamiltonovski ciklus, suprotno pretpostavci da takav ne postoji. ■

Čuveni Diracov teorem, s nešto jačim uvjetom na stupnjeve vrhova sada je jednostavna posljedica upravo dokazanog Oreovog teorema.

Teorem 4.11 — Dirac, 1952. Ako je G jednostavni graf s n $(n \geq 3)$ vrhova, te ako je $\deg(v) \geq n/2$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski.

Dokaz. Direktno možemo primijeniti Oreov teorem, s obzirom da je nejednakost iz Oreovog teorema sigurno ispunjena: $\deg(v) + \deg(w) \geq n/2 + n/2 = n$. ■

Zadatak 4.6 Dokaži da ako je G bipartitan graf s neparnim brojem vrhova, onda je G nehamiltonovski.

Rješenje. Dodavanjem bridova ne možemo pokvariti svojstvo hamiltonovosti, pa ako tvrdnju dokažemo za potpune bipartitne grafove s neparnim brojem vrhova, onda smo je dokazali i za bilo kakve bipartitne grafove s neparnim brojem vrhova. No, ako je broj vrhova neparan, onda je u $K_{r,s}$ nužno $r \neq s$. S druge strane, ako su vrhovi bipartitnog grafa podijeljeni u skupove A i B, te ako svaki brid spaja neki vrh iz A s nekim iz B, onda svaki ciklus prolazi kroz jednak broj vrhova iz A kao i iz B. Ako je ciklus hamiltonovski, morao bi proći svim vrhovima, dakle bi moralo biti $|A| = |B|$, što je u kontradikciji s gornjim zaključkom da je $r \neq s$. Dakle, hamiltonovski ciklus ne može postojati. ■

Zadatak 4.7 Je li Petersenov graf hamiltonovski? Je li skoro hamiltonovski?

Rješenje. Lako se vidi da nijedan od prethodnih teorema ne daje odgovor na ovo pitanje. Kao način rješavanja ovakvog zadatka nameće se eksplicitna konstrukcija hamiltonovskog ciklusa odnosno hamiltonovskog puta, ili pak iscrpna pretraga koja bi dala eventualno negativno rješenje. Preporučamo vam da iscrpnu pretragu započnete i osjetite koliko je ona uistinu iscrpljujuća, pa tako uvidite i koliko je ovaj problem, sasvim jednostavan za formulirati, zapravo složen. Daljnji prirodni put rješavanja ovakvih problema je programiranje i programsko ispitivanje svojstva hamiltonovosti. Mi ćemo vam ovdje ipak sugerirati rješenje. Petersenov graf nije hamiltonovski, ali jest skoro hamiltonovski. Ukoliko se niste odvažili na programiranje, nađite mu sada sami barem jedan skoro hamiltonovski put. ■

Zadatak 4.8 Uz koje uvjete na parametre $r,s \in \mathbb{N}$ je potpuni bipartitni graf $K_{r,s}$ skoro hamiltonovski?

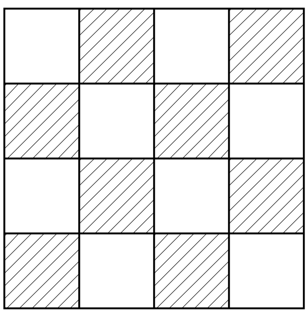
Rješenje. Lako se vidi da je $K_{r,s}$ skoro hamiltonovski kada je $|r-s| = 1$. No, potrebno je utvrditi je li to jedini slučaj kada je $K_{r,s}$ skoro hamiltonovski. Preostaju dva slučaja koje je potrebno istražiti: $|r-s| = 0$ i $|r-s| \geq 2$. Kada je $|r-s| = 0$ postoji zatvoreni ciklus kroz sve vrhove, stoga je graf hamiltonovski. Kada je $|r-s| \geq 2$, ne postoji put kroz sve vrhove od $K_{r,s}$. Uvjerite se u to sami! Dakle, potpuni bipartitini graf je skoro hamiltonovski ako i samo ako je $|r-s| = 1$. ■

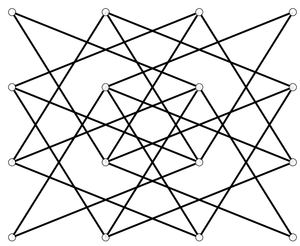
Zadatak 4.9 U grupi od 40 studenata svaki student poznaje točno 17 kolega pri čemu su poznanstva uzajamna. Mogu li se studenti rasporediti oko okruglog stola tako da su svakom studentu susjedna dva neznanca?

Rješenje. Rješenje ćemo modelirati pomoću grafova. Vrhovi grafa bit će studenti, a dva će vrha biti povezana ako se odgovarajući studenti ne poznaju. Sada je pitanje postoji li hamiltonovski ciklus u ovom grafu. Graf je 22-regularan, stoga je prema Diracovom teoremu hamiltonovski. Dakle, možemo rasporediti studente oko okruglog stola prema traženom rasporedu. ■

* * *

Dugo godina proučavani problem za razonodu je problem skakača na šahovskoj ploči, koji glasi ovako:
Može li skakač uobičajenim potezima skakača u šahu obići svako polje šahovske ploče točno jednom i vratiti se na isto polje iz kojeg je krenuo?
Mi ćemo dakako problem izmodelirati pomoću grafova. Naime, šahovskoj ploči (bilo koje dimenzije, važno je da je pravokutna) možemo pridijeliti graf tako da svakome polju šahovske ploče odgovara jedan vrh grafa, pri čemu su vrhovi susjedni ako skakač može u jednom potezu doći iz jednog u drugi. Zbog jednostavnosti, pogledajmo kako izgleda graf u slučaju šahovske ploče dimenzije 4×4.





Odgovoriti na početno pitanje, postoji li traženi obilazak skakača svih polja šahovske ploče, sada je očevidno ekvivalentno pitanju postoji li hamiltonovski ciklus u korespondentnom grafu. Za ploču dimenzije 4×4 očito ne, jer dovoljno je pogledati polja gore lijevo i dolje desno i vidjeti da su nužno sadržani u ciklusu duljine 4. Odgovorite si sada sami na pitanje postoji li ovakav skakačev obilazak za standardnu šahovsku ploču dimenzije 8×8. Ukoliko ste već načinili program za ispitivanje je li zadani graf hamiltonovski, odgovor ćete dobiti brzo. On je, toliko ćemo vam otkriti, potvrdan.

Zadatak 4.10 Dokaži da ne postoji skakačev obilazak za kvadratne šahovske ploče neparnoga reda.

Rješenje. Uočimo da je graf koji odgovara šahovskoj ploči bipartitan, jer skakač uvijek skačući po ploči mijenja boju polja. Sada se pozovimo na jedan od prethodnih zadataka, u kojem smo dokazali da je bipartitan graf s neparnim brojem vrhova nužno nehamiltonovski. Ako nam je zadana ploča reda $2k-1$, onda je ukupni broj polja ponovno neparan (kvadrat neparnog broja je neparan broj!) prema tome naš graf je upravo bipartitan graf s neparnim brojem vrhova, pa tvrdnja neposredno slijedi. ∎

4.4 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 4.11 Kakvu strukturu ima jednostavni graf s n vrhova kod kojeg je udaljenost svaka dva vrha jednaka 1? Kakvu strukturu ima jednostavni graf s n vrhova kod kojeg postoje vrhovi udaljeni za $n-1$?

Zadatak 4.12 Neka je $(1,1,1,2,2,x,3)$ rastući niz stupnjeva jednostavnog povezanog grafa G. Koliki je x? Je li ovim nizom struktura od G jednoznačno određena?

Zadatak 4.13 Koliko najmanje bridova može imati jednostavni povezani graf s n vrhova, $n \geq 4$, koji ima podgraf izomorfan s K_4?

Zadatak 4.14 Odredite bridnu povezanost 3-kocke Q_3 i potpunog bipartitnog grafa $K_{3,5}$.

Zadatak 4.15 Kolika je vršna povezanost kotača W_8?

Zadatak 4.16 Dokažite da k-kocka Q_k, $k \geq 2$, nema mostova.

Zadatak 4.17 Koliki je struk Petersenovog grafa?

Zadatak 4.18 Koliko ima neizomorfnih jednostavnih povezanih grafova s 5 vrhova struka strogo veQ-ceg od 3?

Zadatak 4.19 Potpuni tripartitni graf $K_{r,s,t}$ sastoji se od tri disjunktna skupa vrhova koji su kardinaliteta r, s i t redom, pri čemu su vrhovi susjedni ako i samo ako pripadaju različitim skupovima. Koliki je struk grafa $K_{r,s,t}$?

Zadatak 4.20 Ako graf G ima dva različita ciklusa koji sadrže brid e, dokažite da onda G ima ciklus koji ne sadrži e.

Zadatak 4.21 Odredite najmanji i najveći broj bridova jednostavnog povezanog grafa G s 15 vrhova. Ako bi G bio sastavljen od dvije komponente povezanosti, koji bi tada bio najmanji odnosno najveći broj bridova?

Zadatak 4.22 Zadana je matrica susjedstva grafa G,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koliko komponenti povezanosti ima G?

Zadatak 4.23 Neka je G jednostavan povezan 4-regularan graf s n vrhova, $n \geq 5$. Dokažite da uklanjanjem bilo kojih $n+2$ bridova G postaje nepovezan.

Zadatak 4.24 Neka je G jednostavan graf s $2k$ vrhova bez trokutova. Dokažite da G ima najviše k^2 bridova. Navedite primjer kada se ta gornja granica postiže.

Zadatak 4.25 Koliko ima lanaca duljine k, $1 \leq k \leq n-1$, u potpunom grafu K_n?

Zadatak 4.26 Kako se neposredno iz matrice incidencije grafa može utvrditi je li graf eulerovski?

Zadatak 4.27 Uz koje uvjete na parametre su k-kocka Q_k, triangularni graf $T(n)$ i kotač W_n eulerovski grafovi?

Zadatak 4.28 Ako je G jednostavan eulerovski graf, onda je i njegov bridni graf $L(G)$ također eulerovski. Dokažite.

Zadatak 4.29 Obilježite vrhove kocke Q_4 sa 16 vrhova i provedite na tom primjeru Fleuryev algoritam, te ispišite dobivenu eulerovsku stazu.

Zadatak 4.30 Provedite Fleuryev algoritam na grafu G zadanom matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

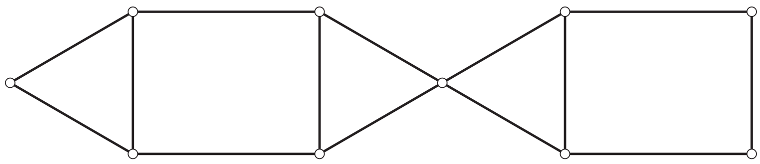
Zadatak 4.31 Nađite jednostavan povezan graf G s 4 vrha takav da je njegov komplement $\overline{G}$ povezan i da su G i $\overline{G}$ skoro eulerovski.

Zadatak 4.32 Neka je G jednostavan povezan graf s n vrhova, $n \geq 4$, takav da je $\overline{G}$ povezan. Odredite sve $n \geq 4$ za koje je istinita tvrdnja: G je eulerovski ako i samo ako je $\overline{G}$ eulerovski.

Zadatak 4.33 Koliko je najmanje bridova potrebno ukloniti Petersenovu grafu da bi on bio skoro eulerovski? Nađite u tom slučaju jednu takvu stazu.

Zadatak 4.34 Može li se dodavanjem bridova Petersenovom grafu dobiti eulerovski graf? Ako da, koliko je najmanje bridova potrebno dodati?

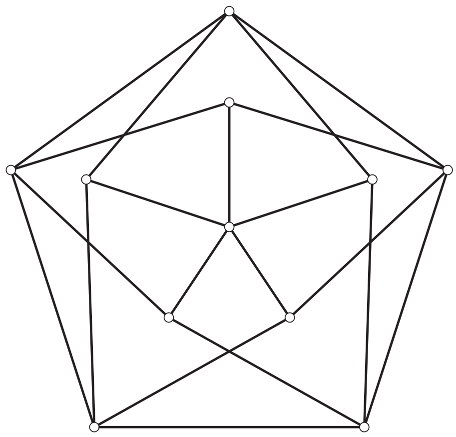
Zadatak 4.35 Koliko najmanje bridova treba dodati grafu sa slike da bi on postao jednostavan eulerovski graf?



Zadatak 4.36 Kontraprimjerom pokažite da ne vrijedi obrat Diracovog teorema.

Zadatak 4.37 Dokažite ili primjerom opovrgnite sljedeće tvrdnje:
A. Ako je povezani graf eulerovski, tada mu je bridni graf hamiltonovski.
B. Ako je povezani graf hamiltonovski, tada mu je bridni graf eulerovski.

Zadatak 4.38 Dokažite da je Grötzschov graf sa slike hamiltonovski.



Zadatak 4.39 Dokažite da je potpuni tripartitni graf $K_{r,2r,3r}$ hamiltonovski.

Zadatak 4.40 Neka je dan graf $H = Q_3 - v$, $v \in V(Q_3)$. Je li graf H hamiltonovski? Je li skoro hamiltonovski?

Zadatak 4.41 Odredite sve grafove s n vrhova kojima je eulerovska staza ujedno i hamiltonovski ciklus.

Zadatak 4.42 Uz koje uvjete na parametar k je k-kocka Q_k hamiltonovski graf?

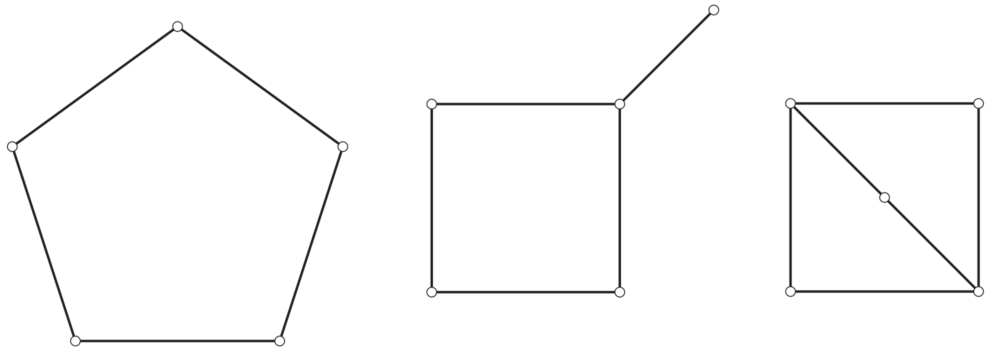
Zadatak 4.43 Nađite 4 hamiltonovska ciklusa u potpunom grafu K_9 koji nemaju nijedan zajednički brid. Koliki je najveći broj disjunktnih hamiltonovskih ciklusa u K_{2n+1}?

Zadatak 4.44 Koliko različitih hamiltonovskih ciklusa imaju potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ i kotač W_n?

Zadatak 4.45 Neka je G graf s n vrhova, $n \geq 3$, i s $\frac{n^2-3n+6}{2}$ bridova. Dokažite da je G hamiltonovski. Nađite nehamiltonovski graf s n vrhova i $\frac{n^2-3n+4}{2}$ bridova.

Rješenja zadataka

4.11 K_n, P_n.
4.12 $x = 2$. Struktura grafa nije jednoznačno određena.
4.13 $n+2$.
4.14 $\lambda(Q_3) = 3$, $\lambda(K_{3,5}) = 3$.
4.15 $\kappa(W_8) = 3$.
4.16 *Uputa.* Pokažite da se svaki brid od Q_k nalazi u ciklusu.
4.17 5.
4.18 3.



4.19
4.20
4.21 Za povezan graf G vrijedi: $14 \leq |E(G)| \leq 105$. Za graf G s dvije komponente povezanosti vrijedi: $13 \leq |E(G)| \leq 78$.
4.22 3.
4.23 Graf G ima $2n$ bridova. Uklanjanjem $n+2$ brida graf G bi imao $n-2$ brida, što je manje od minimalnog broja bridova povezanog grafa.
4.24 Primjer takvog grafa je potpuni bipartitni graf $K_{k,k}$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k. Kada je $k = 1$, jedini primjer je lanac P_2 za koji tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k-1$. Neka je sada G graf s $2k$ vrhova bez trokutova. Neka su u i v susjedni vrhovi od G. Kako G nema trokutova, u i v nemaju zajedničkih susjeda, stoga su incidentni s ukupno najviše $2k-1$ brida. Graf $G \setminus \{u, v\}$ nema trokutova pa prema pretpostavci indukcije ima najviše $(k-1)^2$ bridova. Dakle, G ima najviše $(k-1)^2 + 2k - 1 = k^2$ bridova.
4.25 $\frac{n(n-2)\dots(n-k)}{2}$.
4.26 Zbroj elemenata svakog retka mora biti paran broj.
4.27 Q_k eulerovski za k paran, $T(n)$ za svaki n, W_n nikada.
4.28 Neka su vrhovi u i v od G povezani bridom e. Tada je e vrh od $L(G)$ stupnja $\deg(u) + \deg(v) - 2$ koji je paran. Prema Eulerovom teoremu $L(G)$ je eulerovski graf.
4.29
4.30
4.31
4.32 n neparan broj.
4.33 4.
4.34 Da, najmanje 5 bridova.

4.35 3.
4.36
4.37 **A.** Tvrdnja vrijedi. U bridnom grafu $L(G)$ eulerovska staza grafa G postaje hamiltonovski ciklus. **B.** Ne vrijedi.
4.38
4.39 *Uputa.* Tvrdnju dokažite pomoću Oreovog teorema.
4.40 H nije hamiltonovski. H je skoro hamiltonovski.
4.41 Neka je G graf s n vrhova. Eulerovska staza je zatvorena staza kroz sve bridove. Dakle, G sadrži samo bridove iz hamiltonovskog ciklusa. Stoga je G 2-regularan povezan graf. Slijedi da je G ciklus C_n.
4.42 Za svaki $k \geq 2$.
4.43 $1-2-3-4-5-6-7-8-9-1$, $1-3-5-7-9-2-4-6-8-1$, $1-4-7-3-9-6-2-8-5-1$, $1-6-3-8-4-9-1-2-7-1$. K_{2n+1} ima najviše n disjunktnih hamiltonovskih ciklusa.
4.44
4.45

5. Algoritmi optimizacije

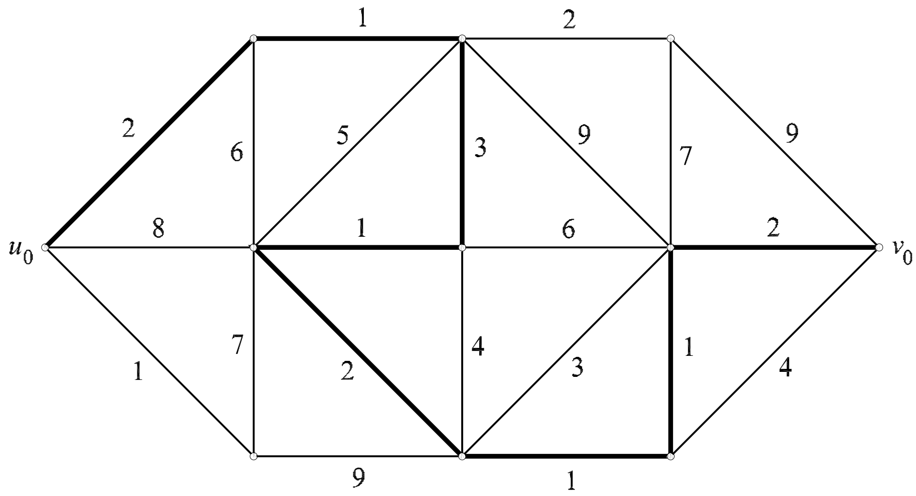
5.1 Problem najkraćeg puta

Neka je dan jednostavan povezan graf G s n vrhova. Neka je svakom bridu e toga grafa pridružen realan broj $w(e)$ kojeg ćemo zvati *težina* brida e. Takvu strukturu zvat ćemo težinski graf. Težina w je dakle funkcija $w: E(G) \to \mathbb{R}$ koju možemo interpretirati u grafu na razne načine: kao duljinu pojedine ceste neke cestovne mreže, kapacitet cijevi nekog cijevnog transportnog sustava, cijenu instaliranja ili održavanja nekog optičkog kabela, i slično. Svakako, to je neka karakteristična težinska funkcija ili mjera svakog pojedinog brida. Uočimo da zapravo svaki graf možemo interpretirati kao težinski graf, na način da svakom bridu pridijelimo težinu 1, tako da je tada $w(e) = 1, \forall e \in E(G)$.

Ako je H podgraf težinskog grafa G, definiramo težinu $w(H)$ grafa H kao zbroj težina $\sum\limits_{e \in E(H)} w(e)$ svih bridova od H. Mnogi se problemi optimizacije na grafovima svode na traženje podgrafa zadanog grafa ekstremalne (minimalne ili maksimalne) težine. Jedan od takvih problema je i *problem najkraćeg puta*. Interpretiramo li zadani graf na primjer kao željezničku mrežu koja povezuje nekoliko gradova, a težinsku funkciju na bridovima definiramo kao duljinu položene željezničke pruge, zanima nas pronaći najkraći put između dva unaprijed određena grada.

Traženi podgraf minimalne težine (ili u izabranoj interpretaciji minimalne ukupne duljine) strukturom je lanac koji spaja dva unaprijed zadana vrha između kojih tražimo najkraći put. Lanaca između bilo koja dva vrha u grafu ima konačno mnogo, pa je problem dobro definiran, jer tražimo minimum skupa od konačno mnogo elemenata. Jedan praktični, opipljivi model koji daje rješenje problema najkraćeg puta je ovaj. Od konca možemo načiniti zadani graf, vrhovi grafa bili bi uzlovi, a duljine konca između dva uzla proporcionalne težinama odgovarajućih bridova. Sada bismo model načinjen od konca uhvatili u onim čvorovima između kojih se traži najkraći put, napeli, i linija napetoga konca predstavlja najkraći put između dotična dva vrha težinskog grafa.

Prije nego problem riješimo matematički, evo jednog primjera najkraćeg puta između istaknutih vrhova u_0 i v_0.



Prirodno, dovoljno je problem najkraćeg puta riješiti za jednostavne povezane grafove. Ako težinski graf nije jednostavan, nego ima višestruki brid, jasno je da će u obzir za najkraći put doći samo onaj brid od tih višestrukih koji je najmanje težine. Ako dva vrha u i v nisu susjedna, po dogovoru ćemo pisati da je $w(uv) = \infty$. Također, pretpostavit ćemo da su sve težine pozitivni realni brojevi; ako bi težina bila jednaka 0, onda bismo dotična dva vrha u svrhu nalaženja najkraćeg puta mogli naprosto slijepiti, tj. taj brid težine 0 stegnuti.

Neka je sada zadan težinski graf G uz sve opisane pretpostavke. Tražimo najkraći put između njegovih istaknutih, unaprijed zadanih vrhova u_0 i v_0. Uočimo da *udaljenost dva vrha* u težinskom grafu možemo definirati kao duljinu najkraćeg puta između njih. U tom smislu, mi zapravo tražimo $d(u_0, v_0)$. Zbog potpunosti, zapišimo da je $d(u_0, u_0) = 0$. Evo glavne matematičke ideje algoritma. Neka je S pravi podskup skupa vrhova $V(G)$, takav da je $u_0 \in S$, te označimo sa $\overline{S}$ njegov skupovni komplement $V(G) \setminus S$ u skupu svih vrhova. Ako je $P = u_0u_1u_2\dots u_rv$ najkraći put od vrha u_0 do skupa $\overline{S}$ (pri čemu pod najkraćim putom ili kraće udaljenošću od vrha u_0 do skupa vrhova $\overline{S}$ prirodno razumijevamo najkraću od svih udaljenosti $d(u_0, v_i)$, $v_i \in \overline{S}$), onda je vrh u_r sasvim sigurno iz skupa S i dio puta P od vrha u_0 do vrha u_r jednak je baš najkraćem putu između ta dva vrha. Zato vrijedi

$$d(u_0, v) = d(u_0, u_r) + w(u_rv), \quad \text{za neki } u_r \in S,$$

pa je udaljenost od vrha u_0 do skupa vrhova $\overline{S}$ dana formulom

$$d(u_0, \overline{S}) = \min_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} \{d(u_0, u) + w(u, v)\} \tag{5.1}$$

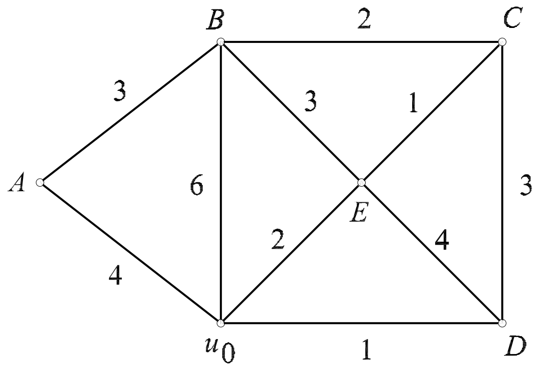
Na ovoj važnoj formuli temeljit će se naš algoritam. Započet ćemo sa skupom $S_0 = \{u_0\}$, te konstruirati dalje rastući niz podskupova $S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{n-1}$ skupa vrhova $V(G)$, tako da u svakom koraku i nađemo najkraće putove od zadanog početnog vrha u_0 do svih vrhova skupa S_i.

Prvi korak je odrediti vrh koji je najbliži početnome vrhu u_0. Taj vrh ćemo lako odrediti izračunamo li $d(u_0, \overline{S}_0)$ pa onda izaberemo onaj vrh $u_1 \in \overline{S}_0$ za koji vrijedi da je $d(u_0, u_1) = d(u_0, \overline{S}_0)$. Primijetite da takvih vrhova u_1 može biti i više, a mi izaberemo jedan od njih. Da bismo izračunali $d(u_0, \overline{S}_0)$, primijenimo formulu 5.1. Po njoj naime slijedi da je

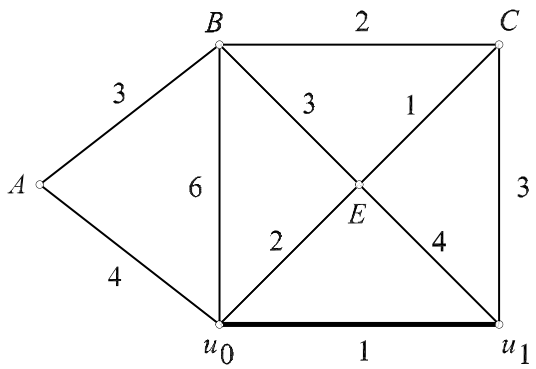
$$d(u_0, \overline{S}_0) = \min_{\substack{u \in S_0 \\ v \in \overline{S}_0}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} = \min_{v \in \overline{S}_0} \{w(u_0v)\}$$

što je zapravo duljina najkraćeg brida incidentnog s početnim vrhom u_0, pa se jednostavno izračuna tražena udaljenost $d(u_0, \overline{S}_0)$. Stavimo da je $S_1 = \{u_0, u_1\}$ te da je $P_1 = u_0u_1$. Time ulazimo u sljedeći korak algoritma. Općenito, u k-ti korak algoritma ulazimo nakon što smo odredili skup vrhova $S_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ i pripadne najkraće putove $P_1, P_2, \dots, P_k$. Računamo $d(u_0, \overline{S}_k)$ pomoću formule 5.1 te izabiremo vrh $u_{k+1} \in \overline{S}_k$ kao onaj vrh za koji se postiže jednakost $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \overline{S}_k)$. S obzirom da je $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_j u_{k+1})$ za neki $j \leq k$, put P_{k+1} konstruiramo tako da putu P_j naprosto dodamo brid $u_j u_{k+1}$.

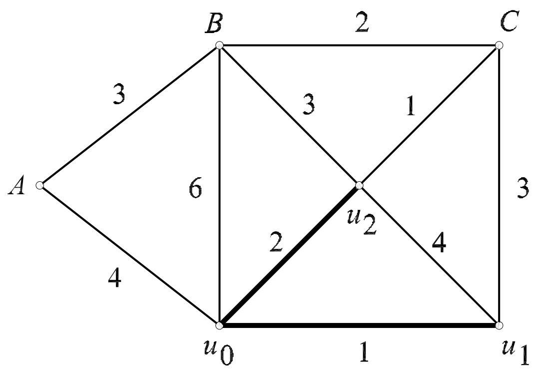
Cijeli ovaj postupak nalaženja najkraćeg puta od zadanog početnog vrha u_0 do svih drugih vrhova težinskog grafa ilustrirat ćemo na sljedećem primjeru.



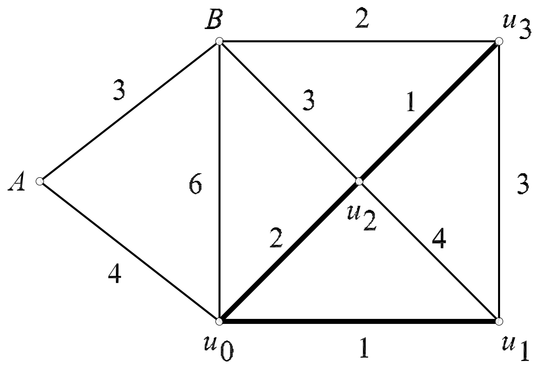
Vrhove zadanog težinskog grafa smo označili velikim slovima abecede radi boljeg razumijevanja, dok smo početni vrh odmah označili s u_0. Jasno, $\overline{S}_0 = \{A, B, C, D, E\}$. Iz vrha u_0 možemo doći direktno do $\overline{S}_0$ po 4 brida, koji su duljina 1, 2, 4 ili 6. Najkraći je brid duljine 1, dakle je $d(u_0, \overline{S}_0) = 1$, a vrh D postaje u_1, $S_1 = \{u_0, u_1\}$, a $P_1 = u_0 u_1$.



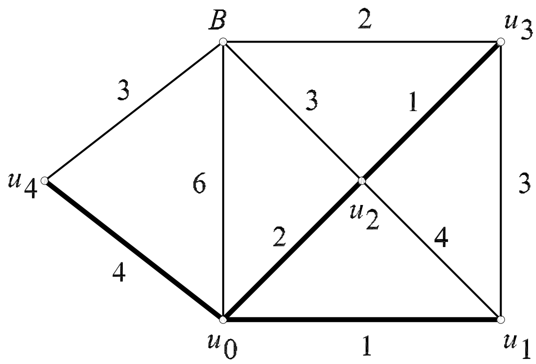
Sada je $d(u_0, \overline{S}_1) = 2$, vrh E postaje u_2, $S_2 = \{u_0, u_1, u_2\}$, a $P_2 = u_0 u_2$.



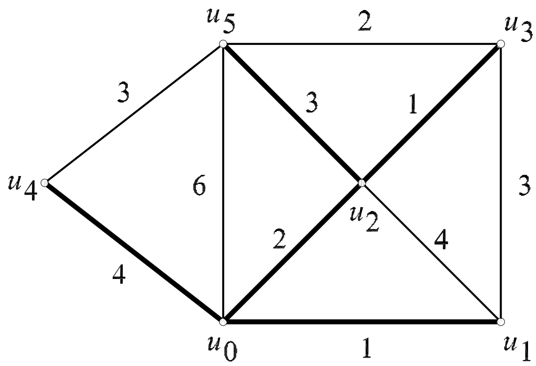
U sljedećem koraku je $d(u_0, \overline{S}_2) = d(u_0, u_2) + w(u_2 C) = 3$, pa vrh C postaje u_3, $S_3 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, a $P_3 = u_0 u_2 u_3$.



Sada je $d(u_0,\overline{S}_3) = \min\{w(u_0A), w(u_0B), d(u_0,u_2)+w(u_2B), d(u_0,u_3)+w(u_3B)\} = w(u_0A) = 4$. Dakle je $u_4 = A$, $S_4 = \{u_0,u_1,u_2,u_3,u_4\}$, $P_4 = u_0u_4$.



U zadnjem, preostalom koraku algoritma je $\overline{S}_4 = \{B\}$, $d(u_0,\overline{S}_4) = 5$, a uočite da se ovdje taj minimum može postići na dva načina: $P_5' = u_0u_2u_5$ ili $P_5'' = u_0u_2u_3u_5$. Svejedno je za koji se put odlučimo kad je on u oba slučaja jednako kratak, minimalan; izaberimo na primjer $P_5 = P_5'$:



Vjerojatno povijesno najpoznatiji algoritam koji rješava problem najkraćeg puta je Dijkstrin algoritam. Taj algoritam je profinjenje upravo opisanog postupka. Naime, razmotrimo li glavnu formulu 5.1, vidimo da je potrebno mnogo uspoređivanja dok se traženi minimum ne ustanovi, te posebno, da će se mnoga uspoređivanja izvršiti višekratno. Da bi se to izbjeglo, uvest ćemo dodatni podatak koji ćemo pamtiti i prenositi iz koraka u korak algoritma, i time pomoći u izbjegavanju ponavljanja računanja i uspoređivanja. Svakom vrhu v zadanog težinskog grafa pridružimo realni broj $l(v)$ koji označava gornju među za traženu udaljenost $d(u_0,v)$ (ta gornja međa u izvjesnom trenutku postat će jasno baš minimum). Najprije početnom vrhu u_0 pridružimo $l(u_0) = 0$, te $l(v) = \infty$, za $v \neq u_0$. (Pri implementaciji algoritma naravno da ćemo ∞ zamijeniti dovoljno velikim brojem.) Ovako uvedene oznake $l(v)$ tijekom izvođenja algoritma se mijenjaju, tako da nakon završetka i-tog koraka vrijedi

$$\begin{aligned} l(u) &= d(u_0,u), \text{ za } u \in S_i, \text{ te} \\ l(v) &= \min_{u \in S_{i-1}} \{d(u_0,u)+w(uv)\}, \text{ za } v \in \overline{S}_i. \end{aligned}$$

Drugim riječima, vrhovima iz S_i je minimalna udaljenost od vrha u_0 već nađena i samo se dalje pamti, dok je ostalim vrhovima nađena tek neka gornja međa (koja se također pamti).

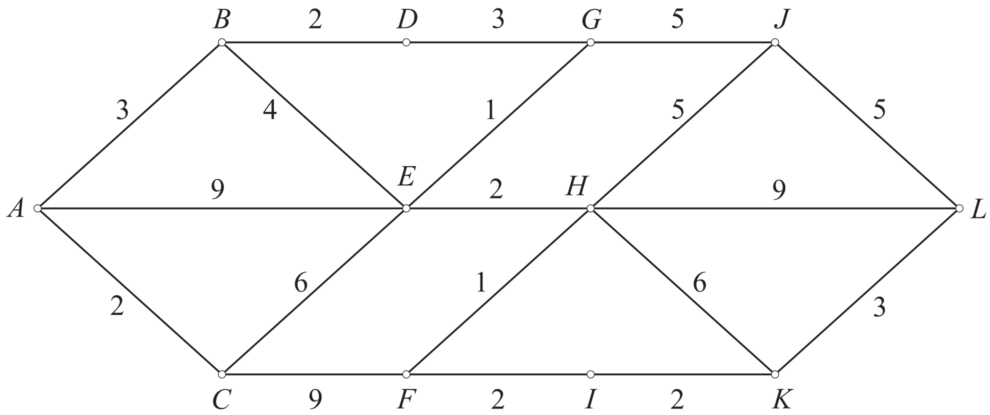
Oslanjajući se na sve do sada uvedene oznake, možemo formulirati ovaj čuveni algoritam. Pretpostavljamo da zadani težinski graf ima n vrhova.

Dijkstrin algoritam za problem najkraćeg puta

1. Stavi $l(u_0)=0$, $l(v)=\infty$, za $v \neq u_0$. Stavi $S_0=\{u_0\}$, te $i=0$.
2. Za svaki vrh $v \in \overline{S}_i$, zamijeni $l(v)$ s $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_iv)\}$. Izračunaj $\min_{v \in \overline{S}_i}\{l(v)\}$, te odredi u_{i+1} kao onaj vrh za koji se taj minimum postiže. Stavi $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Zamijeni i s $i+1$. Ako je $i=n-1$, stani. Ako je $i<n-1$, vrati se na korak 2.

Nakon izvršenja algoritma, svim vrhovima v zadanog težinskog grafa pridijeljena je vrijednost $l(v)$ koja predstavlja duljinu najkraćeg puta od zadanog početnog vrha u_0 do njih samih.

Provedimo algoritam na sljedećem primjeru. Početni vrh neka je $u_0=A$.



$l(A)=0$. $l(B)=\infty$. $l(C)=\infty$. $\ldots$ $l(L)=\infty$. $S_0=A$. $i=0$.

$l(B)=3$. $l(E)=9$. $l(C)=2$. $\min\{3,9,2,\infty\}=2$. $u_1=C$. $S_1=\{A,C\}$.

$i=1$.

$l(E)=8$. $l(F)=11$. $\min\{3,8,11,\infty\}=3$. $u_2=B$. $S_2=\{A,C,B\}$.

$i=2$.

$l(D)=5$. $l(E)=7$. $\min\{5,7,11,\infty\}=5$. $u_3=D$. $S_3=\{A,C,B,D\}$.

$i=3$.

$l(G)=8$. $\min\{7,8,11,\infty\}=7$. $u_4=E$. $S_4=\{A,C,B,D,E\}$.

$i=4$.

$l(H)=9$. $\min\{8,9,11,\infty\}=8$. $u_5=G$. $S_5=\{A,C,B,D,E,G\}$.

$i=5$.

$l(J)=13$. $\min\{9,11,13,\infty\}=9$. $u_6=H$. $S_6=\{A,C,B,D,E,G,H\}$.

$i=6$.

$l(F)=10$. $l(K)=15$. $l(L)=18$. $\min\{10,13,15,18\}=10$. $u_7=F$. $S_7=\{A,C,B,D,E,G,H,F\}$.

$i = 7.$

$l(I) = 12.$ $\min\{12, 13, 15, 18\} = 12.$ $u_8 = I.$ $S_8 = \{A, C, B, D, E, G, H, F, I\}.$

$i = 8.$

$l(K) = 14.$ $\min\{13, 14, 18\} = 13.$ $u_9 = J.$ $S_9 = \{A, C, B, D, E, G, H, F, I, J\}.$

$i = 9.$

$\min\{14, 18\} = 14.$ $u_{10} = K.$ $S_{10} = \{A, C, B, D, E, G, H, F, I, J, K\}.$

$i = 10.$

$l(L) = 17.$ $\min\{17\} = 17.$ $u_{11} = 17.$ $S_{11} = \{\{A, C, B, D, E, G, H, F, I, J, K, L\}.$

$i = 11.$ *KRAJ*

Uočite da Dijkstrinim algoritmom ne dobivamo točno koji je to najkraći put između zadanog početnog vrha i nekog drugog vrha, nego samo kolika je duljina tog puta. Ipak, jasno je da se taj najkraći put lagano može rekonstruirati. Pokušajte sami sada rekonstruirati najkraći put (duljine 17) od vrha A do vrha L!

Zadatak 5.1 Provedite Dijkstrin algoritam na prethodnom primjeru težinskog grafa ako je zadan početni vrh $u_0 = L$.

5.2 Kineski problem poštara

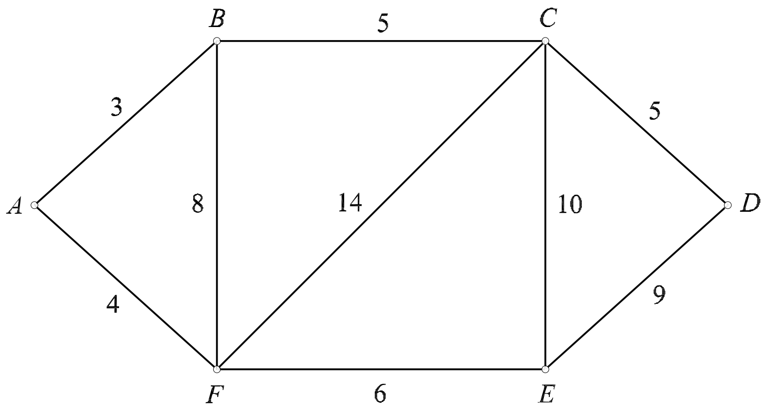
Ovaj zanimljiv problem koji se pojavljuje u raznim situacijama može se svakodnevnim rječnikom ovako formulirati. Poštar treba raznijeti dnevnu poštu po svim ulicama svog okruga i na kraju se vratiti u svoju poštansku središnjicu. Kako da isplanira svoju rutu tako da sveukupno prevali najmanju udaljenost?

Najprije prevedimo ovaj problem u jezik teorije grafova. Pretpostavljamo da su poznate duljine ulica kojima poštar raznosi poštu, te je riječ o težinskom grafu. Poštarova ruta je dakako zatvorena šetnja, no ta šetnja mora sadržavati svaki brid. Pitanje je dakle kako pronaći zatvorenu šetnju koja počinje i završava u zadanome vrhu a da je ona minimalne ukupne duljine (težine).

Razjasnimo najprije da nije bitno iz kojeg ćemo vrha krenuti. Naime, zatvorena šetnja koja prolazi svakim bridom svakako prolazi i svakim vrhom. Kad nađemo dakle takvu minimalnu zatvorenu šetnju, onda naknadno naprosto kažemo da ćemo s njome započeti u onom vrhu u kojem je pošta.

Uvjet na šetnju zapravo odmah podsjeća na eulerovski zahtjev. Doista, ako je zadani težinski graf eulerovski, trivijalno je za vidjeti da je eulerovska staza rješenje problema, budući svakim bridom prolazimo samo jednom.

Problem postaje složeniji ako zadani (težinski) graf nije eulerovski. Znamo da svaki graf ima nužno paran broj vrhova neparnog stupnja. Pogledajmo prvo slučaj kad je broj vrhova neparnog stupnja jednak 2. Evo i jednog konkretnog primjera.



Ako je graf skoro eulerovski, onda postoji skoro eulerovska staza u njemu. U našem primjeru to je staza između vrhova B i E. Ta staza prolazi svakim bridom, pa je njena duljina ukupna težina zadanog grafa. U ovom je to primjeru 64. Sada se iz vrha E treba vratiti natrag do B, ponavljajući jasno pritom obilazak nekih bridova. Prirodno je izabrati najkraći put. U konkretnom slučaju on je duljine $6+4+3=13$. Mi smo našli dakle zatvorenu šetnju koja prolazi svakim bridom barem jednom i ona je ukupne duljine $64+13=77$.

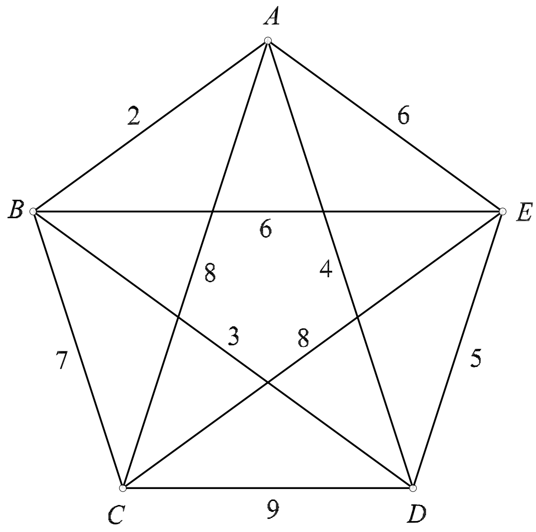
Nećemo sada ulaziti u dokazivanje ovog postupka, no prethodna ideja doista daje optimalno rješenje za kineski problem poštara u slučaju skoro eulerovskih težinskih grafova. Ponovimo, kombiniranjem Fleuryevog algoritma za nalaženje skoro eulerovske staze i Dijkstrinog algoritma za nalaženje najkraćeg puta dolazimo do minimalne zatvorene šetnje koja prolazi svakim bridom barem jednom.

Ova ideja može se poopćiti i na grafove s većim brojem vrhova neparnog stupnja, kažimo $2k$. Naprosto se nađe k najkraćih putova između k parova vrhova neparnog stupnja, ti se bridovi na zadanome grafu udvostruče, pa se onda u dobivenom eulerovskom grafu nađe eulerovska staza. Detaljnije ovu ideju nećemo razrađivati.

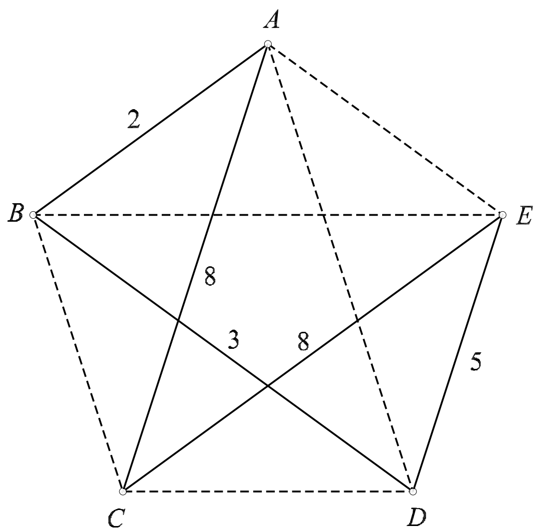
5.3 Problem trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika jedan je od najčuvenijih i najintrigantnijih problema koji se jednostavno modeliraju i preformuliraju pomoću grafova. Trgovački putnik treba obići nekoliko gradova i vratiti se natrag, a da pri tome sveukupno prijeđe najmanju udaljenost. Pretpostavka je da su svaka dva grada neposredno povezana i da se zna kolika je (najkraća) udaljenost među njima. U teoriji grafova, ekvivalentna formulacija ovog problema bila bi: *U potpunom težinskom grafu nađi hamiltonovski ciklus minimalne duljine.*

Ovaj problem vjerojatno se češće spominje u teoriji algoritama nego u samoj teoriji grafova. Riječ je opet o jednom problemu kojeg je jednostavno formulirati, no nije jednostavno naći kratak algoritam koji bi ga riješio. Budući je riječ o potpunom grafu, kažimo s n vrhova, mi točno znamo koliko različitih hamiltonovskih ciklusa u njemu ima: ima ih $(n-1)!/2$. Naime, prvi vrh možemo i fiksirati, jer će kroz njega ciklus sigurno morati proći, dok ostale vrhove možemo ispermutirati bilo kako. Konačno, na taj smo način svaki ciklus prebrojali dvaput – u „pozitivnom” i njemu suprotnom smjeru. Dakle, problem je nedvojbeno rješiv iscrpnom pretragom: za svaki od $(n-1)!/2$ ciklusa izračuna se njegova duljina, te se među njima nađe najmanja. Međutim, vjerujemo da imate već osjećaj koliko bi takvo rješavanje problema trajalo, već na primjer za dvadesetak vrhova.



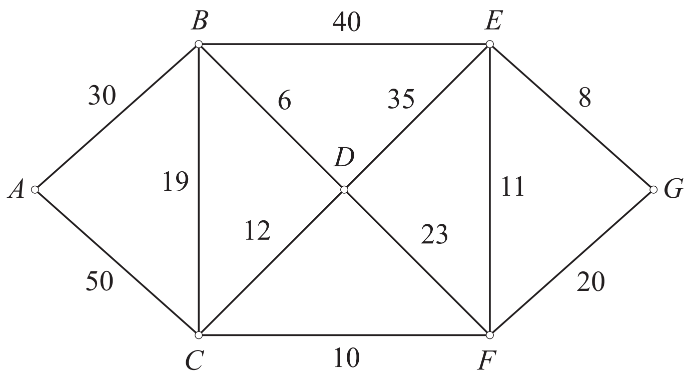
Pogledamo li potpuni težinski graf sa slike, te ispitamo sve mogućnosti, ustanovit ćemo da je najkraći hamiltonovski ciklus duljine 26. Uvjerite se da smo do tog rješenja mogli doći i takozvanim „pohlepnim” razmišljanjem. Pohlepno treba u teoriji algoritama uvijek iščitati kao „trenutno najoptimalnije”. Konkretno, to bi ovdje značilo graditi ciklus brid po brid, proširujući već konstruirani lanac u oba smjera, birajući uvijek kao sljedeći brid onaj koji je dopustiv (dakle, koji se nadovezuje na jedan od krajeva već formiranog lanca, i koji ne zatvara ciklus prije nego se prođe svim vrhovima), a koji je najmanje duljine. Konkretno, takav bi ciklus bio $A-B-D-E-C-A$.



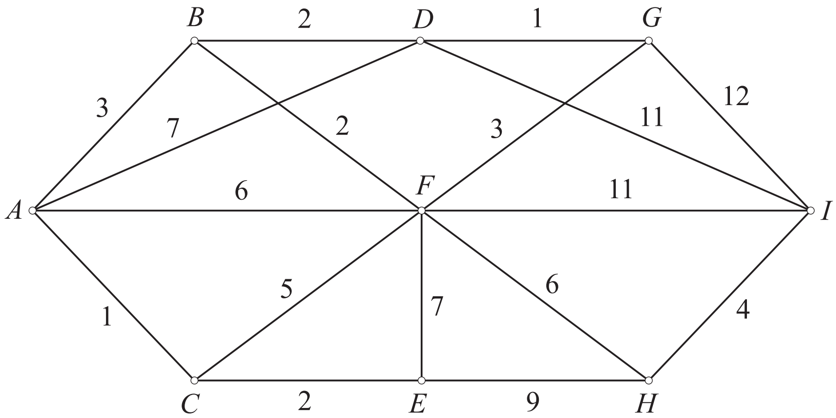
Moramo odmah upozoriti da je pohlepna strategija slučajno dala optimalan rezultat, tj. da se njome općenito ne dolazi do najkraćeg hamiltonovskog ciklusa. To dakle nije postupak kojim se rješava zadani problem, ali je definitivno jedan vrlo brzi način kako možemo doći do hamiltonovskog ciklusa čija duljina predstavlja gornju među traženog optimalnog rješenja. Veći je problem što izvođenjem ovog heurističkog algoritma ne možemo znati koliko smo se približili optimalnom rješenju.

5.4 Zadaci za samostalni rad

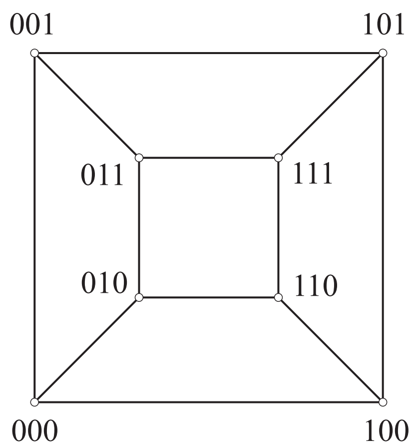
Zadatak 5.2 Odredite najkraći put od vrha A do vrha G na grafu sa slike.



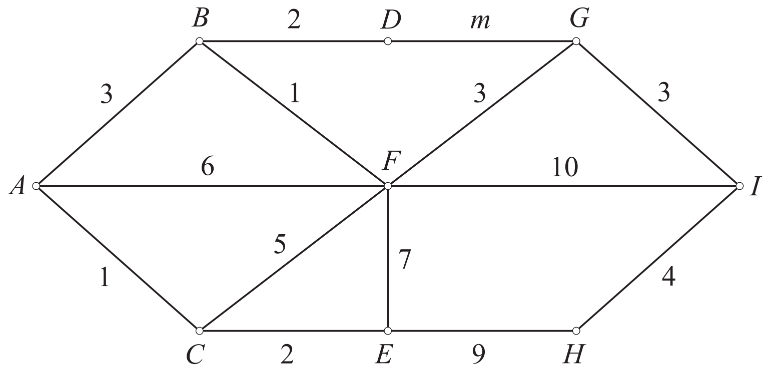
Zadatak 5.3 Odredite najkraći put od vrha A do vrha I na grafu sa slike.



Zadatak 5.4 Na slici je zadana 3-kocka Q_3. Svakom bridu $e = v_1v_2$ pridružena je težina $w(e) = (v_1 \text{ xor } v_2)_{10}$. Na primjer, $w(001, 101) = 4$ jer $001 \text{ xor } 101 = 100_2 = 4_{10}$. Nađite nakraći put od vrha 001 do vrha 100.



Zadatak 5.5 U ovisnosti o parametru $m \in \mathbb{N}$ odredite najkraći put od vrha A do vrha I na grafu sa slike.

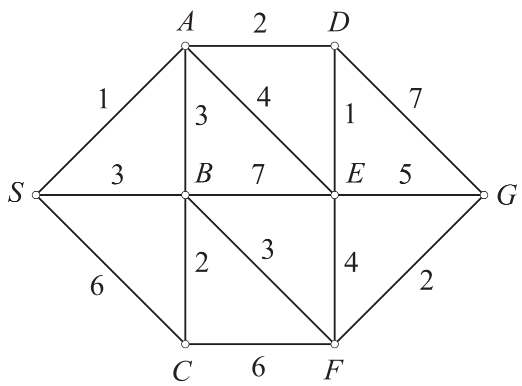


Zadatak 5.6 Graf G, sa skupom vrhova $V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ zadan je matricom susjedstva

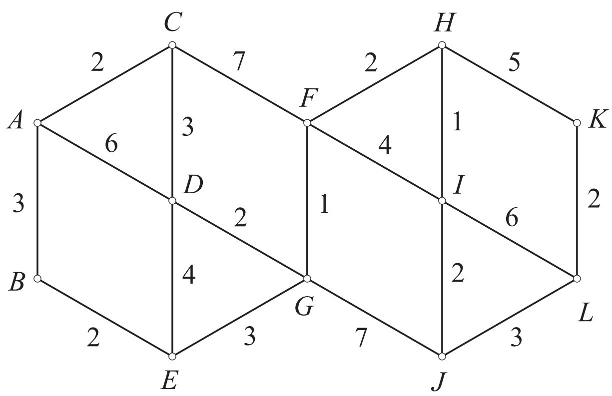
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za vrhove $i, j \in V(G)$, $i \neq j$, zadana je težina brida među njima $w(i, j) = i + j$. Nađite sve najkraće puteve iz vrha 1.

Zadatak 5.7 Pronađite sve najkraće puteva iz vrha S na grafu sa slike.



Zadatak 5.8 Pronađite najkraće puteve iz vrha A do ostalih vrhova na grafu sa slike.



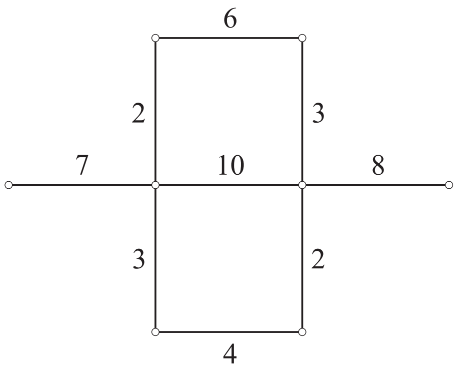
Zadatak 5.9 Korporacija ima ogranke u 6 gradova $G_1, G_2, \ldots, G_6$. Cijena direktnog leta od grada G_i do grada G_j zapisana je kao element na mjestu (i, j) sljedeće matrice (znak ∞ zapisan je na mjestima gdje direktan let ne postoji)

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}.$$

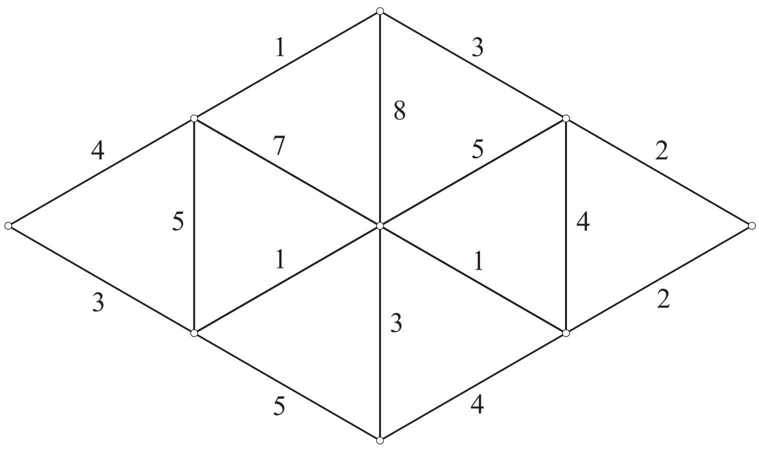
Izračunajte tablicu najjeftinijih zrakoplovnih ruta između svaka dva od ovih 6 gradova.

Zadatak 5.10 Osmislite algoritam za nalaženje struka zadanog jednostavnog grafa.

Zadatak 5.11 Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za graf sa slike?



Zadatak 5.12 Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za graf sa slike?

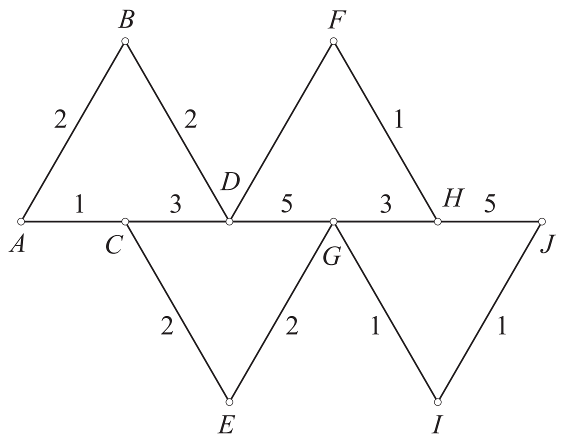


Zadatak 5.13 Graf je zadan težinskom matricom susjedstva

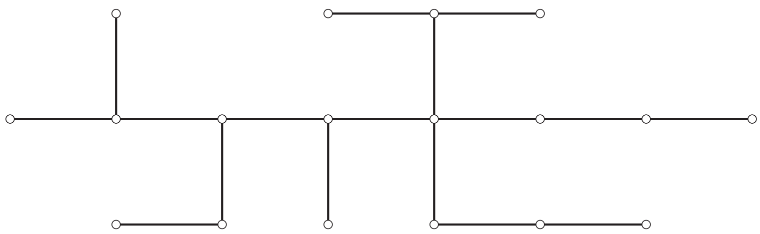
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & \infty & 11 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 12 & \infty & 7 & 7 \\ 1 & \infty & 4 & 0 & \infty & 21 & 9 & \infty \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 & 16 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 16 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 9 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 11 & 7 & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za ovaj graf?

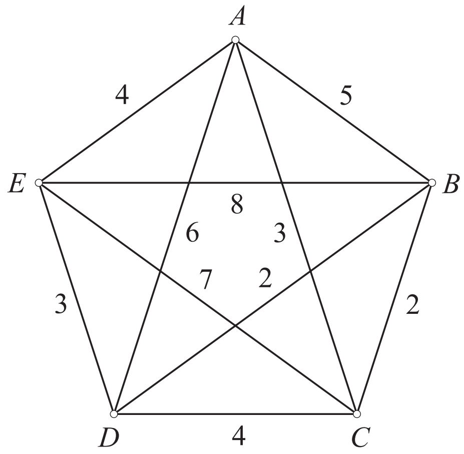
Zadatak 5.14 Grafom je zadan kineski problem poštara. Kolika mora biti cjelobrojna težina pridijeljena bridu DF da bi poštar tim bridom sigurno prošao dvaput?



Zadatak 5.15 Uz pretpostavku da su sve ulice jednako dugačke (npr. da im je duljina 1), riješite kineski problem poštara za graf sa slike.



Zadatak 5.16 Ispitajte daje li pohlepni algoritam rješenje problema trgovačkog putnika za težinski graf sa slike.

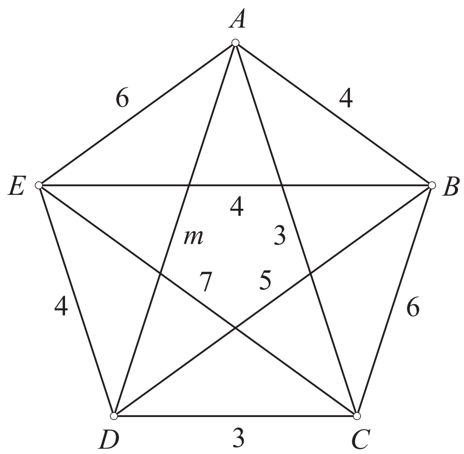


Zadatak 5.17 Nađite hamiltonovski ciklus najveće ukupne duljine za težinski graf iz prethodnog zadatka.

Zadatak 5.18 Ispitajte daje li pohlepni algoritam rješenje problema trgovačkog putnika za težinski graf zadan težinskom matricom susjedstva

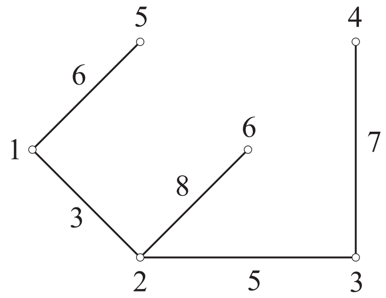
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.19 U ovisnosti o parametru $m \in \mathbb{N}$ riješite pohlepnim algoritmom problem trgovačkog putnika za težinski graf sa slike.

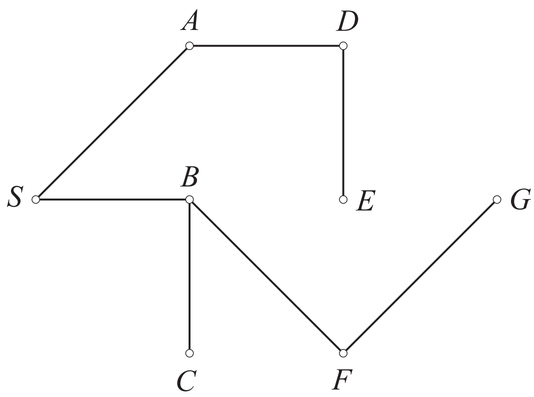


Rješenja zadataka

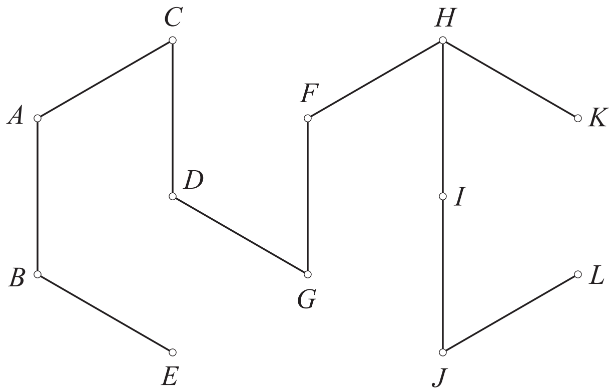
5.2 $A - B - D - C - F - E - G$.
5.3 $A - B - F - H - I$.
5.4 $001 - 101 - 100$.
5.5 Za $m = 1, 2$ najkraći put je $A - B - D - G - I$. Za $m \geq 3$ najkraći put je $A - B - F - G - I$.
5.6



5.7



5.8



5.9 $\begin{bmatrix} 0 & 35 & 45 & 35 & 25 & 10 \\ 35 & 0 & 15 & 20 & 20 & 25 \\ 45 & 15 & 0 & 10 & 20 & 35 \\ 35 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & 20 & 20 & 10 & 0 & 35 \\ 10 & 25 & 35 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}.$

5.10

5.11 69.

5.12 68.

5.13 117.

5.14 Najviše 2.

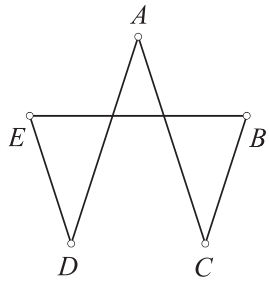
5.15

5.16 Da.

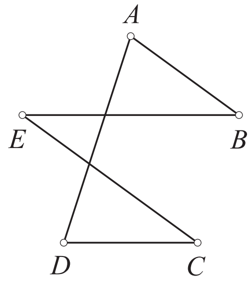
5.17 $A - C - D - B - E - A$.

5.18 Ne.

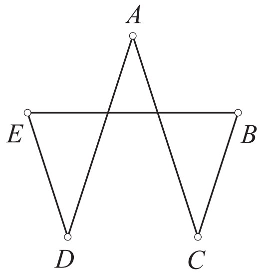
5.19 $m = 1, 2$



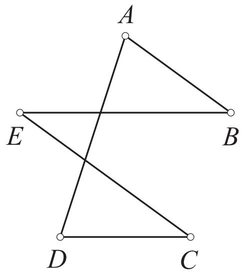
ili



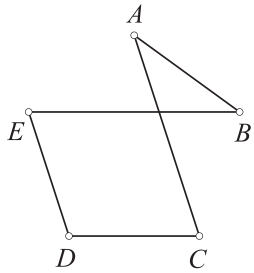
$m = 3$



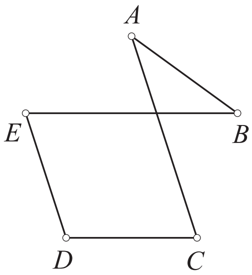
ili



ili



$m \geq 4$



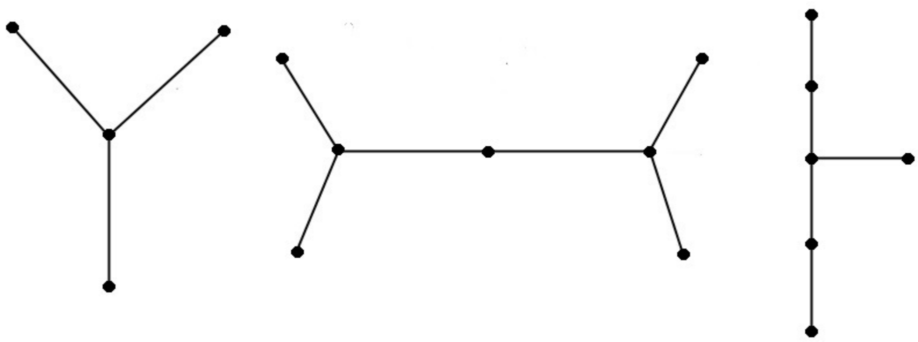
6. Stabla

6.1 Karakterizacije stabala

Podsjetimo se sljedeće važne činjenice. Povezani jednostavni graf s n vrhova ima najmanje $n-1$ bridova. Jedan primjer takvih grafova smo spomenuli, to su bili lanci P_n. Slično smo vidjeli da jednostavni grafovi s n vrhova i k komponenata povezanosti mogu imati najmanje $n-k$ bridova.

Definicija 6.1 **Šuma** je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**. ■

Osim već spomenutih lanaca, evo i još nekoliko primjera stabala.



Stabla su po mnogo čemu najjednostavniji grafovi i mnogo je slutnji dokazano za stabla, a nije za proizvoljni povezani graf. Svojstva stabala skupljena su u sljedećem teoremu.

Teorem 6.1 Neka je T graf s n vrhova. Onda su sljedeće izreke ekvivalentne:

(i) T je stablo.
(ii) T ne sadrži ciklus i ima $n-1$ bridova.
(iii) T je povezan i ima $n-1$ bridova.
(iv) T je povezan i svaki mu je brid most.

(v) Svaka dva vrha od T povezana su točno jednim putom.
(vi) T ne sadrži ciklus, no dodavanjem jednog brida dobit ćemo točno jedan ciklus.

Dokaz. Ako je $n = 1$, onda su svi rezultati trivijalni. Zato u daljnjem pretpostavljamo da je $n \geq 2$.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Po definiciji T ne sadrži ciklus. Uklanjanje jednog brida dovodi zato nužno do nepovezanosti, točnije, dobivamo dva stabla s manje vrhova. Razmišljajmo po principu matematičke indukcije, tj. pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s manje od n vrhova. Po induktivnoj pretpostavci, dva stabla dobivena uklanjanjem jednog brida imaju $n_1 - 1$ odnosno $n_2 - 1$ bridova. Ovo pak znači da smo u početnom stablu, prije uklanjanja brida, imali $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ bridova, a kako je $n_1 + n_2 = n$, dobili smo da je početno stablo imalo $n - 1$ bridova, što smo korakom indukcije i trebali dokazati.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ako bi T bio nepovezan, onda bi svaka komponenta povezanosti od T bila povezani graf bez ciklusa, pa bi imala $n_i - 1$ bridova. Slijedi da bi broj bridova grafa T sveukupno bio $n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k$, $k \geq 2$, dakle $n - k$, što je premalo. Prema tome nije istina da je T nepovezan.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Postojala je ocjena da je broj bridova u povezanom grafu $m \geq n - 1$ i ovdje se ta ograda dostiže, što znači da uklanjanje bilo kojeg brida nužno vodi do nepovezanosti grafa, prema tome je svaki brid u takvom grafu most.
(iv) $\Rightarrow$ (v): Kako je T povezan, to između svakog para vrhova postoji put. Ako bi postojala dva različita puta između neka dva vrha, onda bi unija ta dva puta tvorila zatvorenu šetnju, koja svakako sadržava barem jedan ciklus, suprotno pretpostavci da je svaki brid most.
(v) $\Rightarrow$ (vi): Ako bi T sadržavao ciklus, onda bi svaka dva vrha iz tog ciklusa bila povezana s barem dva puta, suprotno pretpostavci. Dodamo li grafu T neki brid e, onda bi vrhovi incidenti s dodanim bridom e bili povezani s dva različita puta, pa smo našli ciklus. Ako bismo pak dodavanjem brida e dobili dva ciklusa, onda možemo lako zaključiti da je i u početnom grafu T postojao ciklus, suprotno pretpostavci.
(vi) $\Rightarrow$ (i): Graf T nema ciklusa, dakle je po definiciji šuma. Kada bi T bio nepovezan, onda dodavanjem brida koji spaja dvije komponente povezanosti ne bismo dobili ciklus, suprotno pretpostavci, pa zaključujemo da je T nužno povezana šuma, dakle stablo. ■

Korolar 6.2 Ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima $n - k$ bridova.

Dokaz. Primijenimo prethodni teorem na svaku komponentu povezanosti. ■

Zadatak 6.1 Dokažite da u svakom stablu postoje barem dva vrha stupnja 1.

Rješenje. Prema Lemi o rukovanju, vrijedi da je $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E| = 2n - 2$. Ako bi najviše jedan vrh imao stupanj 1, onda bi vrijedilo $\sum_{v \in V} deg(v) \geq 1 \cdot 1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1$, što je kontradikcija. ■

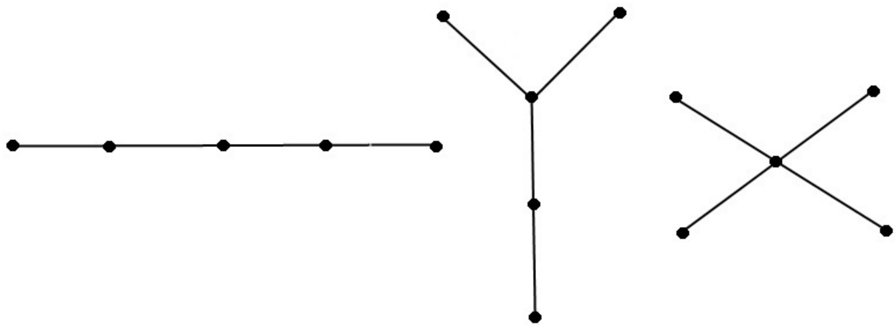
Zadatak 6.2 Dokažite da je svako stablo bipartitan graf. Koji su potpuni bipartitni grafovi stabla?

Rješenje. Kako je svaki ciklus u stablu parne duljine (prazan skup ima svako svojstvo), to tvrdnja neposredno slijedi po toj karakterizaciji bipartitnih grafova. Očevidno su $K_{1,s}$ stabla, za svaki prirodni broj s, kao što su to i $K_{r,1}$. No to su ujedno i jedini potpuni bipartitni grafovi, jer u svim drugim potpunim bipartitnim grafovima postoji ciklus duljine 4. ■

Zadatak 6.3 Koliko različitih ciklusa ima jednostavan povezan graf s n vrhova i n bridova?

Rješenje. Opisani graf sadrži jedan ciklus. Naime, jednostavan povezan graf s n vrhova i $n-1$ bridova je stablo. Dodavanjem jednog brida konstruira se točno jedan ciklus. ∎

Prebrajanje neizomorfnih stabala s n vrhova je težak problem. Nije poznata zatvorena formula za broj neizomorfnih stabala s n vrhova. Stoga je za svaki n ovom problemu potrebno pristupiti zasebno. Primjerice, postoje 3 neizomorfna stabla s 5 vrhova.

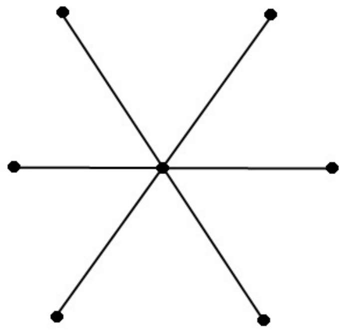


Predlažemo da za vježbu konstruirate sva neizomorfna stabla sa 6 vrhova. Mi ćemo riješiti sljedeći zadatak.

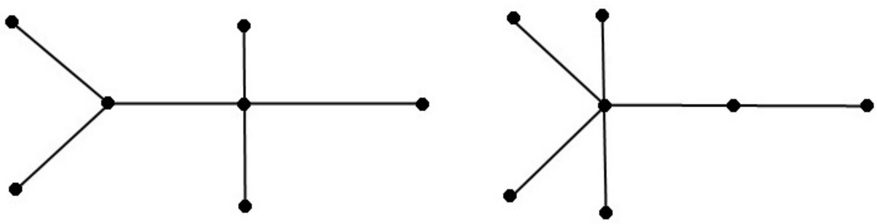
Zadatak 6.4 Koliko ima neizomorfnih stabala sa 7 vrhova?

Rješenje. Ima ih 11. Evo i dokaza. Neka je T stablo sa 7 vrhova i $(d_1,\dots,d_7)$ niz stupnjeva od T. Uočimo da je $1 \le d_i \le 6$, $i = 1,\dots,7$. Prema Lemi o rukovanju $d_1+\cdots+d_7 = 12$. Primijetimo da T može imati najmanje 2, a najviše 6 vrhova stupnja 1 (listova). Svaki od slučajeva obradit ćemo zasebno.

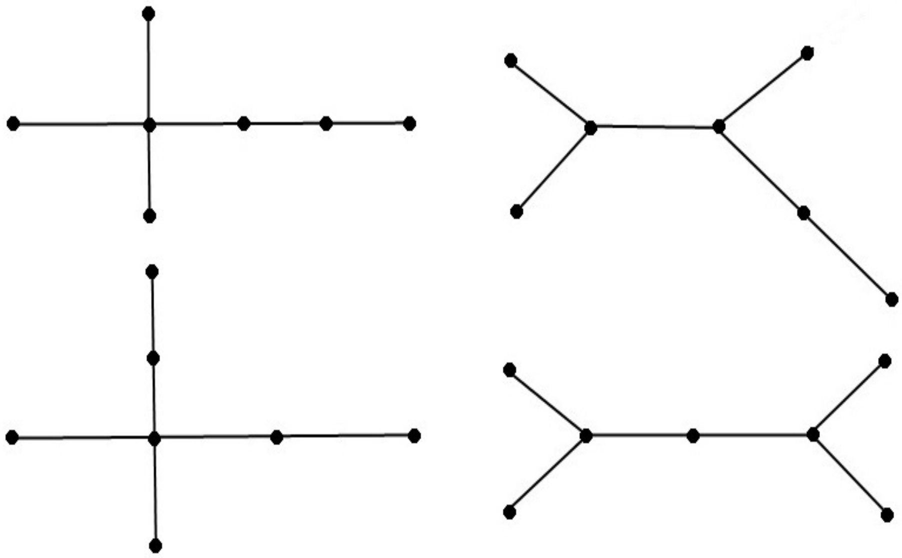
1. Ukoliko T ima 6 listova, tada je nužno preostali vrh stupnja 6. Postoji samo jedno stablo s ovakvom raspodjelom stupnjeva vrhova:



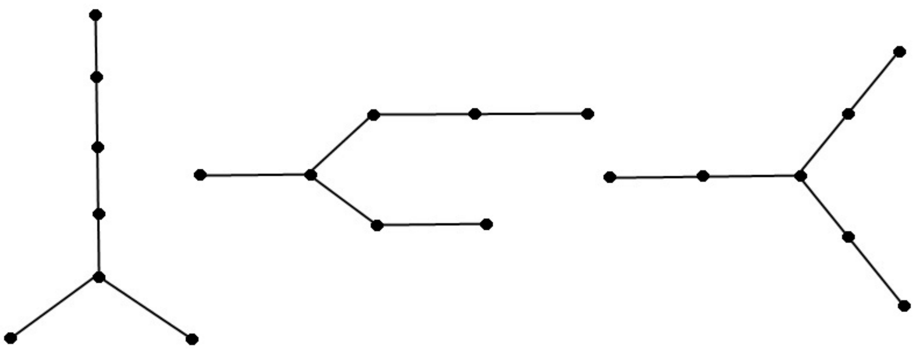
2. Pretpostavimo da T ima 5 listova. Tada postoje dva moguća niza stupnjeva koji zadovoljavaju Lemu o rukovanju: $(1,1,1,1,1,3,4)$ i $(1,1,1,1,1,2,5)$. Za svaki niz postoji jedinstveno stablo:



3. Pretpostavimo da T ima 4 lista. Tada postoje dva prihvatljiva niza stupnjeva za T: $(1,1,1,1,2,2,4)$ i $(1,1,1,1,2,3,3)$. Za svaki niz stupnjeva postoje po 2 neizomorfna stabla:



4. Ako T ima 3 lista, stablo T nužno ima niz stupnjeva $(1,1,1,2,2,2,3)$. Postoje 3 neizomorfna stabla s danim nizom stupnjeva:

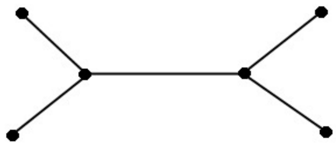


5. Ako T ima 2 lista, stablo T nužno ima niz stupnjeva $(1,1,2,2,2,2,2)$. Jedino stablo s takvim nizom stupnjeva je lanac P_7.

Dakle, postoji 11 neizomorfnih stabala sa 7 vrhova. ■

Zadatak 6.5 Nađite sva neizomorfna stabla u kojima su svi vrhovi stupnja 1 ili 3, pri čemu onih stupnja 1 ima dvostuko više.

Rješenje. Označimo s α broj vrhova stupnja 3. Tada je broj vrhova stupnja 1 jednak 2α. Prema Lemi o rukovanju vrijedi $2\alpha + 3\alpha = 2(3\alpha - 1)$. Stoga je $\alpha = 2$. Dakle, traženo stablo ima 6 vrhova, od toga 2 stupnja 3 i 4 lista. S obzirom da su vrhovi stupnja 3 nužno povezani bridom, zaključujemo da je takvo stablo jedinstveno do na izomorfizam:

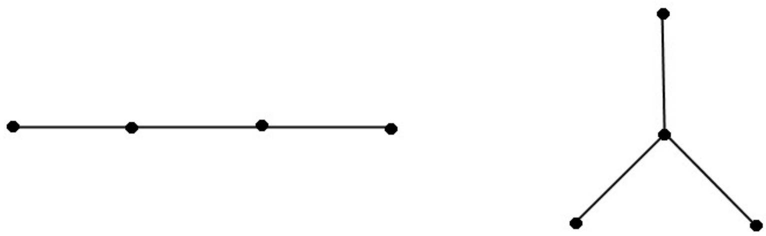


■

* * * * *

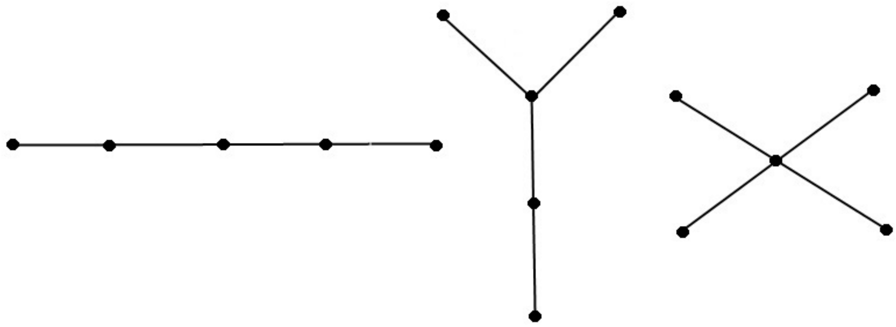
Sada ćemo prebrojavati stabla s označenim (labeliranim) vrhovima, dakle s vrhovima koje razlikujemo. Za dani broj vrhova n pitamo se koliko takvih stabala ima.

Pogledajmo najprije slučaj $n = 4$. Znamo da do izomorfizma postoje dva stabla s 4 vrha. To su



Svaki od ova dva grafa zvat ćemo konfiguracijom. Lijevoj konfiguraciji labele, dotično brojeve od 1 do 4 možemo pridijeliti na $\frac{4!}{2}$ načina, pa labeliranih stabala s takvom konfiguracijom ima 12. Kod desne konfiguracije uočite da je jedino pitanje o kojem ovisi različitost kojom je labelom obilježen središnji vrh, pa imamo sveukupno 4 mogućnosti, odnosno 4 načina za desnu konfiguraciju. Možemo zaključiti da imamo $12 + 4 = 16$ različitih obilježenih stabala s 4 vrha.

Pitamo se vidimo li neku pravilnost, možemo li izvući neki opći zaključak o tome koliko ima labeliranih grafova s n vrhova. Naravno da ne, i stoga promotrimo sljedeći slučaj s 5 vrhova. Do izomorfizma imamo 3 različite konfiguracije:



Sada sličnim razmišljanjem zaključujemo da labele lijevoj konfiguraciji možemo pridijeliti na $\frac{5!}{2} = 60$ načina, srednjoj konfiguraciji također na $\frac{5!}{2} = 60$ načina (uočite da ovdje dijeljenje s 2 potječe od simetrije s vertikalnom osi koja je automorfizam srednje konfiguracije), dok desnoj konfiguraciji labele možemo pridijeliti na 5 načina. Sada zaključujemo da je ukupni broj labeliranih stabala s 5 vrhova jednak $60+60+5 = 125$.

Možemo li sada išta naslutiti? Brojka $125 = 5^3$ je možda indikativna, ali moramo biti svjesni da su naša prebrojavanja bila jako ovisna o nacrtanim konfiguracijama, za koje ne znamo broja. Svakako, tehniku dokazivanja morat ćemo promijeniti, ali slutnja je bila na mjestu. Vrijedi naime slijedeći čuveni

Teorem 6.3 — Cayley, 1889. Postoji točno n^{n-2} različitih označenih stabala s n vrhova.

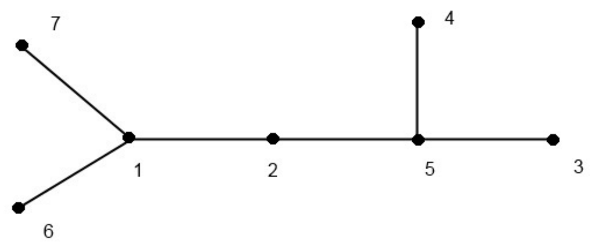
Dokazom ovog teorema bavili su se mnogi matematičari. Mi ćemo dati dva različita dokaza, s ciljem svladavanja raznovrsnih tehnika dokazivanja. Treći dokaz možete naći u skripti "Diskretna matematika" I. Nakića, a ostale dokaze, osobito onaj Kirchhoffov, neka najzainteresiraniji dodatno potraže na internetu.

Dokaz. (Prüfer) Ideja ovog dokaza je uspostaviti bijekciju između broja označenih stabala i nekog drugog skupa za kojeg jednostavno znamo da ima n^{n-2} elemenata. U tu svrhu uspostavit ćemo bijektivnu korespondenciju između skupa svih označenih stabala s n vrhova i skupa svih $(n-2)$-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, pri čemu je $1 \leq a_i \leq n$. Znamo da takvih $(n-2)$-torki ima točno n^{n-2} (to su varijacije s ponavljanjem), pa će nam konstruirana bijektivna korespondencija dati traženi dokaz.

Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je $n \geq 3$. Za manje slučajeve se jednostavno vidi da je tvrdnja Cayleyevog teorema ispunjena.

Prvi smjer korespondencije. Tražimo jednoznačan način kako iz zadanog stabla T konstruirati $(n-2)$-torku. Pogledajmo skup krajnjih vrhova (listova) stabla T. On je neprazan, dokazali smo da ima barem 2 elementa. Nađemo onaj list koji je označen najmanjom labelom (budući su sve labele različite, taj je jednoznačno određen) i neka je ta labela b_1. Uočimo njegovog (jedinog!) susjeda, i njegovu labelu nazovimo s a_1 – to će biti prvi element $(n-2)$-torke koju želimo konstruirati. Potom izbrišemo list s labelom b_1, dakle konstruiramo stablo $T_1 = T - b_1$. To je naravno opet stablo, s $n-1$ vrhova. Isti postupak provedemo na tom stablu. Dakle, uočimo list s najmanjom labelom, nazovemo je b_2, te labelu njegova jedinstvenog susjeda proglasimo za a_2, broj na drugom mjestu naše $(n-2)$-torke. Konstruiramo stablo $T_2 = T_1 - b_2$ i na njemu provedemo isti postupak. Taj postupak ponavljamo u $n-2$ koraka, dok nam kao stablo ne ostane jedan jedini brid, nad kojim onda postupak više ne provodimo. Naglasimo još jednom provedivost i jednoznačnost ovog postupka formiranja $(n-2)$-torke iz bilo kojeg zadanog stabla. ■

■ **Primjer 6.1** Provedimo upravo opisani postupak na stablu za slike:



$$\begin{array}{rclrcl} b_1 & = & 3, & a_1 & = & 5, \\ b_2 & = & 4, & a_2 & = & 5, \\ b_3 & = & 5, & a_3 & = & 2, \\ b_4 & = & 2, & a_4 & = & 1, \\ b_5 & = & 6, & a_5 & = & 1, \end{array} \quad \Longrightarrow \quad (5,5,2,1,1)$$

■

Dokaz. (Prüfer) Drugi smjer korespondencije.
Sada je zadana $(n-2)$-torka $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$. Neka je b_1 najmanji broj koji se ne pojavljuje u toj $(n-2)$-torci. Tada je a_1b_1 brid stabla. Na ovom mjestu uočite reverzibilnost postupka, tj. da smo rekonstruirali točno onaj brid početnog stabla, kojeg smo prvo obrisali u prethodnom smjeru! Sada pogledamo najmanji broj koji se ne pojavljuje među brojevima $\{a_2,a_3,\dots,a_{n-2}\}$, izuzimajući b_1. To je traženi b_2, pa je a_2b_2 brid traženog stabla. Izuzimajući b_1 i b_2 sada gledamo koji je najmanji broj koji se ne pojavljuje među brojevima $\{a_3,a_4,\dots,a_{n-2}\}$, nazovemo ga b_3 i zaključimo da je a_3b_3 brid stabla. Nastavljajući ovaj postupak dobit ćemo $n-2$ brida početnog stabla kojeg pokušavamo rekonstruirati. Posljednji, $(n-1)$-vi brid dobit ćemo spojivši one dvije labele koje se do tada kao b_i-ovi nisu pojavili. Lako nam je sada uvjeriti se da je ovaj postupak jednoznačan, no i da je inverzan prethodnome, tj. da ćemo njime rekonstruirati upravo ono stablo koje je na početku bilo zadano. ■

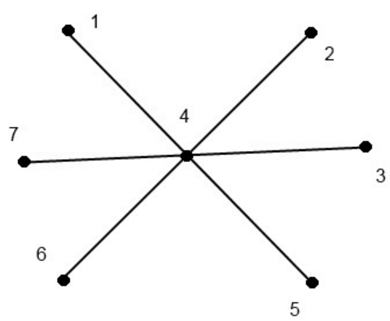
■ **Primjer 6.2** Uvjerimo se u inverznost postupka na prethodnom primjeru. Krenimo od $(n-2)$-torke

$$(5,5,2,1,1) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rclrcl} b_1 & = & 3, & e_1 & = & 35, \\ b_2 & = & 4, & e_2 & = & 45, \\ b_3 & = & 5, & e_3 & = & 25, \\ b_4 & = & 2, & e_4 & = & 12, \\ b_5 & = & 6, & e_5 & = & 16, \end{array} \quad + \quad e_6 = 17$$

Dakle, $E(T) = \{35,45,25,12,16,17\}$, čime je stablo rekonstruirano. ■

Definicija 6.2 $(n-2)$-torka $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$, $1 \le a_i \le n$, pridružena obilježenom stablu T s n vrhova na način opisan u dokazu Cayleyevog teorema naziva se **Prüferov kod** stabla T. ■

■ **Primjer 6.3** Lista bridova stabla čiji je Prüferov kod dan s $(4,4,4,4,4)$, je sljedeća: 41, 42, 43, 45, 46, 47.



■

Zadatak 6.6 Kakvu strukturu imaju stabla s n vrhova čiji se Prüferov kod sastoji od različitih brojeva?

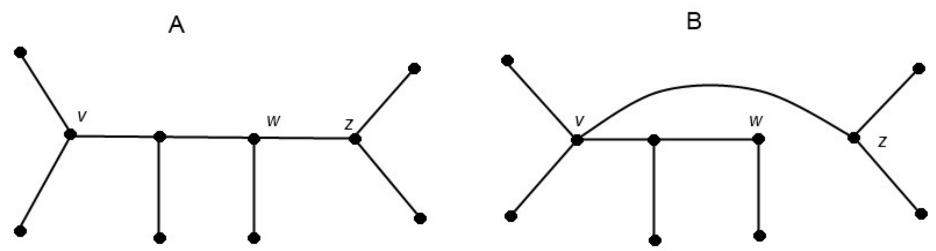
Rješenje. Bez smanjanja općenitosti, pretpostavimo da je Prüferov kod stabla $(2,\dots,n-1)$. Provođenjem Prüferovog algoritma dobit ćemo redom bridove $12, 23, 34, \dots, (n-2)(n-1), (n-1)n$. Dobiveni graf je lanac P_n. ∎

Dokaz. (Clarke) Promatrajmo obilježena stabla s n vrhova. Fiksirajmo neki vrh v (na primjer, s nekom unaprijed zadanom labelom). Neka je $T(n,k)$ broj obilježenih stabala s n vrhova u kojima istaknuti vrh v zadane labele ima stupanj k. Tada je traženi broj svih obilježenih stabala s n vrhova $T(n)$ dan sa

$$T(n) = T(n,1) + T(n,2) + \cdots + T(n,n-1),$$

s obzirom da taj vrh v može imati stupanj 1, 2, sve do $n-1$.

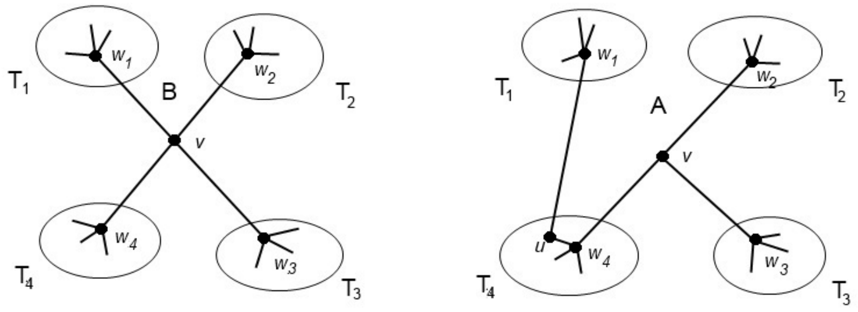
Neka je A obilježeno stablo u kojem je $deg(v) = k-1$.



Ako iz A izbacimo neki brid koji nije incidentan s vrhom v, nazovimo ga wz, dobit ćemo uniju dva podstabla (svaki je brid most), pri čemu je jedno podstablo ono kojem pripada vrh v, a drugo podstablo ono kojem v ne pripada. Također, jedan od vrhova w i z pripada jednom, a drugi drugom podstablu. Ne smanjujući općenitost, neka su v i w u istom podstablu, a v i z u različitim. Spojimo li sada bridom vrhove v i z, dobivamo novo stablo, nazovimo ga s B, u kojem je $deg(v) = k$. Par stabala (A,B) koji je moguće dobiti na ovaj način zvat ćemo kratko *veza*. Srž dokaza je prebrojati sve moguće veze (A,B) na dva načina.

Krenemo li brojati od stabla A, onda je jasno da njega možemo izabrati na $T(n,k-1)$ načina. Kad jednom stablo A imamo izabrano, vezu s B jednoznačno definira izabrani brid iz A, koji nije incidentan s fiksiranim vrhom v. Takvih ima $(n-1)-(k-1) = n-k$. Dakle, dolazimo do ukupnog broja veza (A,B) koji je jednak $(n-k)\cdot T(n,k-1)$.

Krenimo prebrajati veze na drugi način, počimajući od stabla B. Neka je B obilježeno stablo s n vrhova, te neka je $deg(v) = k$. Neka su $T_1, T_2, \dots, T_k$ podstabla od B koja predstavljaju komponente povezanosti stabla $B - v$, dakle stabla kojeg dobijemo kad iz B izbacimo vrh v i sve bridove incidentne s njime. Neka je broj vrhova u podstablu T_i dan s n_i. Stablo A s traženim svojstvima možemo dobiti uklanjanjem jednog od k bridova vw_i, $w_i \in T_i$ incidentnih s v, a zatim spajanjem dotičnog vrha w_i s bilo kojim vrhom u koji ne pripada komponenti povezanosti T_i, niti je naravno sam v. Uočimo da je ovako konstruirano par (A,B) veza, i što je još važnije, da se sve veze mogu realizirati na ovakav način.



Preostaje nam još prebrojati koliko takvih veza ima. Stablo B možemo izabrati na $T(n,k)$ načina. Nakon što smo se odlučili za vrh w_i, odnosno komponentu povezanosti T_i, taj vrh w_i možemo spojiti s nekim $u \in T_j$, $j \neq i$, na $(n-1-n_i)$ načina ($|T_i| = n_i$). Sada je ukupni broj veza (A,B) dan sa:

$$\begin{aligned} &T(n,k)\cdot[(n-1-n_1)+(n-1-n_2)+\cdots+(n-1-n_k)] \\ &= T(n,k)\cdot[k\cdot(n-1)-(n_1+n_2+\cdots+n_k)] \\ &= T(n,k)\cdot(n-1)(k-1) \end{aligned}$$

Prebrojivši sve veze (A,B) na dva načina, dokazali smo:

$$(n-k)T(n,k-1) = (n-1)(k-1)T(n,k)$$

Znamo da je $T(n,n-1) = 1$, naime to je zvjezdasti graf s istaknutim vrhom v stupnja $n-1$ i listovima oko njega. Zato ćemo dobivenu rekurzivnu relaciju iterirati u tom smjeru.

$$\begin{aligned} T(n,k-1) &= \frac{(n-1)(k-1)}{n-k}\cdot T(n,k) \qquad |k := k+1| \\ T(n,k) &= \frac{(n-1)k}{n-k-1}\cdot T(n,k+1) \\ &= \frac{(n-1)k}{n-k-1}\,\frac{(n-1)(k+1)}{n-k-2}\cdot T(n,k+2) \\ &= \frac{(n-1)^2k(k+1)}{(n-k-1)(n-k-2)}\cdot T(n,k+2) \\ &= \frac{(n-1)^3k(k+1)(k+2)}{(n-k-1)(n-k-2))n-k-3)}\cdot T(n,k+3) \\ &= \cdots \\ &= \frac{(n-1)^{n-k-1}k(k+1)\cdots(n-2)}{(n-k-1)(n-k-2)\cdots 1}\cdot T(n,n-1) \\ &= \binom{n-2}{n-k-1}\cdot(n-1)^{n-k-1} \\ &= \binom{n-2}{k-1}\cdot(n-1)^{n-k-1} \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n,1)+T(n,2)+\cdots T(n,n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{(n-k-1)} = |k-1 := j| \\ &= \sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j(n-1)^{n-2-j} \\ &= (1+n-1)^{n-2} = n^{n-2} \end{aligned}$$

Ovime smo neposrednim prebrajanjem veza na drugi način dokazali Cayleyev teorem. ■

Zadatak 6.7 Odgovorite na sljedeća pitanja.

(a) Koliko ima stabala s n vrhova kod kojih je neki zadani vrh krajnji vrh (list)?

(b) Zaključite da je za veliki n vjerojatnost da je neki dani vrh stabla s n vrhova krajnji vrh približno jednaka $\frac{1}{e}$.

Rješenje. (a) Traženi broj upravo je jednak, po definiciji, broju $T(n,1)$, a to je

$$T(n,1) = \binom{n-2}{0}(n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2}.$$

(b) Po klasičnoj definiciji vjerojatnosti tražena vjerojatnost jednaka je omjeru broja povoljnih mogućnosti i ukupnog broja mogućnosti, dakle

$$\begin{aligned} P &= \frac{T(n,1)}{T(n)} = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2} \to \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

■

Zadatak 6.8 Neka je $T(n)$ broj označenih stabala s n vrhova.

(a) Dokažite identitet:

$$2(n-1)\cdot T(n) = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k(n-k)T(k)T(n-k)$$

(b) Zaključite da tada vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{(n-k-1)} = 2\cdot(n-1)\cdot n^{n-2}$$

Rješenje. (b) slijedi neposredno iz (a), uz poznavanje činjenice $T(n) = n^{n-2}$. Ostaje pokazati identitet (a) i to ćemo učiniti tako da na dva načina prebrojimo označena stabla s n vrhova i s jednim posebno obilježenim bridom (npr. crvene boje).

Krenemo li od stabala, onda toga ima $T(n)\cdot(n-1)$. S druge strane, crveni je brid, kao i svi drugi u stablu, most, te njegovim uklanjanjem dobivamo dva podstabla, jedan s k, a drugi s $n-k$ vrhova. Krenimo brojati od njih. Dakle, znamo li particiju skupa vrhova na dva skupa, od k i $n-k$ elemenata, onda za svaku takvu particiju imamo $T(k)\cdot T(n-k)\cdot\frac{k\cdot(n-k)}{2}$ objekata koje prebrajamo. Konačno k vrhova u prvom dijelu particije možemo izabrati na $\binom{n}{k}$ načina (čime je i drugi skup vrhova odmah određen), a naravno da k može biti od 1 do $n-1$. Sveukupno dobivamo da je broj objekata koje brojimo jednak

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot\frac{k(n-k)}{2}\cdot T(k)\cdot T(n-k)$$

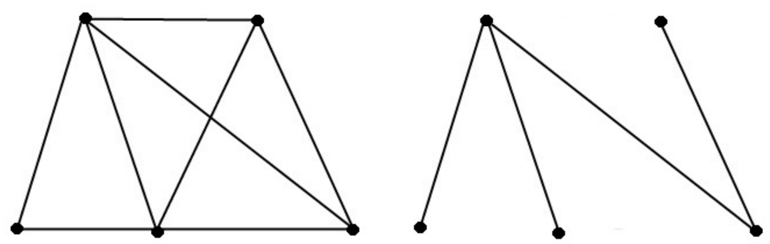
pa je, nakon množenja s 2, traženi identitet dokazan. ■

6.2 Razapinjuća stabla

Definicija 6.3 **Razapinjući podgraf** zadanog grafa $G = (V,E)$ s n vrhova je svaki podgraf $G' = (V,E')$ grafa G s istim skupom vrhova kao i G, dakle također s n vrhova. ■

Uočite da je svaki graf s n vrhova razapinjući podgraf potpunog grafa K_n.

Pogledajmo sada ovakav konstruktivni postupak. Danom povezanom grafu G uočimo neki ciklus i iz tog ciklusa uklonimo jedan brid, te tako dobijemo povezani graf $G-e$. U ovako dobivenom grafu opet uočimo neki ciklus pa i iz tog ciklusa uklonimo jedan brid. Ovaj postupak uklanjanja bridova iz uočenih ciklusa svakako je konačan i vodi do povezanog grafa bez ciklusa, dakle stabla, kojeg zovemo **razapinjuće stablo** zadanog grafa G.



■ **Primjer 6.4** Zadanom grafu lijevo uklonili smo četiri brida i dobili stablo na desnoj slici. Uočite da smo unaprijed znali koliko će koraka imati naš konstrukcijski postupak, budući smo krenuli od grafa sa 5 vrhova, te smo znali da će razapinjuće stablo imati 4 brida. Nađite sami sva razapinjuća stabla zadanoga grafa. ■

Analogni postupak možemo provesti i za nepovezani graf, sve dok ne dobijemo šumu s istim brojem komponenata povezanosti kao zadani graf; nju zovemo **razapinjuća šuma**. Ukoliko smo krenuli od grafa s n vrhova, m bridova i k komponenata povezanosti, koliko smo bridova ukupno uklonili? Naravno, broj uklonjenih bridova jednak je broju bridova u početnom grafu umanjenom za broj bridova u dobivenoj razapinjućoj šumi, dakle je on jednak:

$$m-(n-k) = m-n+k\,.$$

Uočimo da skup uklonjenih bridova u postupku nalaženja razapinjuće šume može biti različit, ali broj uklonjenih bridova je invarijanta ovog postupka, pa ga označavamo s $\gamma(G) = m-n+k$ i zovemo **ciklusni rang**. Definirati se može i **rezni rang** kao broj bridova u razapinjućoj šumi i on je jednak $\xi(G) = n-k$. Naravno da je broj uklonjenih bridova $\gamma(G)$ zbrojen s brojem bridova koji su ostali $\xi(G)$ jednak broju bridova u početnom grafu m.

Teorem 6.4 Ako je T razapinjuća šuma grafa G, onda vrijedi:
(i) Svaki rezni skup od G ima zajednički brid s T.
(ii) Svaki ciklus od G ima zajednički brid s komplementom od T.

Dokaz. (i) Neka je C^* neki rezni skup od G. Po definiciji reznog skupa to znači da $G-C^*$ razdvaja neku od komponenata grafa G u podgrafove H i K. Budući je T razapinjuća šuma, T mora sadržavati brid koji spaja neki vrh iz H s nekim iz K, te je upravo taj brid traženi brid u presjeku.

(ii) Neka je C ciklus u G bez zajedničkog brida s komplementom od T. No, po definiciji komplementa to onda znači da cijeli C leži u T, suprotno pretpostavci da je T šuma.

■

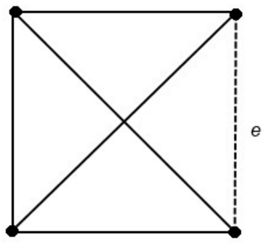
Zadatak 6.9 Neka je G povezani graf. Što se može reći o
(i) bridu u G koji leži u svakom razapinjućem stablu?
(ii) bridu u G koji ne leži niti u jednom razapinjućem stablu?

Rješenje. Brid koji leži u svakom razapinjućem stablu je most, jer samo most ni na koji način nismo mogli ukloniti iz početnog grafa. Brid koji ćemo uvijek ukloniti je onaj koji je sam za sebe ciklus, a to je petlja. ■

■ **Primjer 6.5** Broj razapinjućih stabala potpunog grafa K_n s n vrhova je n^{n-2}. Naime, svako označeno stablo odgovara jedinstvenom razapinjućem stablu od K_n, i obratno, svako razapinjuće stablo od K_n (kojemu, kad ga zadamo, razlikujemo vrhove!) odgovara jednom stablu s obilježenim vrhovima. Primjenom Cayleyevog teorema o broju označenih stabala s n vrhova, dobivamo broj razapinjućih stabala potpunog grafa K_n. ■

Zadatak 6.10 Koliko razapinjućih stabala ima zadani graf $K_n - e$, gdje je e neki brid od K_n?

Rješenje. Označimo s x broj razapinjućih stabala grafa K_n koji sadrže brid e.



Primijetimo da za graf K_n broj x ne ovisi o izboru brida e. Drugačije rečeno, za svaki brid e', broj razapinjućih stabala od K_n koji sadrže brid e' je jednak. Odredit ćemo x *metodom dvostrukog prebrojavanja*. Prebrojat ćemo uređene parove iz skupa

$$S = \{(T, e') : T \text{ razapinjuće stablo od } K_n, e' \text{ brid od } T\}$$

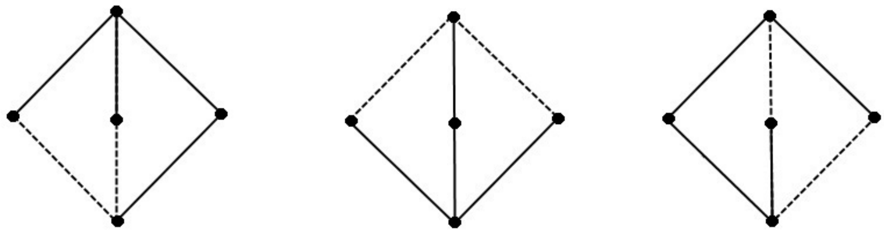
na dva načina. Prema Cayleyevom teoremu, potpuni graf K_n ima $n^{(n-2)}$ razapinjućih stabala. Svako stablo ima $n-1$ bridova. Dakle, $|S| = n^{(n-2)} \cdot (n-1)$. S druge strane, graf K_n ima $\binom{n}{2}$ bridova, a svaki je brid sadržan u točno x razapinjućih stabala od K_n. Stoga je $|S| = \binom{n}{2} \cdot x$. Izjednačavanjem vrijednosti $|S|$ dobivamo jednadžbu

$$n^{(n-2)} \cdot (n-1) = \binom{n}{2} \cdot x.$$

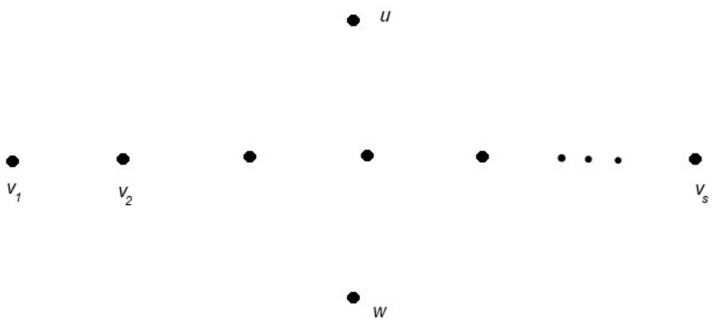
Odavde slijedi da je $x = 2n^{n-3}$. Dakle, broj razapinjućih stabala grafa K_n koja ne sadrže istaknuti brid e jednak je $n^{(n-2)} - x = n^{n-3}(n-2)$. Uvjerite se da potpuni graf K_4 ima točno 8 razapinjućih stabala koji sadrže naznačeni brid e sa slike. ■

Zadatak 6.11 Koliko razapinjućih stabala ima potpuni bipartitni graf $K_{2,s}$, $s \geq 2$?

Rješenje. Pogledajmo najprije jedan primjer, recimo $K_{2,3}$:



Izaberemo li sva tri gornja brida, trebamo još jedan donji – to su 3 mogućnosti. Izaberemo li sva tri donja brida, trebamo još jedan gornji – i to su 3 mogućnosti. Konačno, biramo li po dva brida gore i dolje, imamo 6 mogućnosti za takav izbor (razmislite zašto!). Sveukupno, $K_{2,3}$ ima 12 razapinjućih stabala. Međutim, ovo particioniranje problema na slučajeve opet ne možemo poopćiti. Zato, nacrtajmo graf $K_{2,s}$ još jednom kao malo prije i promislimo drugačije.



Svaki vrh v_i spojen je ili s vrhom u ili s vrhom w. Tim izborom dobivamo s bridova razapinjućeg stabla. Preostaje nam izabrati još jedan brid, i to može od preostalih neizabranih s bridova biti bilo koji. Tako dolazimo do $2^s \cdot s$ mogućnosti, međutim uočimo još da smo u slučaju onog vrha v_i koji je na kraju spojen i s u i s w preferirali izborom jedan od ta dva brida, stoga rezultat prebrajanja treba još podijeliti s 2. Dakle, u $K_{2,s}$ ukupno ima $s \cdot 2^{s-1}$ razapinjućih stabala. ■

6.3 Algoritmi na stablima

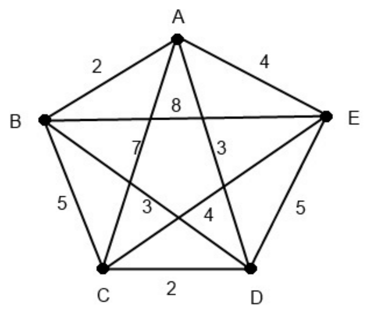
Pretpostavimo da želimo n gradova povezati željezničkom prugom, te pretpostavimo da znamo točnu lokaciju potencijalne trase, pa dakle i udaljenost (po toj potencijalnoj trasi) svaka dva grada. Koliko minimalno tračnica moramo postaviti, da svaka dva grada budu povezana?

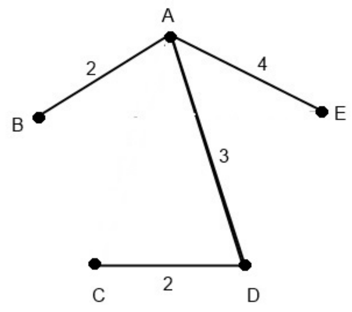
Očevidno, za rješenje ovog problema potrebno je naći razapinjuće stablo minimalne ukupne duljine. Naime, ako bi rješenje bilo graf koji nije stablo, onda bi u njemu postojao ciklus, pa sigurno smijemo iz tog ciklusa izbaciti neki brid i dobiti povezani graf manje ukupne duljine. Takvo stablo je s druge strane sigurno razapinjuće, zbog uvjeta da se povežu svi gradovi, pa govorimo o minimalnom razapinjućem stablu.

Budući da su u modelu svi vrhovi povezani, problem se svodi na nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla u potpunom grafu. Na prvi pogled to je iznimno složen problem, budući takvih stabala ima n^{n-2}. Napominjemo i podsjećamo da niz n^n raste još brže od niza $n!$, za koji smo govorili da strahovito brzo raste. To slijedi iz činjenice da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

■ **Primjer 6.6** Za potpuni graf sa slike lijevo nađite minimalno razapinjuće stablo.





■

Naravno da rješenje, dano desnom slikom, nije sasvim jednostavno dokazati. Ako ništa drugo, moguće je proći kroz svih 125 mogućnosti i uvjeriti se da je stablo na desnoj slici doista minimalne ukupne duljine. Puno važnije je uočiti činjenicu da se do njega može doći pohlepnim algoritmom. Naime, da smo izabrali brid po brid, birajući uvijek najmanji, te pritom pazeći da ne zatvorimo ciklus, izborom 4 brida dobili bismo razapinjuće stablo; dokaz njegove minimalnosti dajemo kao dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 6.5 — Kruskalov algoritam. Neka je G povezani graf s n vrhova. Sljedeći konstrukcijski postupak daje rješenje problema minimalnog razapinjućeg stabla:

1. Neka je e_1 brid od G najmanje težine.
2. Definiramo $e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ birajući u svakom sljedećem koraku brid najmanje moguće težine koji ne tvori ciklus s već prethodno izabranim bridovima e_i.

Traženo razapinjuće stablo je podgraf T od G sastavljen od bridova $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$.

Dokaz. Uočimo da je teorem iskazan za bilo koji povezani graf, te da graf ne mora biti potpun kao što je ispričano u uvodnom motivirajućem primjeru. Budući T ima $n-1$ brid i nema ciklusa, T je stablo s n vrhova, dakle je razapinjuće stablo za G. Treba još dokazati minimalnost njegove ukupne težine $w(T) = w(e_1) + w(e_2) + \cdots + w(e_{n-1})$.

Neka je T razapinjuće stablo dobiveno u teoremu opisanim algoritmom, te neka je S razapinjuće stablo od G takvo da je $w(S) < w(T)$. Neka je e_k prvi brid niza $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ koji čini stablo T a koji ne leži u S.

$$\begin{array}{cccccc} T & e_1, & e_2, & \ldots, & e_k, & \ldots \\ S & e_1, & e_2, & \ldots, & e_k{}', & \ldots \end{array}$$

Pogledajmo skup bridova koji čine $S \cup \{e_k\}$. Tu je ukupno n bridova, stoga postoji jedinstveni ciklus C kojem je jedan od bridova baš brid e_k. No, C sigurno sadrži neki brid e koji je u S, ali nije u T. Naime, ako bi svi bridovi iz ciklusa C bili u T, to bi bila kontradikcija s činjenicom da je T stablo. Izbacimo iz ciklusa C upravo takav brid e. Sveukupno, mi smo stablu S dodali brid e_k iz T a iz njega maknuli brid e, dobivši tako novo razapinjuće stablo S'. Budući je e_k bio prvi brid u kojem su se stabla S i T razlikovala, te budući je on izabran po načelu minimalnosti, svakako je $w(e_k) \le w(e)$, pa je samim time i $w(S') \le w(S)$, dok novoformirano stablo S' ima jedan zajednički brid više s T od S. Ponavljanjem ovog postupka mi ćemo izmijeniti stablo S i pretvoriti ga u stablo T, smanjujući mu težinu. Dakle dobivamo da je $w(T) \le w(S)$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je S neko razapinjuće stablo manje ukupne težine. Takvo očito ne postoji, što dokazuje teorem. ■

6.4 Zadaci za samostalan rad

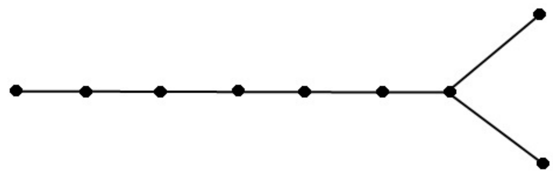
Zadatak 6.12 Ako u stablu postoji vrh stupnja k, onda u tom stablu postoji barem k vrhova stupnja 1. Dokažite ovu tvrdnju!

Zadatak 6.13 Koliko je bridova potrebno dodati 1-regularnom grafu da bi se dobilo stablo? Može li se svako stablo s parnim brojem bridova konstruirati na taj način, počevši od 1-regularnog grafa dodavanjem bridova?

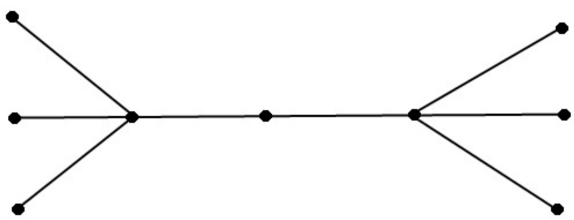
Zadatak 6.14 Pronađite primjer dva neizomorfna stabla s istim nizom stupnjeva.

Zadatak 6.15 Koliko ima neizomorfnih stabala sa 6 vrhova?

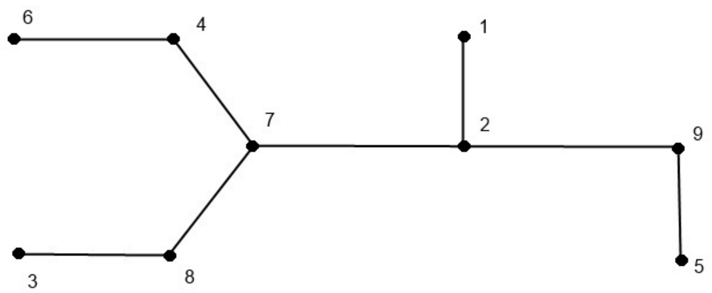
Zadatak 6.16 Na koliko se različitih načina mogu podijeliti labele stablu sa slike?



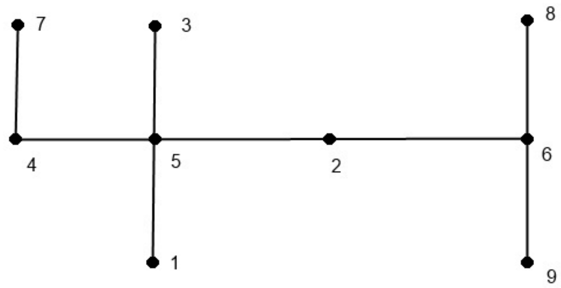
Zadatak 6.17 Na koliko se različitih načina mogu podijeliti labele stablu sa slike?



Zadatak 6.18 Stablu sa slike pridijelite Prüferov kod.



Zadatak 6.19 Stablu sa slike pridijelite Prüferov kod.



Zadatak 6.20 Odredite matricu susjedstva stabla čiji je Prüferov kod dan s $(1,2,3,4,5,6)$.

Zadatak 6.21 Odredite matricu susjedstva stabla čiji je Prüferov kod dan sa $(4,4,4,5)$.

Zadatak 6.22 Kakvu strukturu imaju stabla čiji je Prüferov kod konstantan niz?

Zadatak 6.23 Odredite ciklusni rang kotača W_n s n vrhova.

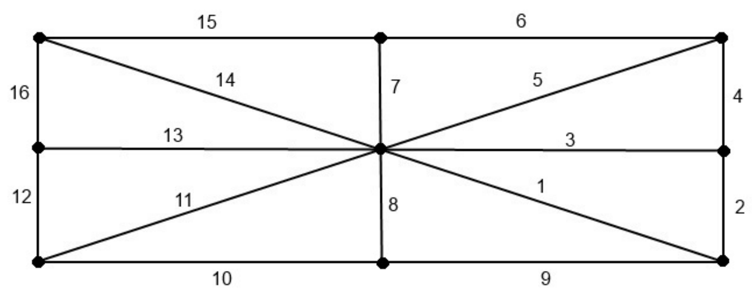
Zadatak 6.24 Konstruirajte jednostavni graf s 5 vrhova i s najmanjim brojem bridova tako da on ima dva razapinjuća stabla bez zajedničkih bridova. Je li moguće konstruirati graf s tim svojstvom s 4 vrha? A s 3 vrha?

Zadatak 6.25 Mogu li se u kotaču W_n pronaći dva razapinjuća stabla bez zajedničkih bridova?

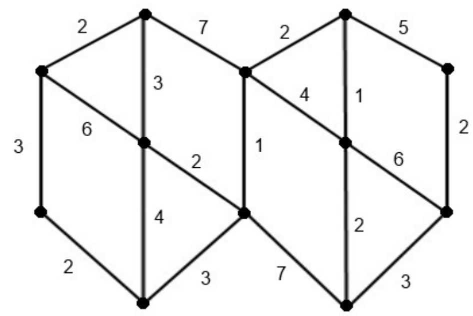
Zadatak 6.26 Koliko različitih razapinjućih stabala ima zadani kotač W_5 s 5 vrhova?

Zadatak 6.27 Koliko razapinjućih stabala ima zadani ciklus C_n s n vrhova? Koja je struktura dobivenih razapinjućih stabala?

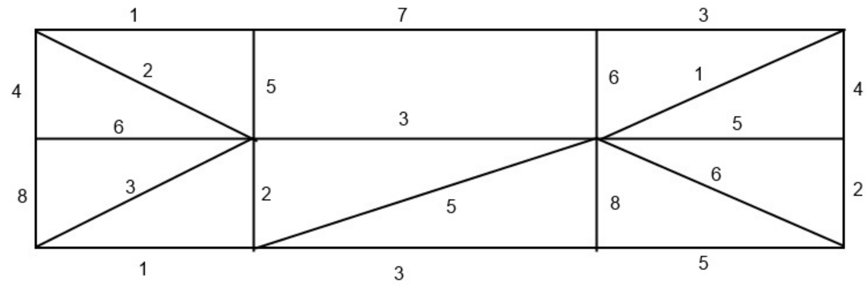
Zadatak 6.28 Zadanom grafu sa slike nađite minimalno razapinjuće stablo!



Zadatak 6.29 Zadanom grafu sa slike nađite minimalno razapinjuće stablo!



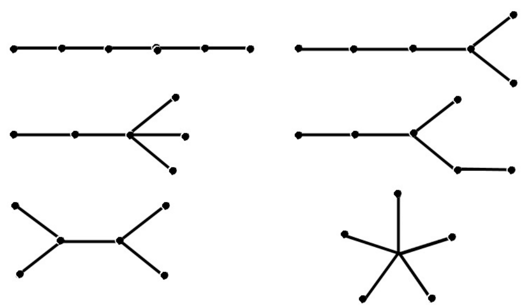
Zadatak 6.30 Zadanom grafu sa slike nađite minimalno razapinjuće stablo!



Zadatak 6.31 Zadan je potpuni težinski graf $K_5 = (V,E)$, pri čemu je $V = \{v_1,\dots,v_5\}$. Svakom bridu je pridružena težina funkcijom $w(v_i,v_j) = i + j$. Nađite minimalno razapinjuće stablo danog grafa.

Rješenja zadataka

6.13 n. Ne.
6.15 6.



6.16 $\frac{9!}{2}$.
6.17 $\frac{9!}{2\cdot 3!\cdot 3!}$.
6.18 $(2,8,9,4,7,7,2)$.
6.19 $(5,5,4,5,2,6,6)$.

6.20 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.21 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.22 Graf zvijezda, odnosno $K_{1,s}$.
6.23 $n-1$.
6.24 Ne postoji graf s 3 vrha i navedenim svojstvom.
6.25 Da.
6.26 45.
6.27 n, P_n.

6.5 Istraživački problemi

Problem 6.1 Napišite računalni program koji za zadani Prüferov kod ispisuje bridove pripadajućeg stabla.

Problem 6.2 Zatvorena formula za broj T_n neizomorfnih stabala s n vrhova nije poznata. No, postoje aproksimacije za T_n. Pronađite u literaturi barem dvije aproksimacije broja T_n. Za $n = 2, \ldots, 15$ usporedite aproksimirane vrijednosti s egzaktnim vrijednostima broja T_n.

Problem 6.3 Koliko razapinjućih stabala ima potpuni bipartitni graf $K_{r,s}$? Koliko ih ima k-dimenzionalna kocka Q_k? U računanju se poslužite Kirchhoffovim teoremom (ponekad se on zove i Matrični teorem o stablima - *Matrix Tree Theorem*). Kako je definirana Kirchhoffova matrica? Proučite dokaz spomenutog teorema? Implementirajte računalno Kirchhoffov teorem: napišite računalni program koji za zadani graf G računa broj razapinjućih stabala od G.

Problem 6.4 U literaturi proučite Primov pohlepni algoritam za minimalna razapinjuća stabla grafa.

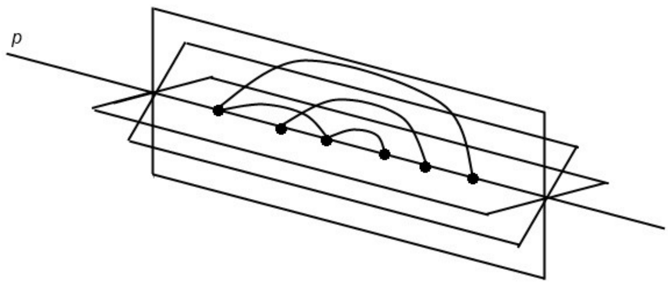
7. Planarnost

7.1 Kuratowskijev teorem

Grafove redovito prikazujemo na papiru, ploči ili ekranu, dakle smještavamo ih u dvodimenzionalni euklidski prostor $\mathbb{R}^2$. Pri tome, bridovi koje crtamo ponekad se (geometrijski gledano) sijeku, a ponekad ne. U ovom ćemo se poglavlju baviti upravo tim pitanjem - uz koje se uvjete graf može prikazati u ravnini bez presijecanja. To pitanje osobito dobiva na značenju uvidimo li prethodno da se svaki graf uvijek može prikazati u trodimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ bez presijecanja bridova. Vrijedi naime

Propozicija 7.1 Svaki graf može se prikazati u prostoru $\mathbb{R}^3$ bez presijecanja bridova.

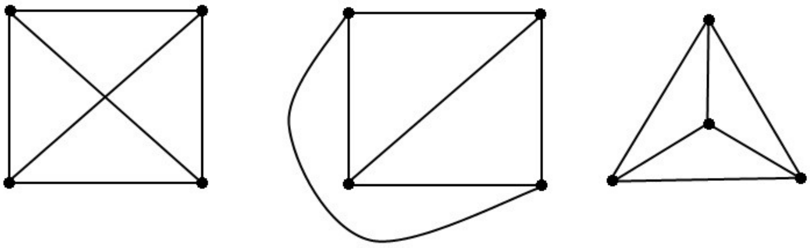
Dokaz. Smjestimo najprije sve vrhove zadanog grafa na isti pravac p, naravno bez poklapanja. Promotrimo sad pramen ravnina kroz pravac p. Svjesni smo da ih ima beskonačno mnogo. Za svaki brid e zadanog grafa izaberimo neku drugu ravninu π_e iz tog pramena, te spojimo krajnje točke brida e polukružnicom koja cijela leži u ravnini π_e. Jasno je da se dvije takve polukružnice ne mogu sjeći, osim eventualno u vrhovima grafa, u slučaju kad su dva brida incidentna s istim vrhom. Na taj smo način eksplicitno smjestili cijeli graf u prostor bez presijecanja bridova. ■



Kažemo još da smo graf uložili u prostor $\mathbb{R}^3$ ako ga geometrijski smjestimo u njega bez presijecanja bridova. Probajte sami naći neku drugu konstrukciju ulaganje grafa u trodimenzionalni euklidski prostor. Posebno, razmislite može li se graf uložiti u prostor tako da su svi bridovi prikazani kao dužine! Odgovor je pozitivan!

Vratimo se dakle na očevidno najzanimljivije pitanje, može li se zadani graf uložiti (smjestiti bez presijecanja bridova) u dvodimenzionalni euklidski prostor, kratko ćemo reći ravninu.

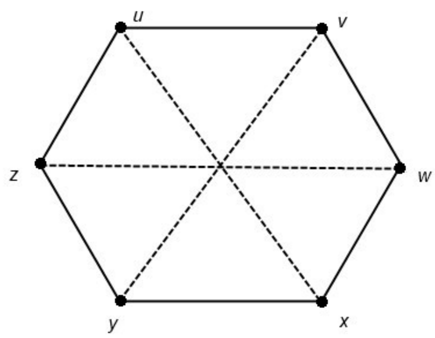
■ **Primjer 7.1** Potpuni graf s 4 vrha K_4 može se smjestiti u ravninu bez presijecanja.



■

Propozicija 7.2 Potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ ne može se smjestiti u ravninu bez presijecanja.

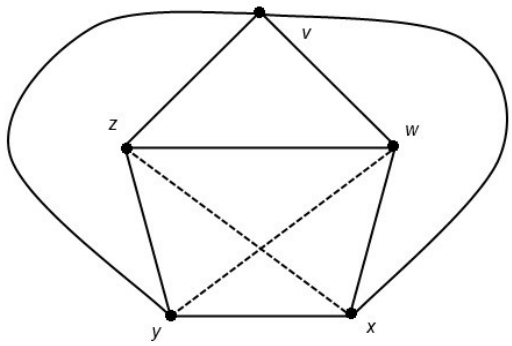
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da se $K_{3,3}$ može smjestiti u ravninu bez presijecanja. Budući da u $K_{3,3}$ postoji ciklus duljine 6, nazovimo ga $u \to v \to w \to x \to y \to z \to u$, te svako ulaganje u ravninu mora sadržavati takav ciklus duljine 6 bez presijecanja.



Preostalo nam je nacrtati tri glavne dijagonale tog šesterokuta, no uočimo da jednu možemo povući unutar šesterokuta, drugu van šesterokuta, ali treću više ne možemo povući bez da presiječe neki od skiciranih bridova. Zaključujemo da se $K_{3,3}$ ne može uložiti u ravninu. ■

Propozicija 7.3 Potpuni graf K_5 ne može se smjestiti u ravninu bez presijecanja.

Dokaz. Pretpostavimo da se K_5 može uložiti u ravninu. Tada postoji ciklus $v \to w \to x \to y \to z \to v$ duljine 5 i potrebno je još nacrtati 5 dijagonala tog peterokuta.



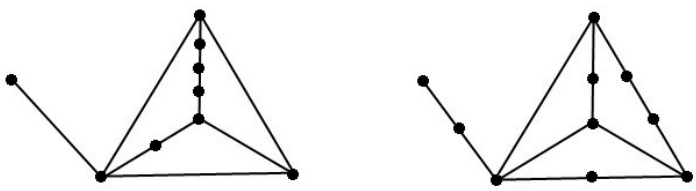
Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da wz leži unutar peterokuta. Tada obje dijagonale iz vrha v, vx i vy moraju ležati van peterokuta, i to je moguće realizirati. No preostale dvije dijagonale, xz i yw morale bi sada biti unutar peterokuta, što je nemoguće realizirati bez presijecanja. ■

Vidimo dakle da imamo grafova koji se mogu i onih koji se ne mogu uložiti u ravninu.

Definicija 7.1 **Planarni graf** je graf koji se može smjestiti u ravninu bez presijecanja bridova, tj. tako da se dva brida geometrijski ne sijeku niti u jednoj točki, osim eventualno u vrhu s kojim su oba incidentni. ■

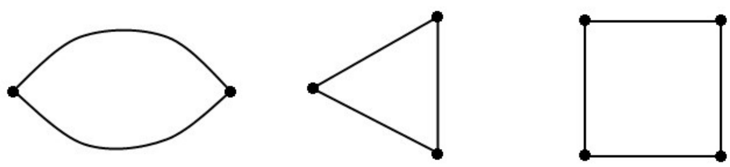
Primijetimo da je svaki podgraf planarnog grafa planaran, kao i da je svaki graf koji ima neplanarni podgraf neplanaran. Dakle, graf koji kao podgraf sadrži K_5 nije planaran, jednako kao što to nije niti onaj graf koji kao podgraf sadrži $K_{3,3}$.

Definicija 7.2 Za dva grafa kažemo da su **homeomorfni** ako se oba mogu dobiti iz nekog grafa umetanjem novih vrhova stupnja 2 u njihove bridove. ■



■ **Primjer 7.2** Grafovi sa slike su homeomorfni. ■

■ **Primjer 7.3** Svaka dva ciklusa su homeomorfna.



■

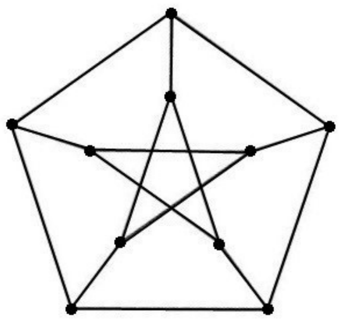
U smislu planarnosti, homeomorfni grafovi su ekvivalentni, tj. ili su planarni ili nisu. Umetanje vrhova stupnja 2 ne utječe na planarnost.

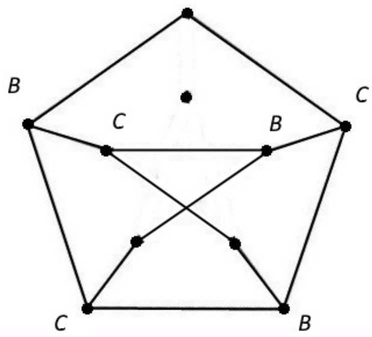
Teorem 7.4 — Kuratowski, 1930. Graf je planaran onda i samo onda ako ne sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$.

Dokaz ovog teorema je prilično opsežan i tehnički zahtjevan, pa ga zato izostavljamo.

Zadatak 7.1 Je li Petersenov graf planaran?

Rješenje. Budući nakon nekoliko pokušaja ne uspijevamo uložiti taj graf u ravninu, pokušajmo naći neki podgraf Petersenevog grafa koji je homeomorfan s K_5 ili s $K_{3,3}$. Ključ rješenja je u podgrafu sa desne slike, koji je homeomorfan s $K_{3,3}$!

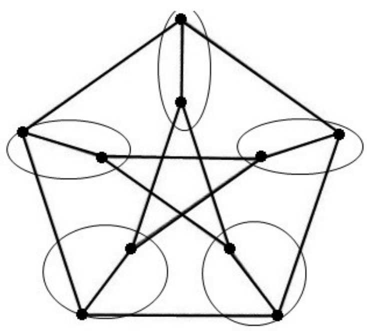




Ovime smo dokazali da Petersenov graf nije planaran. ■

Definicija 7.3 Za graf H kažemo da je stezljiv do K_5 ili do $K_{3,3}$ ako stezanjem nekih bridova od H možemo dobiti K_5 ili $K_{3,3}$. ■

■ **Primjer 7.4** Petersenov graf je očevidno stezljiv do K_5, vidi sliku ispod.

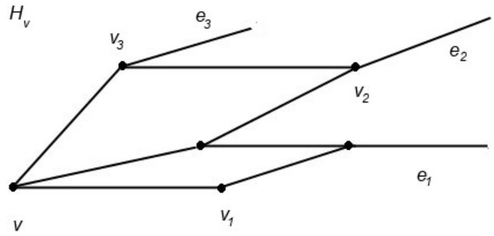


■

Teorem 7.5 Graf je planaran onda i samo onda ako ne sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$.

Dokaz. Dokažimo najprije dovoljnost. Pretpostavimo da zadani graf G ne sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$, te neka, suprotno tvrdnji, G nije planaran. Onda po Kuratowskijevom teoremu G ima podgraf H homeomorfan s K_5 ili s $K_{3,3}$. Eventualnim stezanjem bridova incidentnih s vrhovima stupnja 2 grafa H sigurno ćemo dobiti podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$, suprotno pretpostavci. Dakle nije moguće da G nije planaran, te je ovaj smjer dokazan.

Pokažimo još i nužnost. Neka je G planaran, te neka G sadrži podgraf H stezljiv na primjer do $K_{3,3}$. Neka je v vrh od uočenog $K_{3,3}$ koji se dobiva stezanjem podgrafa H_v od H. Taj vrh v incidentan je u $K_{3,3}$ s tri brida, e_1, e_2 i e_3.



Gledamo li na njih kao na bridove od H, oni su incidentni s 3 ne nužno različita vrha v_1, v_2 i v_3 od H_v. Brisanjem bridova u H_v možemo doći do 3 puta koji prolaze vrhovima v_1, v_2 i v_3 koji se sijeku samo u jednom vrhu (ili u nekome od njih, ili u nekom vrhu w kroz koji prolaze sva ta tri puta. Sad cijeli podgraf H_v možemo zamijeniti s tim vrhom, i dobivamo graf homeomorfan s $K_{3,3}$. Po teoremu Kuratowskog, G je neplanaran, suprotno pretpostavci, pa zaključujemo da ne može sadržavati podgraf stezljiv do $K_{3,3}$. Slično se opovrgne i pretpostavka da G sadrži podgraf stezljiv do K_5. ■

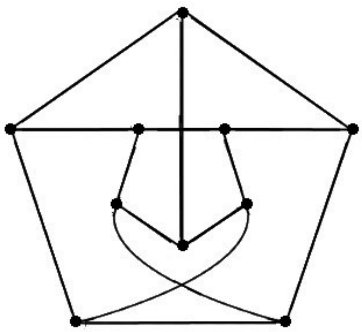
Zadatak 7.2 Koji su potpuni, a koji potpuni bipartitni grafovi planarni?

Rješenje. Potpuni graf s n vrhova sadrži potpune grafove s manje od n vrhova kao podgrafove. Dakle, počevši od K_5, svi potpuni grafovi su neplanarni. Slično i za potpune bipartitne grafove, $K_{r,s}$ su neplanarni čim su i r i s veći od 2. ■

Iz dokaza propozicija o neplanarnosti K_5 i $K_{3,3}$, jasno je da se oni mogu prikazati u ravnini s jednim jedinim presjekom bridova.

Definicija 7.4 Minimalni broj presjecišta u ravnini potreban za prikaz grafa G zovemo **križni broj** od G i označavamo s $cr(G)$. ■

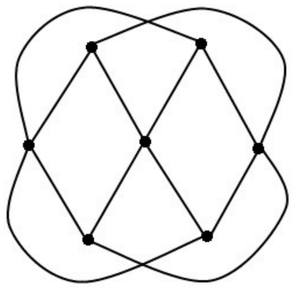
■ **Primjer 7.5** Križni broj Petersenovog grafa je 2.



■

Zadatak 7.3 Odredite $cr(K_{4,3})$.

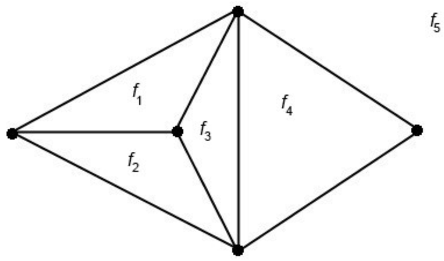
Rješenje. Uvjerite se da se ne može ovaj graf nacrtati s manje od 2 presjeka, a evo prikaza s 2 križanja.



Dakle, $cr(K_{3,4}) = 2$. ■

7.2 Eulerova formula

Neka je G planaran graf. Pogledajmo prikaz tog grafa u ravnini. Njegovi bridovi dijele skup točaka ravnine u podskupove koje zovemo **strane**.



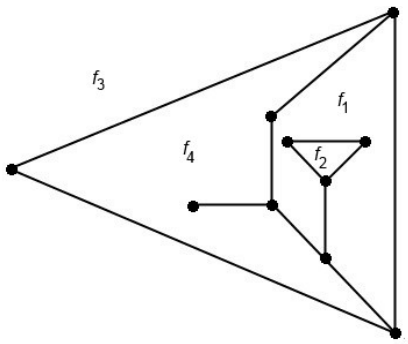
Uočimo da je uvijek jedna strana beskonačna, no ta strana ni po čemu nije posebna. Naime, tvrdimo da možemo graf planarno prikazati tako da mu je bilo koja strana beskonačna. Evo kako.

Najprije preslikamo ravninski graf na sferu takozvanom stereografskom projekcijom. To je bijektivno preslikavanje kod kojeg se točke ravnine preslikavaju na sferu na sljedeći način. Položimo sferu na ravninu. Uočimo dvije istaknute točke na sferi: dirалište ravnine i sfere (to je dakako tangencijalna ravnina na sferu), tzv. južni pol, i njoj simetričnu točku sa sfere, tzv. sjeverni pol. Slika točke iz ravnine po stereografskoj projekciji je ona točka sfere koja se dobije kao probodište sfere i pravca koji prolazi sjevernim polom i dotičnom točkom iz ravnine. Preslikavanje dodefiniramo na prirodni način tako da je slika beskonačno daleke točke ravnine upravo sjeverni pol. Ima li stereografska projekcija fiksnih točaka?

Lako se vidi da je ovako definirano preslikavanje bijekcija (nađite sami kako bi konstruktivno izgledalo inverzno preslikavanje).

Preslikajmo sada ravninski prikaz planarnog grafa na sferu stereografskom projekcijom. Tvrdimo da se u prikazu tog grafa na sferi bridovi sigurno ne sijeku (zbog bijektivnosti stereografske projekcije). Beskonačnoj strani ravninskog prikaza grafa odgovara sada ona strana (bridovima omeđeni dio sfere) koja sadrži sjeverni pol. Međutim, sada je jasno da mi našu sferu i graf prikazan na njoj možemo zakotrljati kako god želimo, te svaka od strana može postati ona koja sadrži sjeverni pol, pa nakon inverzne projekcije dobivamo ravninski prikaz grafa kod kojeg je ta druga strana ona beskonačna.

Zadatak 7.4 Nacrtajte graf sa slike u ravnini tako da mu strane f_1, pa f_2 budu beskonačne.



Naslućujemo da je broj strana neovisan o ravninskom prikazu grafa. Vrijedi i više, tj. on je ovisan isključivo o broju vrhova i broju bridova zadanog grafa, o čemu govori sljedeći važan teorem.

Teorem 7.6 — Euler, 1750. Neka je G ravninski prikaz povezanog planarnog grafa, te neka su s n, m i f slijedom označeni brojevi vrhova, bridova i strana od G. Tada je

$$n - m + f = 2\,.$$

Dokaz. Provest ćemo dokaz matematičkom indukcijom po broju bridova m. Baza indukcije je jasna, jer ako je $m = 0$, onda je nužno $n = 1$, te $f = 1$ (imamo samo izolirani vrh i beskonačnu stranu), pa jednadžba iz teorema vrijedi. Pretpostavimo da teorem vrijedi za sve grafove s $m-1$ bridova, te neka je G graf s m bridova. Ako je G stablo, onda je $m = n-1$ i $f = 1$, dakle je $n-m+f = 2$. Ako pak G nije stablo, onda u njemu postoji ciklus, pa neka je e brid iz nekog ciklusa od G. Pogledajmo graf $G-e$. To je povezani planarni graf s $n' = n$ vrhova, $m' = m-1$ bridova, te $f' = f-1$ strana. Kako $G-e$ zadovoljava pretpostavku indukcije, to za njegove parametre vrijedi $n'-m'+f' = 2$, iz čega slijedi da je $n-(m-1)+(f-1) = 2$, tj. je $n-m+f = 2$, što je i trebalo dokazati. ■

Korolar 7.7 Neka je G planarni graf s n vrhova, m bridova, f strana i k komponenata povezanosti. Tada je

$$n - m + f = k + 1$$

Dokaz. Primijenimo Eulerovu formulu na svaku od k komponenata povezanosti:

$$\begin{aligned} n_1 - m_1 + f_1 &= 2 \\ n_2 - m_2 + f_2 &= 2 \\ &\vdots \\ n_k - m_k + f_k &= 2 \end{aligned}$$

Zbrojimo li sve ispisane jednakosti, dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} f_i &= 2k \\ \Rightarrow \quad n - m + (f + k - 1) &= 2k \\ \Rightarrow \quad n - m + f &= k + 1 \end{aligned}$$

■

Dosadašnji rezultati dopuštali su zapravo petlje i višestruke bridove u grafu. Kažimo nešto posebnije o jednostavnim grafovima.

Korolar 7.8 (i) Ako je G jednostavni povezani planarni graf s $n \geq 3$ vrhova i m bridova, onda je $m \leq 3n-6$.
(ii) Ako, dodatno, G nema trokutova (tj. struk mu je barem 4), onda je $m \leq 2n-4$.

Dokaz. Podsjećamo da je naša općenita ocjena za broj bridova u jednostavnom grafu bila $m \leq \binom{n}{2}$, pa su ocjene iz ovog korolara bolje, za $n \geq 4$. Uočimo da se za $n = 4$ baš postiže jednakost (tada je $3n-6 = \frac{n(n-1)}{2}$), a za $n > 4$ dobivamo bolju ocjenu.

(i) Neka je G planaran te neka ima ravninski prikaz. Kako ne dopuštamo višestruke bridove, to je jasno da je svaka strana omeđena s najmanje 3 brida. Ova ocjena odozdo o broju bridova koji omeđuju svaku stranu daje: $3f \leq 2m$. Uvrstimo li u ovu nejednakost Eulerovu formulu, dobivamo:

$$f = 2+m-n \quad \Rightarrow \quad 3(2+m-n) \quad \leq 2m \quad \Rightarrow m \leq 3n-6.$$

(ii) Ako dodatno u danom grafu nema ni trokutova, onda je svaka strana omeđena s najmanje 4 brida, pa dobivamo oštriju ocjenu: $4f \leq 2m$. Uvrstimo li u nju na analogan način Eulerovu formulu, slijedi rezultat.

■

Korolar 7.9 K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni.

Dokaz. Iskoristit ćemo nejednakost (i), što je nuždan uvjet planarnosti. U K_5 je $n = 5$, $m = 10$, i nejednakost $m \leq 3n-6$ nije ispunjena, dakle K_5 nije planaran. Kako $K_{3,3}$ nema trokutova, tu rabimo nejednakost (ii) kao nuždan uvjet planarnosti. Lako se vidi da on za $K_{3,3}$ nije ispunjen. ■

Teorem 7.10 Svaki jednostavni planarni graf ima vrh stupnja ne većeg od 5.

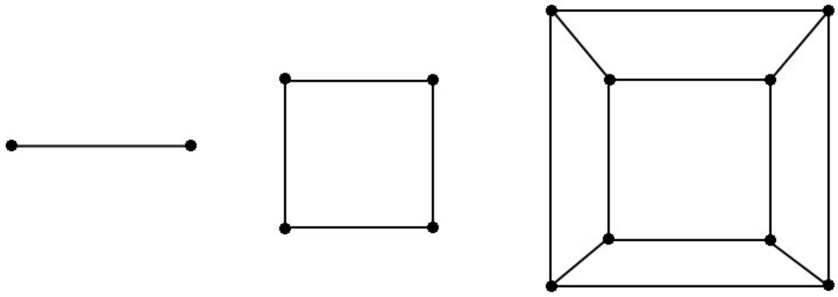
Dokaz. Ne smanjujući općenitost pretpostavljamo da je graf povezan i da ima najmanje 3 vrha. Ako bi svaki vrh imao stupanj barem 6, onda bismo, brojeći incidencije, imali ocjenu $6n \leq 2m$, tj. $3n \leq m$. No, budući imamo ocjenu $m \leq 3n-6$, dobivamo $3n \leq m \leq 3n-6$, što je protuslovlje. Zaključujemo da postoji vrh stupnja najviše 5. ■

Zadatak 7.5 Dokažite da je svaki jednostavan povezan planaran k-regularan graf struka 6 izomorfan ciklusu C_6.

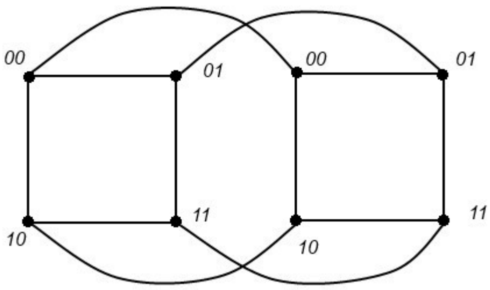
Rješenje. Neka je G jednostavan povezan planaran k-regularan graf struka 6. Označimo redom s n, m i f broj vrhova, bridova i strana grafa G. Graf G je k-regularan pa prema Lemi o rukovanju vrijedi $2m = nk$. Graf G je jednostavan graf struka 6, stoga je svaka strana grafa G omeđena s najmanje 6 bridova. Ova ocjena daje nejednakost $6f \leq 2m$. Uvrštavanjem supstitucije $f = 2+m-n$ dobivene iz Eulerove formule, dobiva se $6(2+m-n) \leq 2m$. Sređivanjem ove nejednakosti konačno vidimo da je $n(3-k) \geq 6$ iz čega slijedi da je $k < 3$. Ako je $k = 1$, onda je $n \geq 6$ i graf G nije povezan; kontradikcija. Dakle, $k = 2$ i poznato je da je svaki 2-regularan povezan graf izomorfan ciklusu C_n. S obzirom da je G graf struka 6, G je izomorfan ciklusu C_6. ■

Zadatak 7.6 Za koje vrijednosti $r \geq 1$ je r-kocka Q_r planaran graf?

Rješenje. Grafovi Q_1, Q_2 i Q_3 su planarni grafovi.



Graf Q_4 nije planaran graf. Naime, Q_4 je graf bez trokutova s $n = 16$ vrhova i $m = 32$ bridova. Kako nije zadovoljena ocjena $m \leq 2n - 4$, graf Q_4 nije planaran. Općenito, za $r \geq 4$, r-kocka nije planaran graf. Razlog tomu je što za $r \geq 4$, r-kocka ima za podgraf 4-kocku koja nije planaran graf. Evo i dokaza. Općenito, r-kocka Q_r može se dobiti iz dvije kopije $(r-1)$-kocki Q'_{r-1} i Q''_{r-1} dodavanjem 2^r bridova, takvih da dodani bridovi spajaju one vrhove grafova Q'_{r-1} i Q''_{r-1} koji imaju istu binarnu oznaku. Na sljedećoj slici prikazana je konstrukcija za 3-kocku.



Iz ove konstrukcije slijedi da Q_r ima za podgrafove $Q_1, \ldots, Q_{r-1}$. ∎

Napomenimo da je planarni graf uvijek moguće prikazati u ravnini bridovima koji su dužine (nisu nam potrebni zakrivljeni bridovi). To netrivijalno svojstvo planarnih grafova nezavisno su dokazali K. Wagner 1936. i I. Fary 1948. godine.

Teorija planarnih grafova u uskoj je vezi s konveksnim poliedarskim tijelima. Naime, takvom tijelu možemo opisati sferu, projiciramo zatim tijelo na sferu, a onda inverznom stereografskom projekcijom dobiveni graf realiziramo u ravnini. To doista jest planaran graf kojemu je stupanj svakog vrha barem 3, a strane su mu poligoni. Označimo li broj vrhova poliedra s N, broj bridova s M, a broj strana s F, vidimo da vrijedi Eulerova (poliedarska) formula:

$$N - M + F = 2\,.$$

Označimo u danom poliedru, promatranom i kao grafu, s N_k broj vrhova stupnja k, te s F_k broj strana koje su k-ciklusi. Lagano slijedi:

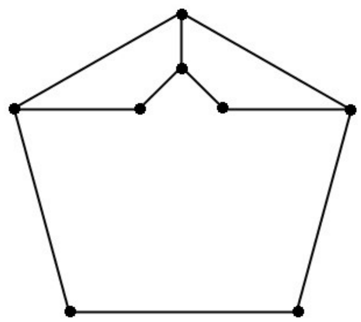
$$2M = \sum_{k \geq 3} kN_k = \sum_{k \geq 3} kF_k\,.$$

Zadatak 7.7 Zadan je povezan planaran graf G čije su strane dva četverokuta, peterokut i sedmerokut. Je li time broj vrhova grafa G jednoznačno određen?

Rješenje. Prema tekstu zadatka vrijedi da je $F = 4, F_4 = 2, F_5 = 1, F_7 = 1$, te imamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 4F_4 + 5F_5 + 7F_7 &= 2M \\ N - M + F &= 2. \end{aligned}$$

Stoga je $M = 10$ i $N = 8$. Dakle, broj vrhova opisanog grafa je jednoznačan. Evo i slike jednog takvog grafa.



■

Propozicija 7.11 Najmanje jedna strana poliedra omeđena je k-ciklusom, gdje je $k = 3, 4$ ili 5.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $F_3 = F_4 = F_5 = 0$. Sada je $2M = \sum_{k\geq 6} kF_k \geq \sum_{k\geq 6} 6F_k = 6\sum_{k\geq 6} F_k = 6F$, dakle $M \geq 3F$. Slično se dobije i da je $2M \geq 3N$. Sada je $6 = 3N - 3M + 3F \leq 2M - 3M + M = 0$, što je kontradikcija. ■

Regularni poliedar je onaj poliedar kojemu su sve strane sukladni pravilni poligoni, a kutovi među stranama jednaki. Promatramo li takav poliedar kao graf, on je regularan, a sve strane su ciklusi iste duljine. Takva je na primjer kocka, u kojoj je $N = 8$, $M = 12$, $F = 6$, $N_3 = 8$, $F_4 = 6$.

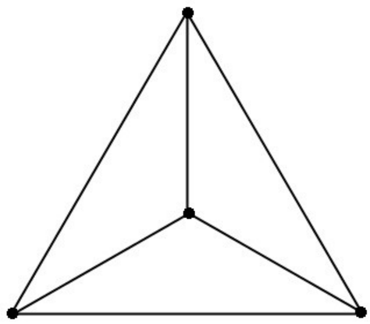
Teorem 7.12 Postoji točno 5 regularnih poliedara.

Dokaz. Neka je G regularan poliedar s N vrhova, M bridova i F strana. Sada je

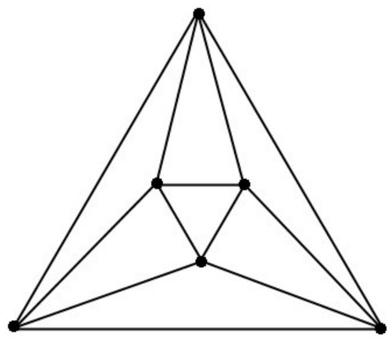
$$\begin{aligned} -8 &= 4M - 4N - 4F \\ &= 2M + 2M - 4N - 4F \\ &= \sum_{k\geq 3} kF_k + \sum_{k\geq 3} kN_k - 4\sum_{k\geq 3} N_k - 4\sum_{k\geq 3} F_k \\ &= \sum_{k\geq 3}(k-4)F_k + \sum_{k\geq 3}(k-4)N_k \\ &= (s-4)F_s + (t-4)N_t, \text{ za neke } 3 \leq s,t \leq 5 \end{aligned}$$

Dodatno znamo da je $2M = sF_s = tN_t$. Kako imamo po 3 mogućnosti za s i t, sveukupno dobivamo 9 mogućnosti koje valja promotriti.

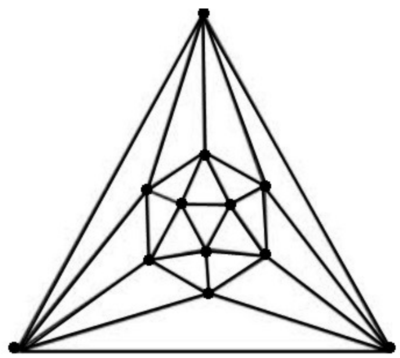
Slučaj 1. $s = 3, t = 3$. Jednadžbe daju: $-8 = -F_3 - N_3$ te $3F_3 = 3N_3$. Rješenje tog sustava je $F_3 = N_3 = 4$. Dobili smo poliedar sastavljen od 4 jednakostranična trokuta, s 4 vrha stupnja 3, i jedini takav je **tetraedar**.



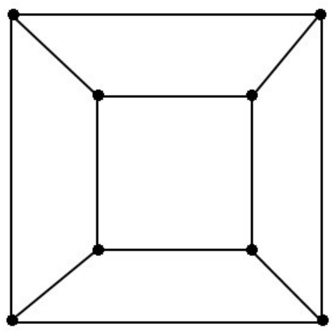
Slučaj 2. $s = 3$, $t = 4$. Ovdje je jedino rješenje $F_3 = 8$, te $N_4 = 6$, iz čega slijedi da je riječ o **oktaedru**.



Slučaj 3. $s = 3$, $t = 5$. Ovdje je jedino rješenje $F_3 = 20$, te $N_5 = 12$, iz čega slijedi da je riječ o **ikosaedru**.

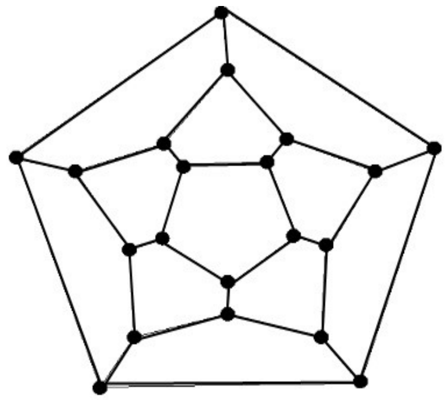


Slučaj 4. $s = 4$, $t = 3$. Ovdje je jedino rješenje $F_4 = 6$, te $N_3 = 8$, dakle je riječ o **kocki**.



Slučaj 5. $s = 4$, $t = 4$. Sustav nema rješenja!
Slučaj 6. $s = 4$, $t = 5$. Dobivamo da je rješenje negativno ($N_5 = -8$), što je nemoguće!

Slučaj 7. $s = 5$, $t = 3$. Ovdje je jedino rješenje $F_5 = 12$, te $N_3 = 20$, dakle je ovaj poliedar **dodekaedar**.



Slučaj 8. $s = 5, t = 4$. Dobivamo opet negativno rješenje.
Slučaj 9. $s = 5, t = 5$. Dobivamo opet negativno rješenje. ■

Zadatak 7.8 Neka je G (ne nužno regularni) poliedarski graf čije su sve strane peterokuti ili šesterokuti.

(i) Dokažite da G mora imati barem 12 peterokuta.

(ii) Dokažite ako se u svakom vrhu susreću uvijek po tri strane, onda G ima točno 12 peterokuta.

Rješenje. U našim oznakama imamo ovaj sustav jednadžbi:

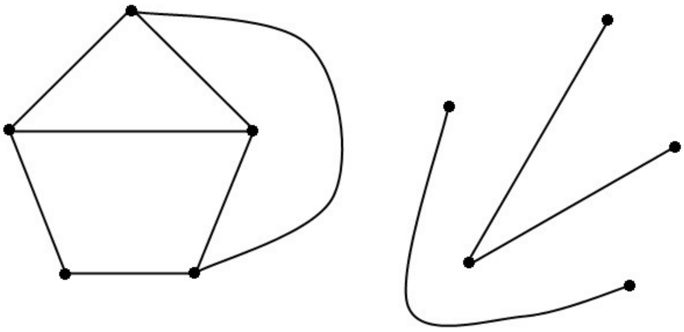
$$\begin{aligned} 5F_5 + 6F_6 &= 2M \\ F_5 + F_6 &= F = M - N + 2 \end{aligned}$$

Riješimo li ovaj sustav po F_5 i F_6, dobivamo: $F_6 = 5N - 3M - 10$, $F_5 = 4M - 6N + 12$. Budući je stupanj svakog vrha barem 3, slijedi da je $2M \geq 3N$, pa je zato $F_5 = (4M - 6N) + 12 \geq 12$, čime je prvi dio zadatka riješen. Ako je pak stupanj svakog vrha jednak 3, onda u posljednjem izrazu vrijedi jednakost, pa je odmah $F_5 = 12$. Dodatno je sada $F_6 = \frac{N}{2} - 10$, $F = \frac{N}{2} + 2$. U slučaju dodekaedra je, znamo, $F_5 = 12$, $F_6 = 0$, $N = 20$, $F = 12$. Kakva je situacija kod "nogometne lopte"? ■

Sljedeću mjeru planarnosti možemo motivirati na ovakav način. Koliko je električnih pločica potrebno izraditi da bi se zadani sklop mogao realizirati? Pločice ćemo dakako staviti paralelno jednu s drugom i povezati ih vertikalnim žicama, okomito na ravninu pločica.

Ako je zadani sklop, promatran kao graf, planaran, onda je naravno dovoljna samo jedna pločica. Ako nije, onda su potrebne barem dvije pločice, no jasno da je pitanje može li se graf i u dvije ravnine realizirati. Zato definiramo **gustoću grafa** G, u oznaci $t(G)$, kao najmanji broj planarnih grafova koji superponiranjem (naslagivanjem jednog na drugi) daju G.

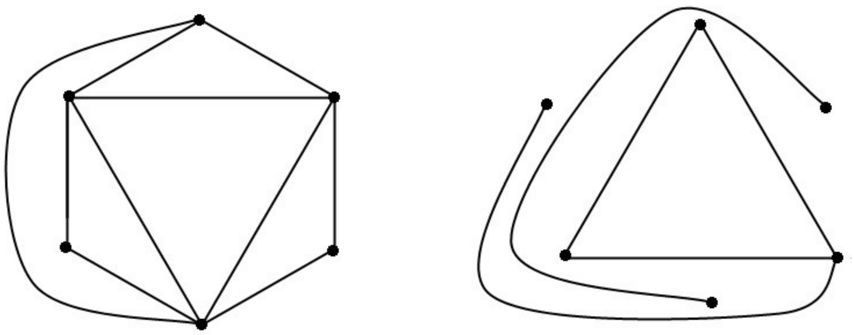
■ **Primjer 7.6** Gustoća neplanarnog grafa K_5 je $t(K_5) = 2$. Uvjerite se sami da je $t(K_{3,3}) = 2$.



■

Zadatak 7.9 Koliki je $t(K_6)$?

Rješenje. Sigurno je $t(K_6) \geq 2$. Uspijemo li naći neku realizaciju grafa K_6 rastavljenog u dva planarna prikaza koji u uniji daju cijeli graf, dokazat ćemo da je jednakost, tj. da je $t(K_6) = 2$. Evo jedne takve realizacije:



■

Teorem 7.13 Neka je G jednostavni graf s $n \geq 3$ vrhova i m bridova. Tada gustoća $t(G)$ grafa G zadovoljava nejednakosti

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \qquad t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor .$$

Dokaz. Prva se nejednakost dokazuje primjenom poopćenog Dirichletovog principa. U prvu ravninu možemo strpati najviše $m_1 = 3n-6$ bridova, u drugu također najviše $m_2 = 3n-6$ bridova, i konačno u zadnju, k-tu ravninu strpamo preostale bridove, za koje također sa sigurnošću vrijedi $m_k \leq 3n-6$. Za ukupan broj bridova $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ sada sigurno vrijedi $m \leq k \cdot (3n-6)$, pri čemu je k upravo najmanji broj ravnina potreban da bi se graf prikazao. Slijedi da je $k \geq \frac{m}{3n-6}$, a kako je to prirodni broj, slijedi da je $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$.

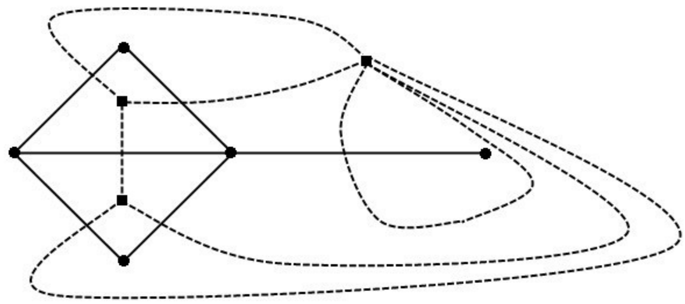
Da bismo dokazali drugu nejednakost, uočimo da uvijek vrijedi: $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor$, $a, b \in \mathbf{N}$. Nejednakost sada neposredno slijedi. ■

7.3 Dualni grafovi

Neka je dan ravninski prikaz planarnog grafa G. Konstruirat ćemo sada jedan drugi graf, G^*, njemu pridružen, i zvati ga **(geometrijski) dual** od G, na sljedeći način, odnosno štujući sljedeća pravila:

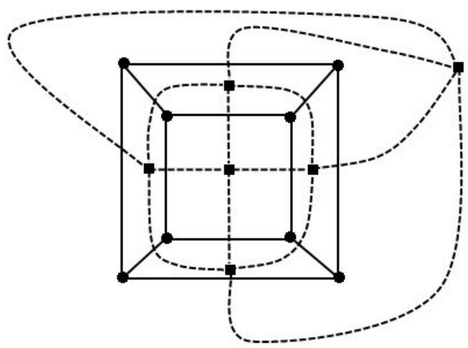
(i) Unutar svake strane od G uočimo po jednu točku; označimo je s v_i^*. Skup svih takvih točaka tvori skup vrhova grafa G^*.
(ii) Svakom bridu $e \in G$ pridružujemo brid $e^* \in G^*$ koji siječe brid e (i jedino taj brid) te povezuje vrhove v_i^* i v_j^* iz strana koje graniče duž brida e. Ovako opisani bridovi e^* tvore skup bridova grafa G^*.

Pogledajmo opisanu konstrukciju dualnog grafa na sljedećem primjeru:



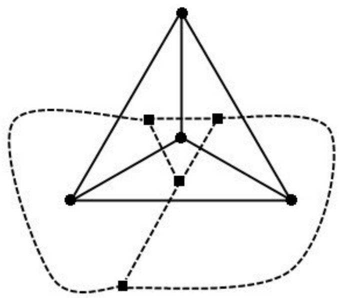
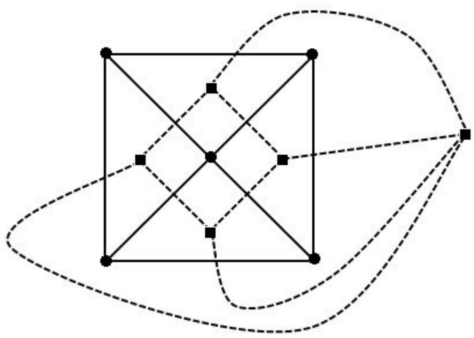
Uočimo da svakom mostu e grafa G korespondira petlja e^* u dualu G^*, budući da most graniči dvaput sa (beskonačnom) stranom. Ako pak dvije strane graniče preko više od jednog brida, onda su korespondentni bridovi u dualu višestruki.

■ **Primjer 7.7** Što je dual kocki? Kakva je situacija s dualnošću ostalih Platonovih tijela?
Nacrtajmo planarno kocku i konstruirajmo njen dual po gornjim pravilima.



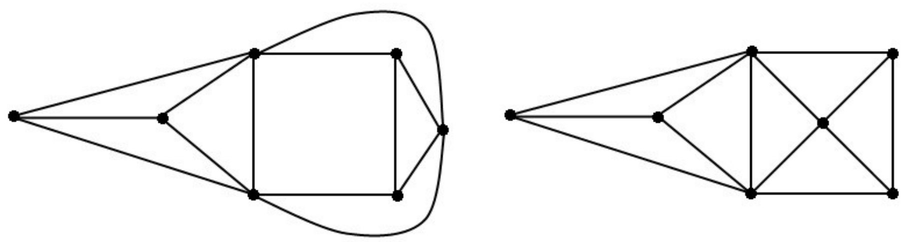
Vidimo da je dual grafa sa 6 vrhova, 4-regularan, i to je upravo oktaedar. Uvjerite se sami da je dual oktaedra upravo kocka (činjenicu da je dual dualu opet početni graf još nismo dokazali!), te da par dualnih grafova čine dodekaedar i ikosaedar. Što je onda s tetraedrom? Za planaran graf kažemo da je **samodualan** ako je izomorfan svome dualu. Primjer samodualnog grafa je tetraedar. ■

■ **Primjer 7.8** Za svaki $n \geq 4$, kotač W_n s n vrhova je samodualan graf.

■

Ako je dan ravninski prikaz grafa G, onda su svi njegovi ovako konstruirani duali izomorfni. Međutim, uočimo da ne vrijedi jedna druga činjenica koju bismo lako zabunom očekivali da vrijedi. Naime, ako je G izomorfan s H, ne slijedi nužno da je G^* izomorfan s H^*. Uvjerimo se u tu činjenicu sljedećim kontraprimjerom.



Grafovi sa slike su izomorfni. Dual lijevog prikaza ima vrh stupnja 4, budući postoji strana okružena 4-ciklusom. Dual desnog prikaza pak nema vrh stupnja 4, jer nema strane okružene 4-ciklusom. Naravno, u desnom grafu postoji 4-ciklus (inače grafovi ne bi bili izomorfni!), ali on ne tvori stranu.

Napomena 7.1 Ako je G planaran i povezan, onda je i G^* planaran i povezan.

Ova činjenica doista je očevidna. U originalnome grafu naime, sigurno se iz unutrašnjosti svake strane može prošetati do unutrašnjosti bilo koje druge strane; strana ili unija strana nikako ne može biti „izolirana”. Planarnost duala vidi se iz činjenice da se bridovi nemaju potrebe „sjeći”; to se vidi iz same konstrukcije.

Lema 7.14 Neka je G planaran povezan graf s n vrhova, m bridova i f strana, te neka njegov geometrijski dual ima n^* vrhova, m^* bridova i f^* strana. Tada je: $n^* = f$, $m^* = m$, $f^* = n$.

Dokaz. Kako je u svakoj strani od G točno jedan vrh od G^*, to odmah slijedi da je $n^* = f$. Bridovi grafa i duala su u bijektivnoj korespondenciji, pa je svakako $m^* = m$. No, kako je G^* povezan i planaran, to i za njega vrijedi Eulerova formula, pa je zato $f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$. ■

Budući je dual G^* planarnog grafa G opet planaran, dobro je definiran dual duala, graf $(G^*)^*$ koji ćemo označavati kratko s G^{**}.

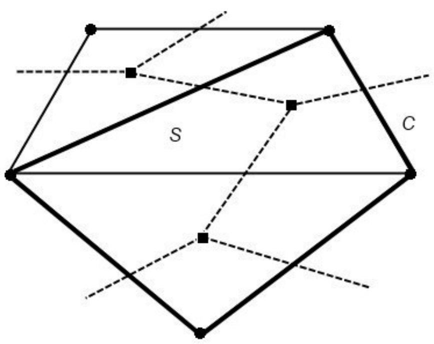
Teorem 7.15 Ako je G povezan ravninski graf, onda je G^{**} izomorfan s G.

Dokaz. Uočimo najprije da je konstrukcija duala primjenjiva na graf G^*, te da je reverzibilna; točnije, da možemo kao vrhove od G^{**} izabrati baš vrhove grafa G. Jedino mjesto koje je nejasno te ga moramo pokazati je da niti jedna strana grafa G^* ne sadrži više od jednog vrha od G, budući jedan vrh sasvim sigurno sadrži. No budući je $n^{**} = f^* = n$, slijedi da u G^{**} ima isto onoliko vrhova koliko je bilo u G, pa svaka strana od G^* sadrži točno jedan vrh od G. ■

Ako je G planaran, postoji dakle njegov dual G^*, ne jedinstven, već ovisan o ravninskom prikazu grafa G. Budući se dual definira isključivo za planarne grafove, ima smisla i očevidna je istina, reći da je graf G planaran onda i samo onda ako ima svoj dual. S druge strane, ovo nam ne pomaže u ustanovljavanju planarnosti (vrtimo se kod zaključivanja u krug). Očito bi nam bila od koristi takva definicija dualnosti, koja bi ovu definiciju geometrijske dualnosti poopćila, a pomoću koje bismo mogli ustanoviti je li graf planaran ili nije.

Teorem 7.16 Neka je G planaran graf te neka je G^* geometrijski dual od G. Tada skup bridova od G tvori ciklus u G onda i samo onda ako odgovarajući skup bridova u G^* tvori rezni skup u G^*.

Dokaz. Smijemo pretpostaviti da je G povezan planaran graf, budući bismo inače razmatranje ograničili na neku njegovu komponentu povezanosti, kako ciklus ne može postojati izvan neke komponente povezanosti. Ako je C ciklus u G, onda C sadrži (okružuje) jednu ili više konačnih strana u C, pa u svojoj unutrašnjosti sadrži neprazan skup vrhova S od G^*.



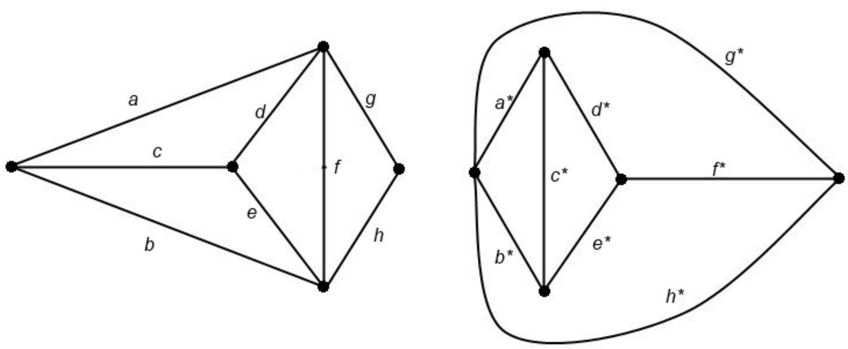
Neposredno slijedi da bridovi od G^* koji sijeku bridove od C tvore rezni skup za G^*, čije bi uklanjanje razdvojilo G^* u dva podgrafa, one s vrhovima iz S i one koji imaju vrhove koji ne leže u S. Time je jedan smjer ekvivalencije dokazan. Obrat se vidi slično. ■

Korolar 7.17 Skup bridova od G tvori rezni skup u G onda i samo onda ako odgovarajući skup bridova od G^* tvori ciklus u G^*.

Dokaz. Prethodni teorem primijeni se na graf G^* i iskoristi se činjenica da je $(G^*)^* = G$. ■

Sada možemo alternativno definirati dualni graf.

Definicija 7.5 Za graf G^* kažemo da je **(apstraktni) dual grafa** G ako postoji bijektivna korespondencija između bridova od G i onih od G^*, sa svojstvom da je skup bridova od G ciklus u G onda i samo onda ako je odgovarajući skup bridova od G^* rezni skup od G^*.



Vidjeli smo da koncept apstraktnog duala generalizira koncept geometrijskog duala (jer za geometrijski dual vrijedi svojstvo iz definicije apstraktnog duala). Želimo pokazati analogne rezultate za one dobivene prethodno za geometrijske duale, no najprije bez dokaza dajemo jedan tehnički rezultat.

Propozicija 7.18 (i) Ako je C ciklus, a C^* rezni skup povezanog grafa G, onda C i C^* imaju parni broj zajedničkih bridova.
(ii) Ako je S neki podskup skupa bridova grafa G sa svojstvom da ima parni broj zajedničkih bridova sa svakim reznim skupom od G, onda se S može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.

Teorem 7.19 Ako je G^* apstraktni dual od G, onda je G apstraktni dual od G^*.

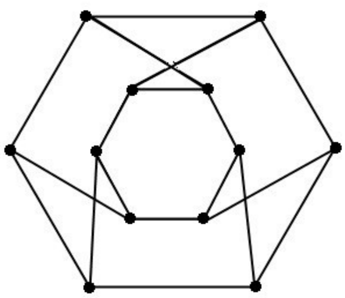
Dokaz. Uočimo da ne zahtijevamo povezanost u izreci ovog teorema. Svakako, G i G^* imaju isti broj bridova, te uspostavimo bijektivnu korespondenciju među njima prema definiciji apstraktnog duala. Neka je C rezni skup od G i neka je C^* odgovarajući skup bridova od G^*. Želimo pokazati da je C^* ciklus od G^*. Jer je C rezni skup od G, po prethodnoj propoziciji ima parni broj zajedničkih bridova s bilo kojim ciklusom od G. Zato korespondentni skup bridova C^* ima parni broj zajedničkih bridova sa svakim reznim skupom od G^*. No sada opet po prethodnoj propoziciji slijedi da je C^* disjunktna unija ciklusa. Dakle, ili je C^* ciklus, ili se može razdvojiti u barem dva disjunktna ciklusa. Međutim, ova druga mogućnost otpada, jer bi se slično moglo pokazati da ciklusi od C^* odgovaraju disjunktnoj uniji reznih skupova od G, pa bi C bio disjunktna unija barem dva rezna skupa, suprotno pretpostavci. ■

Uočimo da je definicija apstraktnog duala dobra i da nasljeđuje sva potrebna svojstva. Nadalje, ako je graf planaran, apstraktni dual uvijek postoji. Ustvrdit ćemo sada da vrijedi i obrat – ako dual postoji, onda je graf planaran. Na taj način dobivamo da ovakva apstraktna definicija dualnosti poopćuje onu definiciju geometrijske dualnosti, ali i više – ona karakterizira planarne grafove!

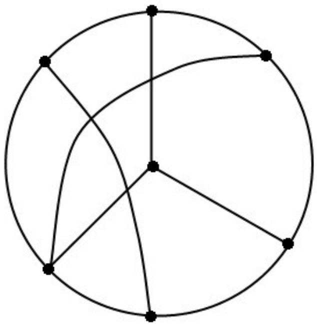
Teorem 7.20 Graf je planaran onda i samo onda ako ima apstraktni dual.

7.4 Zadaci za samostalan rad

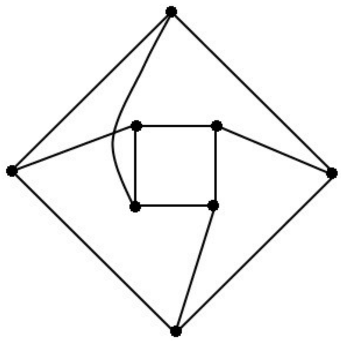
Zadatak 7.10 Primjenom Kuratowskijevog teorema ispitajte je li sljedeći graf planaran.



Zadatak 7.11 Ispitajte je li sljedeći graf planaran.



Zadatak 7.12 Ispitajte je li sljedeći graf planaran.

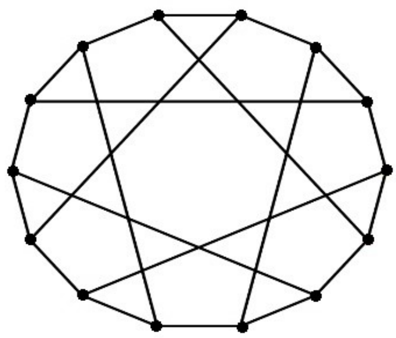


Zadatak 7.13 Neka je $X = \{1,2,3,4,5\}$ i neka je V skup svih dvočlanovih podskupova od X. Neka je G graf s vrhovima iz V pri čemo su dva vrha povezana bridom ako i samo ako su im pridruženi dvočlani podskupovi disjunktni. Je li G planaran graf?

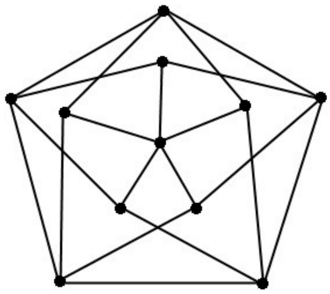
Zadatak 7.14 Ako graf G sadrži podgraf stezljiv do K_5, onda G nije planaran. Dokažite ovu tvrdnju pomoću Kuratowskijevog teorema! (Ovaj dio dokaza je bio preskočen u izlaganju).

Zadatak 7.15 Odredite križni broj potpunog grafa K_6.

Zadatak 7.16 Odredite križni broj Heawoodovog grafa.



Zadatak 7.17 Odredite križni broj Grötzschovog grafa.



Zadatak 7.18 Dokažite ili opovrgnite: stupanj svakog vrha u jednostavnom planarnom grafu je najviše 5.

Zadatak 7.19 Dokažite da u svakom jednostavnom planarnom bipartitnom grafu s najmanje dva brida vrijedi $2f \leq m$. Za koje se planarne potpune bipartitne grafove u navedenoj nejednakosti postiže jednakost?

Zadatak 7.20 Korištenjem Eulerove formule dokažite da za broj bridova m i broj vrhova n povezanog planarnog grafa G struka 5 vrijedi

$$m \leq \frac{5}{3}(n-2).$$

Poopćite ovu ocjenu za odnos broja bridova m i broja vrhova n za povezani planarni graf struka r.

Zadatak 7.21 Dokažite da jednostavan povezan planaran graf s n vrhova ima najviše $2n-4$ strana.

Zadatak 7.22 Koliko najmanje vrhova može imati jednostavan povezan planaran 5-regularan graf? Konstruirajte jedan takav minimalan primjer.

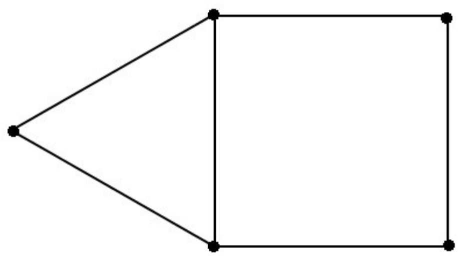
Zadatak 7.23 Pokažite da svaki planaran graf s barem 4 vrha ima najmanje 4 vrha stupnja manjeg ili jednakog 5.

Zadatak 7.24 Kolika je gustoća $t(K_7)$ potpunog grafa K_7?

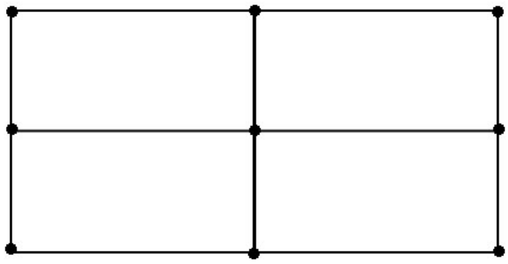
Zadatak 7.25 Odredite gustoću Petersenovog grafa.

Zadatak 7.26 Odredite gustoću Heawoodovog grafa.

Zadatak 7.27 Nađite dual grafa sa slike.



Zadatak 7.28 Nađite dual grafa sa slike.



Zadatak 7.29 Ako je C ciklus, a R rezni skup povezanog grafa G, onda C i R imaju parni broj zajedničkih bridova. Dokažite ili opovrgnite ovu tvrdnju.

Rješenja zadataka

7.10 Nije.
7.11 Nije.
7.12 Nije.
7.13 Nije.
7.15 $cr(K_6) = 3$.
7.16 $cr(G) = 3$.
7.17 $cr(G) = 5$.
7.18 Tvrdnja ne vrijedi: $K_{1,6}$ je planaran graf.
7.19 Jednakost se postiže za $K_{1,n}$ i $K_{2,n}$, $n \geq 1$.
7.22 $n \geq 12$, ikosaedar.
7.24 $t(K_7) = 2$.
7.25 $t(G) = 2$.
7.26 $t(G) = 2$.

7.5 Istraživački problemi

Problem 7.1 Dokažite Kuratowskijev teorem.
Problem 7.2 Planarni graf uvijek je moguće prikazati u ravnini bridovima koji su dužine (nisu nam potrebni zakrivljeni bridovi). To netrivijalno svojstvo planarnih grafova nezavisno su dokazali K. Wagner 1936. i I. Fary 1948. godine. Proučite dokaze ove tvrdnje. Uz ovaj rezultat veže se zanimljiv problem umjetničke galerije (*art gallery problem*). Originalni problem postavlja pitanje koliki je minimalni broj čuvara koji mogu nadgledati čitavu galeriju. Zanimljivo, problem je postavio američki matematičar Victor Klee, prezimenjak slavnog Paula, jednog od najvećih modernih umjetnika. Istražite koja je matematička formulacija problema umjetničke galerije. Koje je rješenje?
Problem 7.3 Pronađite neki od priznatijih polinomijalnih algoritama za ispitivanje planarnosti, proučite ga, te ga implementirajte. Pokažite na računalu koliko je efikasan.
Problem 7.4 Problem određivanja križnog broja potječe od *problema tvornice cigli*. Mađarski matematičar P. Turán postavio je pitanje koliki je križni broj potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$. Zanimljivo je kako je zanimanje za ovaj problem proisteklo iz Turánovog iskustva teškog rada u tvornici cigli u vrijeme Drugog svjetskog rata. Istražite poznate rezultate o križnom broju za potpune grafove K_n i potpune bipartitne grafove $K_{m,n}$.

8. Bojanja grafova

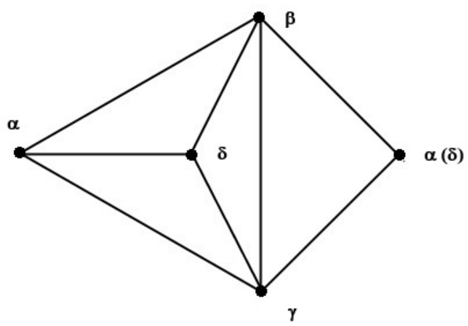
8.1 Bojanja vrhova

Definicija 8.1 **Bojanje zadanog grafa** G je pridruživanje nekog skupa boja skupu vrhova od G, na način da je svakome vrhu pridružena jedna boja, tako da su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Za bojanje ćemo reći da je k**-bojanje** ako smo upotrijebili k boja u ovom pridruživanju. Graf G je k**-obojiv**, ako postoji s-bojanje grafa G, za neki $s \leq k$. ■

Svaki graf s n vrhova je n-obojiv, budući možemo svaki vrh obojati nekom drugom bojom. U tom smislu jedino zanimljivo pitanje ostaje koliki je najmanji broj boja koji se treba upotrijebiti da bi se zadani graf korektno obojao.

Definicija 8.2 Ako je graf G k-obojiv, ali nije $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je G k**-kromatski**. Dotični najmanji broj boja k s kojim se graf može pobojati nazivamo **kromatski broj** te ga označavamo s $\chi(G)$. ■

Uočimo da je svaki podgraf k-obojivog grafa k-obojiv, pa vrijedi: ako je H podgraf od G, onda je $\chi(H) \leq \chi(G)$.



■ **Primjer 8.1** Zadani graf je 4-obojiv, a nije 3-obojiv, pa je $\chi(G) = 4$. ■

Pretpostavljat ćemo da su grafovi jednostavni (višestruki bridovi ne bi imali nikakvog utjecanja na problem bojanja, a petlja je kontradiktorna sama po sebi, tj. vrh incidentan s petljom nije obojiv niti na jedan način).

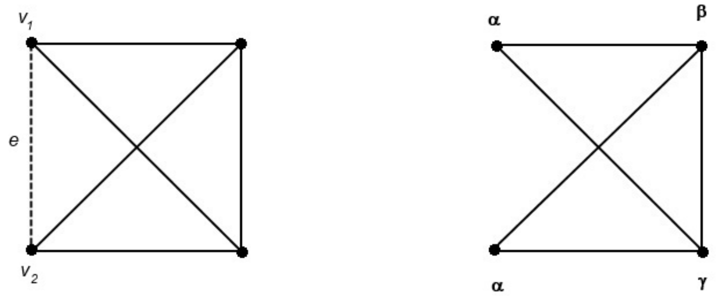
■ **Primjer 8.2** Za neke klase grafova je jednostavno ustanoviti kromatski broj. Uvjerite se da vrijedi:

a) $\chi(C_{2l}) = 2$, $\chi(C_{2l+1}) = 3$,
b) $\chi(K_n) = n$,
c) $\chi(W_{2l}) = 4$, $\chi(W_{2l+1}) = 3$.

■

Zadatak 8.1 Neka je graf $G = K_n - e$ dobiven iz potpunog grafa K_n brisanjem jednog istaknutog brida e. Odredite $\chi(G)$.

Rješenje. Promotrimo prvo jedan primjer. Dan je graf K_4 i jedan istaknuti brid e. Znamo da je K_4 4-kromatski graf. Uočite da je $\chi(K_4 - e) = 3$.



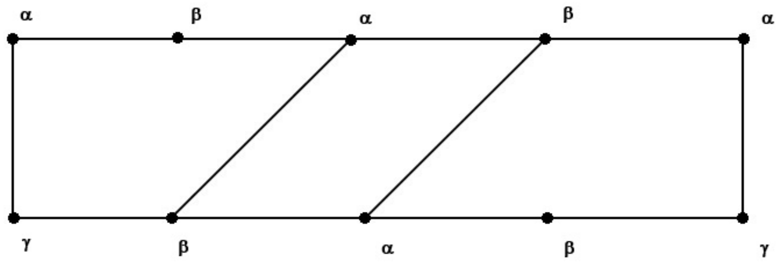
Dokazat ćemo da općenito vrijedi $\chi(K_n - e) = n - 1$. Neka je e brid između vrhova v_1 i v_2. Odredimo, za početak, kromatski broj grafa $G - v_1$ dobivenog iz grafa G brisanjem vrha v_1. Graf $G - v_1$ je izomorfan potpunom grafu K_{n-1} pa je $(n-1)$-kromatski. Stoga je $\chi(G) \geq n - 1$. Neka je dano jedno $(n-1)$-bojanje podgrafa $G - v_1$. Svaki vrh podgrafa $G - v_1$ obojan je drugom bojom. U grafu G, vrh v_1 susjedan je sa svim vrhovima osim vrha v_2. Obojamo li sada vrh v_1 istom bojom kao vrh v_2, dobit ćemo jedno $(n-1)$-bojanje od G. Zaključujemo da je $\chi(G) = n - 1$. ■

■ **Primjer 8.3** Uočimo da su kromatskim brojem grafovi u nekom smislu definirani.

a) $\chi(G) = 1$ onda i samo onda ako je G nul-graf.
b) $\chi(G) = 2$ onda i samo onda ako je G bipartitni graf.
c) Imamo li dano neko bojanje grafa G s točno $\chi(G)$ boja, uočimo da se skup vrhova $V(G)$ raspada na particiju podskupova vrhova koji su istobojni. Pri tome, vrhovi iz istog podskupa nisu susjedni, jer su obojani istom bojom. Na ovaj se način može poopćiti pojam bipartitnosti na k-partitne grafove, koju su karakterizirani činjenicom da svaki brid incidira s vrhovima koji pripadaju različitim podskupovima particije skupa vrhova. Točnije vrijedi: $\chi(G) = k$ onda i samo onda ako je G k-**partitan graf**.

■

Iako se prethodno poopćenje na k-partitne grafove činilo efikasnim, ono to nije. Naime, uopće nije jednostavno ustanoviti je li zadani graf k-partitan ili nije, ako je $k > 2$. U tom smislu morat ćemo se poslužiti nekim ocjenama, pa jedino ako ocjenu dostignemo, znat ćemo da je graf obojiv s toliko boja.



■ **Primjer 8.4** Graf sa slike je 3-kromatski! Naime, kako on ima C_5 kao podgraf, zaključujemo da je $\chi(G) \geq 3$, a budući smo našli (realizirali) jedno 3-bojanje, zaključujemo da je $\chi(G) = 3$. ■

Općenito, za graf G s n vrhova znamo da je $\chi(G) \leq n$, a ako u njemu nađemo neki potpuni podgraf K_r s r vrhova, onda je svakako $\chi(G) \geq r$. U smislu profinjavanja ovih ocjena, dokazat ćemo neke važne rezultate za kromatski broj. Prethodno uvedimo oznaku $\Delta(G)$, ili kratko samo Δ, za najveći stupanj vrha u promatranom grafu G.

Teorem 8.1 Ako je G jednostavni graf u kojem vrhovi imaju stupanj ne veći od Δ, onda je G $(\Delta+1)$-obojiv.

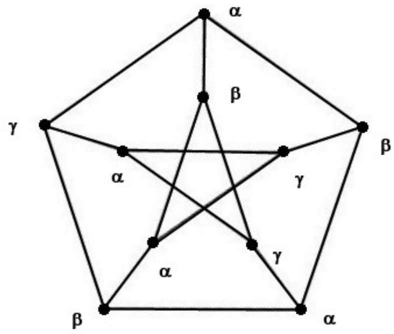
Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova od G. Neka je G jednostavni graf s n vrhova. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s $n-1$ vrhova i stupnja ne većeg od Δ. Uočimo jedan vrh, te ga izbacimo iz grafa, skupa s njemu incidentnim bridovima. Graf $G-v$ koji je preostao je graf s $n-1$ vrhom, vrhova stupnjeva ne većeg od Δ, pa vrijedi pretpostavka indukcije, što znači da ga možemo obojati s $\Delta+1$ bojom. Međutim, budući je $deg(v) \leq \Delta$, to su susjedi od v obojani s najviše Δ različitih boja, pa sam vrh v obojamo s nekom od preostalih boja. ■

Zapravo se može izreći i nešto jači teorem, koji dajemo bez dokaza.

Teorem 8.2 — Brooks, 1941. Ako je G jednostavni povezani graf koji nije potpun, te ako je najveći stupanj nekog vrha jednak Δ $(\Delta \geq 3)$, onda je G Δ-obojiv.

Zapitajmo se koliko nam ove ocjene za broj potrebnih boja pomažu. Na primjer, za cikluse nam prvi od ova dva teorema daje ocjenu koja se niti ne može popraviti. Daje li Brooksov teorem potpuni odgovor za **kubične grafove** (tj. 3-regularne)? Usporedite njegovu tvrdnju na Petersenovom grafu i 3-dimenzionalnoj kocki. No, promotrimo li grafove koji nisu ni blizu regularni, situacija više nije tako povoljna. Tipični primjeri kad Brooksov teorem ne pomaže previše u određivanju kromatskog broja su kotači W_n i potpuni bipartitni grafovi $K_{1,s}$.

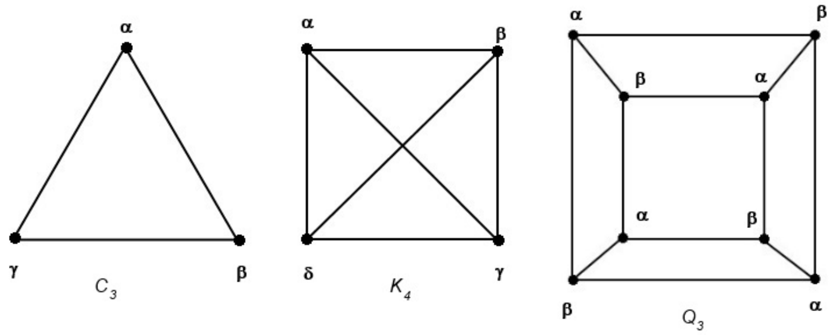
■ **Primjer 8.5** Petersenov graf G nije bipartitan pa je $\chi(G) > 2$. Petersenov graf je 3-regularan pa je prema Brooksovom teoremu $\chi(G) \leq 3$. Zaključujemo da je $\chi(G) = 3$.



■

Zadatak 8.2 Dokažite ili opovrgnite: kromatski broj Δ-regularnog grafa je uvijek Δ.

Rješenje. Tvrdnja, naravno, ne vrijedi. Evo i primjera: ciklus C_3 je 2-regularan graf, a pritom je i 3-kromatski. Tvrdnju opovrgavaju i grafovi K_4 i Q_3. Jesu li to jedini primjeri?



■

Loša situacija u određivanju ili ocjenjivanju kromatskog broja znatno je povoljnija ako dodatno pretpostavimo da je promatrani graf planaran. O tome govore sljedeći teoremi.

Teorem 8.3 Svaki jednostavni planarni graf je 6-obojiv.

Dokaz. Teorem dokazujemo matematičkom indukcijom po broju vrhova grafa G. Kao baza indukcije može poslužiti činjenica da je svaki graf s najviše 6 vrhova 6-obojiv. Neka je G jednostavan planaran graf s n vrhova, te neka su svi jednostavni planarni grafovi s $n-1$ vrhom 6-obojivi. Znamo da graf G sadrži vrh stupnja najviše 5, uočimo takav vrh i označimo ga s v. Pogledajmo graf $G-v$. To je graf s $n-1$ vrhom, dakle je 6-obojiv. No, onda 6-bojanje grafa G dobijemo tako da vrh v, stupnja ne većeg od 5, obojimo nekom bojom kojom nisu obojani njegovi susjedi. Takva boja naravno postoji, pa smo dobili 6-bojanje cijeloga G. ■

Teorem 8.4 Svaki jednostavni planarni graf je 5-obojiv.

Dokaz. Slično kao u prethodnom teoremu, jedino su tehnički detalji dokaza nešto kompliciraniji. Provodimo dakle opet indukciju po broju vrhova. Neka je G jednostavan planaran graf s n vrhova, te neka su svi jednostavni planarni grafovi s $n-1$ vrhova 5-obojivi. Sad, G ima neki vrh stupnja najviše 5, kojeg nazovemo s v. Pogledamo li $G-v$, vidimo da je to graf s $n-1$ vrhova, pa je po pretpostavci indukcije 5-obojiv. Želimo još dovršiti bojanje vrha v, odnosno cijelog grafa G.

Ako je $deg(v) < 5$, onda vrh v možemo obojati s nekom od boja kojom nisu obojani susjedi od v, pa bi dokaz bio gotov. Zato, pogledajmo slučaj kad je $deg(v) = 5$, te neka su $v_1, v_2, \dots, v_5$ susjedi od v. Ako bi svi $v_1, v_2, \dots, v_5$ bili međusobno susjedni, onda bi G imao K_5 kao podgraf, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je G planaran. Postoje dakle sigurno neka dva nesusjeda među njima, neka su to na primjer v_1 i v_3. Stegnemo li bridove vv_1 i vv_3, dobit ćemo graf s $n-2$ vrha koji je svakako, po pretpostavci indukcije, 5-obojiv. Zaista taj graf sada i obojamo. Razložimo li graf natrag (stegnute bridove rastegnemo), uz čuvanje nađenog bojanja, vidimo da v_1 i v_3 imaju istu boju (jer su bili stegnuti u isti vrh), što je korektno, budući oni nisu susjedi. No, sada je skup susjeda vrha v obojan s najviše 4 boje, pa vrh v obojamo nekom od preostalih boja. Time je korak indukcije proveden i teorem dokazan. ∎

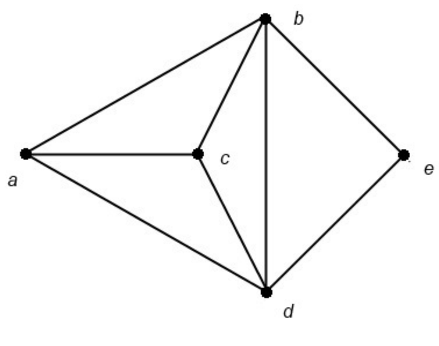
Možemo li nastaviti smanjivati ocjenu za kromatski broj? Da, za još jedan korak. No sljedeći važni čuveni teorem nećemo dokazivati, budući je trebalo puno godina a i puno kompjutorskog vremena da se dokaz provede. Pitanje o 4-obojivosti planarnih grafova formulirano je još davne 1852. godine, a prvi dokaz dali su Appel i Haken 1976.

Teorem 8.5 Svaki jednostavni planaran graf je 4-obojiv.

Zadatak 8.3 Kemičar mora pohraniti 5 kemikalija, a, b, c, d, e u razne dijelove skladišta. Neke od kemikalija burno reagiraju ako dođu u kontakt, pa se svakako moraju čuvati odvojeno. Tablica pokazuje kemikalije koje burno reagiraju. Koliko je odvojenih dijelova skladišta potrebno da bi se one pospremile?

	a	b	c	d	e
a	-	+	+	+	-
b	+	-	+	+	+
c	+	+	-	+	-
d	+	+	+	-	+
e	-	+	-	+	-

Rješenje. Radi se, očito, o bojanju grafa s 5 vrhova, gdje je susjedstvo dano znakom $+$ u gornjoj tablici.



∎

Već smo vidjeli da nam za ovaj graf trebaju 4 boje, dakle potrebna su 4 odvojena dijela skladišta.

Zadatak 8.4 Neka je G jednostavni planarni graf bez trokutova.

a) Korištenjem Eulerove formule dokažite da G sadrži vrh stupnja najviše 3.
b) Matematičkom indukcijom dokažite da je G 4-obojiv.

Rješenje. a) Pokazali smo da za planarne grafove bez trokutova vrijedi ocjena za broj bridova $m \leq 2n-4$. S druge strane, ako bi svaki vrh bio stupnja barem 4, $deg(v) \geq 4$, onda bismo prebrajanjem incidencija dobili

$$2m \geq 4n \Rightarrow m \geq 2n\,.$$

Sveukupno imamo

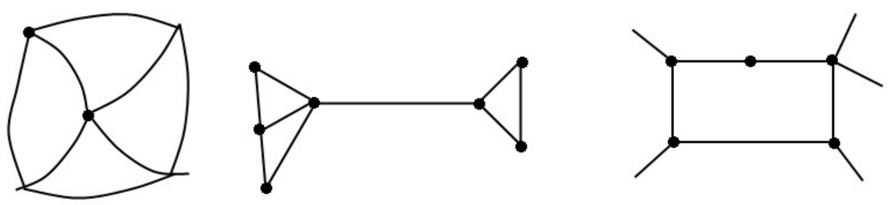
$$2n \leq m \leq 2n-4\,,$$

što je kontradikcija. Dakle, postoji vrh stupnja najviše 3.

b) Pokažimo korak indukcije. U zadanom grafu G postoji dakle vrh stupnja najviše 3. Pogledamo li $G-v$, on je po pretpostavci indukcije 4-obojiv, pri čemu su susjedi od v obojani s najviše 3 različite boje, pa sam v možemo pobojati s nekom preostalom bojom. ∎

* * * * *

Povijesno je **Problem četiri boje** nastao i vezan je uz bojanje geografskih karata. Postavimo si pitanje, koliko je boja potrebno da bi se dana geografska politička karta obojala tako, da zemlje koje graniče budu obojane različitim bojama. Vrlo jednostavan univerzalni odgovor na to pitanje dajemo odmah: potrebne su 4 boje. Prije nego to razjasnimo, evo nekoliko dogovora o tome što ćemo smatrati kartama.

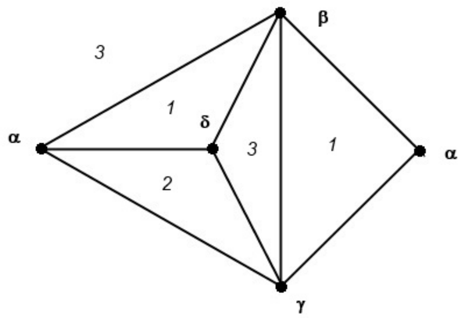


Smatramo da su države susjedne ako imaju zajednički brid kao granicu, a ne zajednički vrh (slika lijevo). Brid koji bi bio most nije dopustiv – to ništa ne predstavlja. Konačno, ništa ne predstavlja ni vrh stupnja 2 - takve bismo pregazili, a interpretacija nije moguća. Dakle, u kartama kakve ćemo gledati svi vrhovi imaju stupanj barem 3.

Definicija 8.3 **Karta** je 3-povezan planarni graf prikazan u ravnini. ∎

Definicija 8.4 Za kartu kažemo da je k-**obojiva** (f) ili k-**strano obojiva** ako se njene strane mogu obojati s k boja tako da nikoje dvije strane sa zajedničkim bridom nisu obojane istom bojom. ∎

U situacijama kad bi moglo doći do zabune govorit ćemo o vršnom odnosno o stranom bojanju i pisati da je graf k-**vršno** (v) odnosno k-**strano** (f) **obojiv**.



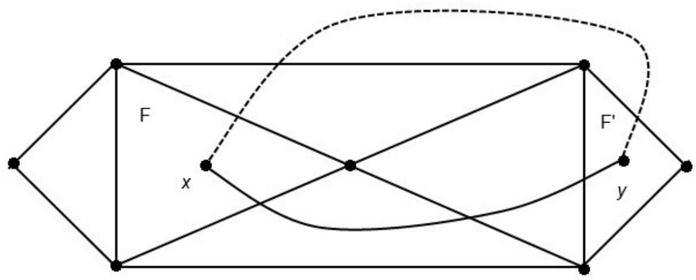
■ **Primjer 8.6** Graf sa slike je 3-obojiv (f) i 4-obojiv (v). ■

Usvojimo sada neke činjenice u svezi s bojanjem strana.

Teorem 8.6 Karta G je 2-strano obojiva onda i samo onda ako je G eulerovski graf.

Dokaz. Ovo je lijepa karakterizacija eulerovskih grafova. U ekvivalenciji moramo dokazati dva smjera.

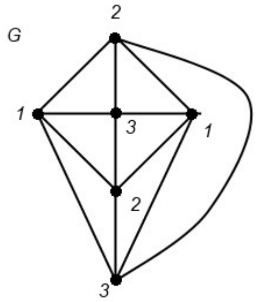
$(\Rightarrow)$ Neka je G 2-strano obojiva karta. Pogledajmo bilo koji vrh od G, kažimo v. Broj strana koje okružuju v zbog 2-obojivosti mora biti paran (boje naime tada alterniraju). No, ako je broj strana paran, onda je i broj granica među njima paran, tj. v je incidentan s parnim brojem bridova, dakle je parnoga stupnja. Kako je v bio proizvoljno izabran, ovo vrijedi za svaki vrh v, pa je po karakterizaciji eulerovskih grafova zadana karta G eulerovska.
$(\Leftarrow)$ Neka je dan eulerovski graf G. Obojimo kartu G na sljedeći način.

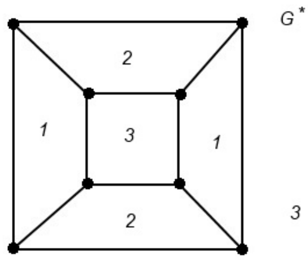


Uzmimo proizvoljnu stranu F i obojamo je crveno. Uočimo neku drugu stranu F', te izaberemo po jednu točku unutar strana F i F', a zatim na proizvoljan način spojimo te dvije točke, bilo kako, samo da ne prolaze nekim vrhoma od G (tj. tako da sve bridove pri prolasku sijeku negdje po sredini). Ako ovako formirana spojnica strana F i F' siječe bridove od G neparan broj puta, onda F' obojamo plavom (onom drugom bojom na raspolaganju), a ako spojnica siječe bridove paran broj puta, onda obojimo F' crvenom bojom. Tvrdimo da je ovo dobro definirano bojanje strana. Naime, pitamo se jesmo li mogli naći dvije različite spojnice između F i F' koje bi bile različite parnosti u smislu broja bridova koje presijecaju. No, uzmemo li dvije takve spojnice s različitim bridovima, one zatvaraju ciklus, koji je, tvrdimo, nužno parne "duljine". Ta činjenica slijedi zbog toga što je svaki vrh parnog stupnja. Ako je obiđen jedan jedini vrh, tvrdnja je očevidna, a ako je obiđeno više vrhova, pogleda se parnost bridova zaokruženih stvorenim ciklusom i vidi da je broj vrhova incidentnih s neparnim brojem presječenih bridova nužno paran (tehničke detalje ostavljamo čitatelju). Time smo obrazložili da je ovo bojanje dobro definirano, no očito je da je to bojanje korektno, u smislu da su susjedne strane raznobojne, pa je i ovaj smjer dokazan. ■

Teorem 8.7 Neka je G ravninski prikaz jednostavnog planarnog grafa G, te neka je G^* geometrijski dual od G. Tada je G k-vršno obojiv onda i samo onda ako je G^* k-strano obojiv.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Možemo pretpostaviti da je G povezan, pa je G^* karta. Podsjetimo se da smo uspostavili korespondenciju između vrhova grafa i strana njegovog duala, u smislu da svaka strana od G^* sadrži točno jedan vrh od G. Ako postoji k-vršno bojanje od G, onda tvrdimo da možemo obojati strane od G^* tako da svaka strana „naslijedi" boju onog vrha grafa G kojeg po konstrukciji duala sadrži (s kojom je u bijektivnoj korespondenciji). Dvije susjedne strane od G^*, na ovaj način bojanja, ne mogu biti jednako obojane, jer su njima korespondenti vrhovi u G susjedni, pa su svakako različito obojani. Tako smo našli k-bojanje duala G^*, dakle je on k-strano obojiv.





($\Leftarrow$) Pretpostavimo da imamo dano k-strano bojanje grafa G^*. Obojamo sad vrhove grafa G tako da onaj vrh od G koji pripada nekoj strani od G^* bude obojan isto kao i ta strana. Dva susjedna vrha nisu obojana istom bojom, jer su korespondentne strane susjedne u G^*. Zato je G k-vršno obojiv. ■

Dokažimo sada prethodni teorem (o tome kada je karta 2-strano obojiva) na drugi način. Karta G je 2-strano obojiva onda i samo onda ako je njen dual, graf G^*, 2-vršno obojiv, tj. bipartitan. No, G^* je bipartitan i planaran onda i samo onda ako je G eulerovski (i planaran, naravno). Ova ekvivalencija je jednostavan zadatak te je ostavljamo čitateljima za dokazati.

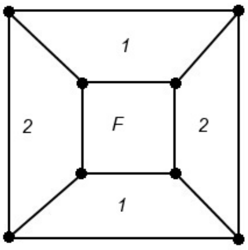
Korolar 8.8 Problem četiri boje za karte ekvivalentan je problemu četiri boje za planarne grafove.

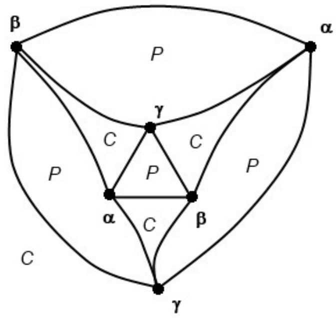
Teorem 8.9 Neka je G kubična karta. Tada je G 3-strano obojiva onda i samo onda ako je svaka strana od G omeđena parnim brojem bridova.

Dokaz. Kubična karta je 3-regularna karta. Dokazujemo svaki smjer zasebno.

($\Rightarrow$) Za danu kartu uočimo jednu njenu stranu F. Strane koje su susjedne strani F moraju alternirati u boji (jer su na raspolaganju još samo dvije boje), pa je svaka strana omeđena parnim brojem bridova.

($\Leftarrow$) Dokazujemo dualnu tvrdnju, tj. ako je G jednostavni povezani ravninski graf u kojem je svaka strana trokut (ovo je dualno 3-regularnosti), te je svaki vrh parnoga stupnja, onda je takav graf G 3-vršno obojiv. Konstruirat ćemo jedno takvo vršno 3-bojanje. Označimo si boje na raspolaganju s α, β i γ. Kako je G eulerovski, njegove se strane (koje su trokutovi) mogu obojati s dvije boje, na primjer s crvenom (C) i plavom (P). Traženo vršno 3-bojanje dobivamo tako da vrhove crvenih trokutova pobojamo bojama α, β i γ u pozitivnom smjeru, a vrhove plavih trokutova pobojamo tim bojama u negativnom smjeru. Uočimo da je ovo bojanje moguće proširiti na cijeli graf.

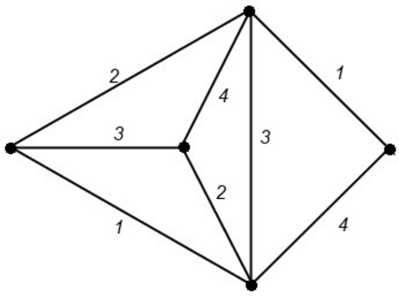




■

8.2 Bojanja bridova

Definicija 8.5 Za graf G kažemo da je **bridno k-obojiv** ako se njegovi bridovi mogu obojati s k boja tako da su bridovi koji su susjedni (oba incidentni s nekim vrhom) različito obojani. Ako je G bridno k-obojiv, ali nije bridno $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je **kromatski indeks grafa** G jednak k i pišemo $\chi'(G) = k$. ■



■ **Primjer 8.7** Graf sa slike je bridno 4-obojiv, dakle je $\chi'(G) = 4$. Naime, postoji vrh stupnja 4, pa zaključujemo da je $\chi'(G) \geq 4$; kako smo našli jedno bridno 4-bojanje, time je dokazano da je kromatski indeks tog grafa jednak 4. ■

Napomenimo da problem nalaženja kromatskog indeksa može svesti na problem nalaženja kromatskog broja. Vrijedi naime

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

gdje smo s $L(G)$ označili bridni graf zadanog grafa. Podsjećamo, bridni graf $L(G)$ grafa G je graf čiji skup vrhova predstavljaju bridovi od G, a oni su susjedni ako su u G incidentni s nekim zajedničkim vrhom.

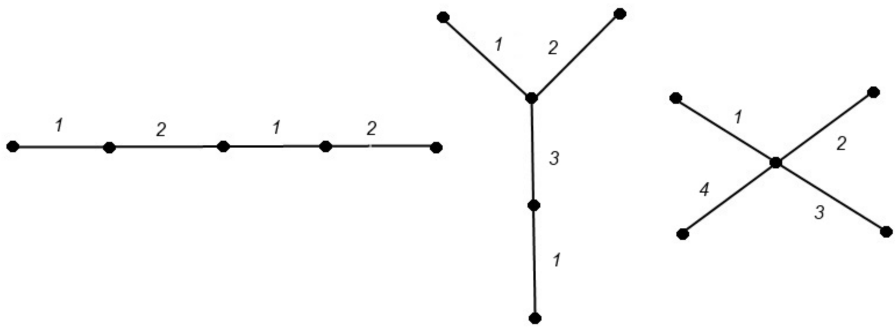
Svođenje nalaženja kromatskog indeksa na nalaženje kromatskog broja nam nimalo ne olakšava posao. Već u prethodnom primjeru smo se koristili očevidnom činjenicom da je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, jer ako postoji vrh stupnja Δ, onda bridovi koji s tim vrhom incidiraju moraju biti obojani s Δ različitih boja. Kao i u slučaju bojanja vrhova, i ovdje postoji dobra ocjena odozgo.

Teorem 8.10 — Vizing, 1964. Ako je G jednostavan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1\,.$$

Znajući ovaj rezultat, preostaje nam za dani graf odrediti jednu od dvije mogućnosti za kromatski indeks: to je ili najveći stupanj vrha u grafu, ili taj broj uvećan za jedan. Može se pokazati da skoro svi grafovi imaju kromatski indeks jednak Δ, no za konkretan graf nam ta spoznaja ne pomaže u odlučivanju.

■ **Primjer 8.8** Poznato nam je da postoje tri neizomorfna stabla s 5 vrhova. Kromatski indeksi stabala sa slike su redom: 2, 3 i 4.



■

■ **Primjer 8.9** Odredimo kromatski indeks nekih od poznatih klasa grafova:

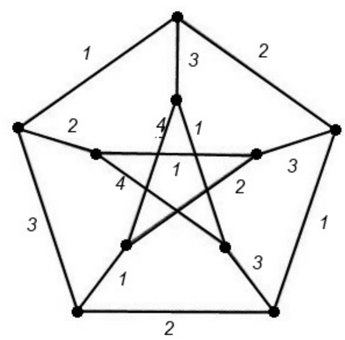
a) $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{za } n \text{ paran} \\ 3, & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}$

b) $\chi'(W_n) = n - 1$, za $n \geq 4$.

Zašto? ■

Zadatak 8.5 Odredite kromatski indeks Petersenovog grafa.

Rješenje. Petersenov graf G je 3-regularan. Prema Vizingovom teoremu vrijedi $3 \leq \chi'(G) \leq 4$. Pokazat ćemo da je $\chi'(G) = 4$. Uočimo, vanjski ciklus Petersenovog grafa je ciklus C_5, stoga se može bridno obojati s tri boje. Bridovi koji spajaju vrhove vanjskog ciklusa s vrhovima unutarnjeg ciklusa obojaju se s jednom od tri uvedene boje, pritom poštujući odabrano bridno bojanje vanjskog ciklusa. Preostaje bridno obojati unutarnji ciklus C_5. Za to su potrebne najmanje tri boje. Uvjerite se sami da unutarnji ciklus Petersenovog grafa nije moguće obojati s tri otprije uvedene boje bez narušavanja regularnosti odabranog bojanja ostatka Petersenovog grafa.



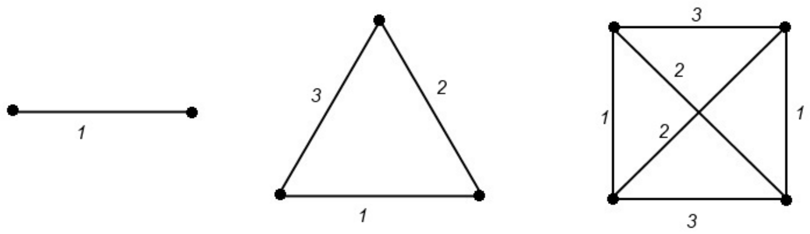
■

Pokazali smo da je $\chi'(K_4) = 3$, tj. da se postiže donja ocjena za kromatski indeks. To ne vrijedi uvijek za potpune grafove. Točnije, vrijedi sljedeći

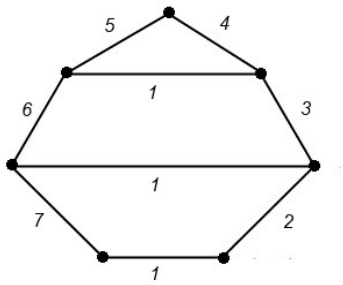
Teorem 8.11

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & \text{za } n \text{ neparan} > 1 \\ n-1, & \text{za } n \text{ paran} \end{cases}$$

Dokaz. Prije nego krenemo u dokazivanje, uočimo da je rezultat istinit za $n = 2$, kao i za $n = 3$, što pokazuju ove slike.



Ako je n neparan, onda smjestimo najprije njegove vrhove u ravninu kao vrhove pravilnog n-terokuta (kromatski indeks dakako je neovisan o tome kako graf prikažemo). Vanjski hamiltonovski ciklus pobojamo s n različitih boja, dakle svaki brid s drugom bojom. Sve preostale bridove („nutarnje dijagonale”) sada obojamo tako da svakoj dijagonali damo onu boju s kojom je pobojana stranica koja je s njom paralelna (takva je, uočimo, jednoznačno određena). Očito je da je ovo bojanje dobro, u smislu da su susjedni bridovi raznobojni. Dakako, postavlja se pitanje, nismo li mogli proći s jednom bojom manje (jer mi smo pobojali graf s $\Delta + 1$ bojom).

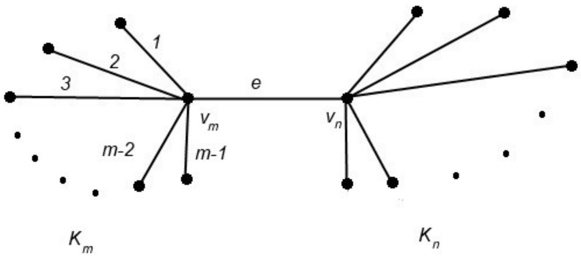


No, kako god mi bojali, bridova iste boje može biti, za neparni n, najviše $\frac{n-1}{2}$ (Kad pobojamo jedan brid, okupirali smo 2 vrha, u njima se više ista boja ne smije pojaviti. Bojajući dalje, možemo u najboljem slučaju istom bojom okupirati $n-1$ vrh). No, ako bismo bojali s $n-1$ bojom, onda možemo pobojati najviše $\frac{(n-1)^2}{2}$ bridova, što je premalo, jer K_n ima $\frac{n(n-1)}{2}$ bridova. Dakle, nam nužno treba n boja (i tada uspijevamo točno pobojati sve bridove tako da je svakom bojom pobojano $\frac{n-1}{2}$ bridova.

Ako je n paran, onda ćemo bojanje za K_n dobiti iz bojanja za K_{n-1}. Obojamo dakle K_{n-1} s $n-1$ bojom, te dodajmo tom grafu još jedan vrh i spojimo ga sa svakim preostalim vrhom. Budući je K_{n-1} $(n-2)$-regularan graf, svaki od njegovih vrhova na sebi nema brid neke boje. Upravo tom bojom pobojamo svaki od bridova dobivenih spajanjem nekog vrha grafa K_{n-1} s nadodanim vrhom. Tako smo u ovom slučaju postigli donju ocjenu Vizingovog teorema, pa je tvrdnja dokazana. ■

Zadatak 8.6 Zadan je graf G u kojem postoji brid e takav da je $G - e = K_n \cup K_m$, $n \leq m$. Odredite kromatski indeks grafa G.

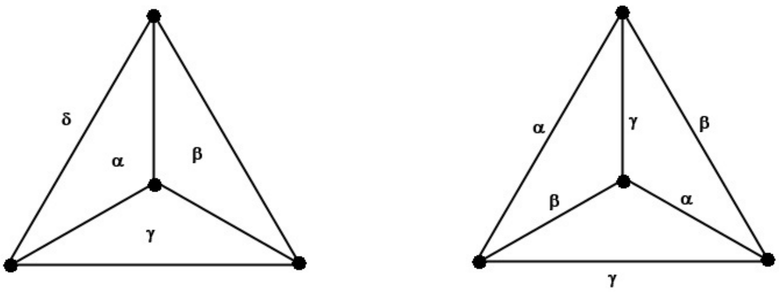
Rješenje. Uočimo da zbog $n \leq m$ vrijedi $\chi'(K_n) \leq \chi'(K_m)$. Nadalje, lako se uočava da je $\chi'(G) \leq \chi'(K_m) + 1$. Neka je e brid između vrhova v_m i v_n, pri čemu je v_m vrh podgrafa K_m, a v_n vrh podgrafa K_n.



Ako je m paran, onda je $\chi'(K_m) = m - 1$ i brid v_m je susjedan s $m - 1$ bridova od K_m obojanih s $m - 1$ boja. Stoga je za bojanje brida e potrebno uvesti još jednu boju. Kako je $n \leq m$, graf K_n je moguće bridno obojati s $m - 1$ bojom, pa je $\chi'(G) = m$. Ako je m neparan, onda je $\chi'(K_m) = m$. Vrh v_m susjedan je s $m - 1$ bridom obojanim u $m - 1$ boja. Pridružimo bridu e preostalu boju iz bridnog bojanja K_m. Odavde lagano slijedi da je $\chi'(G) = m$. ■

Teorem 8.12 Teorem o četiri boje ekvivalentan je tvrdnji da je $\chi'(G) = 3$ za svaku kubičnu kartu G.

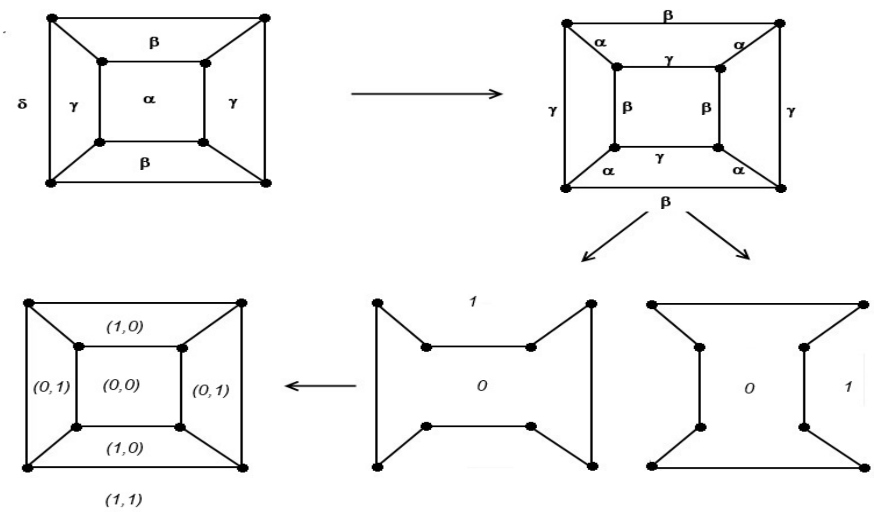
Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da nam je dano 4-bojanje strana od G. Identificirajmo te četiri boje ovako: $\alpha = (1,0)$, $\beta = (0,1)$, $\gamma = (1,1)$ i $\delta = (0,0)$. Konstruirat ćemo 3-bojanje bridova od G na način da brid e pobojamo onom bojom koju dobijemo binarnim zbrajanjem po komponentama boja strana koje graniče preko brida e.



Tvrdimo da je ovo zaista bridno 3-bojanje. Svakako, neku petu boju nismo mogli dobiti, binarnim zbrajanjem ostali smo u skupu dane 4 boje. Također, uočimo i da se boja δ ne može pojaviti, jer različite boje iz gornjeg skupa od 4 boje ne mogu nikako dati δ. (Usput, boja δ dobiva se kao $\delta = \alpha + \alpha = \beta + \beta = \gamma + \gamma$.) Dakle, pojavile su se samo boje α, β i γ. Dalje, dva susjedna brida su sigurno različito obojana, inače bi, budući susjedni bridovi graniče s jednom istom stranom, recimo γ, pa bi bilo npr. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, što je kontradikcija. Uočimo da smo u bitnome od skupa boja formirali Kleinovu četvornu grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i da u njoj računamo.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je dano 3-bojanje bridova u G. Tada u svakom vrhu incidiraju bridovi sve tri boje. Podgraf od G određen onim bridovima koji su pobojani s α ili β je regularan graf stupnja 2, pa je 2-strano obojiv. (Teorem je rekao da je karta 2-strano obojiva onda i samo onda ako je eulerovski graf; 2-regularan graf je eulerovski ako je povezan, ako nije, tvrdnja također vrijedi što se pokaže slično.) Pobojamo strane od ovog 2-regularnog podgrafa bojama 0 i 1. Na sličan način obojamo bojama 0 i 1 podgraf od G određen bridovima pobojanima s α i γ. Svekupno, svakoj smo strani od G pridijelili dvije koordinate (boje), zapišimo ih kao (x,y), $x,y \in \{0,1\}$. Imamo dakle 4 boje i tvrdimo da je to traženo bojanje strana. Zaista, po konstrukciji, susjedne strane ne mogu imati iste obje koordinate, pa je time teorem dokazan. ■

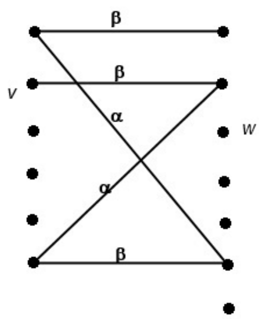
■ **Primjer 8.10** Ilustrirajmo konstruirana bojanja iz prethodnog teorema na kocki.



■

Teorem 8.13 — König, 1916. Ako je G bipartitan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je $\chi'(G) = \Delta$.

Dokaz. Matematičkom indukcijom po broju bridova od G. Po pretpostavci indukcije, moguće je obojati s Δ boja sve bridove od G osim jednog, kažimo brida vw. Oduzmemo li taj brid, vrijedi da je $deg(v) \leq \Delta - 1$, $deg(w) \leq \Delta - 1$, pa barem jedna boja nedostaje u vrhovima v i w. Ako je to ista boja, onda njome obojamo brid vw pa smo gotovi. Ako pak takva boja ne postoji, učinimo sljedeće. Neka je α boja koja nedostaje u vrhu v, te neka je β boja koja nedostaje u vrhu w. Neka je $H_{\alpha\beta}$ povezani podgraf od G koji se sastoji od vrha v i onih vrhova i bridova od G koji se mogu doseći iz v bridovima obojanima s α ili β.

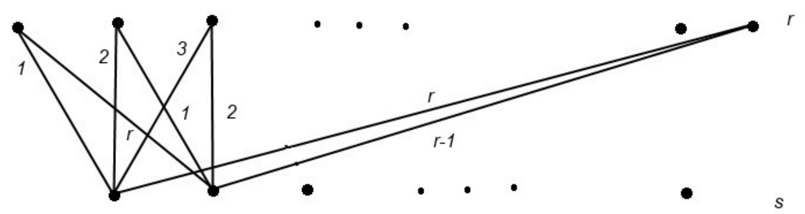


Budući je G bipartitan, podgraf $H_{\alpha\beta}$ ne sadrži vrh w. Stoga, zamjenom boja α i β u tom podgrafu ništa ne kvarimo. Nakon zamjene obojamo brid vw s bojom β, to je naime sada boja koja nedostaje i u vrhu v i u vrhu w, čime smo dovršili Δ-bojanje danog bipartitnog grafa. ■

Korolar 8.14 $\chi'(K_{r,s}) = max\{r,s\}$.

Zadatak 8.7 Konstruirajte efektivno jedno $\chi'(G)$-bojanje za $K_{r,s}$.

Rješenje. Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je $r \geq s$. Tada bojamo kao na slici ispod:



Boje prvog od s vrhova drugog skupa su redom $(1,2,\ldots,r)$, drugog su $(2,3,\ldots,r,1)$, i konačno s-tog vrha su $(r,1,2,\ldots,r-1)$. To je, očevidno dobro bojanje. ■

Zadatak 8.8 Odredite kromatski indeks k-kocke Q_k.

Rješenje. Graf Q_k je k-regularan. S obzirom da je Q_k bipartitan graf, on je po Königovom teoremu bridno k-obojiv. ■

Zadatak 8.9 Dokažite da je $\chi'(G) = 3$ za svaki kubični hamiltonovski graf G.

Rješenje. Po pretpostavci zadatka je $\chi'(G) \geq 3$, pa treba naći jedno 3-bojanje bridova. Uočimo hamiltonovski ciklus i obojamo ga naizmjence s 2 boje (kubični graf ima paran broj vrhova, jer je $3n = 2m$). Preostale bridove obojamo trećom bojom. ■

Zadatak 8.10 Neka je G jednostavan povezan neregularan graf. Dokažite da vrijedi $\chi(G) \leq \chi'(G)$.

Rješenje. Uočimo da G nije potpuni graf jer G nije regularan. Stoga, za $\Delta(G) \geq 3$, možemo primijeniti Brooksov teorem: $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Prema Vizingovom teoremu je $\Delta(G) \leq \chi'(G)$. Dakle, za $\Delta(G) \geq 3$ vrijedi

$$\chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi'(G).$$

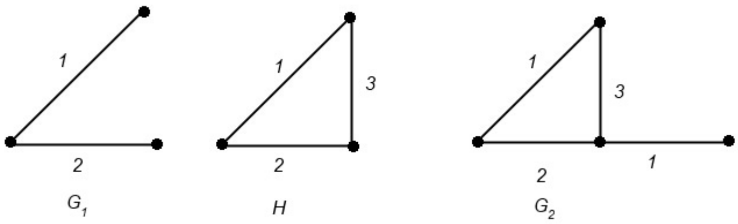
Preostaje nam zasebno ispitati slučajeve kada je $\Delta(G) = 1$ i $\Delta(G) = 2$. Jedini povezani graf s maksimalnim stupnjem $\Delta(G) = 1$ je lanac P_2 koji je regularan, stoga ne zadovoljava pretpostavke ovog zadatka. Povezani grafovi s maksimalnim stupnjem $\Delta(G) = 2$ su lanci P_n i ciklusi C_n, $n \geq 3$. Ciklus C_n je regularan, a lanac P_n nije. Vrijedi da je $\chi(P_n) = \chi'(P_n) = 2$, stoga je trivijalno ispunjen zahtjev $\chi(P_n) \leq \chi'(P_n)$. Ovime smo dokazali zadanu tvrdnju. ■

Zadatak 8.11 Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su G_1 i G_2 grafovi za koje vrijedi

$$\chi'(G_1) = \Delta(G_1), \qquad \chi'(G_2) = \Delta(G_2),$$

te ako je H graf za koji vrijedi $G_1 \leq H \leq G_2$, onda je $\chi'(H) = \Delta(H)$.

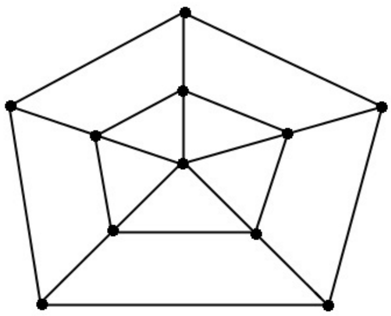
Rješenje. Pokazat ćemo da tvrdnja ne vrijedi. Evo jednog primjera grafova G_1, H i G_2 koji zadovoljavaju pretpostavke teorema. Graf G_1 podgraf of H, a H je podgraf od G_2.



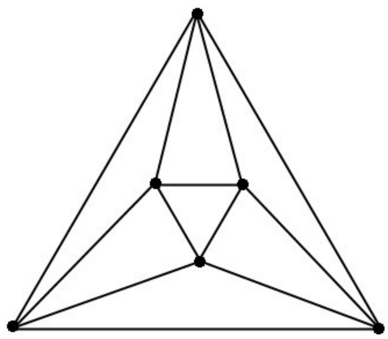
Vrijedi $\chi'(G_1) = \Delta(G_1) = 2$, $\chi'(G_2) = \Delta(G_2) = 3$, ali i $\chi'(H) = 3$, $\Delta(H) = 2$. ∎

8.3 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 8.12 Odredite kromatski broj grafa sa slike.



Zadatak 8.13 Odredite kromatski broj oktaedra.



Zadatak 8.14 Odredite kromatski broj k-kocke Q_k.

Zadatak 8.15 Odredite kromatski broj grafa $K_{1,s}$.

Zadatak 8.16 Neka je G 3-regularni graf s $n > 4$ vrhova struka 3. Odredite $\chi(G)$.

Zadatak 8.17 Dokažite ili opovrgnite: kromatski broj Δ-regularnog grafa je uvijek $\Delta + 1$.

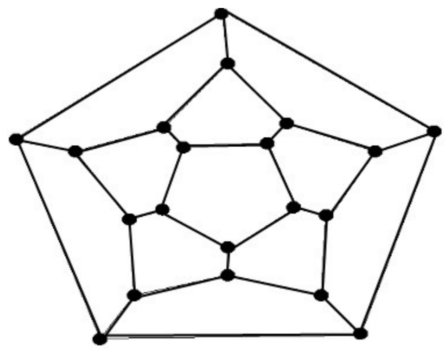
Zadatak 8.18 Kemičar mora pohraniti 7 kemikalija, a, b, c, d, e, f, h u razne dijelove skladišta. Neke od kemikalija burno reagiraju ako dođu u kontakt, pa se svakako moraju čuvati odvojeno. Tablica pokazuje kemikalije koje burno reagiraju. Koliko je odvojenih dijelova skladišta potrebno da bi se one pospremile?

	a	b	c	d	e	f	g
a	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
b	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
c	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
d	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
e	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
f	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
g	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

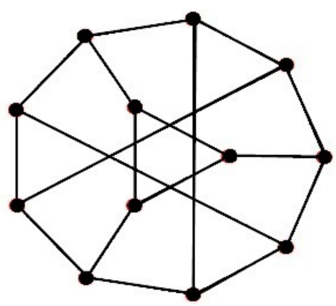
Zadatak 8.19 Matematičkom indukcijom dokažite da je svaki jednostavni planarni graf bez trokutova 3-obojiv.

Zadatak 8.20 Odredite kromatski indeks oktaedra.

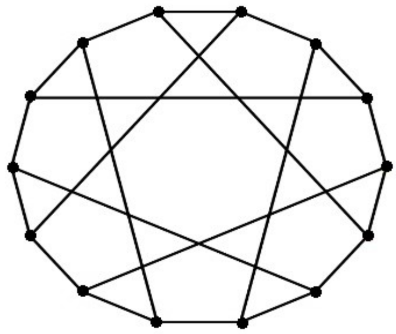
Zadatak 8.21 Odredite kromatski indeks dodekaedra.



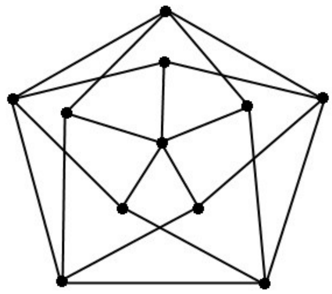
Zadatak 8.22 Odredite kromatski broj i kromatski indeks Tietzeovog grafa.



Zadatak 8.23 Odredite kromatski broj i kromatski indeks Heawoodovog grafa.



Zadatak 8.24 Odredite kromatski broj i kromatski indeks Grötzschovog grafa.



Zadatak 8.25 Neka je G jednostavni Δ-regularni graf s neparnim brojem vrhova.

a) Dokažite da je $\chi'(G) = \Delta + 1$.

b) Neka je graf H dobiven iz G oduzimanjem ne više od $(\Delta - 1)/2$ bridova. Dokažite da je $\chi'(H) = \Delta + 1$.

Zadatak 8.26 Dokažite ili opovrgnite: kromatski indeks Δ-regularnog grafa je uvijek $\Delta + 1$.

Rješenja zadataka

8.12 $\chi(G) = 4$.
8.13 $\chi(G) = 3$.
8.14 $\chi(Q_k) = 2$.
8.15 $\chi(K_{1,s}) = 2$.
8.16 $\chi(G) = 3$.
8.17 Tvrdnja ne vrijedi: 3-kocka Q_3 je 3-regularan graf i vrijedi da je $\chi(Q_3) = 2$.
8.18 3. Pogledajte zadatak 8.3
8.19 Pogledajte zadatak 8.4.
8.20 $\chi'(G) = 4$.
8.21 $\chi'(G) = 3$.
8.22 $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$.
8.23 G je kubičini bipartitni graf, stoga je $\chi(G) = 2$, $\chi'(G) = 3$.
8.24 $\chi(G) = 4$, $\chi'(G) = 5$.
8.25

a) Pogledajte dokaz teorema 8.11.

b) Neka je $|V(G)| = 2n + 1$. Maksimalan broj bridova od G koji se mogu prebojati s Δ boja je $N = n \cdot \Delta$. Uočite da graf G ima $n \cdot \Delta + \Delta/2$ bridova. Stoga, oduzimanjem najviše $(\Delta - 1)/2$ bridova iz G dobivamo graf H čiji broj bridova premašuje N. Zaključujemo da se H ne može bridno obojati s Δ boja.

8.26 Tvrdnja ne vrijedi. Primjer je ciklus C_{2n} koji je 2-regularan i čiji je kromatski indeks jednak 2.

8.4 Istraživački problemi

Problem 8.1 Pitanje 4-obojivosti planarnih grafova formulirano je još davne 1852. godine, a prvi su dokaz *Teorema o četiri boje* dali Appel i Haken 1976. godine. Bio je to prvi računalni dokaz jednog važnog matematičkog teorema. Isprva je ovaj dokaz pomoću računala označen kontroverznim jer ga nije moguće *provjeriti rukom*. Proučite dokaz teorema i literaturu o *Problemu četiri boje*. Povijesno je ovaj problem nastao i vezan je uz bojanje geografskih karata: koliko je boja potrebno da bi se dana geografska politička karta obojala tako, da zemlje koje graniče budu obojane različitim bojama? Potrebne su, naravno, četiri boje. Pronađite barem jednu skupinu od četiri zemlje koje graniče jedna s drugom. Nalazi li se i Hrvatska u jednoj takvoj skupini?

Problem 8.2 **Snark** je povezan kubični graf bez mostova kromatskog indeksa 4. Prvi primjer snarka je konstruiran 1889. godine i to je, dobro nam poznat, Petersenov graf. Proučavanje snarkova inicirao je škotski znanstvenik P. G. Tait 1880. godine kada je dokazao da je *Problem četiri boje* ekvivalentan tvrdnji da niti jedan snark nije planaran. Tek je 1946. godine hrvatski matematičar Danilo Blanuša otkrio nove primjere snarkova. Pronađite u literaturi Blanušine snarkove. Jesu li to jedini danas poznati snarkovi?

Problem 8.3 **Bikubični graf** je bipartitni 3-regularni graf. Primjeri takvog grafa su potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ i 3-kocka Q_3. Pronađite u literaturi još neke primjere bikubičnih grafova. Britanski matematičar W.T. Tutte je u svom radu iz 1971. godine postavio slutnju da je svaki bikubični graf hamiltonovski. Proučite u literaturi je li njegova slutnja dokazana ili opovrgnuta.

Problem 8.4 Za svaki prirodni broj $k \in \mathbb{N}$ postoji graf G bez trokutova, takav da mu je kromatski broj $\chi(G) = k$. Dokažite ovu tvrdnju!

Naputak: Dokaz provedite matematičkom indukcijom. Prethodno promotrite slučajeve $k = 1,2,3$ i 4.

Problem 8.5 Dokažite da za svaki graf G s n vrhova vrijedi sljedeća ocjena

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Problem 8.6 Dokažite da je kromatski indeks svakog 3-regularnog grafa koji ima most jednak 4.

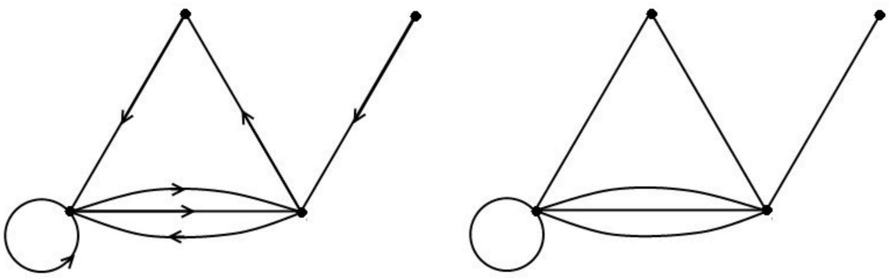
9. Usmjereni grafovi

9.1 Uvod

Definicija 9.1 **Usmjereni graf** ili **digraf** D sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(D)$, čije elemente zovemo **vrhovi**, i konačne familije $A(D)$ uređenih parova elemenata skupa $V(D)$ koje zovemo **lukovi**. ■

Kad govorimo o skupu $V(D)$ govorimo o skupu vrhova (u engleskoj terminologiji vrh se kaže vertex, pa zato oznaka $V(D)$), a kad govorimo o skupu $A(D)$ govorimo o skupu lukova (engleski se luk kaže arc, pa zato oznaka $A(D)$). Umjesto precizne oznake (u,v) za luk od vrha u do vrha v, često ćemo kratko pisati uv i misliti na orijentaciju tog luka od u prema v.

Gotovo svi pojmovi teorije grafova koje smo radili se analogno definiraju za digrafove. Ako danom digrafu D „pobrišemo" orijentaciju lukova, te svaki luk pretvorimo u brid, onda graf G koji tako dobijemo zovemo pripadajući graf digrafa D.



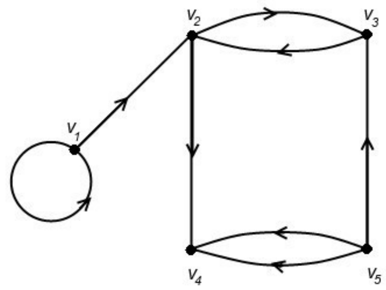
Za digraf D kažemo da je **jednostavan** ako su svi lukovi od D različiti, te ako on nema petlji (lukova oblika vv). Pripadajući graf jednostavnog digrafa ne mora biti jednostavan – moguće je da ima dvostruke bridove koji su nastali od (različitih!) lukova uv i vu.

Definicija 9.2 Dva digrafa su **izomorfna** ako postoji izomorfizam između pripadnih grafova koji čuva poredak vrhova svakog luka. ■

Dakako da bi se ova definicija mogla iskazati i eksplicitno, no to ostavljamo čitatelju za vježbu.

Definicija 9.3 Vrhovi v i w digrafa D su **susjedni** ako postoji luk u $A(D)$ oblika vw ili wv. Vrhovi v i w su tada **incidentni** s dotičnim lukom. ■

Definicija 9.4 Ako vrhove digrafa D obilježimo s $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, onda je **matrica susjedstva** od D kvadratna $n \times n$ matrica $A = [a_{ij}]$, pri čemu je a_{ij} broj lukova iz vrha v_i u vrh v_j. ■



■ **Primjer 9.1** Za digraf zadan slikom, matrica susjedstva je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Definicija 9.5 **Šetnja u digrafu** D je konačan niz lukova oblika v_0v_1, v_1v_2, ... , $v_{m-1}v_m$. Ponekad taj niz pišemo kao $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m$ i govorimo o šetnji od v_0 do v_m, koja je duljine m. Na sličan, situaciji u grafovima analogan način, definiramo **stazu**, **put** i **ciklus**. ■

Uočimo da usmjerena staza može sadržavati i luk uv i vu, ali svaki od njih samo jednom. U prethodnom primjeru $v_2 \to v_3 \to v_2 \to v_4$ je staza duljine 3, a najdulji ciklus je duljine 2, i to je $v_2 \to v_3 \to v_2$.

Definicija 9.6 Digraf D je **povezan** ako se ne može izraziti kao disjunktna unija dva digrafa, na prirodan način. Ekvivalentno je reći da je pripadajući graf povezan. ■

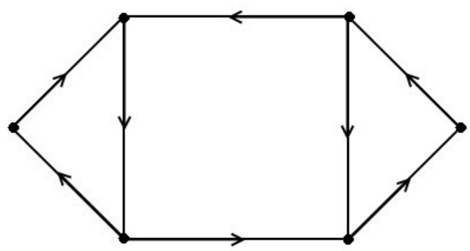
Definicija 9.7 Digraf D je **jako povezan** ako za svaka dva vrha $v, w \in D$ postoji (naravno usmjerena) šetnja iz v u w. ■

Svaki jako povezani graf je povezan, no povezani graf ne mora biti jako povezan. To je upravo slučaj u digrafu iz prethodnog primjera – on je povezan, ali nije jako povezan, jer se iz vrha v_4 ne može usmjerenom šetnjom doći ni u jedan drugi vrh toga digrafa (uočimo da se to vidi i tako što je 4. redak matrice incidencije nul-redak.

Sada se postavlja sljedeće prirodno zanimljivo pitanje. Imamo li mrežu ulica (neusmjerenu), možemo li ulice učiniti jednosmjernima (dakle, orijentirati ih) tako da mjesto bude jako povezano, tj. da se u svaki vrh može doći u smjeru vožnje? Neke nužne uvjete odmah vidimo – na primjer, imamo li u zadanom grafu koji prikazuje mrežu ulica most, problem ima negativan odgovor, jer ćemo mostom moći prijeći iz jednog dijela grada u drugi, ali onda nikako obratno.

Definicija 9.8 Za graf G reći ćemo da je **usmjeriv** ako se svaki brid od G može orijentirati (usmjeriti) tako da je dobiveni digraf jako povezan. ■

■ **Primjer 9.2** Evo primjera usmjerivog grafa i jedne moguće orijentacije njegovog skupa bridova.



■

Primijetimo da je svaki eulerovski graf usmjeriv; naprosto usmjerimo eulerovsku stazu u istom smjeru, što garantira da ćemo (po toj stazi) moći doći u svaki vrh iz bilo kojeg vrha.

Teorem 9.1 Neka je G povezani graf. G je usmjeriv onda i samo onda ako je svaki brid od G sadržan u barem jednom ciklusu.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ovaj smjer je jasan, jer ako je graf usmjeriv, onda smo brid uv nekako orijentirali, na primjer baš tako, (u,v). No, jer je G usmjeriv, to nakon orijentiranja svih bridova postoji šetnja iz v u u, iz koje nakon eliminacije eventualno suvišnih lukova dolazimo do orijentiranog ciklusa, kojem u početnom grafu odgovara ciklus, kojemu brid uv svakako pripada.

($\Leftarrow$) U grafu G neki ciklus C svakako postoji. Uočimo ga i orijentirajmo njegove bridove „ciklički". Ako je svaki brid iz G sadržan u tom ciklusu C, onda smo gotovi s orijentiranjem. Ako ne, uočimo neki brid $e \in G$ koji je susjedan već orijentiranom ciklusu C. Po pretpostavci, e se također nalazi u nekom ciklusu C' kojeg opet orijentiramo ciklički, sve njegove bridove osim onih koji su već eventualno bili orijentirani kao bridovi od C. U svakom takvom koraku, digraf koji dobivamo je jako povezan, a budući je skup bridova konačan, postupak orijentiranja bridova uspješno ćemo okončati. ■

Zadatak 9.1 Neka je D jednostavni digraf s n vrhova i m lukova.

(i) Dokažite da ako je D povezan, onda je

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)\,.$$

(ii) Nađite odgovarajuću ocjenu za jako povezani digraf D!

Rješenje. (i) Najveći broj bridova postiže se za potpuni digraf, dakle za situaciju kad između svaka dva vrha postoje obostrani lukovi. U tom slučaju lukova je ukupno $n(n-1)$. Slučaj s najmanjim brojem bridova postiže se ako je pripadajući graf stablo, koje ima $n-1$ bridova. Nalaženjem primjera u kojima se jednakosti u zadanim nejednakostima postižu, tvrdnja je dokazana.

(ii) Ocjena odozgo ostaje nepromijenjena. Ocjena odozdo za broj bridova se može poboljšati, jer digraf čiji je pripadajući graf stablo nije sigurno jako povezan. No, uzmemo li ciklus s n vrhova, on ima $m = n$ bridova, te ako ga „ciklički” orijentiramo, dobit ćemo jako povezani digraf. Sveukupno smo pokazali da je ocjena za broj lukova kod jako povezanog digrafa dana s

$$n \leq m \leq n(n-1).$$

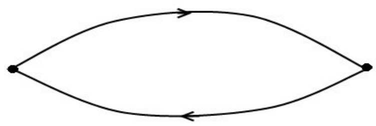
■

Zadatak 9.2 Za digraf D definira se **suprotan digraf** $\tilde{D}$ tako da se svakom luku od D obrne orijentacija.

(i) Navedite primjer digrafa koji je izomorfan sebi suprotnom digrafu.

(ii) Kakva je veza između matrica susjedstva od D i $\tilde{D}$?

Rješenje. (i) To je svaki potpuni digraf, na primjer s dva vrha:

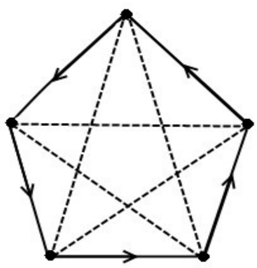


(ii) Jasno je, po definiciji suprotnog digrafa, da je $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$, pa je prema tome $A_{\tilde{D}} = A_D^T$. Uočimo da možemo iskazati i ovakvu karakterizaciju digrafova koji su izomorfni sebi suprotnim digrafovima: $D \cong \tilde{D}$ onda i samo onda ako je A_D simetrična matrica. Dokažite formalno ovu tvrdnju!

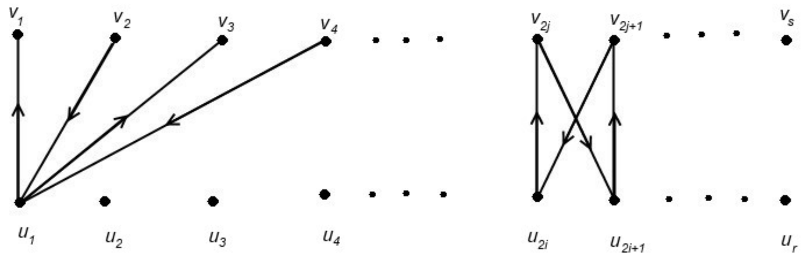
■

Zadatak 9.3 Jesu li potpuni graf K_n i potpuni bipartitni graf $K_{r,s}$ usmjerivi? Nađite efektivno po jednu orijentaciju za svakog od njih!

Rješenje. Pogledajmo prvo potpune grafove. Uočimo ciklus kroz sve vrhove, takav postoji, pa ga ciklički orijentirajmo. Ostale bridove možemo orijentirati bilo kako.



Nešto je složenija situacija kod potpunih bipartitnih grafova. Označimo vrhove jednog skupa s $u_1, u_2, \ldots, u_r$ a drugog s $v_1, v_2, \ldots, v_s$. Orijentirajmo bridove na sljedeći način. Ako su indeksi vrhova iste parnosti, onda orijentiramo od u_i prema v_j, a ako su suprotne parnosti, onda orijentiramo od v_j prema u_i.



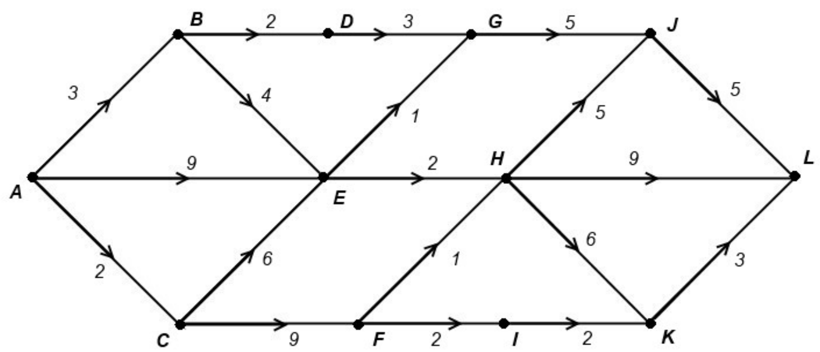
Tvrdimo da je ovako formiran digraf jako povezan. Da bismo se uvjerili u to, potrebno je proći kroz nekoliko slučajeva. Iz u_{2i} u v_{2j} postoji direktan luk, kao i iz u_{2i+1} u v_{2j+1}, za sve i, j. Iz u_{2i} u u_{2j} šetnja je: $u_{2i} \to v_{2j} \to u_{2j+1} \to v_{2j+1} \to u_{2j}$. Slično za neparne u-ove. Iz u_{2i} u u_{2j+1} šetnja je: $u_{2i} \to v_{2j} \to u_{2j+1}$, kao i za sve ostale ovdje još nenavedene slučajeve. ∎

9.2 Nalaženje kritičnog puta

Promotrimo sljedeći problem. Pretpostavimo da treba obaviti neki posao koji se izvodi u etapama, pri čemu se neke etape ne mogu obaviti dok se ne završe neke koje im prethode, dok se pak druge etape mogu izvoditi nezavisno, „paralelno”. Etape imaju svoje trajanje. Pitamo se koliko je minimalno vrijeme potrebno da se izvede cijeli posao, odnosno sve njegove etape, te kako ga organizirati.

Problem ćemo izmodelirati pomoću digrafova. Konstruiramo mrežu aktivnosti na prirodan način, vezujući one etape koje su zavisne, u smjeru zavisnosti, s težinama koje odgovaraju (minimalnom) trajanju pojedine etape. Tako dobivamo težinski digraf. On ima jasan početak i kraj, pri čemu je početni vrh **izvor**, iz kojeg svi lukovi izlaze, a krajnji vrh je **ponor**, i u njega svi lukovi ulaze. Traženo rješenje nazivat ćemo **kritični put**. On opisuje način kako organizirati posao uz uvjet da je njegovo trajanje minimalno, a uz poštivanje svih uvjetovanosti, tj. čekanja.

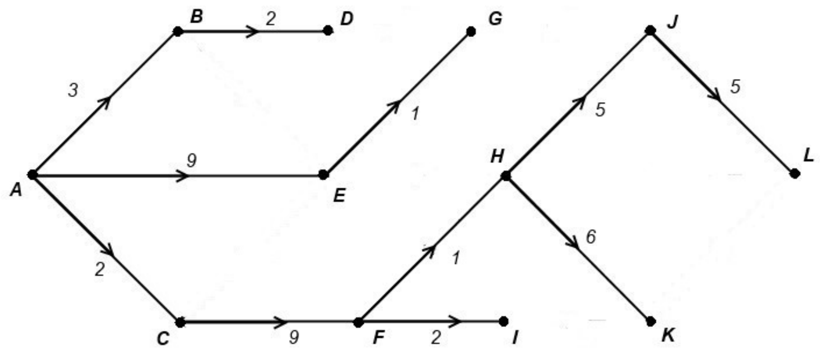
■ **Primjer 9.3** Nađite kritični put za mrežu aktivnosti danu slikom. Koliko smiju kasniti radovi na etapi IK da se cijeli posao ne produlji?



Potražimo „najkraći najdulji put” algoritmom sličnim Dijkstrinom algoritmu. Krećući od izvora, promatrat ćemo vrhove u koje možemo doći iz onih gdje smo optimum (maksimalnu vrijednost) već našli. Na primjer, kako u vrh E gornje mreže možemo doći samo iz vrhova A, B i C, onda sigurno možemo jednostavno naći najdulji put do E znamo li najdulje putove do njegovih prethodnika u mreži.

Vrhu A pridijelimo duljinu 0, $l(A) = 0$.
U vrh B možemo samo iz A, pa je $l(B) = 3$.
U vrh C možemo samo iz A, pa je $l(C) = 2$.
U vrh D možemo samo iz B, pa je $l(D) = l(B) + 2 = 5$.
U vrh E možemo iz vrhova A, B ili C, pa je $l(E) = \max\{l(A)+9, l(B)+4, l(C)+6\} = 9$.
U vrh F možemo samo iz C, pa je $l(F) = 11$.
U vrh G možemo iz vrhova D i E, pa je $l(G) = \max\{l(D)+3, l(E)+1\} = 10$.
U vrh H možemo iz vrhova E i F, pa je $l(H) = \max\{l(E)+2, l(F)+1\} = 12$.
U vrh I možemo samo iz F, pa je $l(I) = l(F) + 2 = 13$.
U vrh J možemo iz vrhova G i H, pa je $l(J) = \max\{l(G)+5, l(H)+5\} = 17$.
U vrh K možemo iz vrhova H i I, pa je $l(K) = \max\{l(H)+6, l(I)+2\} = 18$.
U vrh L možemo iz vrhova J i K, pa je $l(L) = \max\{l(J)+5, l(K)+3\} = 22$.

Slijedi da je najmanja najveća duljina 22, pri čemu algoritam treba pamtiti i kako je ta duljina postignuta. Uočimo da zastoji (kašnjenja) mogu i ne moraju prouzročiti kašnjenje cijeloga posla.



Odredimo koliko smiju kasniti radovi na etapi IK da se cijeli posao ne produlji. Uočimo da u K posao smije kasniti za 1:

$$l(L) - l(K) - 3 = 1.$$

Stoga je dopustivo kašnjenje radova na etapi KI

$$l(K) + 1 - l(I) - 2 = 4.$$

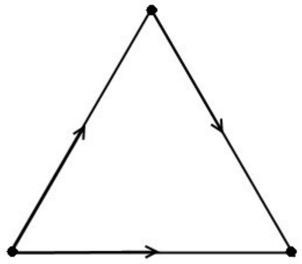
■

9.3 Turniri

U ovom poglavlju pozabavit ćemo se nekim posebno lijepim digrafovima, odnosno proučavati dodatna svojstva koja digrafovi mogu imati.

Definicija 9.9 Za povezani digraf D reći ćemo da je **eulerovski** ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki luk od D. Takvu stazu onda zovemo **eulerovska staza**. ■

■ **Primjer 9.4** Digraf sa slike nije eulerovski digraf, iako je njemu pripadni graf eulerovski.



■

Uočimo da je nuždan uvjet za eulerovost digrafa da je on jako povezan. Naime zasigurno moramo moći doći do svakog vrha, i proći svakim lukom.

Definicija 9.10 **Izlazni stupanj vrha** $v \in V(D)$ je broj lukova oblika vw; označavamo ga s $outdeg(v)$. **Ulazni stupanj** od v je broj lukova oblika uv; njega označavamo s $indeg(v)$. ■

Uočimo da vrijedi:

$$\sum_{v \in V(D)} indeg(v) = \sum_{v \in V(D)} outdeg(v)\,.$$

Naime, svaki luk doprinosi točno za 1 u obje sume, i one s lijeve i one s desne strane. Zapravo, mi smo na dva načina prebrojali sve lukove digrafa D (jednom brojivši početke tih lukova, a drugi puta krajeve).

Definicija 9.11 Vrh od D ulaznog stupnja 0 zovemo **izvor**, a vrh od D izlaznog stupnja 0 zovemo ponor. ■

Eulerovski digraf ne može imati ni izvora ni ponora (u izvor ne možemo doći, a iz ponora ne možemo izaći). Karakterizacija eulerovskih grafova u slučaju digrafova mora se produbiti, naime vidimo da digraf čiji je pripadajući graf eulerovski ne mora biti eulerovski. Ipak, laganom modifikacijom dokaza u neorijentiranom slučaju dobiva se sljedeći

Teorem 9.2 Povezani digraf D je eulerovski onda i samo onda ako za svaki vrh v od D vrijedi

$$outdeg(v) = indeg(v)\,.$$

Uočimo da se lako vidi da je stupanj svakog vrha pripadajućeg grafa paran, jer je zbroj dva ista broja. Dakle, pripadajući graf eulerovskog digrafa svakako je eulerovski. Puno je teže dati analogne teoreme onima iz neorijentiranih grafova kod digrafova u slučaju hamiltonovosti (podsjećamo, tamo smo imali samo nužne uvjete za hamiltonovost, Diracov i Oreov teorem).

Definicija 9.12 Za digraf D kažemo da je **hamiltonovski** ako postoji ciklus koji sadrži svaki vrh od D. Nehamiltonovski digraf koji sadrži put kroz svaki vrh zovemo **semihamiltonovski**. ■

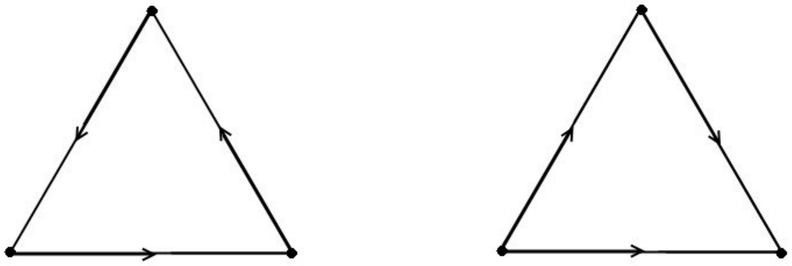
Bez dokaza (a on je tehnički puno zahtjevniji nego u neorijentiranom slučaju) dajemo analogon Diracovog teorema o dovoljnim uvjetima hamiltonovosti.

Teorem 9.3 Neka je D jako povezani digraf s n vrhova. Ako je $outdeg(v) \geq \frac{n}{2}$ i $indeg(v) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz D, onda je D hamiltonovski.

S obzirom da pitanje hamiltonovosti ovdje pogotovo postaje teškim, dobro bi bilo klasificirati hamiltonovost barem neke uže klase digrafova, koja bi bila sama po sebi dovoljno zanimljiva.

Definicija 9.13 **Turnir** je digraf u kojem su svaka dva vrha spojena točno jednim lukom. ■

■ **Primjer 9.5** Do izomorfizma postoje točno dva turnira s 3 vrha. Oni su dani sljedećom slikom.



■

Iz definicije slijedi da turnir T s n vrhova ima $n(n-1)/2$ lukova. Također, lako se vidi da za svaki vrh v od T vrijedi

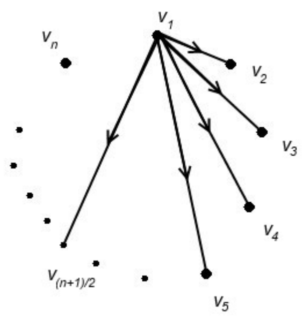
$$indeg(v) + outdeg(v) = n - 1.$$

Kažemo da je digraf D *regularan* ako postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je $outdeg(v) = indeg(v) = r$, za svaki $v \in V(D)$.

Zadatak 9.4 Nađite nužne i dovoljne uvjete na broj vrhova n turnira T uz koje je T regularan.

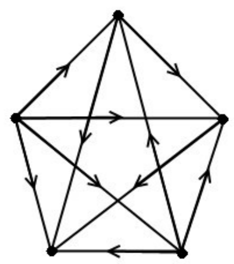
Rješenje. Pokazat ćemo da je turnir T s n vrhova regularan ako i samo ako je n neparan.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je T regularan turnir stupnja regularnosti r. Tada je $2r = n-1$. Zaključujemo da je $r = (n-1)/2$ i n je neparan.
($\Rightarrow$) Dokazat ćemo dovoljnost konstrukcijom jednog regularnog turnira. Bridove potpunog grafa s n vrhova možemo usmjeriti na sljedeći način:

- $(v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots, (v_1, v_{\frac{n+1}{2} \pmod n})$
- $(v_2, v_3), (v_2, v_4), \dots, (v_2, v_{\frac{n+3}{2} \pmod n})$
- $\cdots$
- $(v_n, v_1), (v_n, v_2), \dots, (v_n, v_{\frac{n-1}{2}})$



■

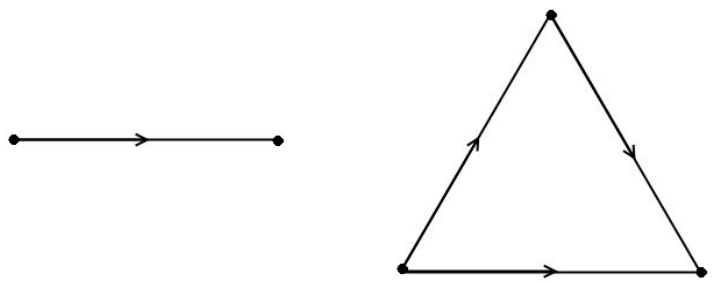
■ **Primjer 9.6** Evo jednog turnira s 5 vrhova. Uočimo da je turnir zgodan grafički zapis rezultata pravog turnira, kod kojeg se igralo „svaki sa svakim", a gdje na primjer luk iz x u y znači da je momčad x pobijedila momčad y (neriješenih rezultata nema).



Uočavamo da turnir ne mora biti hamiltonovski digraf (jer neka momčad može biti superiorna, pa je „izvor", pa se ciklus zasigurno ne može zatvoriti). Pa ipak, ako turnir nije hamiltonovski digraf, nije niti predaleko od tog svojstva, točnije, onda je „na korak" do hamiltonovosti. ■

Teorem 9.4 (i) Svaki nehamiltonovski turnir je semihamiltonovski.
(ii) Svaki jako povezani turnir je hamiltonovski.

Dokaz. (i) Tvrdnja je očevidno istinita za turnire s manje od 4 vrha.



Dokaz nastavljamo matematičkom indukcijom po broju vrhova turnira i pretpostavljamo da je svaki nehamiltonovski turnir s n vrhova semihamiltonovski. Neka je T nehamiltovski turnir s $n+1$ vrhom, te neka se T' dobije iz T micanjem vrha v i njemu incidentnih lukova. T' ima n vrhova, pa po pretpostavci indukcije ima semihamiltonovski put $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$. Razlikujemo 3 slučaja:

(1) Ako je vv_1 luk u T, onda je tražena staza

$$v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n\,.$$

(2) Ako vv_1 nije luk u T (dakle v_1v to jest), te ako postoji i takav da je vv_i luk u T, onda izaberemo najmanji takav i te dobivamo put

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v \to v_i \to \cdots \to v_n\,.$$

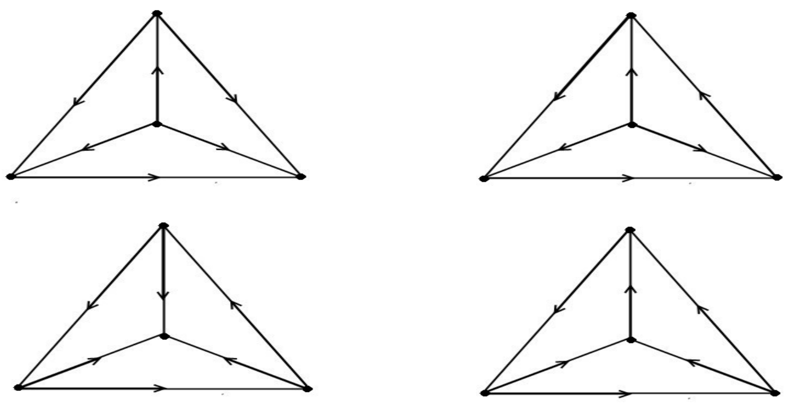
(3) Ako u T nema luka oblika vv_i, onda je tražena staza oblika

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v\,.$$

(ii) Dokazat ćemo jaču tvrdnju, da jako povezani turnir T s n vrhova ima cikluse svake pojedine duljine od 3 do n. Pokažimo prvo da T ima ciklus duljine 3. Neka je v vrh turnira T, te neka je Z skup svih vrhova z, takvih da je zv luk, a W skup svih onih vrhova w takvih da je vw luk u T. Budući je T jako povezan, a skupovi Z i W su sigurno neprazni (jer zbog jake povezanosti vrh v ne može biti ni izvor ni ponor), to postoji luk u T oblika $w'z'$, gdje su $w' \in W$, $z' \in Z$. Traženi ciklus duljine 3 sada je $v \to w' \to z' \to v$.
Neka nam ovaj slučaj ciklusa duljine 3 posluži kao baza indukcije; mi bismo željeli pokazati da ako postoji ciklus duljine k, $k < n$, da onda postoji ciklus duljine $k+1$. Neka je $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$ ciklus duljine k. Najprije, neka postoji vrh v koji nije u tom ciklusu, takav da u T postoje lukovi oblika vv_i te v_jv, $1 \leq i, j \leq k$. Tada postoji vrh v_r takav da su $v_{r-1}v$ i vv_r lukovi u T. Traženi ciklus duljine $k+1$ je $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{r-1} \to v \to v_r \to \cdots \to v_k \to v_1$. Ako pak nema vrha v s prethodnim svojstvom, onda skup vrhova izvan uočenog ciklusa duljine k razdijelimo u disjunktne skupove W i Z, gdje je W skup vrhova w takvih da je v_iw luk za svaki i, a Z skup vrhova z takvih da je zv_i luk za svaki i. Zbog jake povezanosti turnira T, skupovi W i Z moraju biti neprazni te mora postojati luk $w'z'$, uz $w' \in W$, $z' \in Z$. Traženi ciklus je sada $v_1 \to w' \to z' \to v_3 \to \cdots \to v_k \to v_1$.
Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

Zadatak 9.5 Koliko ima hamiltonovskih turnira s 4 vrha?

Rješenje. Na slici su dani svi neizomorfni turniri s 4 vrha. Samo jedan je hamiltonovski. Pronađite ga!



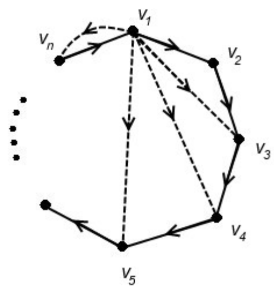
■

Zadatak 9.6 Kažemo da je turnir T **tranzitivan** ako je za svaka dva luka uv i vw od T, i uw luk od T. Dokažite da je turnir tranzitivan ako i samo ako ne sadrži ciklus.

Rješenje. $(\Leftarrow)$ Neka su uv i vw lukovi od T. Turnir T nema ciklus pa wu nije luk od T. Dakle, uw je luk od T.
$(\Rightarrow)$ Pretpostavimo suprotno. Neka je T tranzitivan turnir i neka sadrži ciklus

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v_1.$$

Turnir T ima lukove v_1v_2 i v_2v_3 pa je zbog tranzitivnosti v_1v_3 luk od T. Sada, v_1v_3 i v_3v_4 su lukovi od T pa je zbog tranzitivnosti v_1v_4 luk od T. Koristeći svojstvo tranzitivnosti možemo pokazati da su v_1v_5, v_1v_6, $\ldots$, v_1v_n lukovi od T. Konačno, pokazali smo da T ima lukove v_1v_n i v_nv_1, što je kontradikcija jer je T turnir.



■

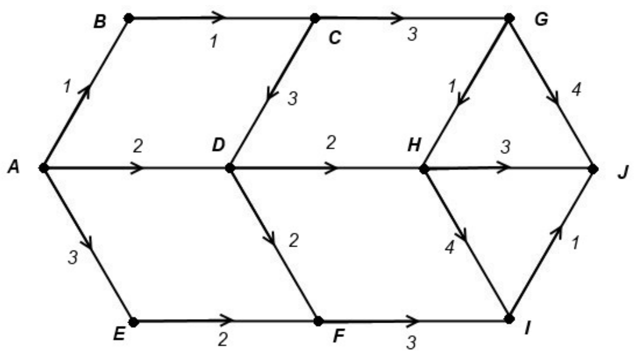
9.4 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 9.7 Dokažite da je svaki hamiltonovski graf usmjeriv.

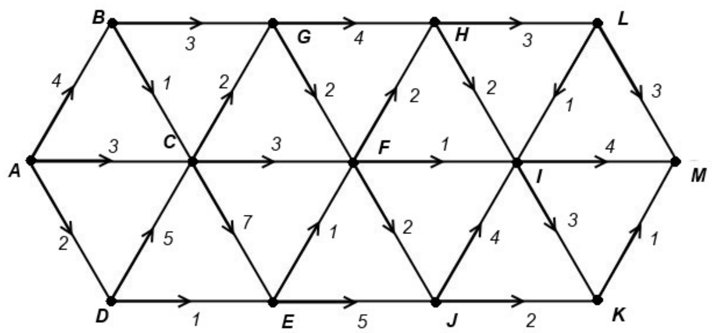
Zadatak 9.8 Koliko ima neizomorfnih jednostavnih povezanih digrafova s 3 vrha? Navedite ih sve eksplicitno!

Zadatak 9.9 Je li Petersenov graf usmjeriv?

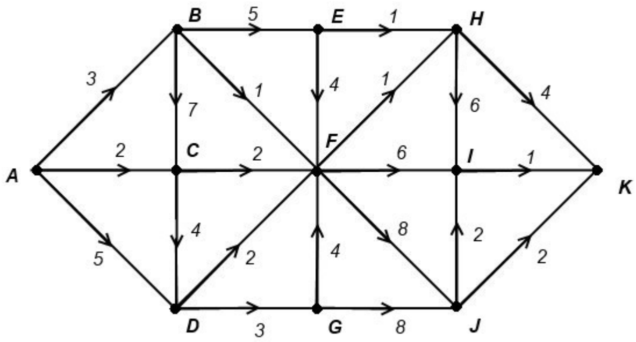
Zadatak 9.10 Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom.



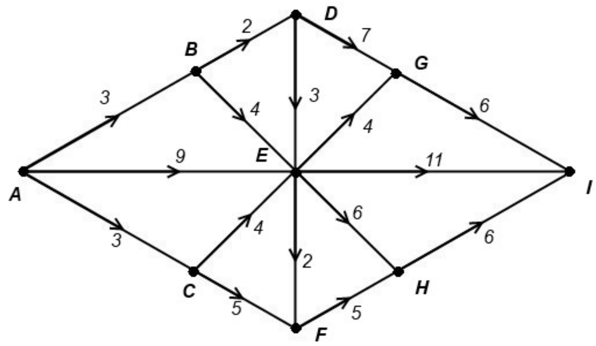
Zadatak 9.11 Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom.



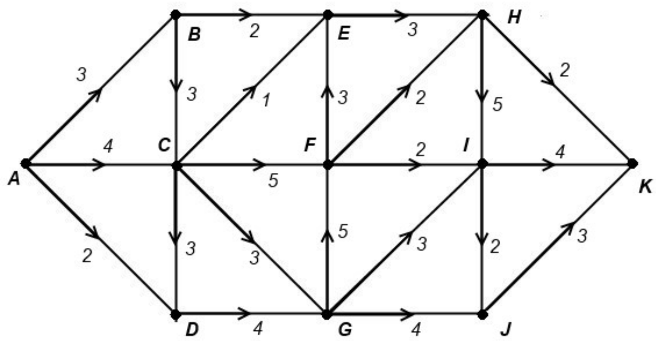
Zadatak 9.12 Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Koliko najviše smije kasniti posao u etapi GJ, a da se ukupni posao ne produži?



Zadatak 9.13 Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Za koliko se produlji kritični put, odnosno izvođenje cijelog posla, ako se tijekom izvođenja mreže trajanje etape DE nenadano poveća za 3?



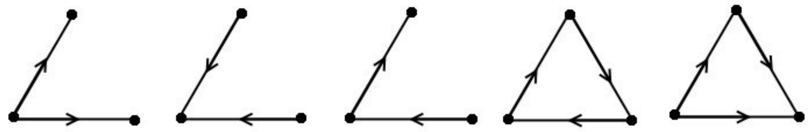
Zadatak 9.14 Mreža aktivnosti zadana je slikom. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Koliko najviše smije kasniti posao u etapi CE, a da se ukupni posao ne produži?



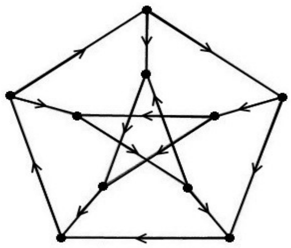
Zadatak 9.15 Neka je T turnir s n vrhova. Izračunajte $\sum_{v \in T} outdeg(v)$.

Rješenja zadataka

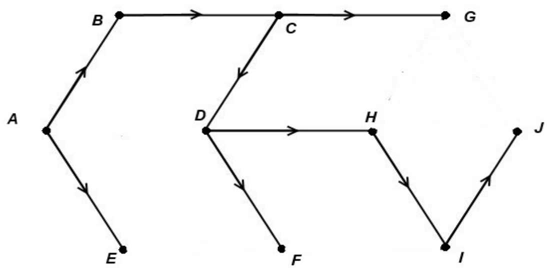
9.7 Hamitonovski ciklus usmjerimo ciklički, a ostale bridove po volji.
9.8 5.



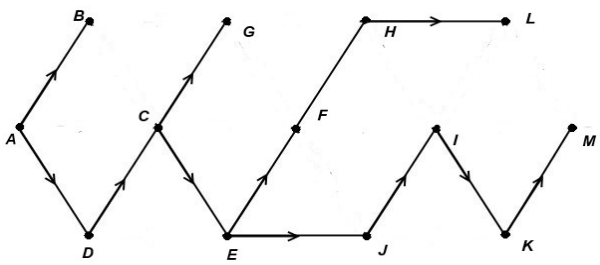
9.9 Da.



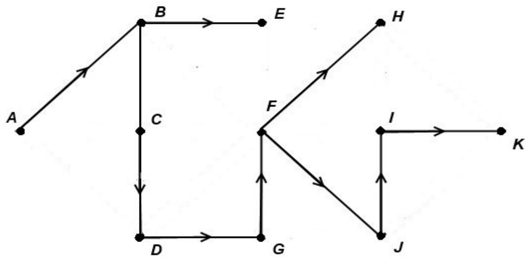
9.10 Duljina kritičnog puta je 12, $l(A)=0, l(B)=1, l(C)=2, l(D)=5, l(E)=3, l(F)=7, l(G)=5, l(H)=7, l(I)=11, l(J)=12$.



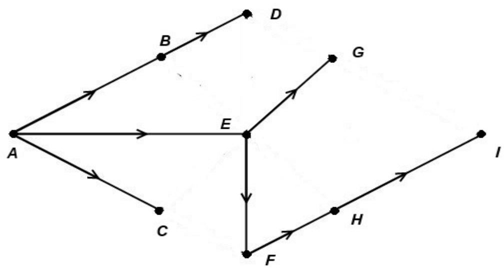
9.11 Duljina kritičnog puta je 27, $l(A)=0, l(B)=4, l(C)=7, l(D)=2, l(E)=14, l(F)=15, l(H)=17, l(I)=23, l(J)=19, l(K)=26, l(L)=20, l(M)=27$.



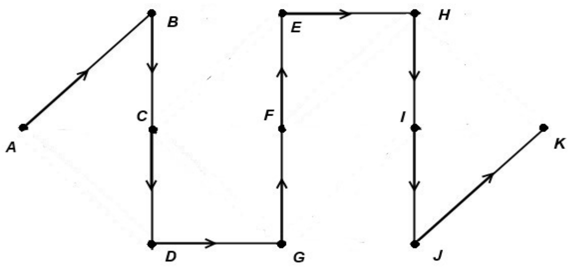
9.12 Duljina kritičnog puta je 32, $l(A)=0, l(B)=3, l(C)=10, l(D)=14, l(E)=8, l(F)=21, l(G)=17, l(H)=22, l(I)=31, l(J)=29, l(K)=32$. Posao smije kasniti $l(J)-l(G)-w(JG)=29-17-8=4$.



9.13 Duljina kritičnog puta je 22, $l(A) = 0, l(B) = 3, l(C) = 3, l(D) = 5, l(E) = 9, l(F) = 11, l(G) = 13, l(H) = 16, l(I) = 22$. Produlji se za 1.



9.14 Duljina kritičnog puta je 34, $l(A) = 0, l(B) = 3, l(C) = 6, l(D) = 9, l(E) = 21, l(F) = 18, l(G) = 13, l(H) = 24, l(I) = 29, l(J) = 31, l(K) = 34$. Posao smije kasniti $l(E) - l(C) - w(CE) = 14$.



9.15 $n(n-1)/2$.

9.5 Istraživački problemi

Problem 9.1 Dokažite formalno algoritam za nalaženje kritičnog puta!

10. Potpuna sparivanja

10.1 Ženidbeni problem

Promotrimo sljedeći problem. Dan je konačan skup djevojaka, od kojih svaka poznaje izvjestan skup momaka. Pitamo se pod kojim se uvjetom mogu sve djevojke udati za momke koje su otprije poznavale.

Na primjer, pogledajmo skup $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ od 4 djevojke i skup $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ od 5 momaka, te njihovo prethodno poznanstvo dano sljedećom tablicom:

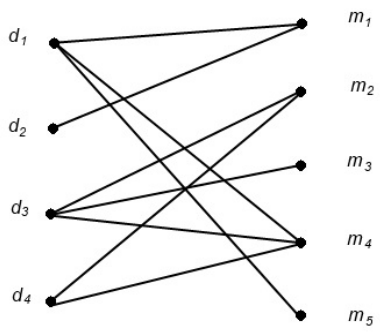
d_1	m_1	m_4	m_5
d_2	m_1		
d_3	m_2	m_3	m_4
d_4	m_2	m_4	

Ovdje rješenje ženidbenog problema postoji, na primjer ovako:

$$d_1 \to m_5,\ \ d_2 \to m_1,\ \ d_3 \to m_3,\ \ d_4 \to m_2$$

(a momak m_4 ionako poznaje najviše djevojaka, pa je za očekivati da će više sreće imati sljedeći puta).

Na prirodan način se ovaj problem prevodi u teoriju grafova. Neka je G bipartitni graf u kojem je skup vrhova podijeljen u dva disjunktna skupa V_1 i V_2, dok je susjedstvo definirano kao „prethodno poznanstvo”. U našem primjeru taj bi bipartitni graf izgledao ovako:



Definicija 10.1 **Potpuno sparivanje** iz V_1 u V_2 u bipartitnom grafu kod kojeg je $V(G) = V_1 \cup V_2$ je bijektivna korespondencija između vrhova skupa V_1 i nekog podskupa skupa vrhova V_2, takva da su korespondentni vrhovi susjedni (spojeni). ■

Dakle, u terminima teorije grafova, ženidbeni problem bi glasio ovako. Ako je $V(G) = V_1 \cup V_2$ bipartitni graf, kada (uz koje uvjete) postoji potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 u grafu G? Označimo brojnost skupa V_1 s m. Razmislimo odmah možemo li formulirati kakav makar nuždan uvjet egzistencije ovakvog ženidbenog problema. Očito je da svaka djevojka mora poznati barem jednog momka (ili u terminima grafova, da svaki vrh iz V_1 ima barem jednog susjeda). No, lako uočavamo i da podskup od svake dvije djevojke mora (zajedno) poznavati barem dva momka; u protivnom, od njih dvije neka će sigurno ostati neudana. Uvjet je lako poopćiti te se odmah vidi nužnost ispunjenja. Dakle, svakih k djevojaka mora zajedno poznavati barem k momaka, za svaki $1 \leq k \leq m$ (m je ukupan broj djevojaka). Ovako formulirani uvjet, za koji odmah vidimo da je nuždan za egzistenciju rješenja ženidbenog problema, zvat ćemo kratko **ženidbeni uvjet**. Pokazuje se da je taj nužni uvjet ujedno i dovoljan.

Teorem 10.1 — Ph. Hall, 1935. Nuždan i dovoljan uvjet za rješenje ženidbenog problema je da bilo koji skup od k djevojaka zajedno poznaje najmanje k momaka, za svaki $1 \leq k \leq m$.

Dokaz. Dokazati još samo treba dovoljnost ženidbenog uvjeta za ženidbeni problem, i to ćemo učiniti matematičkom indukcijom po ukupnom broju djevojaka m. Jasno je da je za $m = 1$ tvrdnja ispunjena. Pretpostavimo da je teorem istinit uvijek kad je broj djevojaka manji od m. Pogledajmo kakva je onda situacija kad imamo baš m djevojaka. Tretiramo dva različita slučaja. Prvo, ako svakih k djevojaka zajedno ($k < m$) poznaje $k+1$ momaka (dakle, s jednim momkom „viška" u samom uvjetu), onda najprije izaberemo bilo koju djevojku i udamo je za bilo kojeg momka kojeg ona poznaje. Nakon toga originalni ženidbeni uvjet ostaje ispunjen, u smislu da će svakih k djevojaka poznavati barem k momaka, pa kako je neudanih djevojaka ostalo $m-1$, njih udamo po pretpostavci indukcije, koja garantira da se to može napraviti. Time je ovaj slučaj pozitivno riješen.

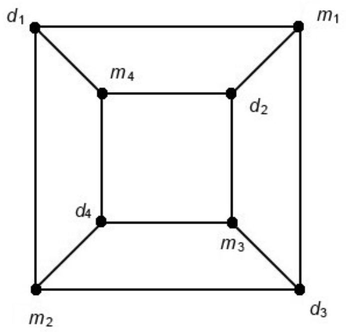
Ako pak nije ispunjen dopunski uvjet iz prethodnog slučaja, to onda znači da postoji skup od k djevojaka, $k < m$, koje zajedno poznaju točno k momaka. Po pretpostavci indukcije, za tih k djevojaka je ženidbeni problem rješiv, pa ih udamo za dotičnih k momaka. Preostaje nam udati još $m-k$ djevojaka. Međutim, svaka kolekcija od h djevojaka, izabranih između tih preostalih $m-k$ djevojaka, $h \leq m-k$, poznaje barem h od preostalih momaka, jer bi u suprotnom tih h, zajedno s onih već udanih k djevojaka ukupno poznavalo manje od $h+k$ momaka, suprotno pretpostavci da je ženidbeni uvjet ispunjen. Prema tome, ženidbeni uvjet vrijedi za tih $m-k$ neudanih djevojaka, pa se i one mogu udati po pretpostavci indukcije. ■

Prevedimo ovaj rezultat u jezik teorije grafova, odnosno u situaciju kad tražimo potpuno sparivanje u bipartitnom grafu.

Korolar 10.2 Neka je G bipartitni graf, $V(G) = V_1 \cup V_2$, te neka je za svaki podskup A skupa vrhova V_1 s $\varphi(A)$ označen skup vrhova od V_2 susjednih s barem jednim vrhom od A. Tada potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 postoji onda i samo onda ako je $|A| \leq |\varphi(A)|$, za svaki podskup A od V_1.

Zadatak 10.1 Koliko ima različitih sparivanja u 3-kocki Q_3?

Rješenje. Graf Q_3 je bipartitan.

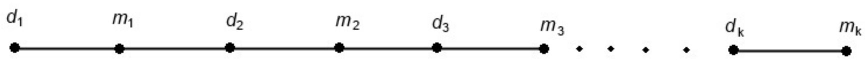


Označimo s $d_1, \dots, d_4$ vrhove jednog skupa particije vrhova i s $m_1, \dots, m_4$ vrhove drugog skupa particije vrhova. Krenimo s konstrukcijom potpunog sparivanja od vrha d_1. Uočimo da je Q_3 3-regularan, pa d_1 možemo *upariti* na 3 načina. Nakon što smo odabrali prvi par, preostala 3 para spojenih vrhova možemo odabrati na 3 načina. Konačno, broj različitih potpunih sparivanja u Q_3 je 9. ■

Zadatak 10.2 Uzimajući u obzir da mladića ima barem onoliko koliko ima djevojaka, nađite broj potpunih sparivanja u lancu P_n s n vrhova.

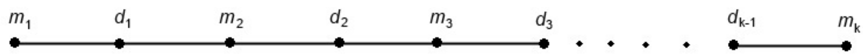
Rješenje. Lanac P_n je bipartitan. Označimo vrhove jednog skupa particije vrhova s d_i, a vrhove drugog skupa particije vrhova s m_i. Razlikujemo dva slučaja: kada je n paran i kada je n neparan.

Za $n = 2k$ paran, broj djevojaka i momaka jednak je k.



Očito je da postoji samo jedno potpuno sparivanje.

Za $n = 2k - 1$ neparan, broj mladića jednak je k, a djevojaka $k - 1$.



Matematičkom indukcijom se može pokazati da je broj različitih potpunih sparivanja jednak k. ■

Zadatak 10.3 Ima li, i koliko, potpunih sparivanja u potpunom bipartitnom grafu $K_{r,s}$, $r \leq s$?

Rješenje. Ženidbeni uvjet je trivijalno ispunjen, jer je $|\varphi(A)| = s$, za svaki $A \subseteq V_r$. Potpunih sparivanja ima isto koliko i injekcija iz V_1 u V_2, dakle:

$$s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-r+1)\,.$$

■

10.2 Transverzale

Probleme koje smo iznijeli u prethodnom poglavlju sada bismo iznijeli u drugačijem kontekstu. Prisjetimo se konkretnog primjera (danog tablicom poznanstva djevojaka i momaka). Djevojke su slijedom poznavale sljedeće podskupove skupa momaka:

$$\{m_1, m_4, m_5\}, \quad \{m_1\}, \quad \{m_2, m_3, m_4\}, \quad \{m_2, m_4\}$$

a rješenje ženidbenog problema bilo je zapravo naći po jedan m_i iz svakog od navedena četiri podskupa, tako da oni budu različiti. Takav pogled na ovaj problem motivira sljedeću definiciju.

Definicija 10.2 Neka je E neprazan konačan skup, te neka je $\mathscr{F} = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ familija (ne nužno različitih) nepraznih podskupova od E. **Transverzala** familije $\mathscr{F}$ je skup od m različitih elemenata od E, takav da je svaki od elemenata izabran iz nekog (drugog) podskupa S_i. ■

■ **Primjer 10.1** Neka je $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, te neka je $S_1 = S_2 = \{1,2\}$, $S_3 = S_4 = \{2,3\}$, te $S_5 = \{1,4,5,6\}$. Ispitajmo postoji li transverzala za ovu familiju podskupova.

Ovdje je nemoguće naći 5 elemenata skupa E tako da je svaki iz nekog drugog S_i. Razlog tome je što je $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 3$, pa ne možemo naći četiri različita elementa koji bi pripadali po jednom od ovih skupova. Dakle, familija $\mathscr{F} = (S_1, \dots, S_5)$ nema transverzalu. Potražimo li neku podfamiliju za koju bi transverzala mogla postojati, lako ćemo uočiti $\mathscr{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ za koju vidimo da ima na primjer transverzalu $\{1,2,3,4\}$. Transverzalu neke podfamilije zadane familije zovemo **parcijalna transverzala**. Lako se možemo uvjeriti da $\mathscr{F}$ iz primjera ima razne parcijalne transverzale. Nađite ih! Posebno, svaki podskup parcijalne transverzale je parcijalna transverzala. ■

Naravno da je ključno pitanje koja nas zanima kada zadana familija podskupova nekog zadanog skupa ima transverzalu. Na to je pitanje lagano dati odgovor prevedemo li situaciju na ženidbeni problem. Naime, uzmemo li da je E baš skup momaka, a podskup S_i onaj skup momaka koje poznaje djevojka d_i, za sve $1 \leq i \leq m$, vidimo da je transverzala zapravo skup od m momaka koji je svaki pridijeljen točno jednoj djevojci, te predstavlja jedno rješenje ženidbenog problema. Pritom je dakle egzistencija transverzale ekvivalentna egzistenciji rješenja ženidbenog problema, no broj takvih rješenja nije isti, budući kod ženidbenog problema razlikujemo i djevojke i momke, a kod transverzale (koja je skup) nemamo poredak među elementima!

■ **Primjer 10.2** Za dani skup $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ familija $\mathscr{F} = (\{2,3\},\{1,3,4\}, \{2,5,6\},\{2,4\}, \{4,6\},\{3,4\})$ ima jedinstvenu trasverzalu. ■

Prevedimo sada Hallov teorem o nužnost i dovoljnosti ženidbenog uvjeta u novu situaciju s transverzalama. Dat ćemo i jedan drugi dokaz tog teorema koji rabi samo elementarna znanja iz teorije skupova.

Teorem 10.3 Neka je E neprazan konačan skup i neka je $\mathscr{F} = (S_1,\dots,S_m)$ familija nepraznih podskupova od E. Tada $\mathscr{F}$ ima transverzalu onda i samo onda ako unija bilo kojih k podskupova S_i ima najmanje k elemenata, za $1 \le k \le m$.

Dokaz. Nužnost ovog uvjeta je jasna. Dokažimo dovoljnost. Pokazat ćemo sljedeće. Ako neki podskup S_i iz familije $\mathscr{F}$ ima više od jednog elementa, onda postoji u S_i element koji možemo izbaciti iz njega bez da se promijeni početni uvjet. Uočimo da time zapravo dokazujemo korak algoritma kojim u konačno mnogo koraka dolazimo do familije jednočlanih podskupova koji u uniji daju transverzalu. Tim algoritmom jednostavno ćemo transverzale nalaziti.

Dokažimo dakle da je ovakvo izbacivanje elemenata iz podskupova s više od jednog elementa dopustivo. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno. Neka, ne smanjujući općenitost, podskup S_1 sadrži elemente x i y tako da uklanjanje bilo kojeg od njih kvari uvjet. To zapravo znači da postoje podskupovi A i B skupa $\{2,3,\dots,m\}$, i skupovi P i Q definirani sa:

$$P = (\bigcup_{i\in A} S_i) \cup (S_1 \setminus \{x\}), \quad Q = (\bigcup_{j\in B} S_j) \cup (S_1 \setminus \{y\})$$

takvi da je

$$|P| \le |A|, \quad |Q| \le |B|.$$

Naime, skup P sastavljen je od $|A|+1$ elemenata familije $\mathscr{F}$, pa bi uvjet trebao glasiti $|P| \ge |A|+1$. Zato je suprotno od toga upravo $|P| \le |A|$. Analogni argument vrijedi za skup Q.

Uočimo da vrijede sljedeće skupovne relacije:

$$P\cup Q = (\bigcup_{j\in A\cup B} S_j)\cup S_1, \quad P\cap Q \supseteq \bigcup_{j\in A\cap B} S_j,$$

pa na razini kardinaliteta ovih skupova vrijedi:

$$|P\cup Q| = |(\bigcup_{j\in A\cup B} S_j)\cup S_1| \text{ kao i } |P\cap Q| \ge |\bigcup_{j\in A\cap B} S_j|$$

Do kontradikcije nas sada vodi sljedeći račun:

$$\begin{aligned} |A|+|B| \quad \ge \quad & |P|+|Q| = |P\cup Q|+|P\cap Q| \ge \\ & |(\bigcup_{j\in A\cup B} S_j)\cup S_1| + |\bigcup_{j\in A\cap B} S_j| \ge \text{(uvjet teorema)} \ge \\ & |A\cup B|+1+|A\cap B| = |A|+|B|+1, \end{aligned}$$

što je očevidno protuslovlje. ■

Korolar 10.4 Uz skup E i familiju $\mathscr{F}$ kao u prethodnom teoremu, $\mathscr{F}$ ima parcijalnu transverzalu veličine t onda i samo onda ako unija bilo kojih k podskupova S_i sadrži najmanje $k+t-m$ elemenata.

Korolar 10.5 Uz skup E i familiju $\mathscr{F}$ kao u prethodnom teoremu, neka je $X \subseteq E$. Tada X sadrži parcijalnu transverzalu od $\mathscr{F}$ veličine t onda i samo onda ako za svaki podskup A od $\{1,2,\ldots,m\}$ vrijedi:

$$|(\bigcup_{j\in A} S_j)\cap X| \geq |A|+t-m.$$

Zadatak 10.4 Neka je E skup $\{1,2,\ldots,50\}$. Koliko različitih transverzala ima familija

$$(\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{49,50\},\{50,1\})?$$

Rješenje. Ova pedeseteročlana familija ima jednu jedinu transverzalu: $\{1,2,\ldots,50\}$. Naime, ponovno naglašavamo da transverzala ne uključuje poredak. Koliko bi bilo različitih transverzala ako bi se poredak uključivao? Odgovor na to pitanje identičan je odgovoru na pitanje koliko različitih potpunih sparivanja postoji u ciklusu sa 100 vrhova, dakle 2. ■

10.3 Primjena na latinske kvadrate

Definicija 10.3 **Latinski pravokutnik** tipa $m\times n$ je matrica $M=(m_{ij})$ dimenzije $m\times n$ čiji elementi su prirodni brojevi uz uvjete:

1. $1\leq m_{ij}\leq n$
2. Svi elementi nekog retka ili stupca su različiti.

Dakako, vrijedi da je $m\leq n$, a kad je $m=n$ govorimo o **latinskom kvadratu**.

■ **Primjer 10.3** Pokažimo da latinski kvadrat reda n postoji za svaki prirodni broj n.

Naime, pogledajmo ovakvu matricu

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

■

Puno je teže pitanje ima li i drugih latinskih kvadrata reda n, koji su ovome u apstraktnom smislu neekvivalentni. Odgovor je pozitivan, o čemu se mogu naći podaci u tablicama broja neizotopnih latinskih kvadrata reda n.

Logično je zapitati se može li se svaki latinski pravokutnik dimenzije $m\times n$ nadopuniti do latinskog kvadrata. Zapravo iznenađujući odgovor je da se to uvijek može.

Teorem 10.6 Neka je M latinski pravokutnik dimenzije $m\times n$, uz $m<n$. Tada se M može proširiti do latinskog kvadrata dodavanjem $n-m$ redaka.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da se pravokutnik M uvijek može proširiti za jedan redak, tj. da mu se može dodati sljedeći redak, tako da dobijemo latinski pravokutnik dimenzije $(m+1)\times n$, jer onda dalje možemo nastaviti iterativno. Neka je $E=\{1,2,\dots,n\}$ i neka je $\mathscr{F}=(S_1,\dots,S_n)$, gdje je S_i skup elemenata od E koji se ne nalaze u i-tom stupcu od M. Tvrdimo da familija $\mathscr{F}$ ima transverzalu, što onda i dokazuje tvrdnju. Dovoljno je, po Hallovom teoremu, dokazati da svaka unija od k S_i-ova sadrži najmanje k elemenata. No, budući svaka takva unija sadrži ukupno $(n-m)\cdot k$ elemenata, uključujući njihove kratnosti, činjenica da ima manje od k različitih povlačila bi da se neki element morao pojaviti više od $n-m$ puta, a to je nemoguće jer to znači da on nedostaje u više od $n-m$ stupaca, dakle da se pojavljuje u manje od m stupaca, ali kako već imamo m redaka gotovih, svaki se element pojavljuje već u m stupaca. ■

■ **Primjer 10.4** Dopunite do latinskog kvadrata ovaj pravokutnik:

1	2	3	4	5	6
3	5	2	6	1	4
4	6	1	2	3	5

Važno je uočiti da po prethodnom teoremu možemo dopunjavati redak po redak, te da se nećemo morati vraćati unazad, jer se i pravokutnik dimenzije 4×6 može dopuniti do kvadrata. Npr. uzmimo za 4. redak: [5, 1, 6, 3, 4, 2]. Dobiveni latinski pravokutnik može se dalje dopuniti do kvadrata. Za 5. redak možemo uzeti: [6, 3, 4, 5, 2, 1], a zadnji redak je ionako uvijek jednoznačno određen – on je zapravo već transverzala familije nedostajućih elemenata po stupcima. ■

Zadatak 10.5 Zadan je latinski pravokutnik

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
5	4	1	6	3	2

Ispišite familiju podskupova $\mathscr{F}$, za koju sigurno postoji transverzala, a koja garantira da se ovaj pravokutnik može nadopuniti jednim retkom.

Rješenje. Familiju skupova $\mathscr{F}$ definirat ćemo na sljedeći način. Neka je S_i skup svih elementata iz $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ koji nedostaju u i-tom stupcu danog latinskog pavokutnka. Sada je $\mathscr{F}=(\{2,3,4\},\{1,3,6\},\ \{2,5,6\},\{1,2,5\},\ \{1,4,6\},\{3,4,5\})$. Uočimo transverzalu familije $\mathscr{F}$: $[2,3,6,1,4,5]$. Dani latinski pravokutnik može se nadopuniti s ovim retkom. Nastavite sami na ovaj način dopunjavati dani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata. ■

10.4 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 10.6 Zadan je graf $K_{3,3}$ kojemu uklonimo neka dva brida. Postoji li uvijek potpuno sparivanje u nastalom grafu?

Zadatak 10.7 Dokažite da, ako je G bipartitni graf sa skupom vrhova $V(G)=V_1\cup V_2$, u kojem je stupanj svakog vrha iz V_1 veći ili jednak stupnju bilo kojeg vrha iz V_2, onda G ima potpuno sparivanje.

Zadatak 10.8 Koliko ima različitih potpunih sparivanja u ciklusu C_{2n}?

Zadatak 10.9 Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4

Zadatak 10.10 Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

7	2	1	8	5	4	3	6
8	1	6	3	2	7	4	5
1	5	3	6	7	2	5	4
2	7	8	1	4	5	6	3

Zadatak 10.11 Mogu li se sljedeće matrice dopuniti do latinskih kvadrata?

1	2	3	4	5
2	1			
3		1		
4			1	
5				1

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			1		
5				1	
6					1

Mogu li se ove matrice dopuniti do latinskih kvadrata koji su simetrične matrice?

Zadatak 10.12 Mogu li se sljedeće matrice dopuniti do latinskih kvadrata?

1	5	2	6	4	3
6				3	
5			4		
4		5			
3	1				
2					

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			2		
5				2	
6					2

Rješenja zadataka

10.6 Dva brida od $K_{3,3}$ možemo ukloniti na dva načina. Dobit ćemo dva grafa sa sljedećim nizovima stupnjeva $(1,2,2,3,3,3)$ i $(2,2,2,2,3,3)$. U oba slučaja potpuno sparivanje je moguće.
10.8 2.
10.9

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4
5	1	4	3	6	2
6	4	5	1	2	3
2	3	6	5	4	1

10.10

7	2	1	8	5	4	3	6
8	1	6	3	2	7	4	5
1	5	3	6	7	2	5	4
2	7	8	1	4	5	6	3
3	6	5	4	1	8	7	2
4	5	2	7	6	3	8	1
5	4	7	2	3	6	1	8
6	3	4	5	8	1	2	7

10.11 Druga matrice može se nadopuniti do simetrične.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	1	6	2	5
4	5	6	1	3	2
5	6	2	3	1	4
6	3	5	2	4	1

10.12 Samo se prva matrica može nadopuniti do latinskog kvadrata.

1	5	2	6	4	3
6	4	1	5	3	2
5	3	6	4	2	1
4	2	5	3	1	6
3	1	4	2	6	5
2	6	3	1	5	4

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			2		
5				2	
6					2

10.5 Istraživački problemi

Problem 10.1 Odredite broj latinskih kvadrata tipa $1 \times 1, 2 \times 2$ i 3×3. Uvjerit ćete se vrlo brzo kako ovaj postupak nije nimalo lagan. Pronađite u literaturi podatke o broju latinskih kvadrata tipa $n \times n$. Postoji li zatvorena formula za ovaj broj?

Problem 10.2 Napišite program koji računa broj različitih latinskih kvadrata tipa $n \times n$.

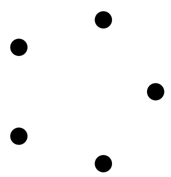
Problem 10.3 Jeste li upoznati s logičko-kombinatornom igrom *Sudoku*? Ukoliko jeste, riješite sljedeći *Sudoku*. Ukoliko niste, otkrijte koja su pravila igre. Koja je veza između igre *Sudoku* i latinskih kvadrata?

		4						
	7		2			5	9	
	6			3	5			1
		9					7	
		6				2		
	1					9		
5			4	9			1	
	4	2			3		6	
						4		

Dodatak

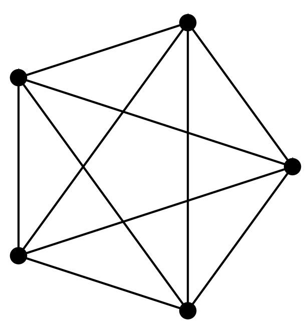
Popis važnijih grafova

Graf — Nul graf N_n. ▪ broj vrhova n ▪ broj bridova 0 ▪ kromatski broj 0 ▪ kromatski indeks 0 ▪ planaran ▪



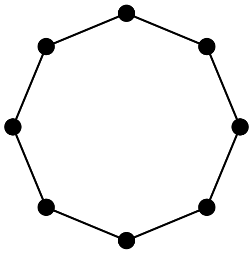
Nul graf N_5.

Graf — Potpuni graf K_n. ▪ broj vrhova n ▪ broj bridova $\frac{n(n-1)}{2}$ ▪ kromatski broj n ▪ kromatski indeks n za n paran, $n-1$ za n neparan ▪ $(n-1)$-regularan graf ▪



Potpuni graf K_5.

Graf — **Ciklički graf** C_n. ■ broj vrhova n ■ broj bridova n ■ kromatski broj 3 za n neparan, 2 za n paran ■ kromatski indeks 3 za n neparan, 2 za n paran ■ 2-regularan graf ■ hamiltonovski ■ eulerovski ■

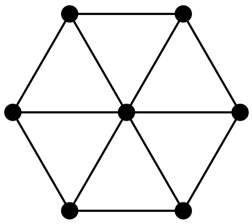


Ciklički graf C_8.

Graf — **Lanac** P_n. ■ broj vrhova n ■ broj bridova $n-1$ ■ kromatski broj 2 ■ kromatski indeks 2 ■ stablo ■ bipartitan ■

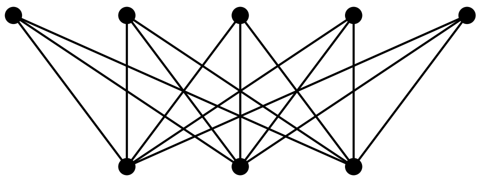
Lanac P_7.

Graf — **Kotač** W_n. ■ broj vrhova n ■ broj bridova $2n-2$ ■ kromatski broj 3 za n neparan, 4 za n paran ■ hamiltonovski ■ samodualan ■ planaran ■



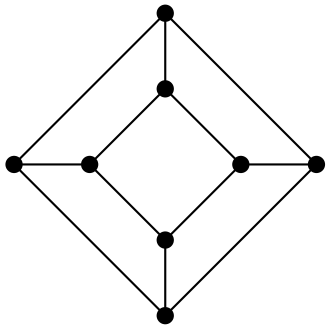
Kotač W_7.

Graf — **Potpuni bipartitni graf** $K_{m,n}$. ■ broj vrhova $m+n$ ■ broj bridova mn ■ kromatski broj 2 ■ kromatski indeks $\max\{m,n\}$ ■



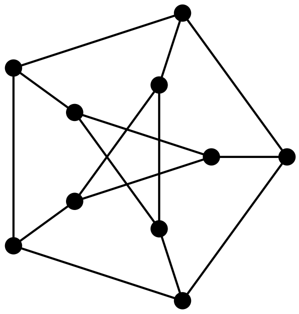
Potpuni bipartitni graf $K_{3,5}$.

Graf — k-kocka Q_k. ■ broj vrhova 2^k ■ broj bridova $2^{k-1}k$ ■ kromatski broj 2 ■ hamiltonovski ■ bipartitan ■



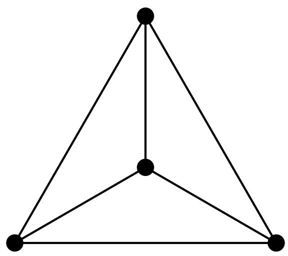
3-kocka Q_3.

Graf — Petersenov graf. ■ broj vrhova 10 ■ broj bridova 15 ■ kromatski broj 3 ■ kromatski indeks 4 ■ 3-regularan ■



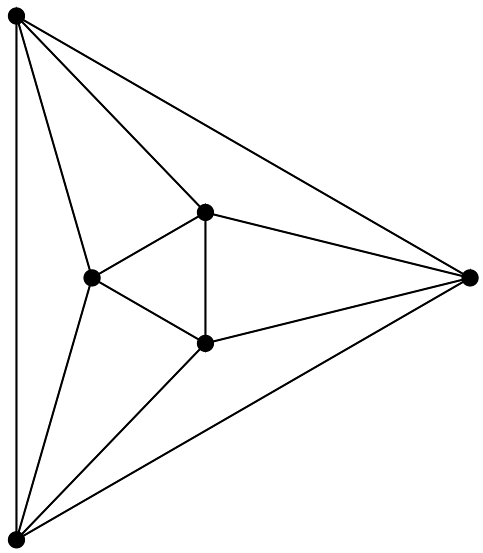
Petersenov graf.

Graf — Tetraedar. ■ broj vrhova 4 ■ broj bridova 6 ■ kromatski broj 4 ■ kromatski indeks 4 ■ 3-regularan ■ hamiltonovski ■ planaran ■



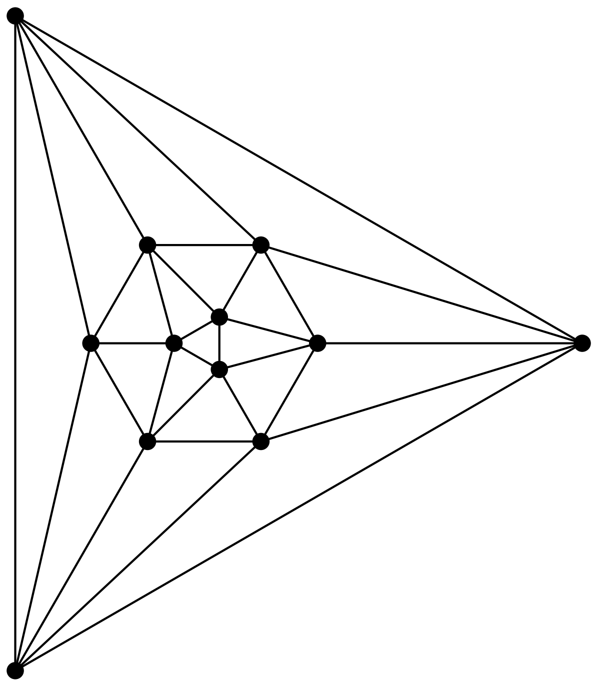
Tetraedar.

Graf — Oktaedar. ■ broj vrhova 6 ■ broj bridova 12 ■ kromatski broj 3 ■ kromatski indeks 4 ■ 4-regularan ■ hamiltonovski ■ eulerovski ■ planaran ■



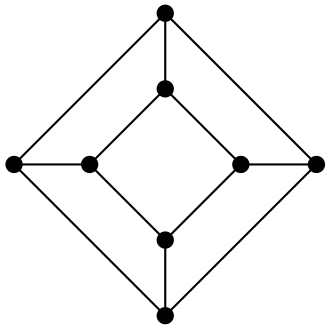
Oktaedar.

Graf — Ikosaedar. ■ broj vrhova 12 ■ broj bridova 30 ■ kromatski broj 4 ■ kromatski indeks 5 ■ 5-regularan ■ hamiltonovski ■ planaran ■



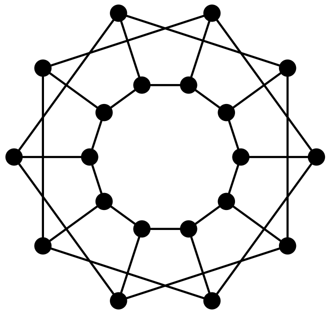
Ikosaedar.

Graf **— Kocka.** ■ broj vrhova 8 ■ broj bridova 12 ■ kromatski broj 2 ■ kromatski indeks 3 ■ bipartitan ■ 3-regularan ■ hamiltonovski ■ planaran ■



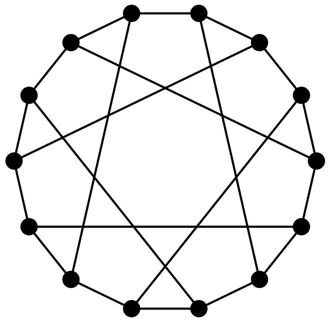
Kocka.

Graf **— Dodekaedar.** ■ broj vrhova 20 ■ broj bridova 30 ■ kromatski broj 3 ■ kromatski indeks 3 ■ 3-regularan ■ hamiltonovski ■ planaran ■



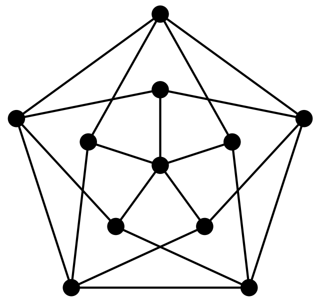
Dodekaedar.

Graf **— Heawoodov graf.** ■ broj vrhova 14 ■ broj bridova 21 ■ kromatski broj 2 ■ kromatski indeks 3 ■ bipartitan ■ 3-regularan ■ hamiltonovski ■



Heawoodov graf.

Graf — **Grötzschov graf.** ■ broj vrhova 11 ■ broj bridova 20 ■ kromatski broj 4 ■ kromatski indeks 5 ■ hamiltonovski ■



Grötzschov graf.

Bibliografija

[1] A. Aglić Aljinović, V. Ćepulić, N. Elezović, L. Horvat Dmitrović, Lj. Marangunić, T. Šikić, A. Žgaljić Keko, D. Žubrinić, V. Županović, *Matematika 2*, Element, Zagreb, 2016.

[2] I. Brnetić, M. Bukal, T. Burić, L. Horvat Dmitrović, J.P. Milišić, M. Pašić, A. Žgaljić Keko, D. Žubrinić, *Matematička analiza 1*, skripta, FER, 2018.

[3] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.

[4] D. Kovačević, D. Žubrinić, *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb, 2018.

[5] A. Nakić, M.O. Pavčević, Teorija grafova, Element, Zagreb, 2014.

[6] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

Kazalo