SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 253

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Dorian Kablar

Zagreb, svibanj 2021.

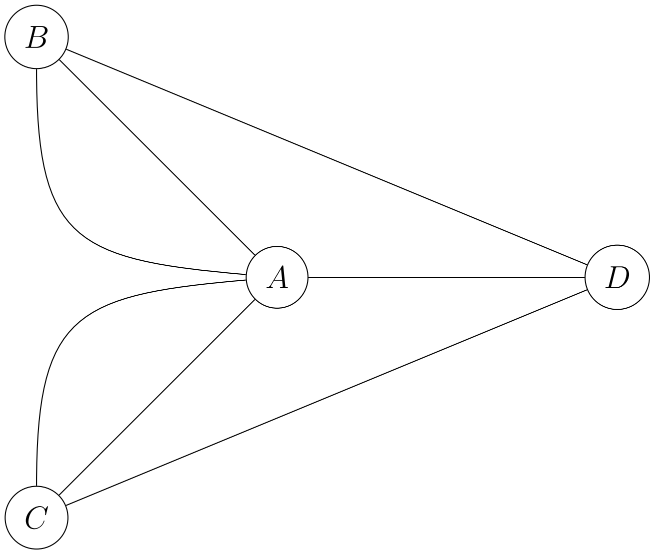
Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Anamari Nakić, na motivaciji i savjetima prilikom pisanja ovog rada.

Zahvaljuem svojim roditeljima, pogotovo majci, koji su me podržavali u svakoj odluci, i koji su uvijek znali kako pomoći, čak i kad nisam bio svjestan da je pomoć potrebna.

SADRŽAJ

1. Uvod

Teorija grafova široko je područje s mnogim primjenama u stvarnom svijetu. Njen začetak vezan je uz jedan problem iz stvarnog života. Članak iz 1736. u kojem je švicarski matematičar Leonhard Euler predstavio i rješio problem königsbergskih mostova smatra se prvim pisanim djelom o *teoriji grafova*. No, sam pojam grafa je u široku uporabu ušao tek 1936., kada je Dénes Kőnig objavio monografiju *Theory of finite and infinite graphs*[1]. Ta se godina uzima kao godina osnutka *teorije grafova* kao zasebne matematičke discipline.



Slika 1.1: Graf koji prikazuje problem königsbergskih mostova.

Svoj zamah teorija grafova dobiva tek u drugoj polovici 20. stoljeća, te s obzirom da je to još uvijek relativno nova disciplina, puno je otvorenih problema koji i danas još uvijek nisu rješeni.

Teorija grafova se primjenjuje u mnogim područjima. U računarskoj znanosti, grafovi su od velikog interesa, što kao struktura podataka, što zbog algoritama koji se nad njima mogu pisati, i raznih drugih primjena. Primjerice, grafovi mogu koristiti u

[1] engleski prijevod njemačkog originala *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*

izgradnji *NoSQL* baza podataka, gdje se u čvorove mogu spremati podatci, a u bridove veze između podataka.

U socijalnim znanostima, korištenjem softvera za analizu društvenih mreža, teorija grafova se može koristiti, primjerice, za istraživanje širenja neke glasine. U molekularnoj biologiji, grafovi se koriste za modeliranje i analizu podataka s kompleksnim međusobnim vezama. Osim navedenih, grafovi imaju svoje primjene i u lingvistici, fizici, kemiji, matematici, i mnogim drugima.

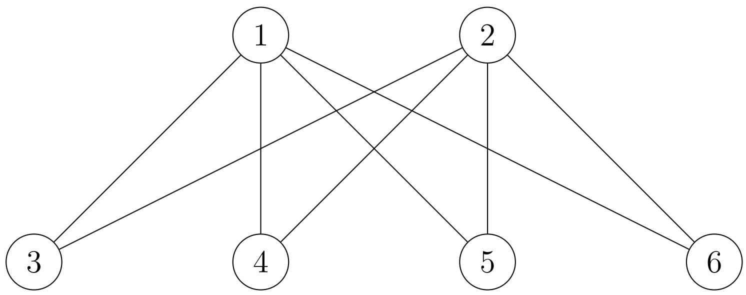
U ovom radu bit će više riječi o podvrsti grafova, *stablima*. Stabla mogu, također, biti od velikog značaja u mnogim granama. Primjerice, recimo da se cestom želi povezati nekoliko gradova. Kako bi izvođači radova što jefitnije te radove obavili, pokušat će naći *minimalno razapinjuće stablo* grafa koji će predstavljati te gradove i udaljenosti između njih. O ovom, i sličnim problemima, bit će više riječi u kasnijim poglavljima ovog rada.

U prvom dijelu ću iznijeti glavne definicije i rezultate vezane uz grafove i stabla. U drugom dijelu će biti govora o razapinjućim stablima. Pritom ću iznijeti neke osnovne rezultate te primjere teorijskog računanja broja razapinjučih stabala. U trećem dijelu ću iskazati i dokazati matrični teorem o stablima. U četvrtom dijelu ću, koristeći prethodno dokazani teorem, iznijeti rezultate za primjere pojedinačnih grafova, kao i za grafove s proizvoljnim brojem vrhova, n. U petom dijelu, bit će opisan relevantan (za razapinjuća stabla) dio aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* u 5. semestru, te će se na primjerima prikazati njezin rad. Naposljetku će biti donesen zaključak o svemu što je napravljeno.

2. Glavne definicije i rezultati

Obzirom da će se u ovom radu obrađivati određeni problemi teorije grafova, vrijeme je da se upoznamo sa pojmom grafa.

Definicija 2.0.1. ***Jednostavni graf*** *G sastoji se od nepraznog konačnog skupa* $V(G)$*, čije elemente zovemo* ***vrhovi*** *grafa G i konačnog skupa* $E(G)$ *različitih dvočlanih podskupova skupa* $V(G)$ *koje zovemo* ***bridovi****.*

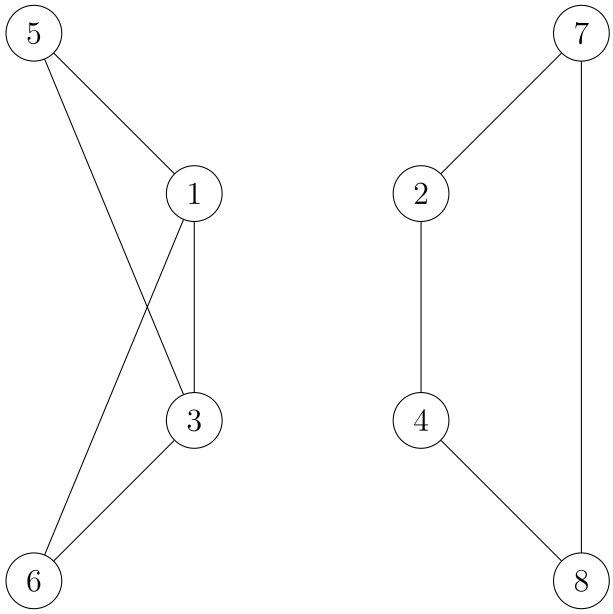


Slika 2.1: Primjer jednostavnog grafa.

Vratimo li se na sliku 1.1, primjetit ćemo da je moguće da vrhove nekog grafa povezuje više bridova, te također da jedan vrh ima brid kojemu je on i početni i krajnji vrh. Takav brid zove se *petlja*. Definicija jednostavnih grafova nam višestruke bridove i petlje brani. Oni će biti od većeg interesa u nastavku ovog rada.

Niz različitih bridova $e_1 e_2 ... e_k$ nazivamo *stazom* ako možemo konstruirati šetnju u našem grafu tako da prvo prođemo kroz brid e_1, zatim kroz e_2 i tako dalje. Važno je da je krajnji vrh brida e_i ujedno i početni vrh brida e_{i+1}. Ako stazu završimo u istom vrhu u kojem smo započeli te ako smo u konstruiranju staze iskoristili sve bridove od G, onda tu stazu nazivamo *eulerovom stazom*. Također, ako staza niti jedan vrh ne dotakne dvaput, onda govorimo o *putu*. Za takav graf, u kojem postoji šetnja koja počinje i završava u istom grafu, kažemo da sadrži *ciklus*.

Na grafu sa slike 2.1 možemo konstruirati *eulerovu stazu*.



Slika 2.2: Primjer nepovezanog grafa.

Na slici 2.2 vidimo graf koji se može promatrati kao unija dva grafa. Vidimo da postaje dva vrha između kojih ne možemo konstruirati put (primjerice 1 i 2). Ovakve grafove zovemo *nepovezanim grafovima*. Za nastavak, više će nam značiti *povezani grafovi*.

Definicija 2.0.2. *Ako graf G ima svojstvo da između svaka dva vrha možemo konstruirati put, onda možemo reći da je G* ***povezan graf****.*

Graf sa slike 2.1 je primjer povezanog grafa.

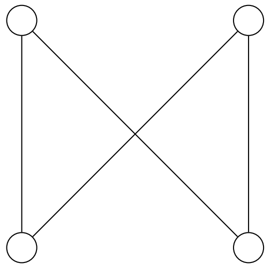
Definicija 2.0.3. ***Stupanj vrha*** *v grafa G je broj vrhova koji su incidentni s v. Označavamo ga s deg(v).*

Za graf sa slike 2.1, $deg(1) = deg(2) = 4$ i $deg(3) = deg(4) = deg(5) = deg(6) = 2$.

Također, u nastavku će nam biti važan pojam podgrafa grafa.

Definicija 2.0.4. ***Podgraf*** *grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.*

Za graf sa slike 2.1, jedan od podgrafova je i graf na slici 2.3.



Slika 2.3: Primjer podgrafa grafa sa slike 2.1.

Nakon što su izneseni neki važni rezultati o samim grafovima, treba se osvrnuti i na njihovo predstavljanje.

Definicija 2.0.5. *Označimo li vrhove zadanog grafa G s $V = 1, 2, 3, ..., n$, onda definiramo* ***matricu susjedstva*** $A = [a_{ij}]$ *kao n x n matricu čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spaja vrh i s vrhom j.*

Za graf sa slike 2.1, pripadna matrica susjedstva je sljedeća:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zanimljivo je primjetiti da zbroj svih elemenata u pojedinom retku ili stupcu, točno korespondira stupnju pripadajućeg vrha.

Definicija 2.0.6. *Označe li se dodatno i bridovi zadanog grafa G s $E = 1, 2, 3, ..., m$, onda definiramo* ***matricu incidencije*** *kao n x m matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi jednaki 1 ako je vrh 1 incidentan s vrhom j, a 0 inače.*

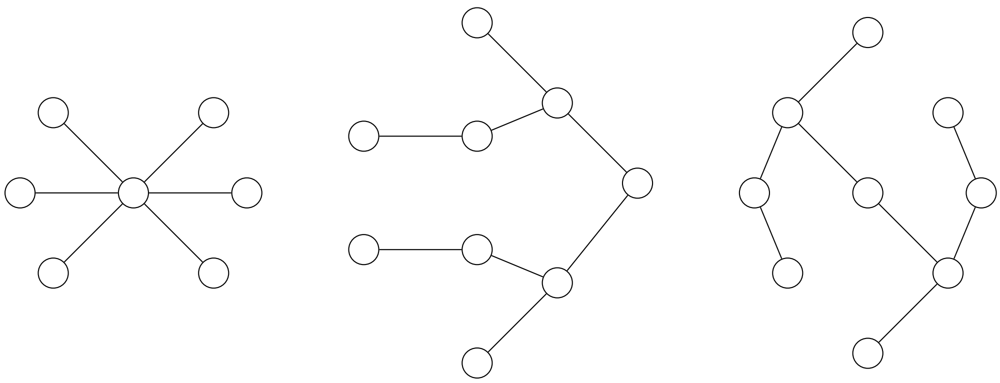
Za graf sa slike 2.1, pripadajuća matrica incidencije je sljedeća:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada, kada smo se upoznali s glavnim rezultatima vezanim za grafove, vrijeme je da fokus prijeđe na **stabla**.

Definicija 2.0.7. ***Šuma*** *je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo* ***stablo****.*

Na slici 2.4 možemo vidjeti nekoliko stabala.



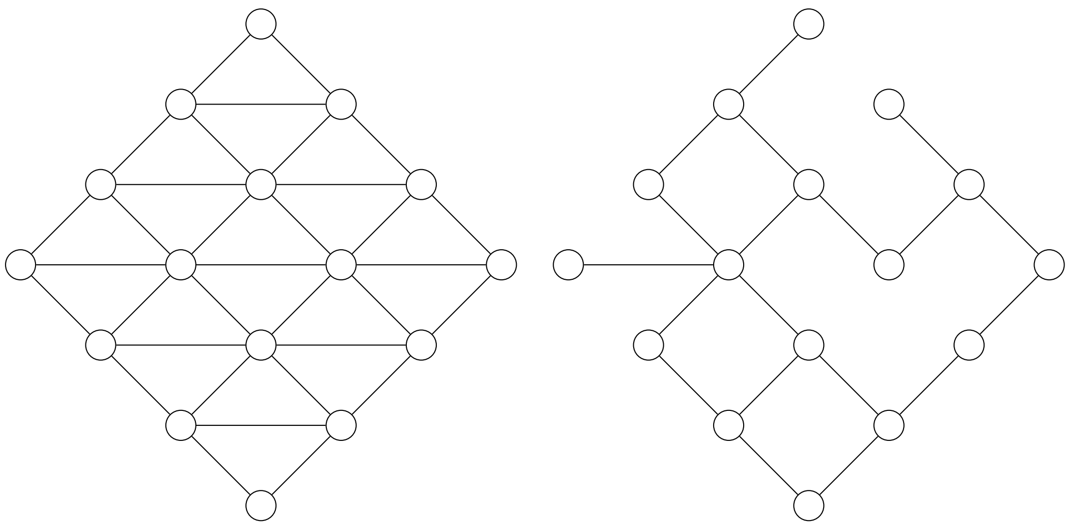
Slika 2.4: Primjeri stabala.

Primjetimo da svako stablo ima točno $n - 1$ bridova, gdje je *n* broj vrhova grafa.

Sada smo se upoznali sa pojmom stabla. U nastavku će biti više govora o **razapinjućim stablima**. Također, u nastavku će nas zanimati samo jednostavni i povezani grafovi, tako da to neću svaki put eksplicitno naglašavati.

3. Razapinjuća stabla

Definicija 3.0.1. ***Razapinjući podgraf*** *zadanog grafa $G = (V, E)$ s n vrhova je svaki podgraf $G' = (V, E')$ grafa G s istim skupom vrhova kao i G, dakle također s n vrhova.*

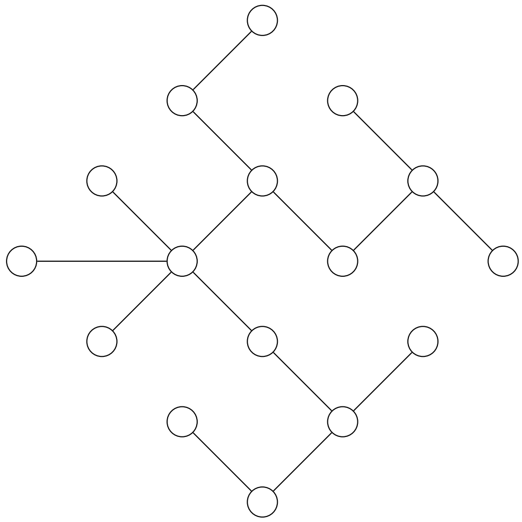


Slika 3.1: Primjer grafa i jednog njegovog razapinjućeg podgrafa.

Na primjeru sa slike 3.1 vidi se da priloženi razapinjući podgraf nije jedini mogući razapinjući podgraf zadanog grafa.

Definicija 3.0.2. ***Razapinjuće stablo*** *zadanog grafa $G = (V, E)$ s n vrhova je podgraf $G' = (V, E')$ grafa G koji je ujedno i stablo.*

Primjer razapinjućeg stabla za graf sa slike 3.1 je na slici 3.2.

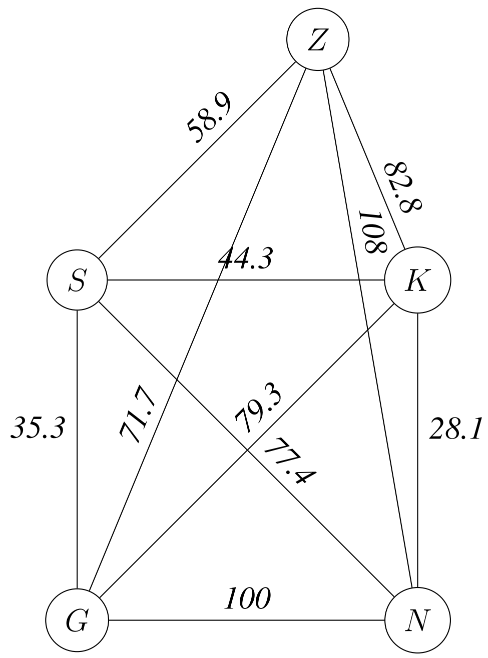


Slika 3.2: Jedno razapinjuće stablo grafa sa slike 3.1.

Naravno, stablo sa slike 3.2 nije jedino razapinjuće stablo grafa sa slike 3.1, te, počnemo li razmatrati težine bridova, otkrit ćemo da određivanje razapinjućeg stabla s minimalnom težinom ima brojne primjene.

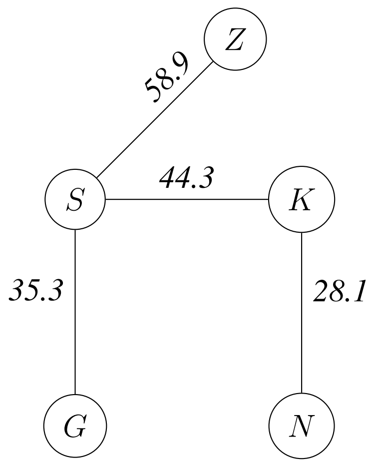
3.1. Primjer primjene

Pretpostavimo da djelatnici Hrvatskih Autocesta žele sagraditi autoceste koje će povezivati gradove Zagreb (Z), Sisak (S), Kutinu, (K), Glinu (G) te Novsku (N). Graf koji prikazuje odnose između ovih gradova prikazan je na slici 3.3. Cilj je povezati sve gradove s autocestom, no s obzirom da je izgradnja skupa, žele se povezati svi gradovi tako da ukupna kilometraža novih cesta bude najmanja moguća. Rješenje ovog problema je u pronalasku minimalnog razapinjućeg stabla. Za to postoje razni algoritmi, ovaj problem ću rješiti Primovim algoritmom, koji se svodi na to da odaberemo proizvoljni vrh grafa, pa se od skupa ostalih vrhova bira onaj koji je s odabranim vrhom susjedan, te čiji incidentni brid ima najmanju težinu. Svakim korakom algoritma tako povećavamo skup odabranih vrhova, i algoritam se ponavlja dok kardinalni broj odabranih vrhova ne bude jednak broju vrhova grafa. Rezultat će biti najmanje razapinjuće stablo.



Slika 3.3: Graf koji prikazuje odnose između gradova. Težina brida predstavlja udaljenost između dva pripadajuća grada izraženu u kilometrima.

Rezultat, to jest, minimalno razapinjuće stablo grafa sa slike 3.3, prikazano je na slici 3.4.



Slika 3.4: Minimalno razapinjuće stablo grafa sa slike 3.3

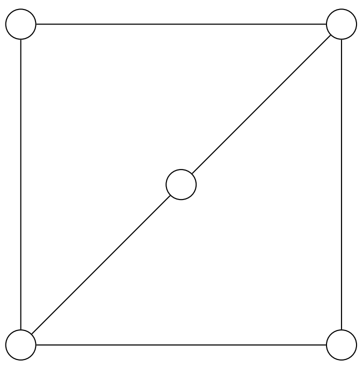
Nije pronalazak najmanjeg razapinjućeg stabla interesantan samo djelatnicima Hrvatskih Autocesta. Velikog interesa u tome vide i željezničari, koji također žele potršiti što je manje resusra pri gradnji. Također, ako se u neki grad želi uvesti kabelska televizija, isto će djelatnici upravo traženjem minimalnog razapinjućeg stabla tražiti najbolji način za povezati svaki dio grafa sa kablovima. Pri dizajnu električnih krugova, potrebno je povezati određene točke da bi bile električki ekvivalentne. Minimalno razapinjućem stablo je potrebno najmanje žice da bi se povezao, što će električari htjeti. Ovo su samo neke od mogućih primjena.

U nastavku rada neću tražiti određeno razapinjuće stablo za zadani graf, već ću se baviti općenitijim problemom, pitanjem koliko razapinjućih stabala neki graf G uopće ima. To pitanje nije jednostavno, i ne postoji eksplicitna formula koja bi bila ispravna za svaki graf.

3.2. Broj razapinjućih stabala - primjeri

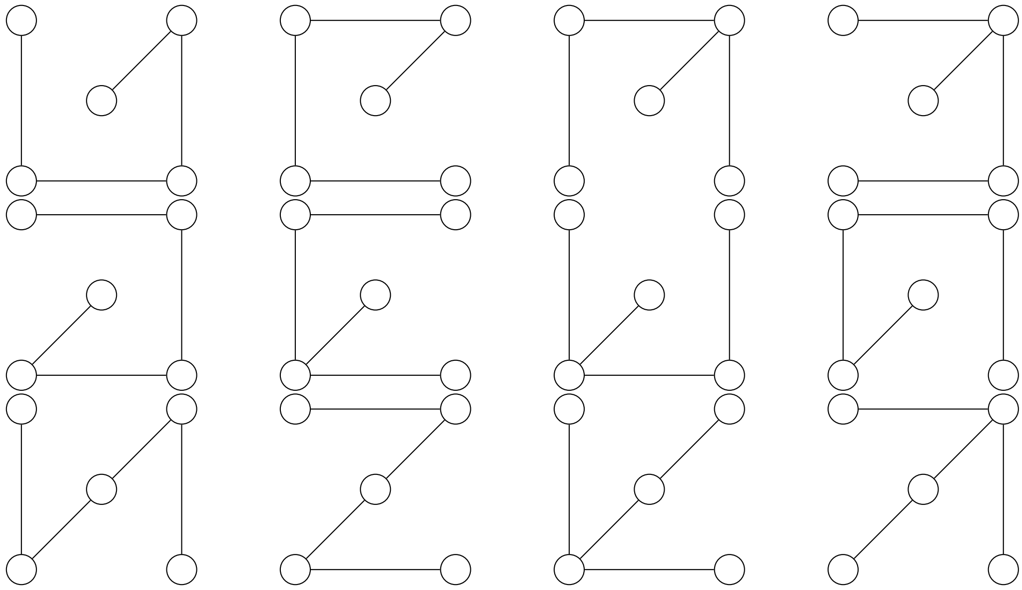
U ovom odjeljku bavit ću se određivanjem eksplicitnih formula za računanje broja razapinjućih stabala određenih vrsta grafova. Karakteristika tih formula će biti ta da će jedina varijabla u njima biti n, odnosno broj vrhova grafa.

Za grafove s malim brojem vrhova mogu se i ručno konstruirati sva razapinjuća stabla, no već i za grafove s 5 vrhova i nemalim brojem bridova (jednostavni graf s n vrhova može imati maksimalno $\binom{n}{2}$ bridova) taj problem postaje kompliciran za rješavanje takvim postupkom.



Slika 3.5: Primjer grafa

Na slici 3.5 prikazan je jednostavan graf s 5 vrhova, a na slici 3.6 prikazano je njegovih 12 razapinjućih stabala.

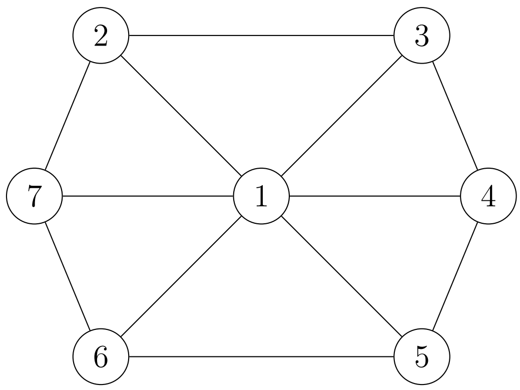


Slika 3.6: Razapinjuća stabla grafa sa slike 3.5

Kao što vidimo, već za graf sa slike 3.5, koji ima 5 vrhova i samo 7 bridova (grafovi s 5 vrhova mogu imati maksimalno 10 bridova) imamo 12 razapinjućih stabala. Očigledno je da će se povećanjem broja bridova i broja vrhova ovaj zadatak čovjeku znatno otežati, i tu se rađa potreba za pametnijim načinom računanja.

3.2.1. Kotač, W_n

Prvi primjer je graf kotač, odnosno W_n. Kotač je graf koji je sličan grafu ciklusu C_n uz razliku da se jedan od vrhova nalazi u sredini te su svi ostali vrhovi, osim što su povezani u ciklus, još povezani s vrhom u sredini.



Slika 3.7: Kotač W_6.

Jedan primjer kotača je i W_6 prikazan na slici 3.1.

Za računanje će od iznimne važnosti biti sljedeći izraz:

$$T(G) = T(G-e) + T(G\backslash e) \tag{3.1}$$

Prije samog izračuna, potrebno je dokazati da je izraz (3.1) ispravan.

Dokaz. Neka je *e* neki fiksni brid od *G*. Uočimo da se razapinjuća stabla od *G* dijele na:

- razapinjuća stabla od *G* koja ne sadrže brid *e*; neka je taj broj jednak x,
- razapinjuća stabla od *G* koja sadrže brid *e*; neka je taj broj jednak y.

Vrijedi: $T(G) = x + y$. Uočimo sada da je:

- $x = T(G-e)$ jer je svako razapinjuće stablo od *G* koje ne sadrži *e*, ujedno i razapinjuće stablo od $G-e$
- $y = T(G\backslash e)$ jer svako razapinjuće stablo od $G\backslash e$ možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od *G* koje sadrži brid *e* postupkom konkatenacije brida *e* u tom stablu.

Dakle, vrijedi $T(G) = T(G-e) + T(G\backslash e)$. □

Da bismo mogli pronaći eksplicitnu formulu za računanje broja razapinjućih stabala kotača s proizvoljnim brojem vrhova, potrebno je definirati nekoliko familija grafova koje ćemo koristiti.

Koristimo izraz (3.1) nad označenim bridovima sa slike 3.2, te dobivamo sustav rekurzivnih relacija:

$T(W_n) = T(A_n) + T(B_{n-1})$
$T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$
$T(B_n) = T(D_n) + T(B_{n-1})$
$T(C_n) = T(C_{n-1}) + T(D_{n-1})$
$T(D_n) = T(C_n) + T(D_{n-1}) = T(D_{n-1}) + T(B_{n-1})$

Uzmimo sada u obzir relacije za $T(C_n)$ i $T(D_n)$. Dobivamo:

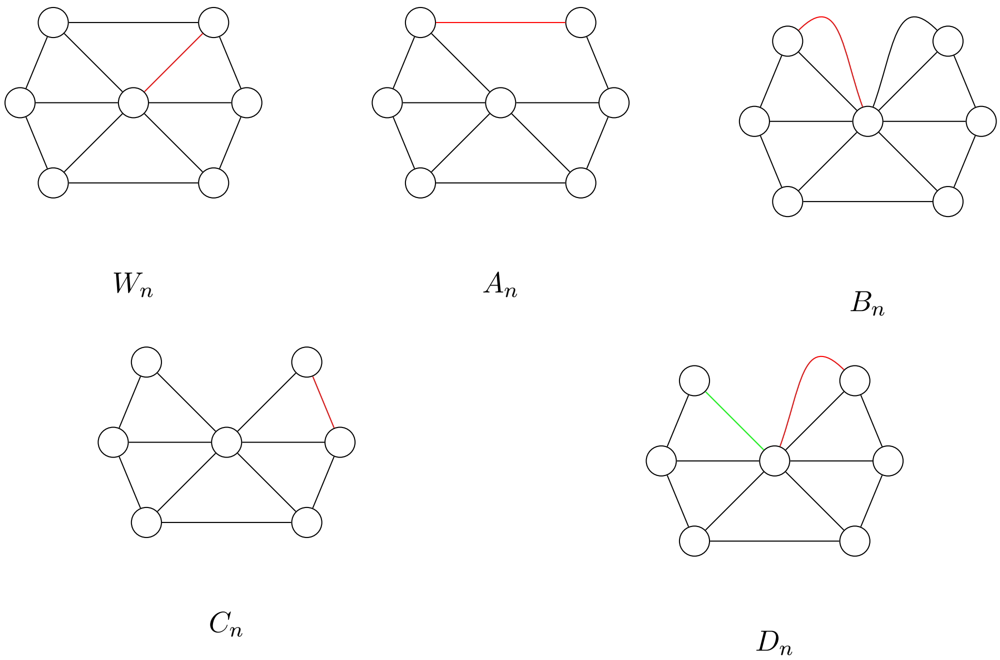
$$T(C_{n+1}) = T(C_n) + T(D_n) = 2T(C_n) + T(D_{n-1}) = 3T(C_n) - T(C_{n-1})$$

ili

$$T(C_{n+1}) - 3T(C_n) + T(C_{n-1}) = 0$$

odnosno

$$T(C_n) - 3T(C_{n-1}) + T(C_{n-2}) = 0$$



Slika 3.8: Pet familija grafova koje će se koristiti za nalaženje eksplicitne formule za računanje broja razapinjućih stabala grafa kotača W_n (n označava broj vrhova).

i

$$T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$$

Oduzmemo li prethodne dvije relacije, dobit ćemo konačnu rekurzivnu relaciju za $T(C_n)$:

$$T(C_n) - 4T(C_{n-1}) + 4T(C_{n-2}) - T(C_{n-3}) = 0$$

Promotrimo sada relacije za $T(W_n)$ i $T(A_n)$. Obzirom da je $T(B_{n-1}) = T(C_n)$, imamo $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$ i, posljedično, $T(W_{n-1}) = T(A_{n-1}) + T(C_{n-1})$.

Supstitucijom u relaciju $T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$ dobivamo:

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 2T(C_{n-1})$$

$$T(A_n) - T(A_{n-1}) = 2T(C_{n-1})$$

Obzirom da je $T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$, imamo:

$$2T(C_{n-1}) - 2(3)T(C_{n-2}) + 2T(C_{n-3}) = 0$$

$$[T(A_n) - T(A_{n-1})] - 3[T(A_{n-1}) - T(A_{n-2})] + [T(A_{n-2}) - T(A_{n-3})] = 0$$

iz čega, sređivanjem izraza, slijedi:

$$T(A_n) - 4T(A_{n-1}) + 4T(A_{n-2}) - T(A_{n-3}) = 0$$

što je konačna rekurzivna relacija za $T(A_n)$.

Primjetimo da sada i $T(A_n)$ i $T(C_n)$ imaju homogenu rekurzivnu relaciju trećeg reda:

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} - x_{n-3} = 0$$

iz čega proizlazi da i $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$ mora imati identičnu relaciju. Karakteristična jednadžba koja korespondira s ovom relacijom je:

$$r^3 - 4r^2 + 4r + 1 = 0$$

$$(r-1)(r^2 - 3r + 1) = 0$$

Ta jednadžba ima karakteristične korijene $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ i $r_3 = 1$. Dakle, opće rješenje od $T(W_n)$ je:

$$T(W_n) = \alpha(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n + \gamma$$

Da bi se ova relacija rješila, potrebno je pronaći vrijednosti konstanti α, β i γ takvih da se opće rješenje slaže s početnim uvjetima $T(W_3) = 16$, $T(W_4) = 45$ i $T(W_5) = 121$ (uz uvjet $n >= 3$). Dobivamo sustav:

$$T(W_n) = \alpha(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 + \beta(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^3 + \gamma = 16$$

$$T(W_n) = \alpha(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^4 + \beta(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^4 + \gamma = 45$$

$$T(W_n) = \alpha(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^5 + \beta(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^5 + \gamma = 121$$

Sustav se može rješiti na razne načine, jedan od njih je i preko matrice sustava:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 & (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^3 & 1 & 16 \\ (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^4 & (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^4 & 1 & 45 \\ (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^5 & (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^5 & 1 & 121 \end{array}\right]$$

Cilj je da na lijevoj strani ostane jedinična matrica, i onda će vrijednosti s desne strane biti rješenja sustava. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 1$ i $\gamma = -2$ iz čega slijedi da je broj razapinjučih stabala grafa kotača W_n jednak:

$$T(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - 2 \tag{3.2}$$

Sada, kada su navedene osnovne definicije vezane za razapinjuća stabla, i kada je naveden primjer pronalaženja eksplicitne formule za broj razapinjućih stabala grafa kotača, vrijeme je da se upoznamo s centralnim teoremom ovog rada, teoremom koji će nam dati recept za izračun broja razapinjućih stabala proizvoljnog grafa.

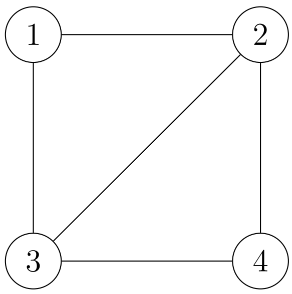
4. Matrični teorem o stablima

Cilj ovog poglavlja je izvesti rezultat koji broj razapinjućih stabala grafa računa kao determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Te matrice nazivaju se *Laplacijani*.

4.1. Laplacian

Neka je G neusmjereni graf s n vrhova, i neka d_i označuje stupanj vrha i. *Laplacian L* je modificirana verzija matrice susjedstva grafa G, definirana na sljedeći način:

$L_{ij} = d_i$ ako je $i = j$, $L_{ij} = -1$ ako su vrhovi i i j povezani, te $L_{ij} = 0$ inače.



Slika 4.1: Primjer grafa s 4 vrha

Laplacian L grafa sa slike 4.1 je:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od L jednak 0. Zbog toga je determinanta od L uvijek jednaka 0.

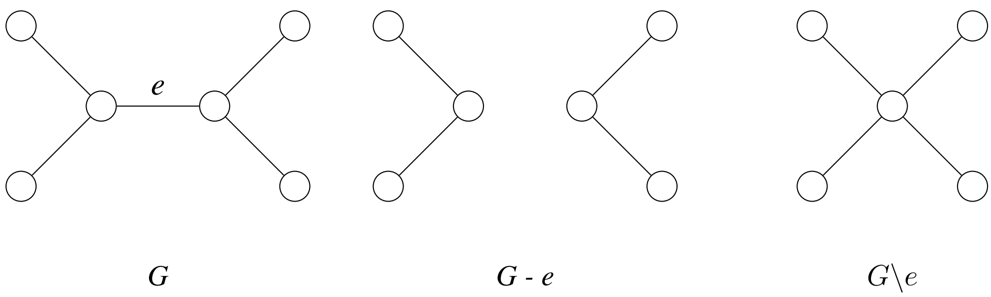
Da bismo bili u mogućnosti iskazati matrični teorem o stablima, potrebno je uvesti još jedan komad notacije. Pretpostavimo li matricu A s dimenzijama n x n, s $A^{(ij)}$ će se označavati matrica dimenzija (n - 1) x (n - 1) dobivena brisanjem i-tog redka i j-tog stupca matrice *A*. Takve matrice se nazivaju *minore*. Sljedeći teorem nam govori da nam minore *Laplaciana* daju upravo rezultat koji tražimo.

4.2. Matrix-Tree teorem

Teorem 4.2.1 (Matrix-Tree teorem)**.** *Neka je G nepovezani graf ili multigraf i neka T(G) označava broj razapinjućih stabala u G. Za bilo koji i, T(G) = det* $L^{(ii)}$*, gdje je L laplacian od G. Preciznije, det* $L^{(ii)}$ *je jednak za svaki i.*

Dokaz. Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da teorem vrijedi za povezane grafove s manje vrhova ili bridova. Kao bazu indukcije, pretpostavimo da se graf *G* sastoji od samo jednog vrha. U tom slučaju, $T(G) = 1$, i teorem daje ispravan rezultat: $L = (0)$ i $L^{(11)}$ je matrica dimenzija 0 x 0, čija je determinanta po definiciji jednaka 1.

Za korak indukcije pretpostavljamo graf *G* koji ima barem dva vrha, te odabiremo jedan od tih vrhova, recimo vrh *i*. Ako *i* nije incidentan s nijednim bridom, onda *G* nema razapinjuće stablo. U ovom slučaju će teorem vrijediti jer je $L^{(ii)}$ zapravo *Laplacian* ostatka grafa te će njezina determinanta biti jednaka nuli, kao što je navedeno u odjeljku 4.1.



Slika 4.2: $G - e$ je graf koji se dobije brisanjem brida *e*, a $G\backslash e$ je graf koji se dobije kontrakcijom brida *e* i spajanjem incidentnih vrhova u jedan vrh.

Sada pretpostavimo da je *i* povezan s nekim drugim vrhom *j*, te neka *e* označava brid *(i,j)*. Kao što je prikazano na slici 4.2, postoje dva načina na koje se može modificirati *G*: brid *e* možemo jednostavno izbrisati, ili možemo kontrakcijom vrhove *i* i *j* spojiti u jedan vrh. Takve grafove označujemo s $G - e$ i $G\backslash e$. Sada tvrdimo da je broj razapinjučih stabala *T(G)* zadan sa sljedećim rekurzivnim izrazom:

$$T(G) = T(G - e) + T(G\backslash e) \tag{4.1}$$

Ispravnost izraza (4.1) je dokazana u poglavlju 3.

Prtpostavimo sada da matrični teorem vrijedi za $G - e$ i za $G \backslash e$. Možemo razmjestiti vrhove od *G* tako da su *i* i *j* prva dva vrha. Sada Laplacian *L* od *G* možemo napisati kao:

$$L_G = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right]$$

Ovdje r_i i r_j predstavljaju *(n - 2)*-dimenzionalne vektore koji opisuju konekcije vrhova *i* i *j* s ostalih *n - 2* vrha od *G* (r_i^T i r_j^T su transponirani vektori), a *L'* je *(n - 2)*-dimenzionalna minora koja predstavlja *laplacian* ostatka grafa. *Laplaciane* grafova $G - e$ i $G \backslash e$ pišemo na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right], L_{G\backslash e} = \left[\begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array}\right]$$

Da bi se indukcija završila, potrebno je pokazati:

$$det L_G^{(ii)} = det L_{G-e}^{(ii)} + det L_{G\backslash e}^{(jj)} \tag{4.2}$$

ili, u matričnom zapisu:

$$det \left(\begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right) = det \left(\begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right) + det L'.$$

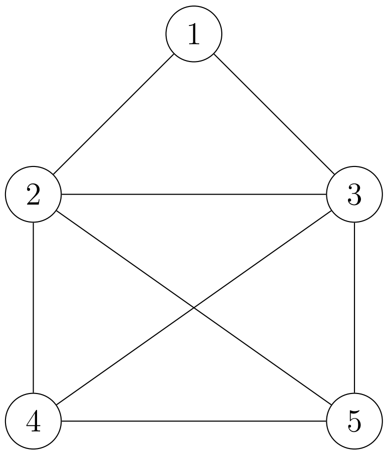
Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da determinanta matrice može biti napisana kao linearna kombinacija njenih *kofaktora*, tj. determinanti njenih minora. Za bilo koju matricu *A* vrijedi

$$det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j A_{1,j} det A^{(1,j)}. \tag{4.3}$$

Dakle, ako se dvije matrice razlikuju samo u njihovim (1,1) ćelijama, a $A_{ij} = B_{ij}$ za svaki drugi *i* i *j*, njihove determinante se razlikuju za determinantu njigovih (1,1) minora, odnosno $det A = det B + det A^{(1,1)}$. Primjenimo li ovo za $L_G^{(ii)}$ i $L_{G-e}^{(ii)}$, dobit ćemo izraz (4.2), čime se dovršava dokaz ovog teorema. □

5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima

Da bismo se uvjerili da je rezultat prethodnog teorema zaista ispravan, u ovom poglavlju razraditi ćemo primjere.



Slika 5.1: Primjer grafa s 5 vrhova

Na slici 5.1 prikazan je graf s 5 vrhova. Matrica susjedstva A navedenog grafa, te njezin laplacian L su sljedeći:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

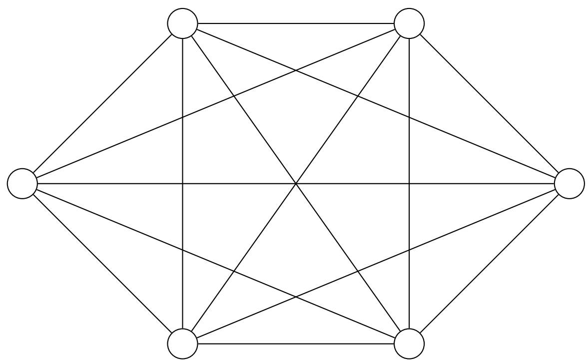
Kao sljedeći korak, stvorimo, na primjer, matricu $L^{(22)}$ dobivenu brisanjem drugog retka i drugog stupca matrice L.

$$L^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanta prethodne matrice, a ujedno i broj razapinjućih stabala grafa sa slike 5.1 je: $T(G) = detL^{(22)} = 40$. Jednak bi se rezultat dobio da smo matricu $L^{(ii)}$ stvorili tako da smo maknuli bilo koji drugi redak i stupac matrice L.

5.1. Računanje broja razapinjućih stabala za poznate familije grafova

U ovom odjeljku ću na temelju matričnog teorema o stablima izračunati eksplicitne formule za broj razapinjućih stabala potpunih grafova, K_n.



Slika 5.2: Primjer potpunog grafa, K_6

5.1.1. Potpuni graf, $\mathbf{K_n}$

Potpuni graf je graf u kojem je svaki vrh susjedan sa svim ostalim vrhovima. Primjer jednog potpunog grafa je dan na slici 5.2.

U ***dodaj poveznicu na skriptu iz diskretne*** iznesen je rezultat da potpuni graf s n vrhova, K_n, ima n^{n-2} razapinjućih stabala. Sada ću taj rezultat prikazati preko matričnog teorema o stablima.

Za potpuni graf K_n s n vrhova, pripadajuća matrica susjedstva je sljedeća:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pripadni *laplacian* je:

$$L = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da će minora te matrice, $L^{(ii)}$ biti ista bez obzira koji i odabrali. Ta je matrica sljedeća:

$$L^{(ii)} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Dimenzija prethodne matrice je $(n-1) * (n-1)$. Sada je potrebno izračunati determinantu prethodne matrice. Počinjemo tako da prvom retku zbrojimo sve ostale retke matrice. Dobit ćemo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

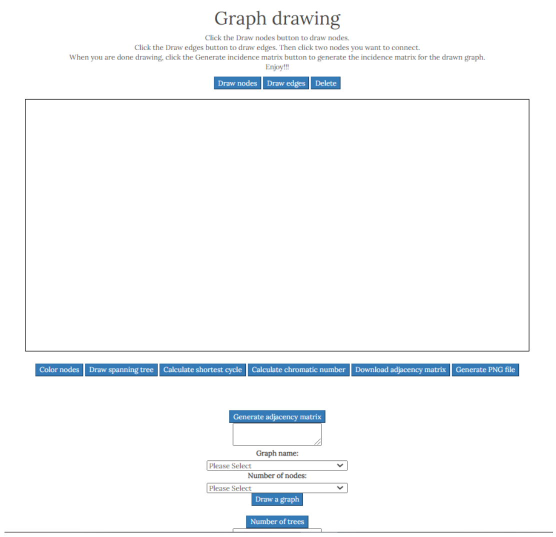
Sada ćemo prvi redak dodati svim ostalim retcima u matrici, te ćemo dobiti sljedeće:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & & 0 & n \end{bmatrix}$$

Primjetimo da smo dobili gornju trokutastu matricu, a njena determinanta je jednaka umnošku elemenata na dijagonali, tako da je broj razapinjućih stabala potpunog grafa s n vrhova, $T(K_n) = n^{n-2}$, što se poklapa s očekivanim rezultatom.

6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala

Graphelite je web-aplikacija razvijena u 5. semestru u sklopu kolegija *Projekt R* u suradnji s još dvoje kolega. To je aplikacija koja korisniku dopušta da crta jednostavne grafove i nad njima provodi razne algoritme i dobije zanimljive rezultate o nacrtanim grafovima. Moguće je crtati grafove, nacrtanom grafu odrediti najmanje razapinjuće stablo, odrediti duljinu struka (najkraći ciklus), odrediti kromatski broj, obojati vrhove grafa, te izračunati broj razapinjućih stabala.



Slika 6.1: Korisničko sučelje web-aplikacije *Graphelite*

6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa

Broj razapinjućih stabala grafa kojeg korisnik nacrta u aplikaciji se računa pomoću matričnog teorema o stablima, teorema koji je obrađen u 4. poglavlju ovoga rada. Odabere li korisnik opciju "Number of trees" pokrenut će se algoritam za izračunavanje broja razapinjućih stabala. Taj algoritam je sljedeći:

Algorithm 1 Računanje broja razapinjućih stabala grafa

Ulaz: $matrix$ – matrica susjedstva grafa G.
Ulaz: n – broj vrhova grafa G
Izlaz: broj razapinjućih stabala grafa G

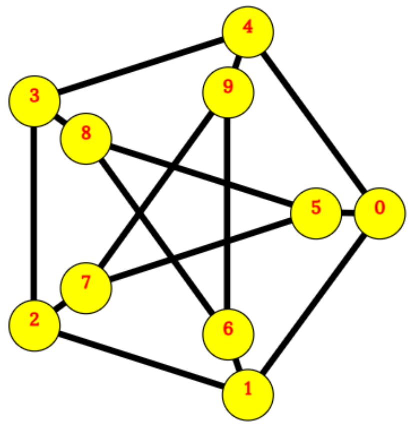
```
L11 := array[n − 1][n − 1]
for (i := 0; i < n − 1; i + +) do
    for (j := 0; j < n − 1; j + +) do
        if i == j then
            num := 0
            for (k := 0; k < n; k + +) do
                if matrix[i + 1][k] == 1 then
                    num := num + 1
                end if
            end for
            L11[i][j] := num
        else if matrix[i + 1][j + 1] == 1 then
            L11[i][j] := −1
        else
            L11[i][j] := 0
        end if
    end for
end for
rez := determinanta(L11)
return rez
```

6.2. Demonstracija rada programa

Prikazat ćemo rad algoritma za računanje broja razapinjućih stabala na primjerima Petersonovog grafa, i kotača sa 6 vrhova, W_6.

6.2.1. Petersonov graf

Na slici 6.1 se vidi Petersonov graf nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.



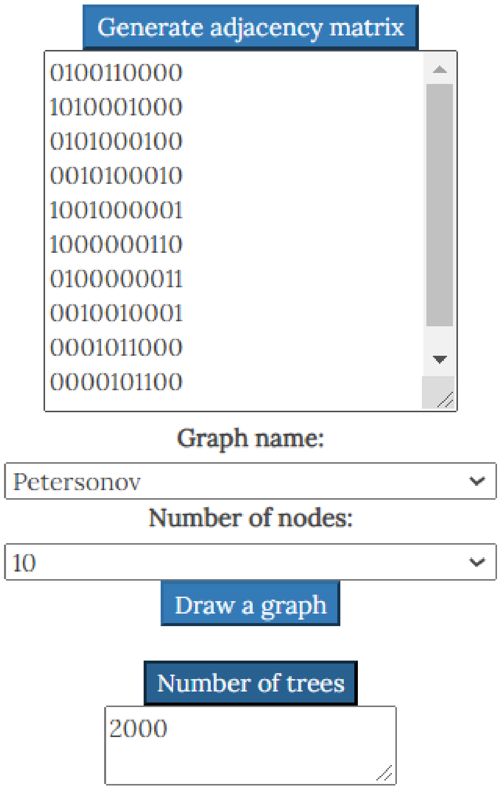
Slika 6.2: Petersonov graf

Na slici 6.2 vidi se matrica susjedstva Petersonovog grafa te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 2000.

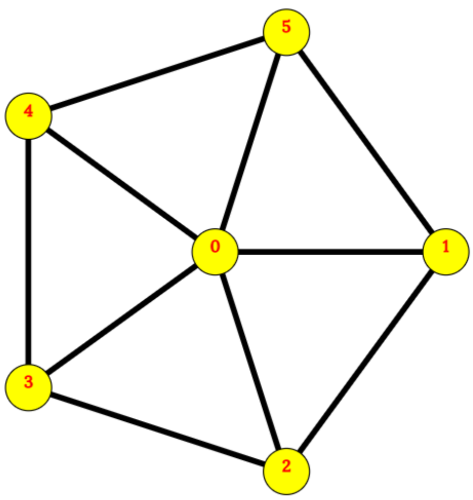
6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, W_5

Na slici 6.3 se vidi graf kotač s 6 vrhova, W_5 nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.

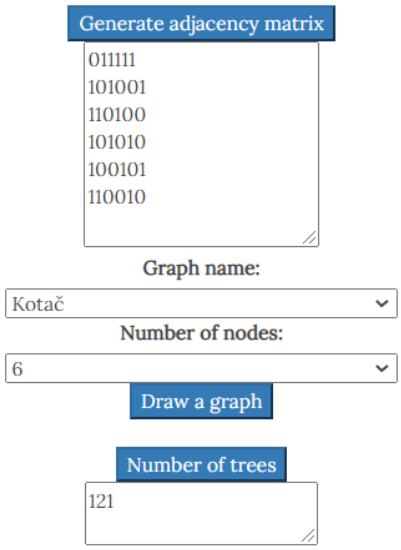
Na slici 6.4 vidi se matrica susjedstva za W_5 te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 121.



Slika 6.3: Broj razapinjućih stabala Petersonovog grafa



Slika 6.4: Kotač W_5



Slika 6.5: Broj razapinjućih stabala grafa W_5

7. Zaključak

Upoznali smo se sa pojmom grafa, iznijeli neke glavne definicije i rezultate o grafovima. Nakon toga smo se upoznali s stablima, te pojmom razapinjućih stabala koji je bio i centralni pojam ovog rada.

U glavnom dijelu rada smo se bavili određivanjem broja razapinjućih stabala proizvoljnog grafa i ubrzo shvatili da to pitanje nema jednostavan odgovor. Dali smo primjer grafa kotača na kojem smo izračunali eksplicitnu formulu za određivanje broja razapinjućih stabala. Za poneke familije grafova je i moguće odrediti eksplicitnu formulu koja ovisi samo o broju vrhova, no u slučaju proizvoljnog grafa, to je dosta teži problem.

Kao rješenje predstavljen je *matrični teorem o stablima*, koji nam daje elegantno rješenje. Teorem nam kaže da je za računanje broja razapinjućih stabala proizvoljnog grafa dovoljna samo njegova matrica susjedstva, koju je potrebno izmjeniti po određenom pravilu, i determinanta te matrice će biti jednaka broju razapinjućih stabala grafa.

To je elegantan rezultat koji možda čovjeku ipak ne daje efikasan način ručnog računanjabroja razapinjućih stabala (jer već i računanje determinante matrice koja ima dimenzije $8 * 8$ može biti mukotrpan posao), ali daje ideju po kojoj se mogu složiti efektivni algoritmi u kojima će brzina rješavanja problema biti jednaka brzini računanja determinante.

Predstavljena je i web-aplikacija *Graphelite* razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* koja korisniku daje mogućnost da crta grafove i nad njima provodi razne zanimljive algoritme. Među njima je i algoritam za računanje broja razapinjućih stabala, i njegov pseudokod je napisan u ovom radu.

LITERATURA

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Sažetak

Tema ovog rada je prebrojavanje broja razapinjućih stabala grafa. Predstavljeni su osnovni pojmovi teorije grafova, zatim je predstavljen pojam razapinjućeg grafa te prikazani primjeri primjene, zatim je predstavljeno teorijsko računanje broja razapinjućih grafova. Slijedi iskaz i dokaz matričnog teorema o stablima, te primjeri njegove primjene. Na kraju je prikazan rad web-aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R*.

Ključne riječi: teorija grafova, stabla, razapinjuća stabla, matrix-tree teorem

Counting spanning trees of a graph

Abstract

The thesis for this paper is counting spanning trees. First I presented the basic concepts of graph theory, then I introduced the spanning trees and connected them with some applications. After that, I expressed and proved the Matrix-tree theorem and used it to solve some examples. In the end, I showed the implementation of the *Graphelite* web-application that was developed in *(CS Project)* class.

Keywords: graph theory, trees, spanning trees, matrix-tree theorem