SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 253

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Dorian Kablar

Zagreb, svibanj 2021.

Umjesto ove stranice umetnite izvornik Vašeg rada.

Da bi ste uklonili ovu stranicu obrišite naredbu `\izvornik`.

Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Anamari Nakić, na motivaciji i savjetima prilikom pisanja ovog rada.

Zahvaljuem svojim roditeljima, pogotovo majci, koji su me podržavali u svakoj odluci, i koji su uvijek znali kako pomoći, čak i kad nisam bio svjestan da je pomoć potrebna.

SADRŽAJ

1. Uvod

U prvom dijelu ću iznijeti glavne definicije i rezultate vezane uz grafove i stabla. U drugom dijelu će biti govora o razapinjućim stablima. Pritom ću iznijeti neke osnovne rezultate te primjere teorijskog računanja broja razapinjučih stabala. U trećem dijelu ću iskazati i dokazati matrični teorem o stablima.

U četvrtom dijelu ću, koristeći prethodno dokazani teorem, iznijeti rezultate za primjere pojedinačnih grafova, kao i za grafove s proizvoljnim brojem vrhova, n. U petom dijelu, bit će opisan relevantan (za razapinjuća stabla) dio aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* u 5. semestru, te će se na primjerima prikazati njezin rad. Naposljetku će biti donesen zaključak o svemu što je napravljeno.

2. Glavne definicije i rezultati

3. Razapinjuća stabla

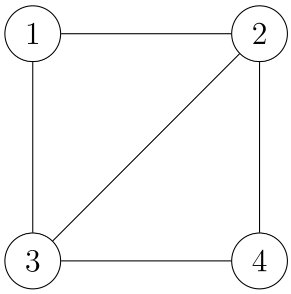
4. Matrični teorem o stablima

Cilj ovog poglavlja je izvesti rezultat koji broj razapinjućih stabala grafa računa kao determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Te matrice nazivaju se *Laplacijani*.

4.1. Laplacian

Neka je G neusmjereni graf s n vrhova, i neka d_i označuje stupanj vrha i. *Laplacian L* je modificirana verzija matrice susjedstva grafa G, definirana na sljedeći način:

$L_{ij} = d_i$ ako je $i = j$, $L_{ij} = -1$ ako su vrhovi i i j povezani, te $L_{ij} = 0$ inače.



Slika 4.1: Primjer grafa s 4 vrha

Laplacian L grafa sa slike 4.1 je:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od L jednak 0. Zbog toga je determinanta od L uvijek jednaka 0.

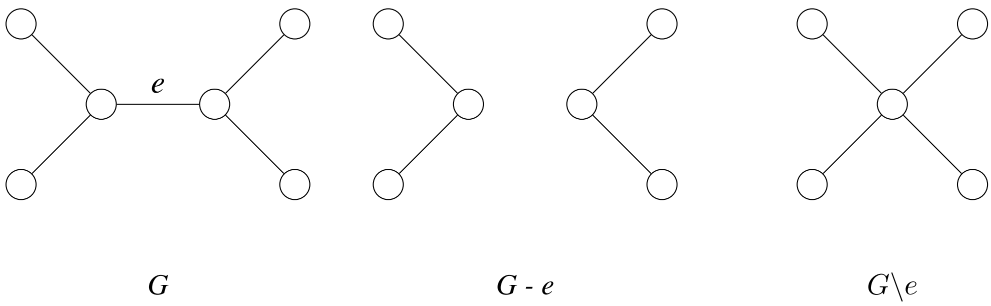
Da bismo bili u mogućnosti iskazati matrični teorem o stablima, potrebno je uvesti još jedan komad notacije. Pretpostavimo li matricu A s dimenzijama n x n, s $A^{(ij)}$ će se označavati matrica dimenzija (n - 1) x (n - 1) dobivena brisanjem i-tog redka i j-tog stupca matrice *A*. Takve matrice se nazivaju *minore*. Sljedeći teorem nam govori da nam minore *Laplaciana* daju upravo rezultat koji tražimo.

4.2. Matrix-Tree teorem

Matrix-Tree teorem: *Neka je G nepovezani graf ili multigraf i neka T(G) označava broj razapinjućih stabala u G. Za bilo koji i, T(G) = det* $L^{(ii)}$*, gdje je L laplacian od G. Preciznije, det* $L^{(ii)}$ *je jednak za svaki i.*

Dokaz: Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da teorem vrijedi za povezane grafove s manje vrhova ili bridova. Kao bazu indukcije, pretpostavimo da se graf *G* sastoji od samo jednog vrha. U tom slučaju, $T(G) = 1$, i teorem daje ispravan rezultat: $L = (0)$ i $L^{(11)}$ je matrica dimenzija 0 x 0, čija je determinanta po definiciji jednaka 1.

Za korak indukcije pretpostavljamo graf *G* koji ima barem dva vrha, te odabiremo jedan od tih vrhova, recimo vrh *i*. Ako *i* nije incidentan s nijednim bridom, onda *G* nema razapinjuće stablo. U ovom slučaju će teorem vrijediti jer je $L^{(ii)}$ zapravo *Laplacian* ostatka grafa te će njezina determinanta biti jednaka nuli, kao što je navedeno u odjeljku 4.1.



Slika 4.2: $G - e$ je graf koji se dobije brisanjem brida *e*, a $G\backslash e$ je graf koji se dobije kontrakcijom brida *e* i spajanjem incidentnih vrhova u jedan vrh.

Sada pretpostavimo da je *i* povezan s nekim drugim vrhom *j*, te neka *e* označava brid *(i,j)*. Kao što je prikazano na slici 4.2, postoje dva načina na koje se može modificirati *G*: brid *e* možemo jednostavno izbrisati, ili možemo kontrakcijom vrhove *i* i *j* spojiti u jedan vrh. Takve grafove označujemo s $G - e$ i $G\backslash e$. Sada tvrdimo da je broj razapinjučih stabala *T(G)* zadan sa sljedećim rekurzivnim izrazom:

$$T(G) = T(G - e) + T(G\backslash e) \tag{4.1}$$

Prije nastavka dokaza matričnog teorema o stablima potrebno je dokazati da je izraz (4.1) ispravan. Neka je *e* neki fiksni brid od *G*. Uočimo da se razapinjuća stabla od *G* dijele na:

- razapinjuća stabla od *G* koja ne sadrže brid *e*; neka je taj broj jednak x,
- razapinjuća stabla od *G* koja sadrže brid *e*; neka je taj broj jednak y.

Vrijedi: $T(G) = x + y$. Uočimo sada da je:

- $x = T(G - e)$ jer je svako razapinjuće stablo od *G* koje ne sadrži *e*, ujedno i razapinjuće stablo od $G - e$
- $y = T(G \backslash e)$ jer svako razapinjuće stablo od $G \backslash e$ možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od *G* koje sadrži brid *e* postupkom konkatenacije brida *e* u tom stablu.

Dakle, vrijedi $T(G) = T(G - e) + T(G \backslash e)$.

Prtpostavimo sada da matrični teorem vrijedi za $G - e$ i za $G \backslash e$. Možemo razmjestiti vrhove od *G* tako da su *i* i *j* prva dva vrha. Sada Laplacian *L* od *G* možemo napisati kao:

$$L_G = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right]$$

Ovdje r_i i r_j predstavljaju *(n - 2)*-dimenzionalne vektore koji opisuju konekcije vrhova *i* i *j* s ostalih *n - 2* vrha od *G* (r_i^T i r_j^T su transponirani vektori), a *L'* je *(n - 2)*-dimenzionalna minora koja predstavlja *laplacian* ostatka grafa. *Laplaciane* grafova $G - e$ i $G \backslash e$ pišemo na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right], L_{G \backslash e} = \left[\begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array}\right]$$

Da bi se indukcija završila, potrebno je pokazati:

$$det L_G^{(ii)} = det L_{G-e}^{(ii)} + det L_{G \backslash e}^{(jj)} \tag{4.2}$$

ili, u matričnom zapisu:

$$det \left(\begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right) = det \left(\begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right) + det L'.$$

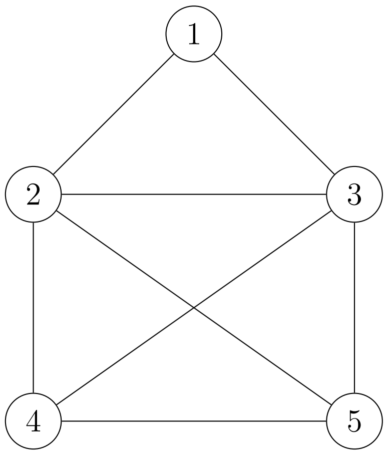
Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da determinanta matrice može biti napisana kao linearna kombinacija njenih *kofaktora*, tj. determinanti njenih minora. Za bilo koju matricu *A* vrijedi

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j A_{1,j} detA^{(1,j)}. \tag{4.3}$$

Dakle, ako se dvije matrice razlikuju samo u njihovim (1,1) ćelijama, a $A_{ij} = B_{ij}$ za svaki drugi *i* i *j*, njihove determinante se razlikuju za determinantu njigovih (1,1) minora, odnosno $detA = detB + detA^{(1,1)}$. Primjenimo li ovo za $L_G^{(ii)}$ i $L_{G-e}^{(ii)}$, dobit ćemo izraz (4.2), čime se dovršava dokaz ovog teorema.

5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima

Da bismo se uvjerili da je rezultat prethodnog teorema zaista ispravan, u ovom poglavlju razraditi ćemo primjere.



Slika 5.1: Primjer grafa s 5 vrhova

Na slici 5.1 prikazan je graf s 5 vrhova. Matrica susjedstva A navedenog grafa, te njezin laplacian L su sljedeći:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kao sljedeći korak, stvorimo, na primjer, matricu $L^{(22)}$ dobivenu brisanjem drugog retka i drugog stupca matrice L.

$$L^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanta prethodne matrice, a ujedno i broj razapinjućih stabala grafa sa slike 5.1 je: $T(G) = detL^{(22)} = 40$. Jednak bi se rezultat dobio da smo matricu $L^{(ii)}$ stvorili tako da smo maknuli bilo koji drugi redak i stupac matrice L.

6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala

7. Zaključak

Zaključak.

LITERATURA

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Sažetak

Sažetak na hrvatskom jeziku.

Ključne riječi: Ključne riječi, odvojene zarezima.

Title

Abstract

Abstract.

Keywords: Keywords.