

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 253

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Dorian Kablar

Zagreb, svibanj 2021.

*Umjesto ove stranice umetnite izvornik Vašeg rada.
Da bi ste uklonili ovu stranicu obrišite naredbu \izvornik.*

Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Anamari Nakić, na motivaciji i savjetima prilikom pisanja ovog rada.

Zahvaljuem svojim roditeljima, pogotovo majci, koji su me podržavali u svakoj odluci, i koji su uvijek znali kako pomoći, čak i kad nisam bio svjestan da je pomoć potrebna.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Glavne definicije i rezultati	2
3. Razapinjuća stabla	3
4. Matrični teorem o stablima	4
4.1. Laplacian	4
4.2. Matrix-Tree teorem	5
5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima	8
6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala	10
6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa	10
6.2. Demonstracija rada programa	12
6.2.1. Petersonov graf	12
6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, W_6	13
7. Zaključak	15
Literatura	16

1. Uvod

U prvom dijelu ću iznijeti glavne definicije i rezultate vezane uz grafove i stabla. U drugom dijelu će biti govora o razapinjućim stablima. Pritom ću iznijeti neke osnovne rezultate te primjere teorijskog računanja broja razapinjućih stabala. U trećem dijelu ću iskazati i dokazati matrični teorem o stablima.

U četvrtom dijelu ću, koristeći prethodno dokazani teorem, iznijeti rezultate za primjere pojedinačnih grafova, kao i za grafove s proizvoljnim brojem vrhova, n . U petom dijelu, bit će opisan relevantan (za razapinjuća stabla) dio aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* u 5. semestru, te će se na primjerima prikazati njezin rad. Naposljetku će biti donesen zaključak o svemu što je napravljeno.

2. Glavne definicije i rezultati

3. Razapinjuća stabla

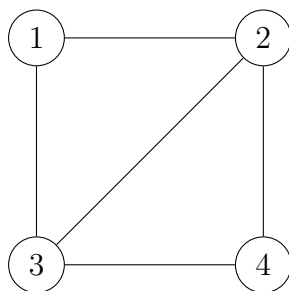
4. Matrični teorem o stablima

Cilj ovog poglavlja je izvesti rezultat koji broj razapinjućih stabala grafa računa kao determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Te matrice nazivaju se *Laplacijani*.

4.1. Laplacian

Neka je G neusmjereni graf s n vrhova, i neka d_i označuje stupanj vrha i . *Laplacian* L je modificirana verzija matrice susjedstva grafa G , definirana na sljedeći način:

$L_{ij} = d_i$ ako je $i = j$, $L_{ij} = -1$ ako su vrhovi i i j povezani, te $L_{ij} = 0$ inače.



Slika 4.1: Primjer grafa s 4 vrha

Laplacian L grafa sa slike 4.1 je:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od L jednak 0. Zbog toga je determinanta od L uvijek jednaka 0.

Da bismo bili u mogućnosti iskazati matrični teorem o stablima, potrebno je uvesti još jedan komad notacije. Pretpostavimo li matricu A s dimenzijama $n \times n$, s $A^{(ij)}$ će se označavati matrica dimenzija $(n - 1) \times (n - 1)$ dobivena brisanjem i -tog redka i j -tog

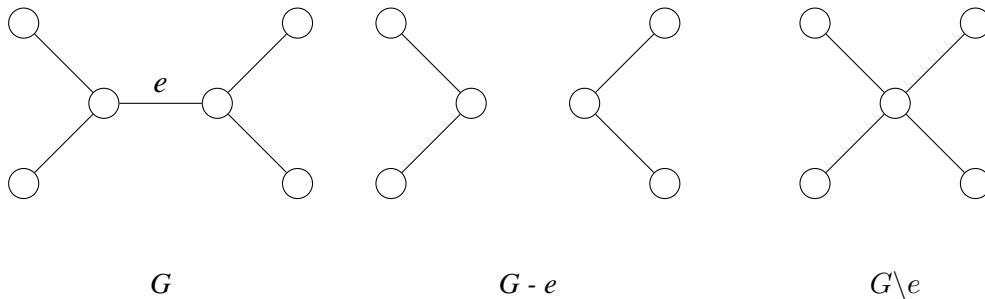
stupca matrice A . Takve matrice se nazivaju *minore*. Sljedeći teorem nam govori da nam minore *Laplaciana* daju upravo rezultat koji tražimo.

4.2. Matrix-Tree teorem

Matrix-Tree teorem: *Neka je G nepovezani graf ili multigraf i neka $T(G)$ označava broj razapinjućih stabala u G . Za bilo koji i , $T(G) = \det L^{(ii)}$, gdje je L laplacian od G . Preciznije, $\det L^{(ii)}$ je jednak za svaki i .*

Dokaz: Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da teorem vrijedi za povezane grafove s manje vrhova ili bridova. Kao bazu indukcije, pretpostavimo da se graf G sastoji od samo jednog vrha. U tom slučaju, $T(G) = 1$, i teorem daje ispravan rezultat: $L = (0)$ i $L^{(11)}$ je matrica dimenzija 0×0 , čija je determinanta po definiciji jednaka 1.

Za korak indukcije pretpostavljamo graf G koji ima barem dva vrha, te odabiremo jedan od tih vrhova, recimo vrh i . Ako i nije incidentan s nijednim bridom, onda G nema razapinjuće stablo. U ovom slučaju će teorem vrijediti jer je $L^{(ii)}$ zapravo *Laplacian* ostatka grafa te će njezina determinanta biti jednaka nuli, kao što je navedeno u odjeljku 4.1.



Slika 4.2: $G - e$ je graf koji se dobije brisanjem brida e , a $G \setminus e$ je graf koji se dobije kontrakcijom brida e i spajanjem incidentnih vrhova u jedan vrh.

Sada pretpostavimo da je i povezan s nekim drugim vrhom j , te neka e označava brid (i, j) . Kao što je prikazano na slici 4.2, postoje dva načina na koje se može modificirati G : brid e možemo jednostavno izbrisati, ili možemo kontrakcijom vrhove i i j spojiti u jedan vrh. Takve grafove označujemo s $G - e$ i $G \setminus e$. Sada tvrdimo da je broj razapinjućih stabala $T(G)$ zadan sa sljedećim rekurzivnim izrazom:

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e) \quad (4.1)$$

Prije nastavka dokaza matričnog teorema o stablima potrebno je dokazati da je izraz (4.1) ispravan. Neka je e neki fiksni brid od G . Uočimo da se razapinjuća stabla od G dijele na:

- razapinjuća stabla od G koja ne sadrže brid e ; neka je taj broj jednak x ,
- razapinjuća stabla od G koja sadrže brid e ; neka je taj broj jednak y .

Vrijedi: $T(G) = x + y$. Uočimo sada da je:

- $x = T(G - e)$ jer je svako razapinjuće stablo od G koje ne sadrži e , ujedno i razapinjuće stablo od $G - e$
- $y = T(G \setminus e)$ jer svako razapinjuće stablo od $G \setminus e$ možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od G koje sadrži brid e postupkom konkatencije brida e u tom stablu.

Dakle, vrijedi $T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e)$.

Prtpostavimo sada da matrični teorem vrijedi za $G - e$ i za $G \setminus e$. Možemo razmjestiti vrhove od G tako da su i i j prva dva vrha. Sada Laplacian L od G možemo napisati kao:

$$L_G = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right]$$

Ovdje r_i i r_j predstavljaju $(n - 2)$ -dimenzionalne vektore koji opisuju konekcije vrhova i i j s ostalih $n - 2$ vrha od G (r_i^T i r_j^T su transponirani vektori), a L' je $(n - 2)$ -dimenzionalna minora koja predstavlja *laplacian* ostatka grafa. *Laplaciane* grafova $G - e$ i $G \setminus e$ pišemo na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right], L_{G \setminus e} = \left[\begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array} \right]$$

Da bi se indukcija završila, potrebno je pokazati:

$$\det L_G^{(ii)} = \det L_{G-e}^{(ii)} + \det L_{G \setminus e}^{(jj)} \quad (4.2)$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) + \det L'.$$

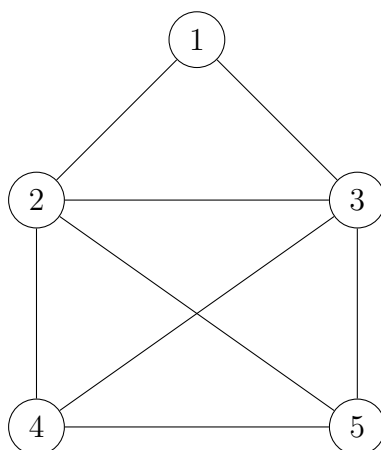
Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da determinanta matrice može biti napisana kao linearna kombinacija njenih *kofaktora*, tj. determinanti njenih minora. Za bilo koju matricu A vrijedi

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^j A_{1,j} \det A^{(1,j)}. \quad (4.3)$$

Dakle, ako se dvije matrice razlikuju samo u njihovim $(1,1)$ ćelijama, a $A_{ij} = B_{ij}$ za svaki drugi i i j , njihove determinante se razlikuju za determinantu njihovih $(1,1)$ minora, odnosno $\det A = \det B + \det A^{(1,1)}$. Primjenimo li ovo za $L_G^{(ii)}$ i $L_{G-e}^{(ii)}$, dobit ćemo izraz (4.2), čime se dovršava dokaz ovog teorema.

5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima

Da bismo se uvjerali da je rezultat prethodnog teorema zaista ispravan, u ovom poglavlju razraditi ćemo primjere.



Slika 5.1: Primjer grafa s 5 vrhova

Na slici 5.1 prikazan je graf s 5 vrhova. Matrica susjedstva A navedenog grafa, te njezin laplacian L su sljedeći:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kao sljedeći korak, stvorimo, na primjer, matricu $L^{(22)}$ dobivenu brisanjem drugog retka i drugog stupca matrice L .

$$L^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanta prethodne matrice, a ujedno i broj razapinjućih stabala grafa sa slike 5.1 je: $T(G) = \det L^{(22)} = 40$. Jednak bi se rezultat dobio da smo matricu $L^{(ii)}$ stvorili tako da smo maknuli bilo koji drugi redak i stupac matrice L .

6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala

Graphelite je web-aplikacija razvijena u 5. semestru u sklopu kolegija *Projekt R* u suradnji s još dvoje kolega. To je aplikacija koja korisniku dopušta da crta jednostavne grafove i nad njima provodi razne algoritme i dobije zanimljive rezultate o nacrtanim grafovima. Moguće je crtati grafove, nacrtanom grafu odrediti najmanje razapinjuće stablo, odrediti duljinu struka (najkraći ciklus), odrediti kromatski broj, obojati vrhove grafa, te izračunati broj razapinjućih stabala.

6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa

Broj razapinjućih stabala grafa kojeg korisnik nacrtava u aplikaciji se računa pomoću matričnog teorema o stablima, teorema koji je obrađen u 4. poglavlju ovoga rada. Odabere li korisnik opciju "Number of trees" pokrenut će se algoritam za izračunavanje broja razapinjućih stabala. Taj algoritam je sljedeći:

```
function matrixTreeAlgorithm(matrix , n) {  
  
    var temp = new Array(n);  
    for(i = 0; i < n; i++) {  
        temp[i] = new Array(n);  
    }  
  
    j = 0, k = 0;  
    for(i = 0; i < matrix.length; i++) {  
        if(matrix[i] >= '0' && matrix[i] <= '1') {  
            temp[j][k++] = Number(matrix[i]);  
            if(k >= n) {
```

```

        k = 0;
        j++;
    }
}

var Lmatrix = new Array(n);
for(var i = 0; i < n; i++) {
    Lmatrix[i] = new Array(n);
}

// racunanje laplaciana na temelju predane matrice susjedstva
for(i = 0; i < n; i++) {
    for(j = 0; j < n; j++) {
        if(i === j) {
            var num = 0;
            for(k = 0; k < n; k++) {
                if(temp[i][k] == 1) {
                    num++;
                }
            }
            Lmatrix[i][j] = num;
        } else if(temp[i][j] == 1) {
            Lmatrix[i][j] = -1;
        } else {
            Lmatrix[i][j] = 0;
        }
    }
}

var L11matrix = new Array(n-1);
for(var i = 0; i < n-1; i++) {
    L11matrix[i] = new Array(n);
}

// brisanje prvog redka i stupca laplaciana

```

```

for(i = 0; i < n-1; i++) {
    for(j = 0; j < n-1; j++) {
        L11matrix[i][j]=Lmatrix[i+1][j+1];
    }
}

//racunanje determinante
var noOfTrees = determinant(L11matrix);
// broj razapinjucih stabala
return noOfTrees;
}

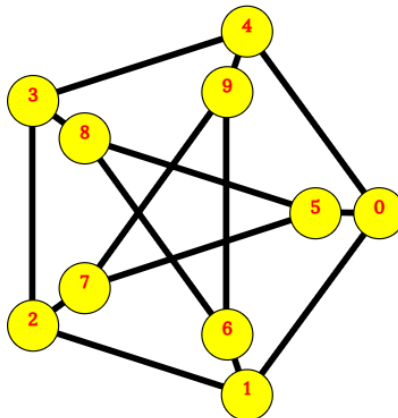
```

6.2. Demonstracija rada programa

Prikazat ćemo rad algoritma za računanje broja razapinjućih stabala na primjerima Petersonovog grafa, i kotača sa 6 vrhova, W_6 .

6.2.1. Petersonov graf

Na slici 6.1 se vidi Petersonov graf nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.



Slika 6.1: Petersonov graf

Na slici 6.2 vidi se matrica susjedstva Petersonovog grafa te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 2000.

Generate adjacency matrix

0100110000
1010001000
0101000100
0010100010
1001000001
1000000110
0100000011
0010010001
0001011000
0000101100

Graph name:

Petersonov

Number of nodes:

10

Draw a graph

Number of trees

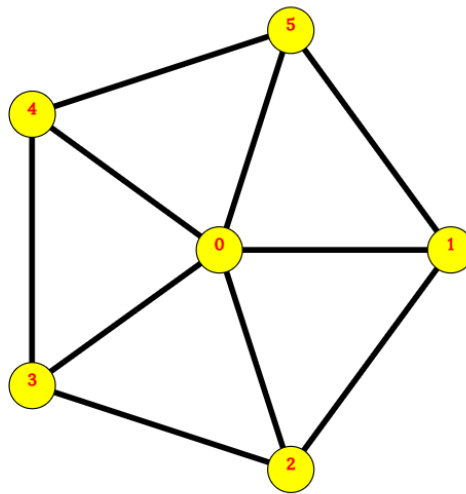
2000

Slika 6.2: Broj razapinjućih stabala Petersonovog grafa

6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, W_6

Na slici 6.3 se vidi graf kotač s 6 vrhova, W_6 nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.

Na slici 6.4 vidi se matrica susjedstva za W_6 te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 121.



Slika 6.3: Petersonov graf

Generate adjacency matrix

011111
101001
110100
101010
100101
110010

Graph name:

Kotač

Number of nodes:

6

Draw a graph

Number of trees

121

Slika 6.4: Broj razapinjućih stabala Petersonovog grafa

7. Zaključak

Zaključak.

LITERATURA

Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Sažetak

Sažetak na hrvatskom jeziku.

Ključne riječi: Ključne riječi, odvojene zarezima.

Title

Abstract

Abstract.

Keywords: Keywords.