

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 253

# **Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa**

Dorian Kablar

Zagreb, svibanj 2021.

*Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Anamari Nakić, na motivaciji i savjetima prilikom pisanja ovog rada.*

*Zahvaljuem svojim roditeljima, pogotovo majci, koji su me podržavali u svakoj odluci, i koji su uvijek znali kako pomoći, čak i kad nisam bio svjestan da je pomoć potrebna.*

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Glavne definicije i rezultati</b>	<b>2</b>
<b>3. Razapinjuća stabla</b>	<b>3</b>
3.1. Broj razapinjućih stabala - primjeri . . . . .	3
3.1.1. Kotač, $W_n$ . . . . .	3
<b>4. Matrični teorem o stablima</b>	<b>7</b>
4.1. Laplacian . . . . .	7
4.2. Matrix-Tree teorem . . . . .	8
<b>5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima</b>	<b>10</b>
<b>6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala</b>	<b>12</b>
6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa . . . . .	12
6.2. Demonstracija rada programa . . . . .	12
6.2.1. Petersonov graf . . . . .	12
6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, $W_5$ . . . . .	14
<b>7. Zaključak</b>	<b>17</b>
<b>Literatura</b>	<b>18</b>

# 1. Uvod

U prvom dijelu ću iznijeti glavne definicije i rezultate vezane uz grafove i stabla. U drugom dijelu će biti govora o razapinjućim stablima. Pritom ću iznijeti neke osnovne rezultate te primjere teorijskog računanja broja razapinjućih stabala. U trećem dijelu ću iskazati i dokazati matrični teorem o stablima.

U četvrtom dijelu ću, koristeći prethodno dokazani teorem, iznijeti rezultate za primjere pojedinačnih grafova, kao i za grafove s proizvoljnim brojem vrhova,  $n$ . U petom dijelu, bit će opisan relevantan (za razapinjuća stabla) dio aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* u 5. semestru, te će se na primjerima prikazati njezin rad. Naposljetku će biti donesen zaključak o svemu što je napravljeno.

## **2. Glavne definicije i rezultati**

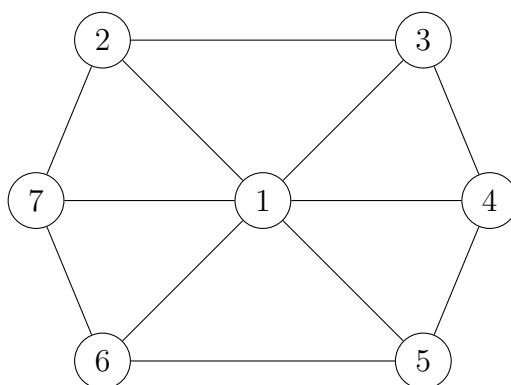
## 3. Razapinjuća stabla

### 3.1. Broj razapinjućih stabala - primjeri

U ovom odjeljku bavit ću se određivanjem eksplicitnih formula za računanje broja razapinjućih stabala određenih vrsta grafova. Karakteristika tih formula će biti ta da će jedina varijabla u njima biti  $n$ , odnosno broj vrhova grafa.

#### 3.1.1. Kotač, $W_n$

Prvi primjer je graf kotač, odnosno  $W_n$ . Kotač je graf koji je sličan grafu ciklusu  $C_n$  uz razliku da se jedan od vrhova nalazi u sredini te su svi ostali vrhovi, osim što su povezani u ciklus, još povezani s vrhom u sredini.



**Slika 3.1:** Kotač  $W_6$

Jedan primjer kotača je i  $W_6$  prikazan na slici 3.1.

Za računanje će od iznimne važnosti biti sljedeći izraz:

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e) \quad (3.1)$$

Prije samog izračuna, potrebno je dokazati da je izraz (3.1) ispravan.

*Dokaz.* Neka je  $e$  neki fiksni brid od  $G$ . Uočimo da se razapinjuća stabla od  $G$  dijele na:

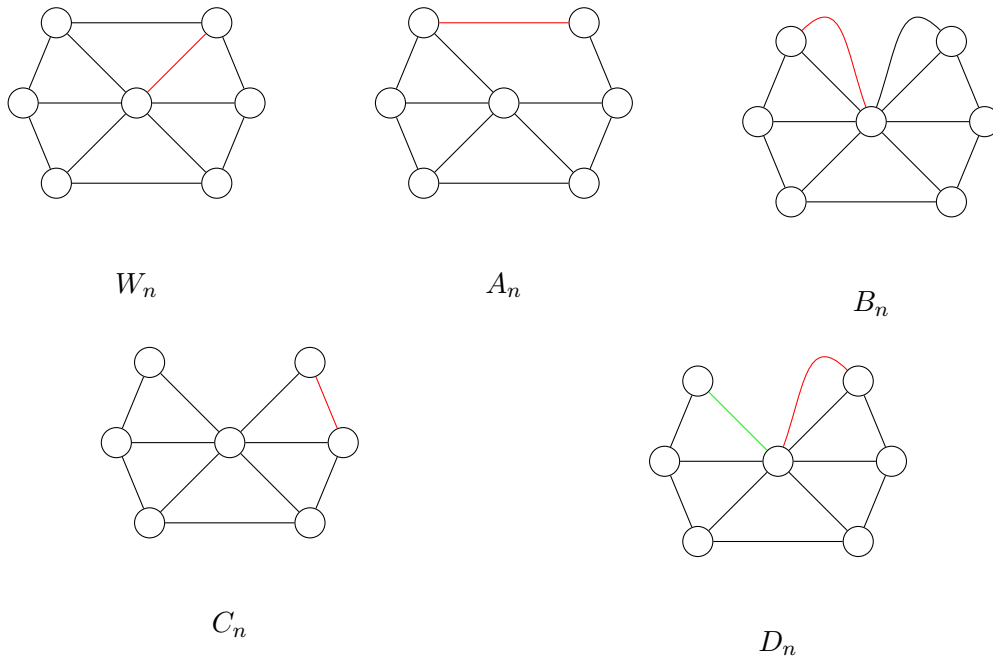
- razapinjuća stabla od  $G$  koja ne sadrže brid  $e$ ; neka je taj broj jednak  $x$ ,
- razapinjuća stabla od  $G$  koja sadrže brid  $e$ ; neka je taj broj jednak  $y$ .

Vrijedi:  $T(G) = x + y$ . Uočimo sada da je:

- $x = T(G - e)$  jer je svako razapinjuće stablo od  $G$  koje ne sadrži  $e$ , ujedno i razapinjuće stablo od  $G - e$
- $y = T(G \setminus e)$  jer svako razapinjuće stablo od  $G \setminus e$  možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od  $G$  koje sadrži brid  $e$  postupkom konkatencije brida  $e$  u tom stablu.

Dakle, vrijedi  $T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e)$ . □

Da bismo mogli pronaći eksplicitnu formulu za računanje broja razapinjućih stabala kotača s proizvoljnim brojem vrhova, potrebno je definirati nekoliko familija grafova koje ćemo koristiti.



**Slika 3.2:** Pet familija grafova koje će se koristiti za nalaženje eksplicitne formule za računanje broja razapinjućih stabala grafa kotača  $W_n$  ( $n$  označava broj vrhova).

Koristimo izraz (3.1) nad označenim bridovima sa slike 3.2, te dobivamo sustav rekurzivnih relacija:

$$T(W_n) = T(A_n) + T(B_{n-1})$$

$$T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$$

$$T(B_n) = T(D_n) + T(B_{n-1})$$

$$T(C_n) = T(C_{n-1}) + T(D_{n-1})$$

$$T(D_n) = T(C_n) + T(D_{n-1}) = T(D_{n-1}) + T(B_{n-1})$$

Uzmimo sada u obzir relacije za  $T(C_n)$  i  $T(D_n)$ . Dobivamo:

$$T(C_{n+1}) = T(C_n) + T(D_n) = 2T(C_n) + T(D_{n-1}) = 3T(C_n) - T(C_{n-1})$$

ili

$$T(C_{n+1}) - 3T(C_n) + T(C_{n-1}) = 0$$

odnosno

$$T(C_n) - 3T(C_{n-1}) + T(C_{n-2}) = 0$$

i

$$T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$$

Oduzmemo li prethodne dvije relacije, dobit ćemo konačnu rekurzivnu relaciju za  $T(C_n)$ :

$$T(C_n) - 4T(C_{n-1}) + 4T(C_{n-2}) - T(C_{n-3}) = 0$$

Promotrimo sada relacije za  $T(W_n)$  i  $T(A_n)$ . Obzirom da je  $T(B_{n-1}) = T(C_n)$ , imamo  $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$  i, posljedično,  $T(W_{n-1}) = T(A_{n-1}) + T(C_{n-1})$ .

Supstitucijom u relaciju  $T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$  dobivamo:

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 2T(C_{n-1})$$

$$T(A_n) - T(A_{n-1}) = 2T(C_{n-1})$$

Obzirom da je  $T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$ , imamo:

$$2T(C_{n-1}) - 2(3)T(C_{n-2}) + 2T(C_{n-3}) = 0$$

$$[T(A_n) - T(A_{n-1})] - 3[T(A_{n-1}) - T(A_{n-2})] + [T(A_{n-2}) - T(A_{n-3})] = 0$$

iz čega, sređivanjem izraza, slijedi:

$$T(A_n) - 4T(A_{n-1}) + 4T(A_{n-2}) - T(A_{n-3}) = 0$$

što je konačna rekurzivna relacija za  $T(A_n)$ .



Primjetimo da sada i  $T(A_n)$  i  $T(C_n)$  imaju homogenu rekurzivnu relaciju trećeg reda:

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} - x_{n-3} = 0$$

iz čega proizlazi da i  $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$  mora imati identičnu relaciju. Karakteristična jednačba koja korespondira s ovom relacijom je:

$$r^3 - 4r^2 + 4r + 1 = 0$$

$$(r - 1)(r^2 - 3r + 1) = 0$$

Ta jednačba ima karakteristične korijene  $r_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  i  $r_3 = 1$ . Dakle, opće rješenje od  $T(W_n)$  je:

$$T(W_n) = \alpha \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \gamma$$

Da bi se ova relacija riješila, potrebno je pronaći vrijednosti konstanti  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  takvih da se opće rješenje slaže s početnim uvjetima  $T(W_3) = 16$ ,  $T(W_4) = 45$  i  $T(W_5) = 121$  (uz uvjet  $n \geq 3$ ). Dobivamo sustav:

$$T(W_n) = \alpha \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 + \beta \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 + \gamma = 16$$

$$T(W_n) = \alpha \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^4 + \beta \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^4 + \gamma = 45$$

$$T(W_n) = \alpha \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \beta \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \gamma = 121$$

Sustav se može riješiti na razne načine, jedan od njih je i preko matrice sustava:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 & \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 & 1 & 16 \\ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^4 & \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^4 & 1 & 45 \\ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 & \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 & 1 & 121 \end{array} \right]$$

Cilj je da na lijevoj strani ostane jedinična matrica, i onda će vrijednosti s desne strane biti rješenja sustava. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje  $\alpha = \beta = 1$  i  $\gamma = -2$  iz čega slijedi da je broj razapinjućih stabala grafa kotača  $W_n$  jednak:

$$T(W_n) = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2 \quad (3.2)$$

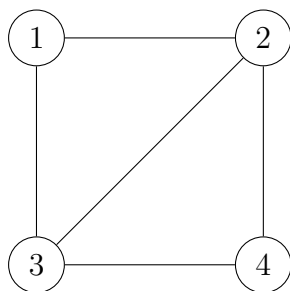
## 4. Matrični teorem o stablima

Cilj ovog poglavlja je izvesti rezultat koji broj razapinjućih stabala grafa računa kao determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Te matrice nazivaju se *Laplacijani*.

### 4.1. Laplacian

Neka je  $G$  neusmjereni graf s  $n$  vrhova, i neka  $d_i$  označuje stupanj vrha  $i$ . *Laplacian*  $L$  je modificirana verzija matrice susjedstva grafa  $G$ , definirana na sljedeći način:

$L_{ij} = d_i$  ako je  $i = j$ ,  $L_{ij} = -1$  ako su vrhovi  $i$  i  $j$  povezani, te  $L_{ij} = 0$  inače.



Slika 4.1: Primjer grafa s 4 vrha

Laplacian  $L$  grafa sa slike 4.1 je:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od  $L$  jednak 0. Zbog toga je determinanta od  $L$  uvijek jednaka 0.

Da bismo bili u mogućnosti iskazati matrični teorem o stablima, potrebno je uvesti još jedan komad notacije. Pretpostavimo li matricu  $A$  s dimenzijama  $n \times n$ , s  $A^{(ij)}$  će se označavati matrica dimenzija  $(n - 1) \times (n - 1)$  dobivena brisanjem  $i$ -tog redka i  $j$ -tog

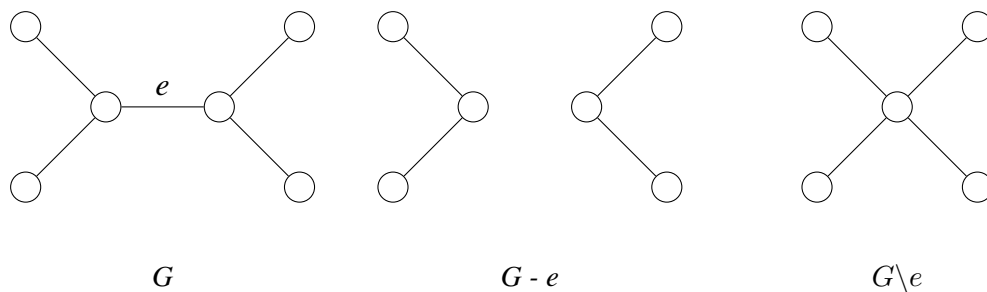
stupca matrice  $A$ . Takve matrice se nazivaju *minore*. Sljedeći teorem nam govori da nam minore *Laplaciana* daju upravo rezultat koji tražimo.

## 4.2. Matrix-Tree teorem

**Teorem 4.2.1** (Matrix-Tree teorem). *Neka je  $G$  nepovezani graf ili multigraf i neka  $T(G)$  označava broj razapinjućih stabala u  $G$ . Za bilo koji  $i$ ,  $T(G) = \det L^{(ii)}$ , gdje je  $L$  laplacian od  $G$ . Preciznije,  $\det L^{(ii)}$  je jednak za svaki  $i$ .*

*Dokaz.* Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da teorem vrijedi za povezane grafove s manje vrhova ili bridova. Kao bazu indukcije, pretpostavimo da se graf  $G$  sastoji od samo jednog vrha. U tom slučaju,  $T(G) = 1$ , i teorem daje ispravan rezultat:  $L = (0)$  i  $L^{(11)}$  je matrica dimenzija  $0 \times 0$ , čija je determinanta po definiciji jednaka 1.

Za korak indukcije pretpostavljamo graf  $G$  koji ima barem dva vrha, te odabiremo jedan od tih vrhova, recimo vrh  $i$ . Ako  $i$  nije incidentan s nijednim bridom, onda  $G$  nema razapinjuće stablo. U ovom slučaju će teorem vrijediti jer je  $L^{(ii)}$  zapravo *Laplacian* ostatka grafa te će njezina determinanta biti jednaka nuli, kao što je navedeno u odjeljku 4.1.



**Slika 4.2:**  $G - e$  je graf koji se dobije brisanjem brida  $e$ , a  $G \setminus e$  je graf koji se dobije kontrakcijom brida  $e$  i spajanjem incidentnih vrhova u jedan vrh.

Sada pretpostavimo da je  $i$  povezan s nekim drugim vrhom  $j$ , te neka  $e$  označava brid  $(i, j)$ . Kao što je prikazano na slici 4.2, postoje dva načina na koje se može modificirati  $G$ : brid  $e$  možemo jednostavno izbrisati, ili možemo kontrakcijom vrhove  $i$  i  $j$  spojiti u jedan vrh. Takve grafove označujemo s  $G - e$  i  $G \setminus e$ . Sada tvrdimo da je broj razapinjućih stabala  $T(G)$  zadan sa sljedećim rekurzivnim izrazom:

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e) \quad (4.1)$$

Ispravnost izraza (4.1) je dokazana u poglavlju 3.

Prtpostavimo sada da matrični teorem vrijedi za  $G - e$  i za  $G \setminus e$ . Možemo razmjestiti vrhove od  $G$  tako da su  $i$  i  $j$  prva dva vrha. Sada Laplacian  $L$  od  $G$  možemo napisati kao:

$$L_G = \left[ \begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right]$$

Ovdje  $r_i$  i  $r_j$  predstavljaju  $(n - 2)$ -dimenzionalne vektore koji opisuju konekcije vrhova  $i$  i  $j$  s ostalih  $n - 2$  vrha od  $G$  ( $r_i^T$  i  $r_j^T$  su transponirani vektori), a  $L'$  je  $(n - 2)$ -dimenzionalna minora koja predstavlja *laplacian* ostatka grafa. *Laplaciane* grafova  $G - e$  i  $G \setminus e$  pišemo na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[ \begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right], L_{G \setminus e} = \left[ \begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array} \right]$$

Da bi se indukcija završila, potrebno je pokazati:

$$\det L_G^{(ii)} = \det L_{G-e}^{(ii)} + \det L_{G \setminus e}^{(jj)} \quad (4.2)$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\det \left( \begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) + \det L'.$$

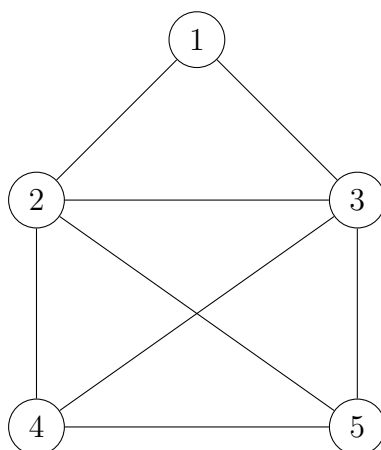
Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da determinanta matrice može biti napisana kao linearna kombinacija njenih *kofaktora*, tj. determinanti njenih minora. Za bilo koju matricu  $A$  vrijedi

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^j A_{1,j} \det A^{(1,j)}. \quad (4.3)$$

Dakle, ako se dvije matrice razlikuju samo u njihovim  $(1,1)$  ćelijama, a  $A_{ij} = B_{ij}$  za svaki drugi  $i$  i  $j$ , njihove determinante se razlikuju za determinantu njihovih  $(1,1)$  minora, odnosno  $\det A = \det B + \det A^{(1,1)}$ . Primjenimo li ovo za  $L_G^{(ii)}$  i  $L_{G-e}^{(ii)}$ , dobit ćemo izraz (4.2), čime se dovršava dokaz ovog teorema.  $\square$

## 5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima

Da bismo se uvjerali da je rezultat prethodnog teorema zaista ispravan, u ovom poglavlju razraditi ćemo primjere.



**Slika 5.1:** Primjer grafa s 5 vrhova

Na slici 5.1 prikazan je graf s 5 vrhova. Matrica susjedstva  $A$  navedenog grafa, te njezin laplacian  $L$  su sljedeći:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kao sljedeći korak, stvorimo, na primjer, matricu  $L^{(22)}$  dobivenu brisanjem drugog retka i drugog stupca matrice  $L$ .

$$L^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanta prethodne matrice, a ujedno i broj razapinjućih stabala grafa sa slike 5.1 je:  $T(G) = \det L^{(22)} = 40$ . Jednak bi se rezultat dobio da smo matricu  $L^{(ii)}$  stvorili tako da smo maknuli bilo koji drugi redak i stupac matrice  $L$ .

## 6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala

*Graphelite* je web-aplikacija razvijena u 5. semestru u sklopu kolegija *Projekt R* u suradnji s još dvoje kolega. To je aplikacija koja korisniku dopušta da crta jednostavne grafove i nad njima provodi razne algoritme i dobije zanimljive rezultate o nacrtanim grafovima. Moguće je crtati grafove, nacrtanom grafu odrediti najmanje razapinjuće stablo, odrediti duljinu struka (najkraći ciklus), odrediti kromatski broj, obojati vrhove grafa, te izračunati broj razapinjućih stabala.

### 6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa

Broj razapinjućih stabala grafa kojeg korisnik nacrtava u aplikaciji se računa pomoću matričnog teorema o stablima, teorema koji je obrađen u 4. poglavlju ovoga rada. Odabere li korisnik opciju "Number of trees" pokrenut će se algoritam za izračunavanje broja razapinjućih stabala. Taj algoritam je sljedeći:

---

**Algorithm 1** Računanje broja razapinjućih stabala grafa

---

**Ulaz:** *matrix* – matrica susjedstva grafa  $G$ .

**Ulaz:**  $n$  – broj vrhova grafa  $G$

**Izlaz:** broj razapinjućih stabala grafa  $G$

$L11 := \text{array}[n - 1][n - 1]$

**for** ( $i := 0; i < n - 1; i++$ ) **do**

**for** ( $j := 0; j < n - 1; j++$ ) **do**

**if**  $i == j$  **then**

$num := 0$

**for** ( $k := 0; k < n; k++$ ) **do**

**if**  $matrix[i + 1][k] == 1$  **then**

$num := num + 1$

**end if**

**end for**

$L11[i][j] := num$

**else if**  $matrix[i + 1][j + 1] == 1$  **then**

$L11[i][j] := -1$

**else**

$L11[i][j] := 0$

**end if**

**end for**

**end for**

$rez := \text{determinanta}(L11)$

**return**  $rez$

---

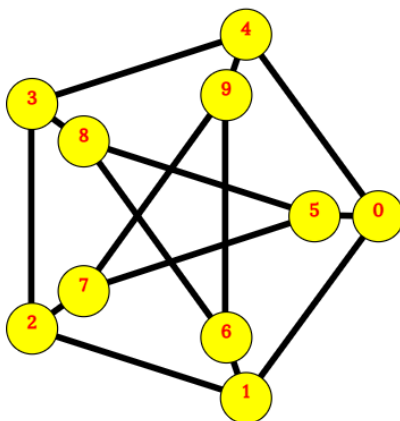


## 6.2. Demonstracija rada programa

Prikazat ćemo rad algoritma za računanje broja razapinjućih stabala na primjerima Petersonovog grafa, i kotača sa 6 vrhova,  $W_6$ .

### 6.2.1. Petersonov graf

Na slici 6.1 se vidi Petersonov graf nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.



Slika 6.1: Petersonov graf

Na slici 6.2 vidi se matrica susjedstva Petersonovog grafa te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 2000.

### 6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, $W_5$

Na slici 6.3 se vidi graf kotač s 6 vrhova,  $W_5$  nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.

Na slici 6.4 vidi se matrica susjedstva za  $W_5$  te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 121.

Generate adjacency matrix

0100110000  
1010001000  
0101000100  
0010100010  
1001000001  
1000000110  
0100000011  
0010010001  
0001011000  
0000101100

Graph name:

Petersonov

Number of nodes:

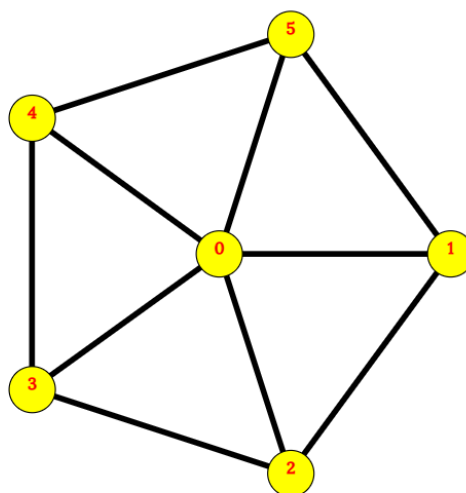
10

Draw a graph

Number of trees

2000

**Slika 6.2:** Broj razapinjućih stabala Petersonovog grafa



**Slika 6.3:** Kotač  $W_5$

Generate adjacency matrix

01111  
101001  
110100  
101010  
100101  
110010

Graph name:

Kotač

Number of nodes:

6

Draw a graph

Number of trees

121

**Slika 6.4:** Broj razapinjućih stabala grafa  $W_5$

## **7. Zaključak**

Zaključak.

# LITERATURA

## **Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa**

### **Sažetak**

Sažetak na hrvatskom jeziku.

**Ključne riječi:** grafovi, stabla, razapinjuća stabla, matrix-tree teorem

## **Counting the spanning trees**

### **Abstract**

Abstract.

**Keywords:** graphs, trees, spanning trees, matrix-tree theorem