

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 253

# **Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa**

Dorian Kablar

Zagreb, svibanj 2021.

*Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Anamari Nakić, na motivaciji i savjetima prilikom pisanja ovog rada.*

*Zahvaljuem svojim roditeljima, pogotovo majci, koji su me podržavali u svakoj odluci, i koji su uvijek znali kako pomoći, čak i kad nisam bio svjestan da je pomoć potrebna.*

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Glavne definicije i rezultati</b>	<b>2</b>
<b>3. Razapinjuća stabla</b>	<b>5</b>
3.1. Broj razapinjućih stabala - primjeri . . . . .	5
3.1.1. Kotač, $W_n$ . . . . .	6
<b>4. Matrični teorem o stablima</b>	<b>10</b>
4.1. Laplacian . . . . .	10
4.2. Matrix-Tree teorem . . . . .	11
<b>5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima</b>	<b>13</b>
5.1. Računanje broja razapinjućih stabala potpunog grafa s $n$ vrhova, $K_n$ .	14
<b>6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala</b>	<b>16</b>
6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa . . . . .	16
6.2. Demonstracija rada programa . . . . .	18
6.2.1. Petersonov graf . . . . .	18
6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, $W_5$ . . . . .	18
<b>7. Zaključak</b>	<b>21</b>
<b>Literatura</b>	<b>22</b>

# 1. Uvod

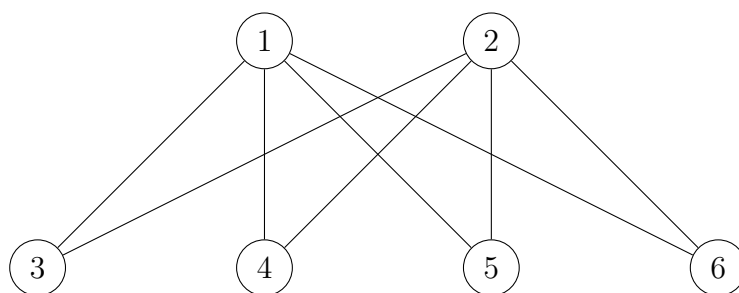
U prvom dijelu ću iznijeti glavne definicije i rezultate vezane uz grafove i stabla. U drugom dijelu će biti govora o razapinjućim stablima. Pritom ću iznijeti neke osnovne rezultate te primjere teorijskog računanja broja razapinjućih stabala. U trećem dijelu ću iskazati i dokazati matrični teorem o stablima.

U četvrtom dijelu ću, koristeći prethodno dokazani teorem, iznijeti rezultate za primjere pojedinačnih grafova, kao i za grafove s proizvoljnim brojem vrhova,  $n$ . U petom dijelu, bit će opisan relevantan (za razapinjuća stabla) dio aplikacije *Graphelite* koja je razvijena u sklopu kolegija *Projekt R* u 5. semestru, te će se na primjerima prikazati njezin rad. Naposljetku će biti donesen zaključak o svemu što je napravljeno.

## 2. Glavne definicije i rezultati

Obzirom da će se u ovom radu obrađivati određeni problemi teorije grafova, vrijeme je da se upoznamo sa pojmom grafa.

**Definicija 2.0.1.** *Jednostavni graf  $G$  sastoji se od nepraznog konačnog skupa  $V(G)$ , čije elemente zovemo **vrhovi** grafa  $G$  i konačnog skupa  $E(G)$  različitih dvočlanih podskupova skupa  $V(G)$  koje zovemo **bridovi**.*



Slika 2.1: Primjer jednostavnog grafa.

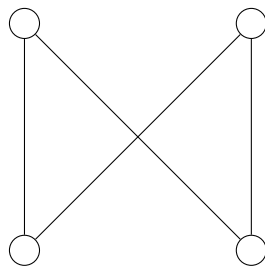
Primijetimo da smo prethodnom definicijom onemogućili pojavljivanje *petlji* (bridovi koji vrh spajaju sa samim sobom), te da dva vrha mogu biti povezana s više bridova. Omogućimo li to, govorimo o *općem grafu*. Sljedeće svojstvo koje će u nastavku biti zanimljivo je *stupanj vrha*.

**Definicija 2.0.2.** *Stupanj vrha  $v$  u grafa  $G$  je broj vrhova koji su incidentni s  $v$ . Označavamo ga s  $\deg(v)$ .*

Za graf sa slike 2.1,  $\deg(1) = \deg(2) = 4$  i  $\deg(3) = \deg(4) = \deg(5) = \deg(6) = 2$ .

Također, u nastavku će nam biti važan pojam podgrafa grafa.

**Definicija 2.0.3.** *Podgraf grafa  $G$  je graf čiji vrhovi pripadaju skupu  $V(G)$ , a bridovi skupu  $E(G)$ .*



**Slika 2.2:** Primjer podgrafa grafa sa slike 2.1.

Za graf sa slike 2.1, jedan od podgrafova je i onaj sa slike 2.2.

Nakon što su izneseni neki važni rezultati o samim grafovima, treba se osvrnuti i na njihovo predstavljanje.

**Definicija 2.0.4.** Označimo li vrhove zadanog grafa  $G$  s  $V = 1, 2, 3, \dots, n$ , onda definiramo **matricu susjedstva**  $A = [a_{ij}]$  kao  $n \times n$  matricu čiji je element  $a_{ij}$  jednak broju bridova koji spaja vrh  $i$  s vrhom  $j$ .

Za graf sa slike 2.1, pripadna matrica susjedstva je sljedeća:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo da zbroj elemenata u pojedinom retku, ili stupcu, odgovara stupnju pripadajućeg vrha.

**Definicija 2.0.5.** Označe li se dodatno i bridovi zadanog grafa  $G$  s  $E = 1, 2, 3, \dots, m$ , onda definiramo **matricu incidencije** kao  $n \times m$  matricu  $B = [b_{ij}]$  čiji su elementi jednaki 1 ako je vrh  $i$  incidentan s vrhom  $j$ , a 0 inače.

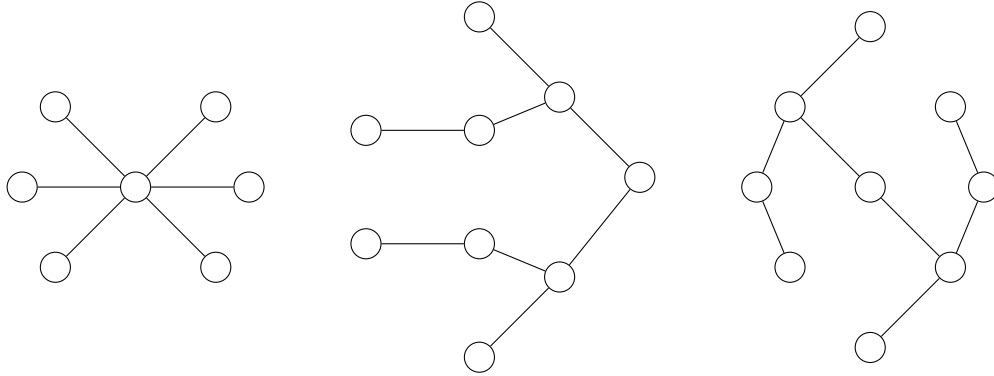
Za graf sa slike 2.1, pripadajuća matrica incidencije je sljedeća:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada, kada smo se upoznali s glavnim rezultatima vezanim za grafove, vrijeme je da fokus prijeđe na **stabla**.

**Definicija 2.0.6.** *Šuma je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**.*

Na slici 2.3 možemo vidjeti nekoliko stabala.



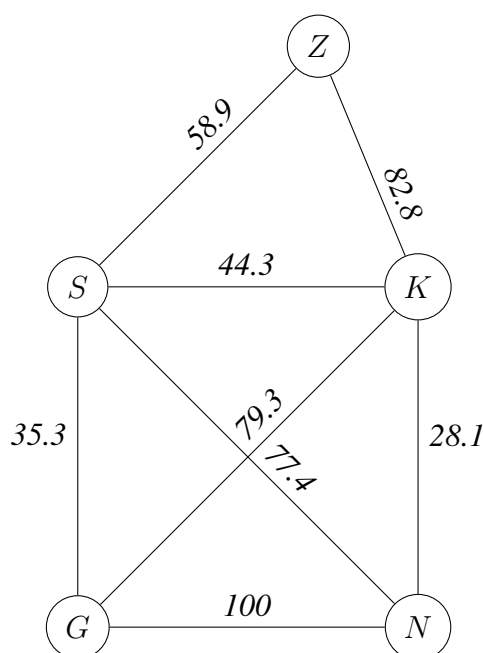
**Slika 2.3:** Primjeri stabala.

Primjetimo da svako stablo ima točno  $n - 1$  bridova, gdje je  $n$  broj vrhova grafa.

Sada smo se upoznali sa pojmom stabla. U nastavku će biti više govora o **razapinjućim stablima**.

## 3. Razapinjuća stabla

**Definicija 3.0.1.** *Razapinjući podgraf* zadanog grafa  $G = (V, E)$  s  $n$  vrhova je svaki podgraf  $G' = (V, E')$  grafa  $G$  s istim skupom vrhova kao i  $G$ , dakle također s  $n$  vrhova.



Slika 3.1: Primjer podgraфа graфа sa slike 2.1.

Kao što vidimo, tema razapinjućih stabala je interesantna u mnogim područjima. U nastavku rada neću tražiti određeno razapinjuće stablo za zadani graf, već ću se baviti općenitijim problemom, pitanjem koliko razapinjućih stabala neki graf  $G$  uopće ima.

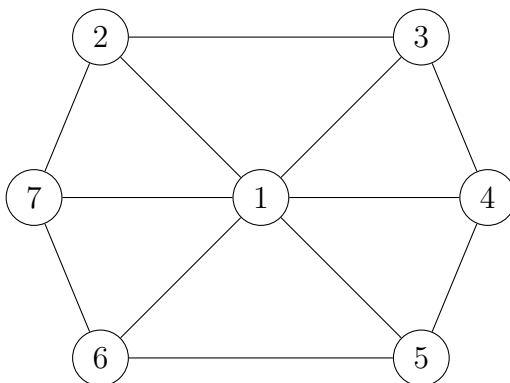
### 3.1. Broj razapinjućih stabala - primjeri

U ovom odjeljku bavit ću se određivanjem eksplicitnih formula za računanje broja razapinjućih stabala određenih vrsta grafova. Karakteristika tih formula će biti ta da će jedina varijabla u njima biti  $n$ , odnosno broj vrhova grafa.



### 3.1.1. Kotač, $W_n$

Prvi primjer je graf kotač, odnosno  $W_n$ . Kotač je graf koji je sličan grafu ciklusu  $C_n$  uz razliku da se jedan od vrhova nalazi u sredini te su svi ostali vrhovi, osim što su povezani u ciklus, još povezani s vrhom u sredini.



**Slika 3.2:** Kotač  $W_6$ .

Jedan primjer kotača je i  $W_6$  prikazan na slici 3.1.

Za računanje će od iznimne važnosti biti sljedeći izraz:

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e) \quad (3.1)$$

Prije samog izračuna, potrebno je dokazati da je izraz (3.1) ispravan.

*Dokaz.* Neka je  $e$  neki fiksni brid od  $G$ . Uočimo da se razapinjuća stabla od  $G$  dijele na:

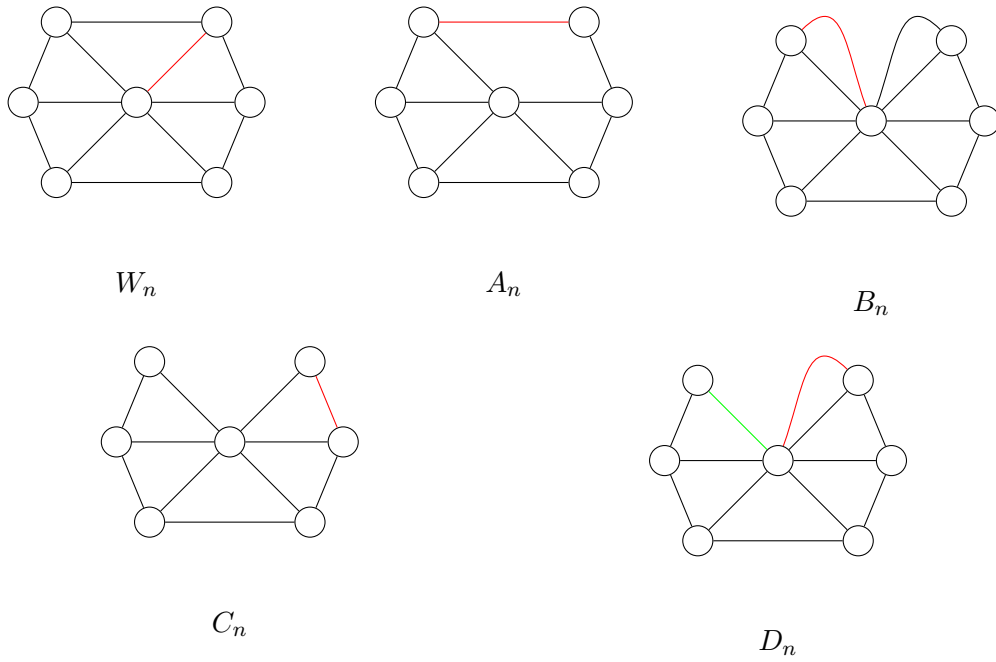
- razapinjuća stabla od  $G$  koja ne sadrže brid  $e$ ; neka je taj broj jednak  $x$ ,
- razapinjuća stabla od  $G$  koja sadrže brid  $e$ ; neka je taj broj jednak  $y$ .

Vrijedi:  $T(G) = x + y$ . Uočimo sada da je:

- $x = T(G - e)$  jer je svako razapinjuće stablo od  $G$  koje ne sadrži  $e$ , ujedno i razapinjuće stablo od  $G - e$
- $y = T(G \setminus e)$  jer svako razapinjuće stablo od  $G \setminus e$  možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od  $G$  koje sadrži brid  $e$  postupkom konkatencije brida  $e$  u tom stablu.

Dakle, vrijedi  $T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e)$ . □

Da bismo mogli pronaći eksplicitnu formulu za računanje broja razapinjućih stabala kotača s proizvoljnim brojem vrhova, potrebno je definirati nekoliko familija grafova koje ćemo koristiti.



**Slika 3.3:** Pet familija grafova koje će se koristiti za nalaženje eksplicitne formule za računanje broja razapinjućih stabala grafa kotača  $W_n$  ( $n$  označava broj vrhova).

Koristimo izraz (3.1) nad označenim bridovima sa slike 3.2, te dobivamo sustav rekurzivnih relacija:

$$T(W_n) = T(A_n) + T(B_{n-1})$$

$$T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$$

$$T(B_n) = T(D_n) + T(B_{n-1})$$

$$T(C_n) = T(C_{n-1}) + T(D_{n-1})$$

$$T(D_n) = T(C_n) + T(D_{n-1}) = T(D_{n-1}) + T(B_{n-1})$$

Uzmimo sada u obzir relacije za  $T(C_n)$  i  $T(D_n)$ . Dobivamo:

$$T(C_{n+1}) = T(C_n) + T(D_n) = 2T(C_n) + T(D_{n-1}) = 3T(C_n) - T(C_{n-1})$$

ili

$$T(C_{n+1}) - 3T(C_n) + T(C_{n-1}) = 0$$

odnosno

$$T(C_n) - 3T(C_{n-1}) + T(C_{n-2}) = 0$$

i

$$T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$$

Oduzmemo li prethodne dvije relacije, dobit ćemo konačnu rekurzivnu relaciju za  $T(C_n)$ :

$$T(C_n) - 4T(C_{n-1}) + 4T(C_{n-2}) - T(C_{n-3}) = 0$$

Promotrimo sada relacije za  $T(W_n)$  i  $T(A_n)$ . Obzirom da je  $T(B_{n-1}) = T(C_n)$ , imamo  $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$  i, posljedično,  $T(W_{n-1}) = T(A_{n-1}) + T(C_{n-1})$ .

Supstitucijom u relaciju  $T(A_n) = T(C_{n-1}) + T(W_{n-1})$  dobivamo:

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 2T(C_{n-1})$$

$$T(A_n) - T(A_{n-1}) = 2T(C_{n-1})$$

Obzirom da je  $T(C_{n-1}) - 3T(C_{n-2}) + T(C_{n-3}) = 0$ , imamo:

$$2T(C_{n-1}) - 2(3)T(C_{n-2}) + 2T(C_{n-3}) = 0$$

$$[T(A_n) - T(A_{n-1})] - 3[T(A_{n-1}) - T(A_{n-2})] + [T(A_{n-2}) - T(A_{n-3})] = 0$$

iz čega, sređivanjem izraza, slijedi:

$$T(A_n) - 4T(A_{n-1}) + 4T(A_{n-2}) - T(A_{n-3}) = 0$$

što je konačna rekurzivna relacija za  $T(A_n)$ .

Primjetimo da sada i  $T(A_n)$  i  $T(C_n)$  imaju homogenu rekurzivnu relaciju trećeg reda:

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} - x_{n-3} = 0$$

iz čega proizlazi da i  $T(W_n) = T(A_n) + T(C_n)$  mora imati identičnu relaciju. Karakteristična jednačba koja korespondira s ovom relacijom je:

$$r^3 - 4r^2 + 4r + 1 = 0$$

$$(r - 1)(r^2 - 3r + 1) = 0$$

Ta jednačba ima karakteristične korijene  $r_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  i  $r_3 = 1$ . Dakle, opće rješenje od  $T(W_n)$  je:

$$T(W_n) = \alpha\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma$$

Da bi se ova relacija riješila, potrebno je pronaći vrijednosti konstanti  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  takvih da se opće rješenje slaže s početnim uvjetima  $T(W_3) = 16$ ,  $T(W_4) = 45$  i  $T(W_5) = 121$  (uz uvjet  $n \geq 3$ ). Dobivamo sustav:

$$T(W_n) = \alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \gamma = 16$$

$$T(W_n) = \alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \gamma = 45$$

$$T(W_n) = \alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \gamma = 121$$

Sustav se može riješiti na razne načine, jedan od njih je i preko matrice sustava:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 & 1 & 16 \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^4 & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4 & 1 & 45 \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5 & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^5 & 1 & 121 \end{array} \right]$$

Cilj je da na lijevoj strani ostane jedinična matrica, i onda će vrijednosti s desne strane biti rješenja sustava. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje  $\alpha = \beta = 1$  i  $\gamma = -2$  iz čega slijedi da je broj razapinjućih stabala grafa kotača  $W_n$  jednak:

$$T(W_n) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \quad (3.2)$$

Sada, kada su navedene osnovne definicije vezane za razapinjuća stabla, i kada je naveden primjer pronalaženja eksplicitne formule za broj razapinjućih stabala grafa kotača, vrijeme je da se upoznamo s centralnim teoremom ovog rada, teoremom koji će nam dati recept za izračun broja razapinjućih stabala proizvoljnog grafa.

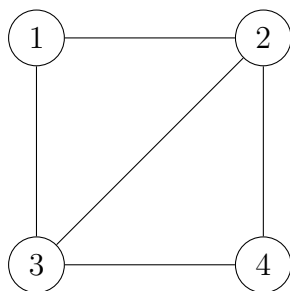
## 4. Matrični teorem o stablima

Cilj ovog poglavlja je izvesti rezultat koji broj razapinjućih stabala grafa računa kao determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Te matrice nazivaju se *Laplacijani*.

### 4.1. Laplacian

Neka je  $G$  neusmjereni graf s  $n$  vrhova, i neka  $d_i$  označuje stupanj vrha  $i$ . *Laplacian*  $L$  je modificirana verzija matrice susjedstva grafa  $G$ , definirana na sljedeći način:

$L_{ij} = d_i$  ako je  $i = j$ ,  $L_{ij} = -1$  ako su vrhovi  $i$  i  $j$  povezani, te  $L_{ij} = 0$  inače.



Slika 4.1: Primjer grafa s 4 vrha

Laplacian  $L$  grafa sa slike 4.1 je:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od  $L$  jednak 0. Zbog toga je determinanta od  $L$  uvijek jednaka 0.

Da bismo bili u mogućnosti iskazati matrični teorem o stablima, potrebno je uvesti još jedan komad notacije. Pretpostavimo li matricu  $A$  s dimenzijama  $n \times n$ , s  $A^{(ij)}$  će se označavati matrica dimenzija  $(n - 1) \times (n - 1)$  dobivena brisanjem  $i$ -tog redka i  $j$ -tog

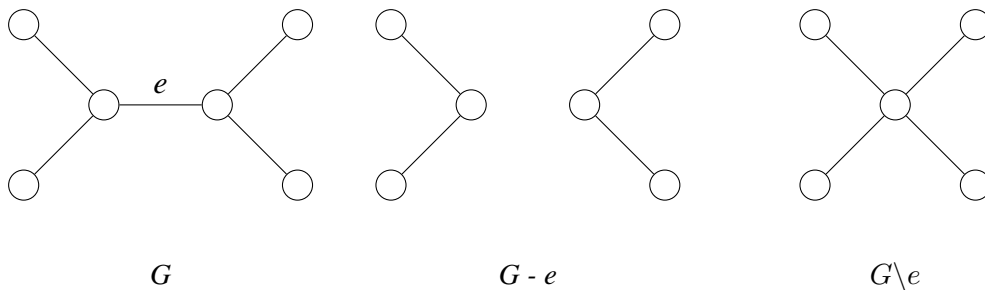
stupca matrice  $A$ . Takve matrice se nazivaju *minore*. Sljedeći teorem nam govori da nam minore *Laplaciana* daju upravo rezultat koji tražimo.

## 4.2. Matrix-Tree teorem

**Teorem 4.2.1** (Matrix-Tree teorem). *Neka je  $G$  nepovezani graf ili multigraf i neka  $T(G)$  označava broj razapinjućih stabala u  $G$ . Za bilo koji  $i$ ,  $T(G) = \det L^{(ii)}$ , gdje je  $L$  laplacian od  $G$ . Preciznije,  $\det L^{(ii)}$  je jednak za svaki  $i$ .*

*Dokaz.* Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da teorem vrijedi za povezane grafove s manje vrhova ili bridova. Kao bazu indukcije, pretpostavimo da se graf  $G$  sastoji od samo jednog vrha. U tom slučaju,  $T(G) = 1$ , i teorem daje ispravan rezultat:  $L = (0)$  i  $L^{(11)}$  je matrica dimenzija  $0 \times 0$ , čija je determinanta po definiciji jednaka 1.

Za korak indukcije pretpostavljamo graf  $G$  koji ima barem dva vrha, te odabiremo jedan od tih vrhova, recimo vrh  $i$ . Ako  $i$  nije incidentan s nijednim bridom, onda  $G$  nema razapinjuće stablo. U ovom slučaju će teorem vrijediti jer je  $L^{(ii)}$  zapravo *Laplacian* ostatka grafa te će njezina determinanta biti jednaka nuli, kao što je navedeno u odjeljku 4.1.



**Slika 4.2:**  $G - e$  je graf koji se dobije brisanjem brida  $e$ , a  $G \setminus e$  je graf koji se dobije kontrakcijom brida  $e$  i spajanjem incidentnih vrhova u jedan vrh.

Sada pretpostavimo da je  $i$  povezan s nekim drugim vrhom  $j$ , te neka  $e$  označava brid  $(i, j)$ . Kao što je prikazano na slici 4.2, postoje dva načina na koje se može modificirati  $G$ : brid  $e$  možemo jednostavno izbrisati, ili možemo kontrakcijom vrhove  $i$  i  $j$  spojiti u jedan vrh. Takve grafove označujemo s  $G - e$  i  $G \setminus e$ . Sada tvrdimo da je broj razapinjućih stabala  $T(G)$  zadan sa sljedećim rekurzivnim izrazom:

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e) \quad (4.1)$$

Ispravnost izraza (4.1) je dokazana u poglavlju 3.

Prtpostavimo sada da matrični teorem vrijedi za  $G - e$  i za  $G \setminus e$ . Možemo razmjestiti vrhove od  $G$  tako da su  $i$  i  $j$  prva dva vrha. Sada Laplacian  $L$  od  $G$  možemo napisati kao:

$$L_G = \left[ \begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right]$$

Ovdje  $r_i$  i  $r_j$  predstavljaju  $(n - 2)$ -dimenzionalne vektore koji opisuju konekcije vrhova  $i$  i  $j$  s ostalih  $n - 2$  vrha od  $G$  ( $r_i^T$  i  $r_j^T$  su transponirani vektori), a  $L'$  je  $(n - 2)$ -dimenzionalna minora koja predstavlja *laplacian* ostatka grafa. *Laplaciane* grafova  $G - e$  i  $G \setminus e$  pišemo na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[ \begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array} \right], L_{G \setminus e} = \left[ \begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array} \right]$$

Da bi se indukcija završila, potrebno je pokazati:

$$\det L_G^{(ii)} = \det L_{G-e}^{(ii)} + \det L_{G \setminus e}^{(jj)} \quad (4.2)$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\det \left( \begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array} \right) + \det L'.$$

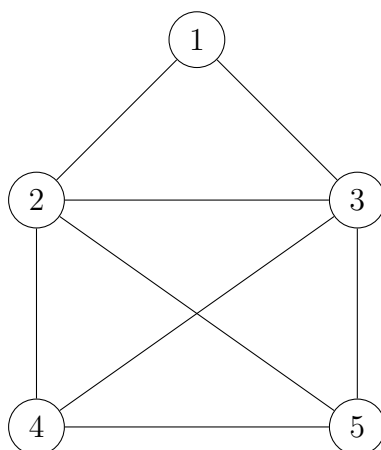
Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da determinanta matrice može biti napisana kao linearna kombinacija njenih *kofaktora*, tj. determinanti njenih minora. Za bilo koju matricu  $A$  vrijedi

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^j A_{1,j} \det A^{(1,j)}. \quad (4.3)$$

Dakle, ako se dvije matrice razlikuju samo u njihovim  $(1,1)$  ćelijama, a  $A_{ij} = B_{ij}$  za svaki drugi  $i$  i  $j$ , njihove determinante se razlikuju za determinantu njihovih  $(1,1)$  minora, odnosno  $\det A = \det B + \det A^{(1,1)}$ . Primjenimo li ovo za  $L_G^{(ii)}$  i  $L_{G-e}^{(ii)}$ , dobit ćemo izraz (4.2), čime se dovršava dokaz ovog teorema.  $\square$

## 5. Računanje broja razapinjućih stabala pomoću matričnog teorema o stablima

Da bismo se uvjerali da je rezultat prethodnog teorema zaista ispravan, u ovom poglavlju razraditi ćemo primjere.



**Slika 5.1:** Primjer grafa s 5 vrhova

Na slici 5.1 prikazan je graf s 5 vrhova. Matrica susjedstva  $A$  navedenog grafa, te njezin laplacian  $L$  su sljedeći:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kao sljedeći korak, stvorimo, na primjer, matricu  $L^{(22)}$  dobivenu brisanjem drugog retka i drugog stupca matrice  $L$ .



$$L^{(22)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanta prethodne matrice, a ujedno i broj razapinjućih stabala grafa sa slike 5.1 je:  $T(G) = \det L^{(22)} = 40$ . Jednak bi se rezultat dobio da smo matricu  $L^{(ii)}$  stvorili tako da smo maknuli bilo koji drugi redak i stupac matrice  $L$ .

## 5.1. Računanje broja razapinjućih stabala potpunog grafa s $n$ vrhova, $K_n$

U *dodaj poveznicu na skriptu iz diskretne* iznesen je rezultat da potpuni graf s  $n$  vrhova,  $K_n$ , ima  $n^{n-2}$  razapinjućih stabala. Sada ću taj rezultat prikazati preko matričnog teorema o stablima.

Za potpuni graf  $K_n$  s  $n$  vrhova, pripadajuća matrica susjedstva je sljedeća:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pripadni *laplacian* je:

$$L = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da će minora te matrice,  $L^{(ii)}$  biti ista bez obzira koji  $i$  odabrali. Ta je matrica sljedeća:

$$L^{(ii)} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Sada je potrebno izračunati determinantu prethodne matrice. Počinjemo tako da prvom retku zbrojimo sve ostale retke matrice. Dobit ćemo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Sada ćemo prvi redak dodati svim ostalim retcima u matrici, te ćemo dobiti sljedeće:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & n \end{bmatrix}$$

Primjetimo da smo dobili gornju trokutastu matricu, a njena determinanta je jednaka umnošku elemenata na dijagonali, tako da je broj razapinjućih stabala potpunog grafa s  $n$  vrhova,  $T(K_n) = n^{n-2}$ , što se poklapa s očekivanim rezultatom.

## 6. Graphelite - računanje broja razapinjućih stabala

*Graphelite* je web-aplikacija razvijena u 5. semestru u sklopu kolegija *Projekt R* u suradnji s još dvoje kolega. To je aplikacija koja korisniku dopušta da crta jednostavne grafove i nad njima provodi razne algoritme i dobije zanimljive rezultate o nacrtanim grafovima. Moguće je crtati grafove, nacrtanom grafu odrediti najmanje razapinjuće stablo, odrediti duljinu struka (najkraći ciklus), odrediti kromatski broj, obojati vrhove grafa, te izračunati broj razapinjućih stabala.

### 6.1. Računanje broja razapinjućih stabala grafa

Broj razapinjućih stabala grafa kojeg korisnik nacrtava u aplikaciji se računa pomoću matričnog teorema o stablima, teorema koji je obrađen u 4. poglavlju ovoga rada. Odabere li korisnik opciju "Number of trees" pokrenut će se algoritam za izračunavanje broja razapinjućih stabala. Taj algoritam je sljedeći:

---

**Algorithm 1** Računanje broja razapinjućih stabala grafa

---

**Ulaz:** *matrix* – matrica susjedstva grafa  $G$ .

**Ulaz:**  $n$  – broj vrhova grafa  $G$

**Izlaz:** broj razapinjućih stabala grafa  $G$

$L11 := \text{array}[n - 1][n - 1]$

**for** ( $i := 0; i < n - 1; i++$ ) **do**

**for** ( $j := 0; j < n - 1; j++$ ) **do**

**if**  $i == j$  **then**

$num := 0$

**for** ( $k := 0; k < n; k++$ ) **do**

**if**  $matrix[i + 1][k] == 1$  **then**

$num := num + 1$

**end if**

**end for**

$L11[i][j] := num$

**else if**  $matrix[i + 1][j + 1] == 1$  **then**

$L11[i][j] := -1$

**else**

$L11[i][j] := 0$

**end if**

**end for**

**end for**

$rez := \text{determinanta}(L11)$

**return**  $rez$

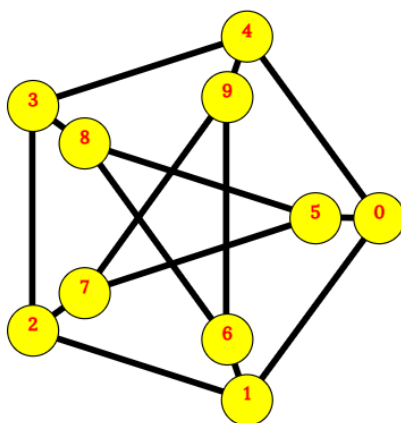
---

## 6.2. Demonstracija rada programa

Prikazat ćemo rad algoritma za računanje broja razapinjućih stabala na primjerima Petersonovog grafa, i kotača sa 6 vrhova,  $W_6$ .

### 6.2.1. Petersonov graf

Na slici 6.1 se vidi Petersonov graf nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.



Slika 6.1: Petersonov graf

Na slici 6.2 vidi se matrica susjedstva Petersonovog grafa te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 2000.

### 6.2.2. Kotač sa 6 vrhova, $W_5$

Na slici 6.3 se vidi graf kotač s 6 vrhova,  $W_5$  nacrtan u aplikaciji *Graphelite*.

Na slici 6.4 vidi se matrica susjedstva za  $W_5$  te broj razapinjućih stabala istog. Vidimo da je taj broj 121.

Generate adjacency matrix

0100110000  
1010001000  
0101000100  
0010100010  
1001000001  
1000000110  
0100000011  
0010010001  
0001011000  
0000101100

Graph name:

Petersonov

Number of nodes:

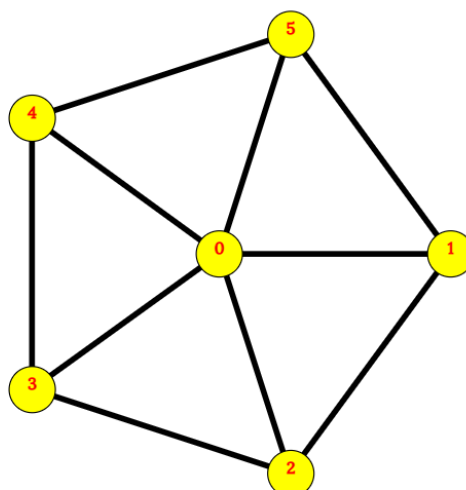
10

Draw a graph

Number of trees

2000

**Slika 6.2:** Broj razapinjućih stabala Petersonovog grafa



**Slika 6.3:** Kotač  $W_5$

Generate adjacency matrix

01111  
101001  
110100  
101010  
100101  
110010

Graph name:

Kotač

Number of nodes:

6

Draw a graph

Number of trees

121

**Slika 6.4:** Broj razapinjućih stabala grafa  $W_5$

## **7. Zaključak**

Zaključak.



# LITERATURA

## **Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa**

### **Sažetak**

Sažetak na hrvatskom jeziku.

**Ključne riječi:** grafovi, stabla, razapinjuća stabla, matrix-tree teorem

## **Counting the spanning trees**

### **Abstract**

Abstract.

**Keywords:** graphs, trees, spanning trees, matrix-tree theorem