

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЯДЕРНЫЕ
ОЦЕНКИ

Студент группы 3630102/70301

Камянский Д.В.

Преподаватель

Баженов А. Н.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020 г.

Содержание

1. Список иллюстраций	3
2. Список таблиц	3
3. Постановка задачи	4
4. Теория	4
5. Реализация	4
6. Результаты	5
6.1. Эмпирические функции распределения	5
6.2. Ядерные функции	8
7. Выводы	10
8. Список литературы	10
9. Приложения	10

1 Список иллюстраций

1	Ядерная функция плотности для нормального распределения	5
2	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа	6
3	Ядерная функция плотности для распределения Коши	6
4	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона	7
5	Ядерная функция плотности для равномерного распределения.....	7
6	Эмпирическая функция для стандартного нормального распределения ..	8
7	Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа	8
8	Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши.....	9
9	Эмпирическая функция для распределения Пуассона	9
10	Эмпирическая функция для равномерного распределения	10

2 Список таблиц

3 Постановка задачи

Сгенерировать выборки размером 20, 60 и 100 элементов. Построить на них эмпирические функции распределения и ядерные оценки плотности распределения на отрезке $[-4, 4]$, для непрерывных распределений и на отрезке $[6, 14]$, для распределения Пуассона.

Распределения:

$$N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

$$C(x, 0, 1) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (2)$$

$$L\left(x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (3)$$

$$P(5, k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5} \quad (4)$$

$$M(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \quad (5)$$

4 Теория

Статистическим рядом называется последовательность различных элементов выборки z_1, z_2, \dots, z_k , расположенных в возрастающем порядке с указанием частот n_1, n_2, \dots, n_k , с которыми эти элементы содержатся в выборке.

Эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i \quad (6)$$

Ядерная оценка плотности:

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (7)$$

где K является ядром, а $h > 0$ является сглаживающим параметром, и называется шириной полосы.

В данной работе в качестве ядра была выбрана плотность вероятности стандартного нормального распределения:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8)$$

Параметр сглаживания будем выбирать по правилу Сильвермана

$$h_n = 1.06 * \sigma * n^{-1/5} \quad (9)$$

где σ - выборочное стандартное отклонение.

5 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python 3.8.2*: модуль *stats* библиотеки *scipy* для генерации выборок различных распределений и библиотека *matplotlib* для построения графиков

6 Результаты

6.1 Эмпирические функции распределения

Рис. 1: Ядерная функция плотности для нормального распределения

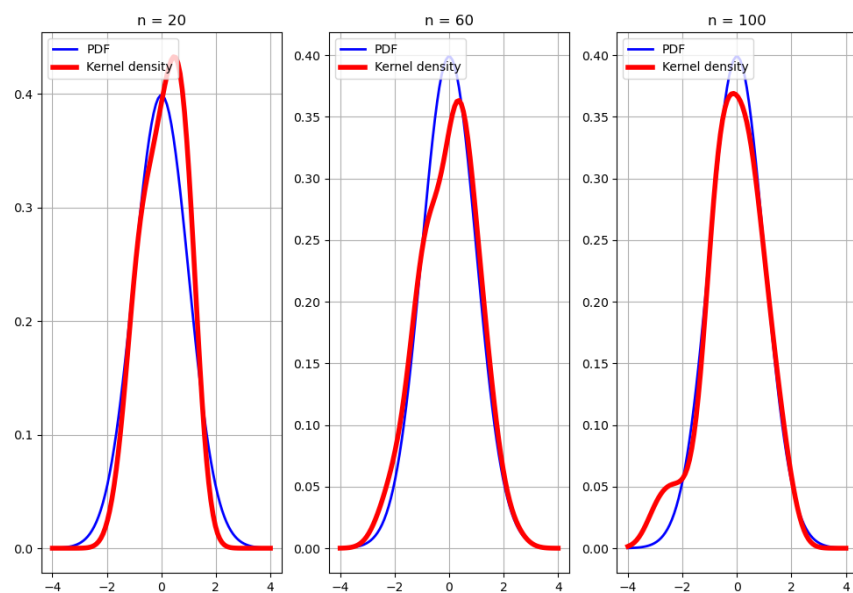


Рис. 2: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа

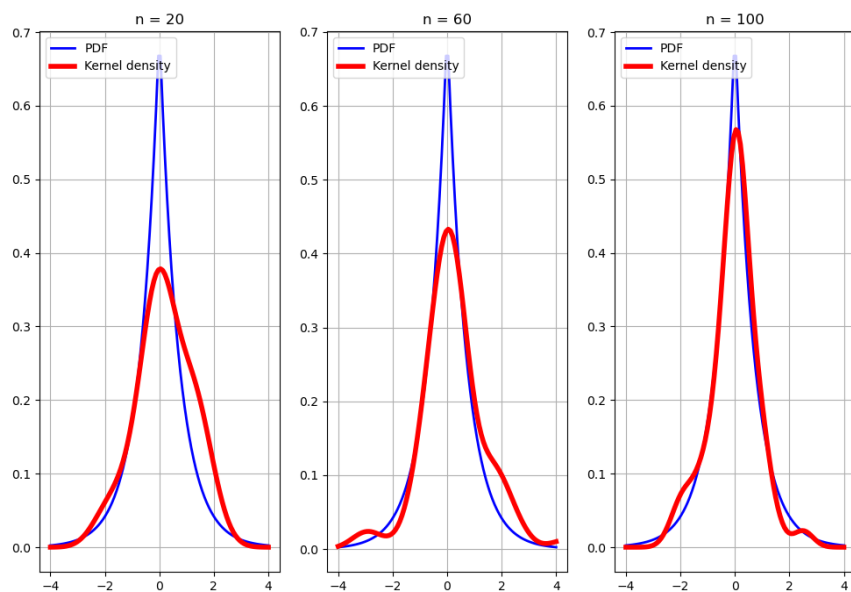


Рис. 3: Ядерная функция плотности для распределения Коши

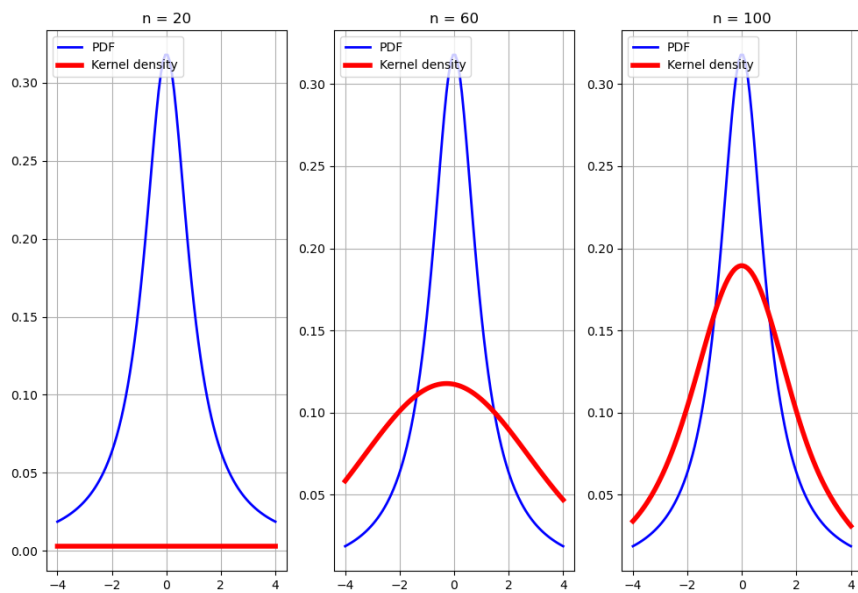


Рис. 4: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона

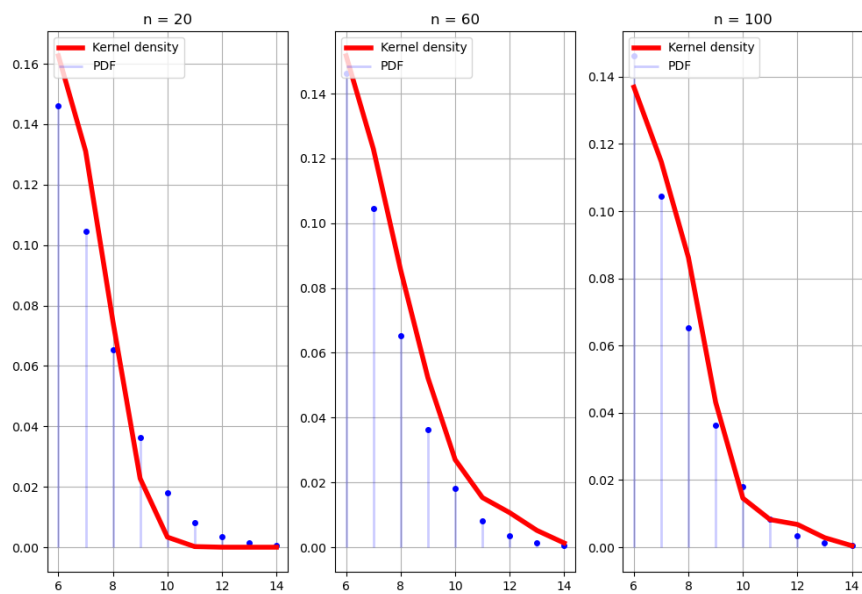
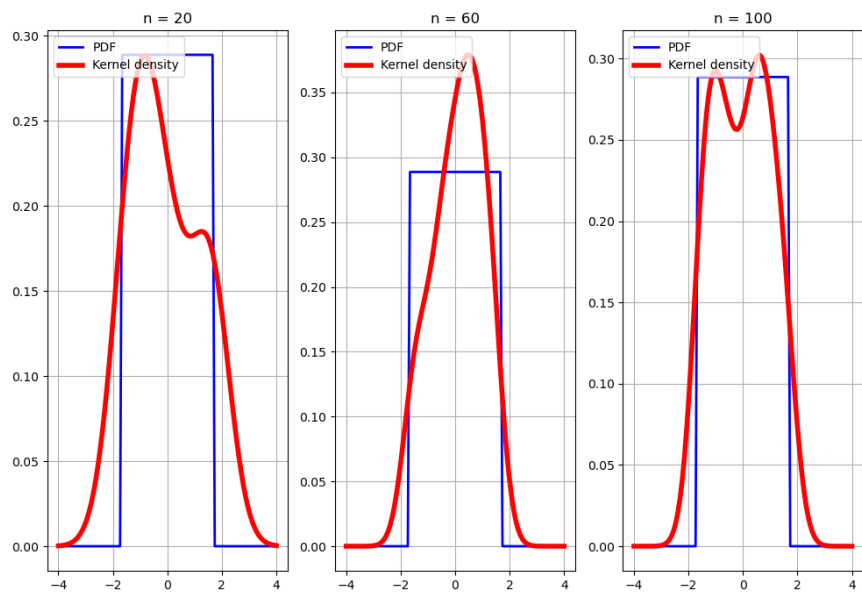


Рис. 5: Ядерная функция плотности для равномерного распределения



6.2 Ядерные функции

Рис. 6: Эмпирическая функция для стандартного нормального распределения

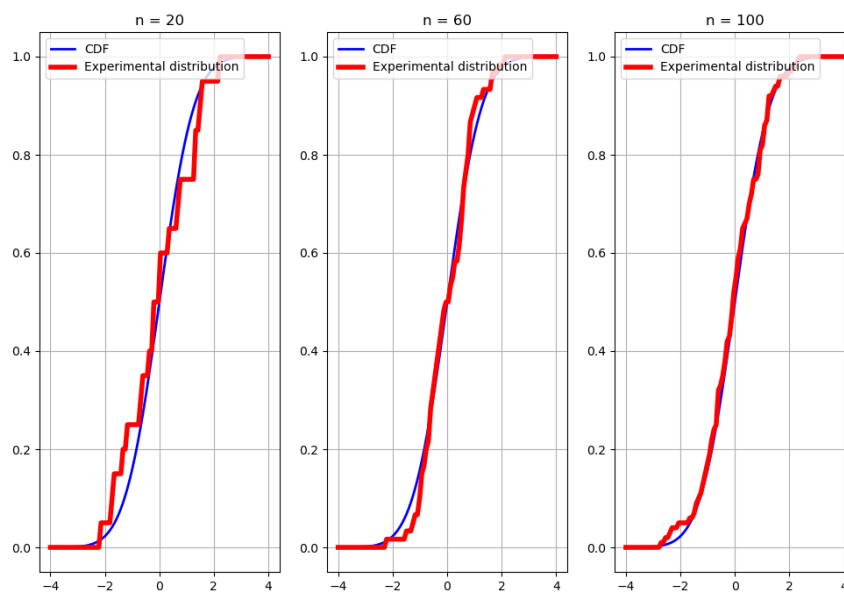


Рис. 7: Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа

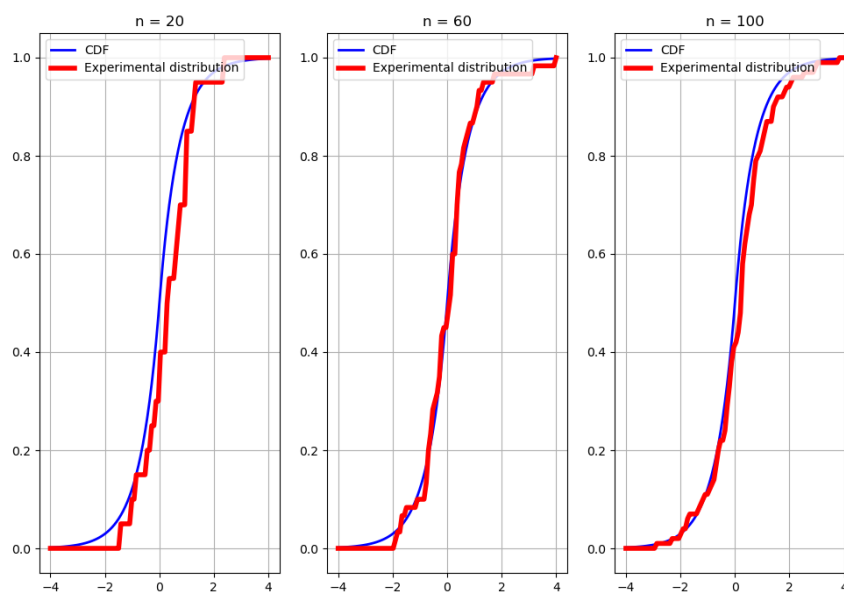


Рис. 8: Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши

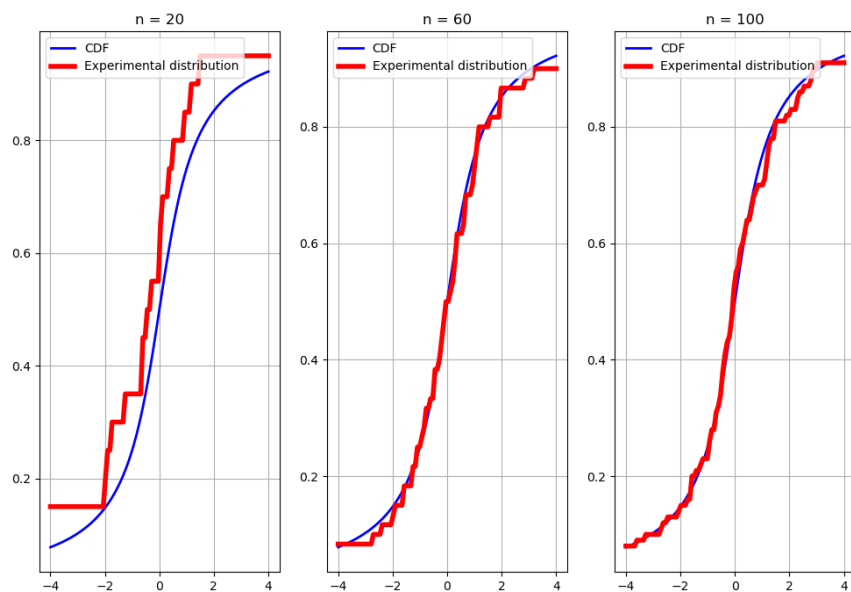


Рис. 9: Эмпирическая функция для распределения Пуассона

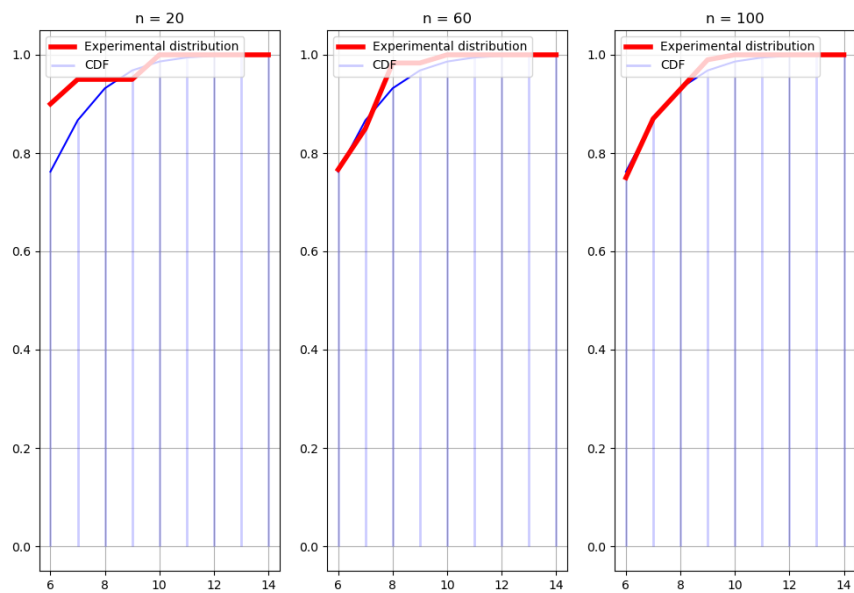
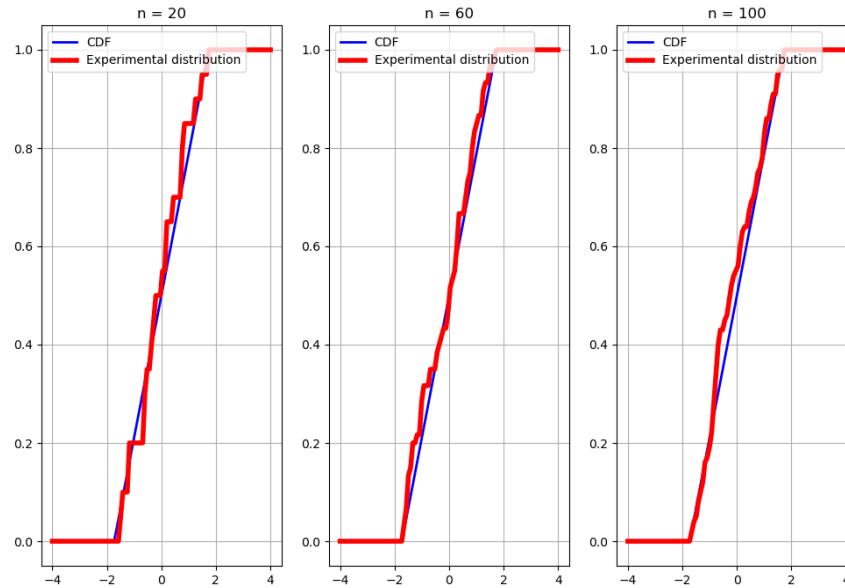


Рис. 10: Эмпирическая функция для равномерного распределения



7 Выводы

Эмпирическая функция лучше приближает эталонную функцию с ростом объёма выборки.

Ядерная оценка функции плотности вероятности с выбранным нормальным ядром лучше всего приближает распределения, близкие к нормальному, с ростом размера выборки качество оценки растёт.

8 Список литературы

Модуль `scipy.stats`

9 Приложения

Код лабораторной: <https://github.com/dkamianskii/MatStatLabs/tree/master/Lab4>