

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4  
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЯДЕРНЫЕ  
ОЦЕНКИ

Студент группы 3630102/70301

Камянский Д.В.

Преподаватель

Баженов А. Н.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2020 г.

# Содержание

<b>1. Список иллюстраций .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Список таблиц .....</b>	<b>3</b>
<b>3. Постановка задачи .....</b>	<b>4</b>
<b>4. Теория.....</b>	<b>4</b>
<b>5. Реализация.....</b>	<b>4</b>
<b>6. Результаты .....</b>	<b>5</b>
6.1. Эмпирические функции распределения .....	5
6.2. Ядерные функции .....	13
<b>7. Выводы .....</b>	<b>15</b>
<b>8. Список литературы .....</b>	<b>15</b>
<b>9. Приложения .....</b>	<b>16</b>

## 1 Список иллюстраций

1	Ядерная функция плотности для нормального распределения $n = 20$ ...	5
2	Ядерная функция плотности для нормального распределения $n = 60$ ...	6
3	Ядерная функция плотности для нормального распределения $n = 100$ ..	6
4	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа $n = 20$ .....	7
5	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа $n = 60$ .....	7
6	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа $n = 100$ .....	8
7	Ядерная функция плотности для распределения Коши $n = 20$ .....	8
8	Ядерная функция плотности для распределения Коши $n = 60$ .....	9
9	Ядерная функция плотности для распределения Коши $n = 100$ .....	9
10	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона $n = 20$ .....	10
11	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона $n = 60$ .....	10
12	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона $n = 100$ .....	11
13	Ядерная функция плотности для равномерного распределения $n = 20$ ...	11
14	Ядерная функция плотности для равномерного распределения $n = 60$ ...	12
15	Ядерная функция плотности для равномерного распределения $n = 100$ .	12
16	Эмпирическая функция для стандартного нормального распределения ..	13
17	Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа .....	13
18	Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши.....	14
19	Эмпирическая функция для распределения Пуассона .....	14
20	Эмпирическая функция для равномерного распределения .....	15

## 2 Список таблиц

### 3 Постановка задачи

Сгенерировать выборки размером 20, 60 и 100 элементов. Построить на них эмпирические функции распределения и ядерные оценки плотности распределения на отрезке  $[-4, 4]$ , для непрерывных распределений и на отрезке  $[6, 14]$ , для распределения Пуассона.

Распределения:

$$N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

$$C(x, 0, 1) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (2)$$

$$L\left(x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (3)$$

$$P(5, k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5} \quad (4)$$

$$M(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \quad (5)$$

### 4 Теория

Статистическим рядом называется последовательность различных элементов выборки  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , расположенных в возрастающем порядке с указанием частот  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , с которыми эти элементы содержатся в выборке.

Эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i \quad (6)$$

Ядерная оценка плотности:

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (7)$$

где  $K$  является ядром, а  $h > 0$  является сглаживающим параметром, и называется шириной полосы.

В данной работе в качестве ядра была выбрана плотность вероятности стандартного нормального распределения:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8)$$

Параметр сглаживания будем выбирать по правилу Сильвермана

$$h_n = 1.06 * \sigma * n^{-1/5} \quad (9)$$

где  $\sigma$  - выборочное стандартное отклонение.

### 5 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python 3.8.2*: модуль *stats* библиотеки *scipy* для генерации выборок различных распределений и библиотека *matplotlib* для построения графиков

## 6 Результаты

### 6.1 Эмпирические функции распределения

Рис. 1: Ядерная функция плотности для нормального распределения  $n = 20$   
 $n=20$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

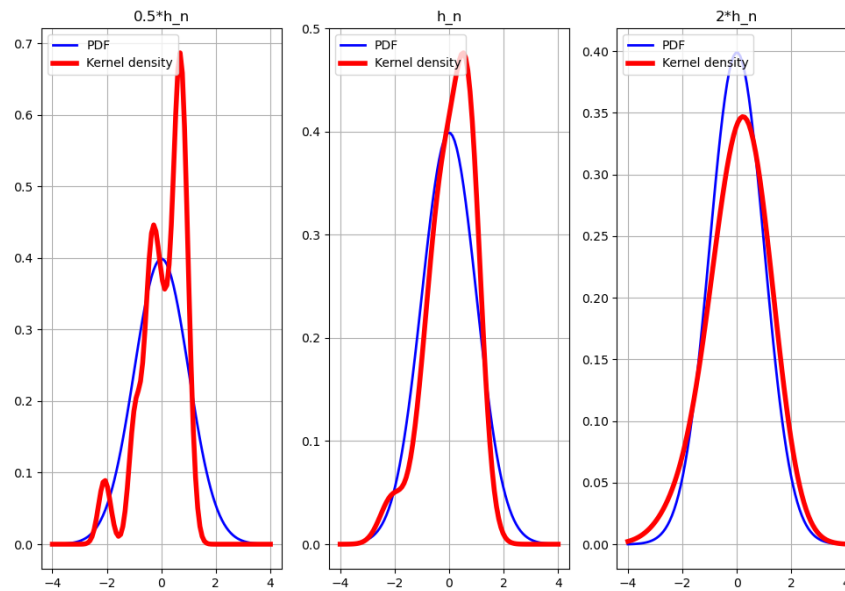


Рис. 2: Ядерная функция плотности для нормального распределения  $n = 60$

$n=60$  with window width  $h=[0.5, 1, 2]$

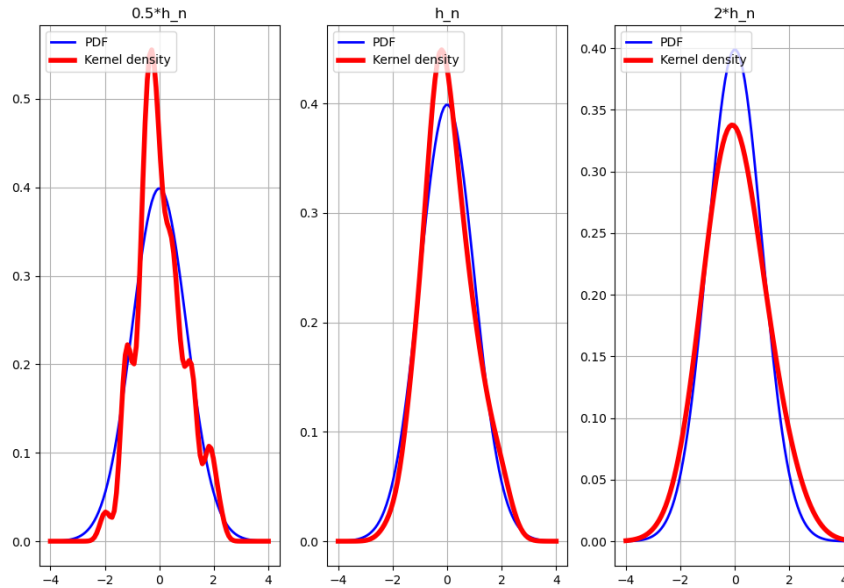


Рис. 3: Ядерная функция плотности для нормального распределения  $n = 100$

$n=100$  with window width  $h=[0.5, 1, 2]$

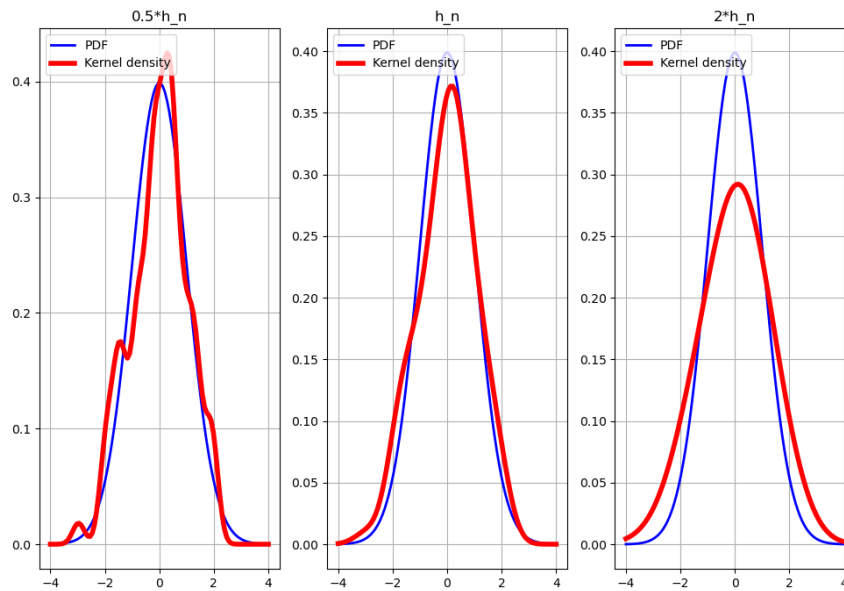


Рис. 4: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа  $n = 20$

$n=20$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

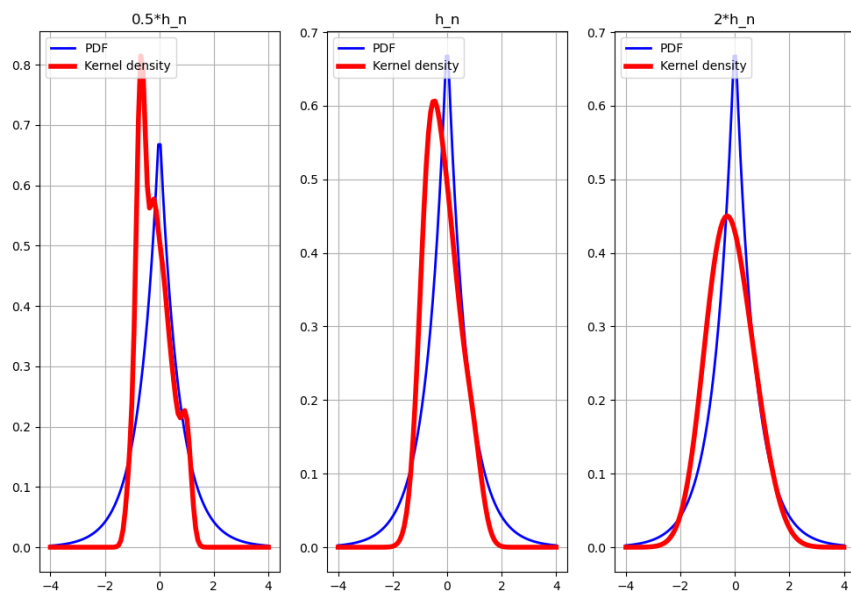


Рис. 5: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа  $n = 60$

$n=60$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

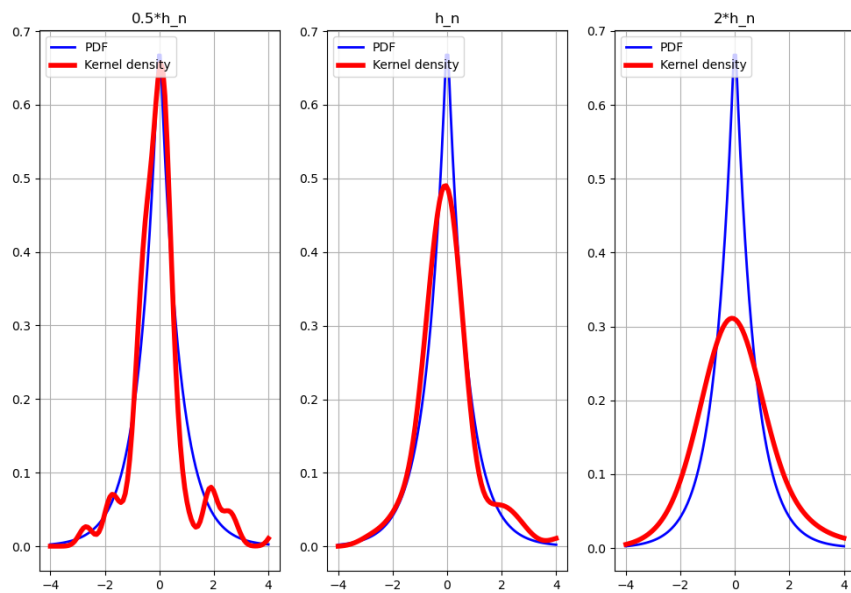


Рис. 6: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа  $n = 100$

$n=100$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

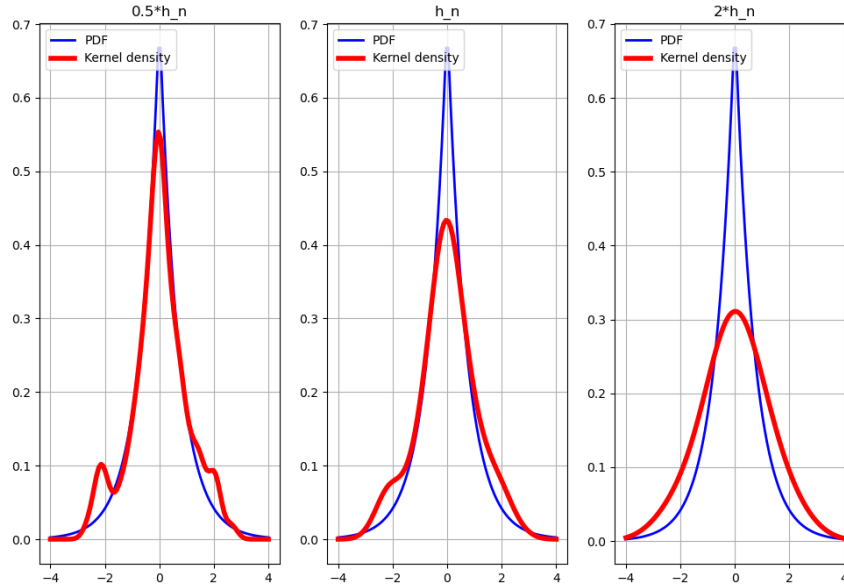


Рис. 7: Ядерная функция плотности для распределения Коши  $n = 20$

$n=20$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

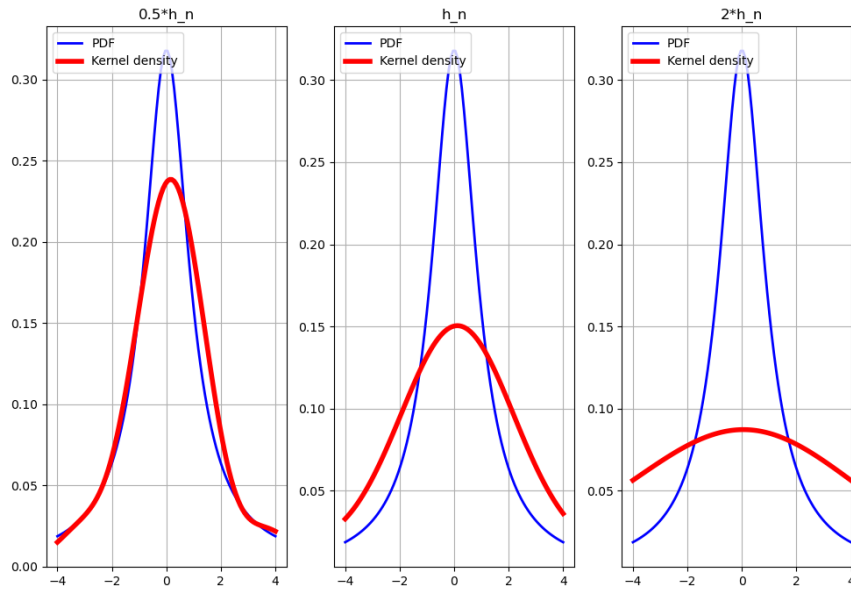




Рис. 8: Ядерная функция плотности для распределения Коши  $n = 60$

$n=60$  with window width  $h=[0.5, 1, 2]$

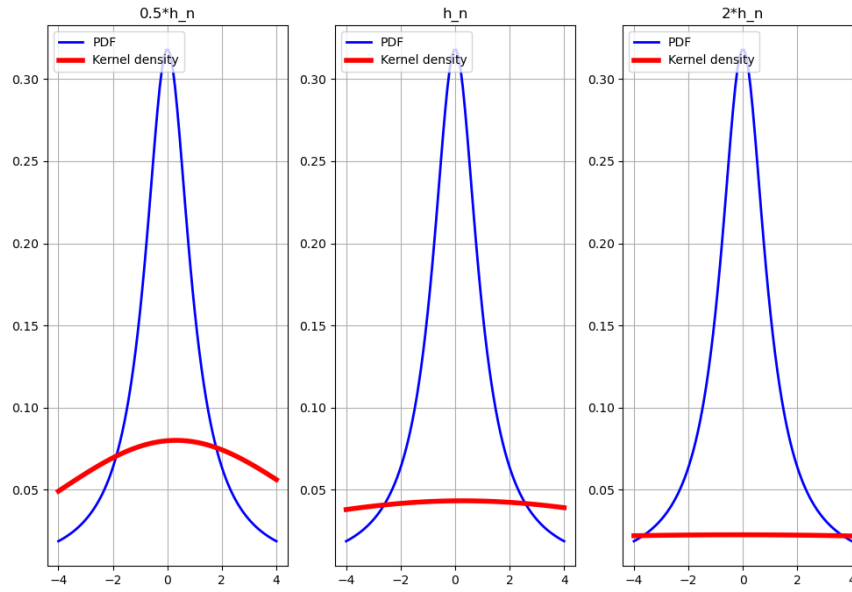


Рис. 9: Ядерная функция плотности для распределения Коши  $n = 100$

$n=100$  with window width  $h=[0.5, 1, 2]$

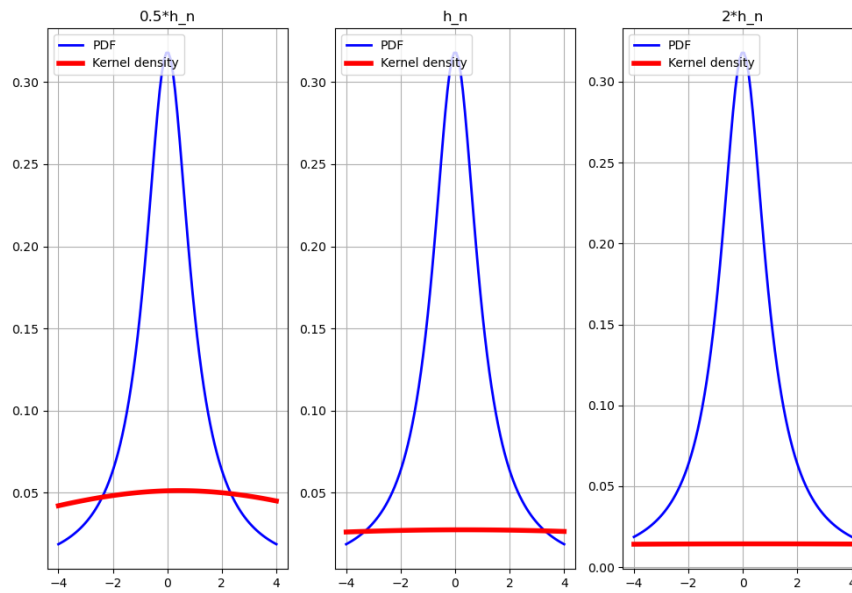


Рис. 10: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона  $n = 20$

$n=20$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

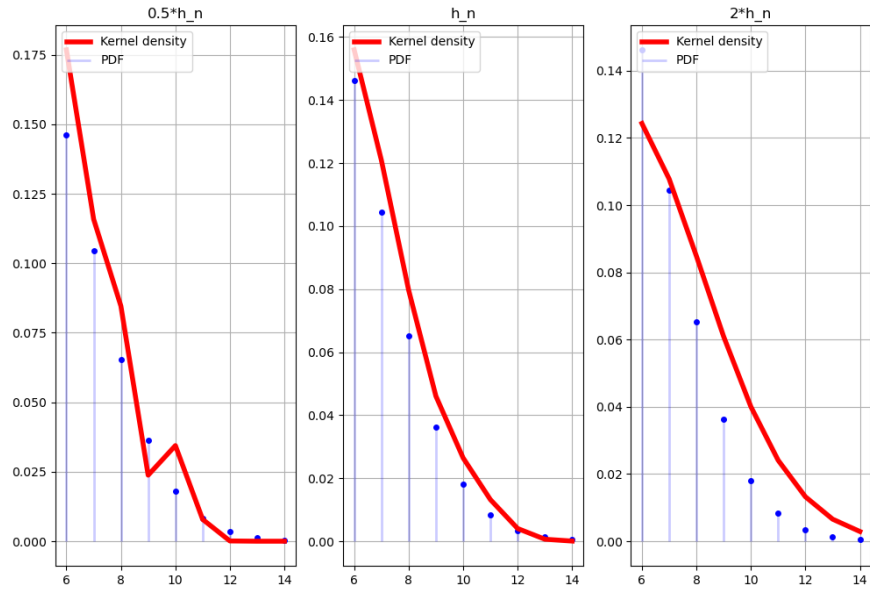


Рис. 11: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона  $n = 60$

$n=60$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

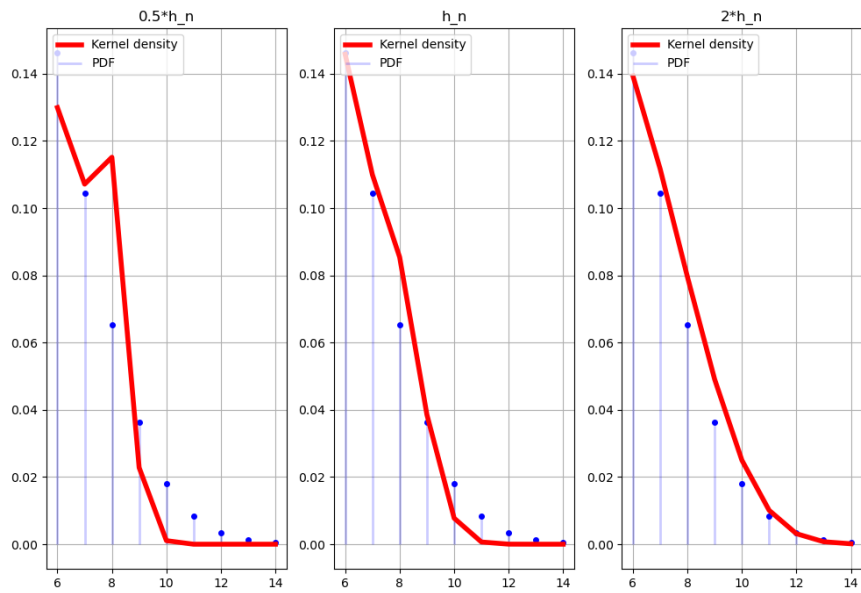


Рис. 12: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона  $n = 100$

$n=100$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

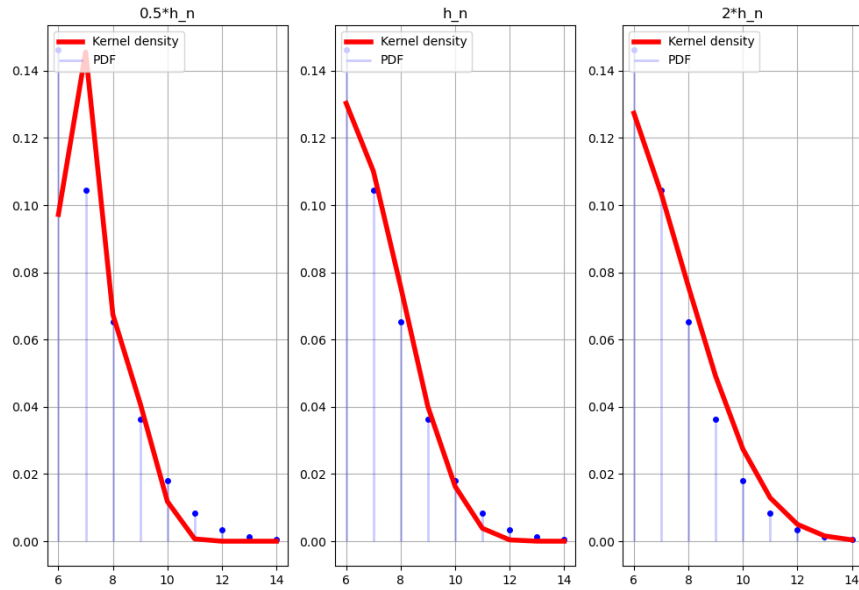


Рис. 13: Ядерная функция плотности для равномерного распределения  $n = 20$

$n=20$  with window width  $h = [0.5, 1, 2]$

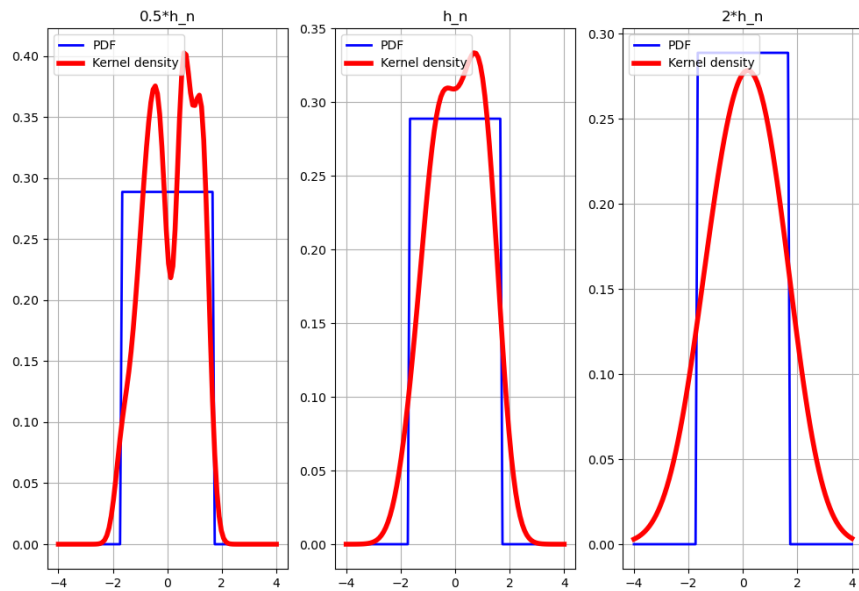


Рис. 14: Ядерная функция плотности для равномерного распределения  $n = 60$   
 $n=60$ with window width  $h=[0.5, 1, 2]$

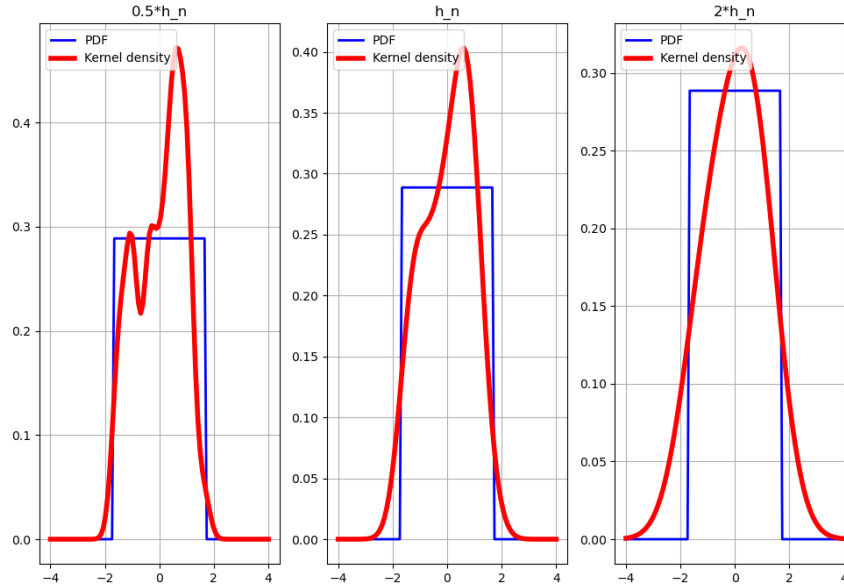
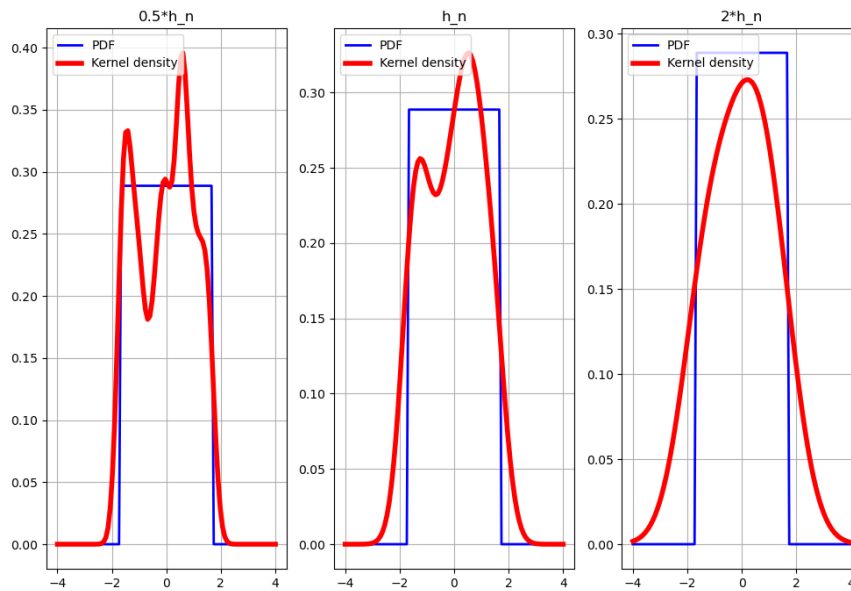


Рис. 15: Ядерная функция плотности для равномерного распределения  $n = 100$   
 $n=100$ with window width  $h=[0.5, 1, 2]$



## 6.2 Ядерные функции

Рис. 16: Эмпирическая функция для стандартного нормального распределения

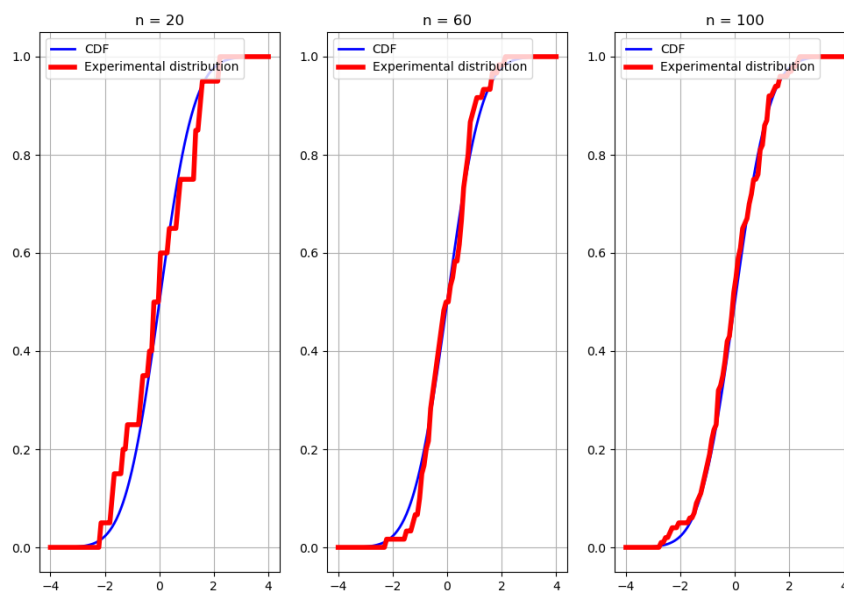


Рис. 17: Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа

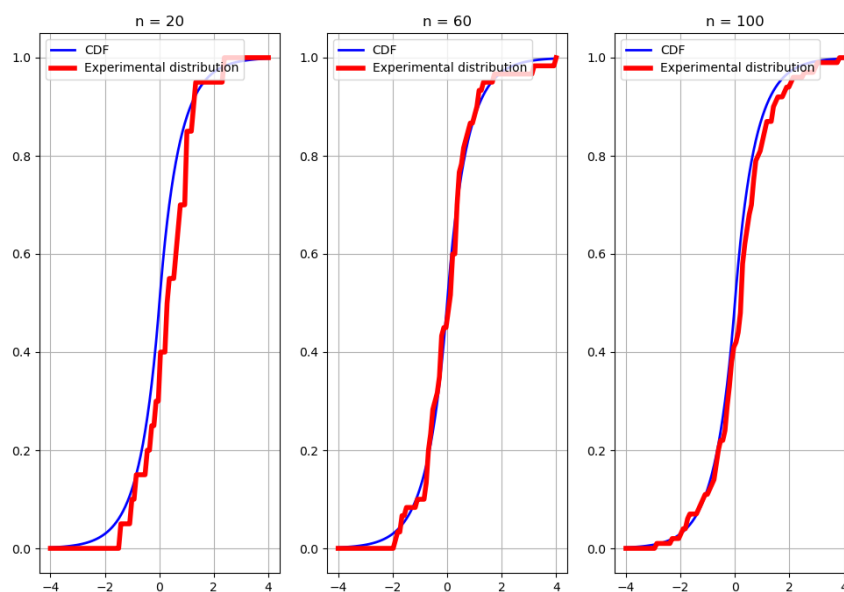


Рис. 18: Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши

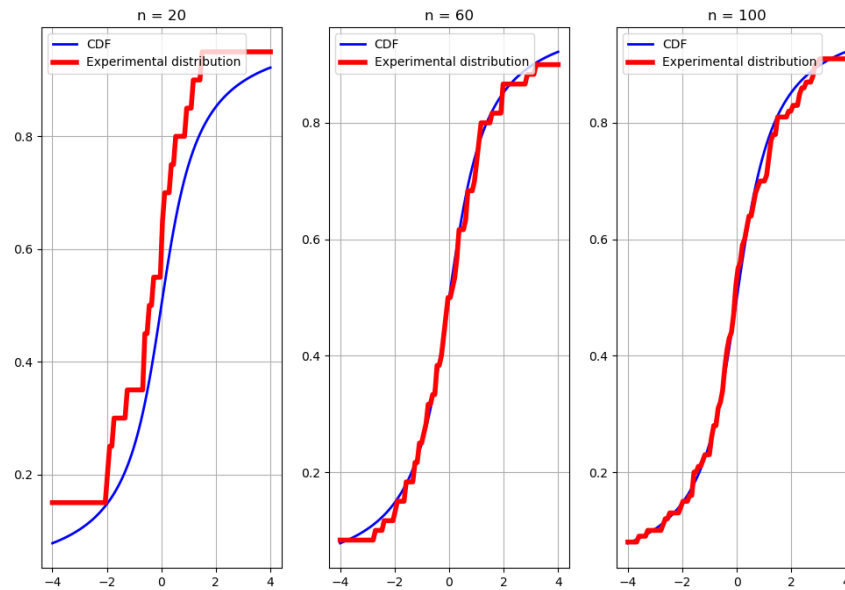


Рис. 19: Эмпирическая функция для распределения Пуассона

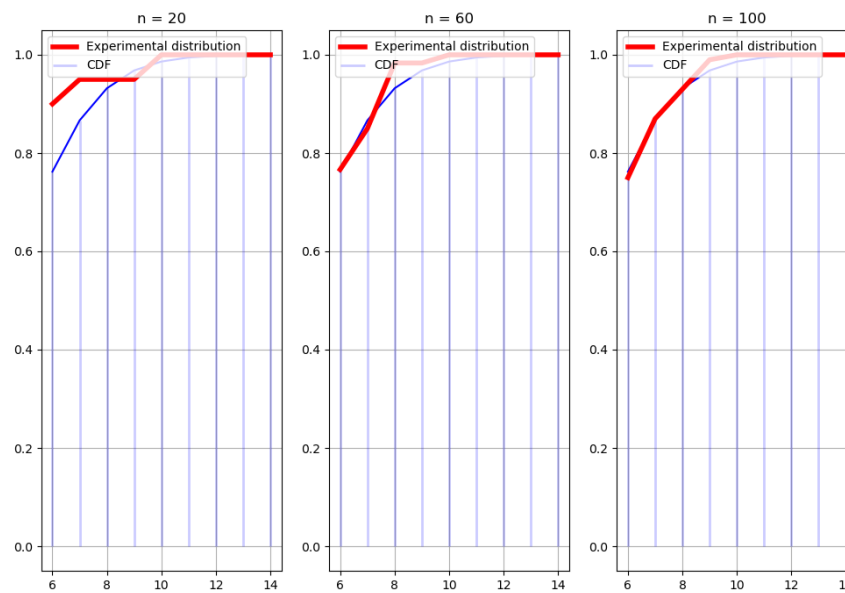
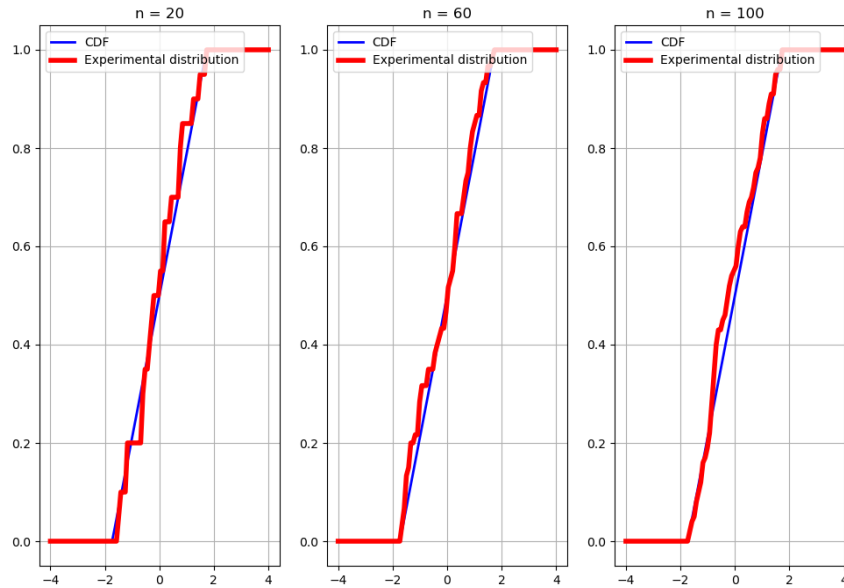


Рис. 20: Эмпирическая функция для равномерного распределения



## 7 Выводы

Эмпирическая функция лучше приближает эталонную функцию с ростом объёма выборки.

Ядерная оценка функции плотности вероятности с выбранным нормальным ядром лучше всего приближает распределения, близкие к нормальному, с ростом размера выборки качество оценки растёт. Исключением является распределение Коши, так как на относительно больших выборках крайне велики выбросы, которые сильно ухудшают приближение по вариационному ряду. Для улучшения качества приближения можно уменьшить ширину полосы.

Также существует проблема точного приближения функции плотности Лапласа с помощью нормального ядра, так как, несмотря на схожесть структуры этих двух функций (стандартного нормального и Лапласа к коэф.  $1/\sqrt{2}$  распределений), разность скорости сходимости к точке мат. ожидания (излом Лапласа в этой точке) неизбежно будет давать погрешность.

С тем же связана проблема приближения и равномерного распределения, площадь графика которого равна прямоугольнику. Чем уже равномерное распределение, тем лучше ядерная оценка с увеличением размера выборки. Уменьшение ширины полосы скорее приводит к ухудшению результата, так как только увеличивает влияние неравномерности случайной выборки.

## 8 Список литературы

Модуль `scipy.stats`

## 9 Приложения

Код лабораторной: <https://github.com/dkamianskii/MatStatLabs/tree/master/Lab4>