Санкт-Петербургский Политехнический
Университет им. Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №8
Интервальные оценки математического ожидания и стандартного отклонения

Студент группы 3630102/70301 Камянский Д.В.

Преподаватель Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

1 Список таблиц

2 Постановка задачи

Для двух выборок 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону $N(x,0,1)$, для параметров масштаба и положения построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$.

3 Теория

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения θ с доверительной вероятностью γ называется интервал со случайными границами (θ_1,θ_2), содержащий параметр θ с вероятностью γ.

Функция распределения Стьюдента:

$$T = \sqrt{n-1}\frac{\overline{x}-\mu}{\delta} \tag{1}$$

Функция плотности распределения χ^2:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Интервальные оценки для нормального распределения
математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \tag{3}$$

где $t_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1-\frac{a}{2}$.

стандартного отклонения:

$$P = \left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)}}\right) = \gamma, \tag{4}$$

где $\chi^2_{1-\frac{a}{2}}$, $\chi^2_{\frac{a}{2}}$ – квантили распределения Стьюдента порядков $1-\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$ соответственно.

Асимптотическая интервальная оценка для произвольного распределения при большой выборке
математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \tag{5}$$

стандартного отклонения:

$$P = \left(s(1+U)^{-1/2} < \sigma < s(1-U)^{-1/2}\right) = \gamma, \tag{6}$$

где $u_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль нормального распределения $N(x,0,1)$ порядка $1-\frac{a}{2}$., $U = u_{1-\alpha/2}\sqrt{(e+2)/n}$, $e = m_4/s^4 - 3$

4 Реализация

Работы была выполнена на языке $Python 3.8.2$ Для генерации выборок и обработки функции распределения использовалась библиотека *scipy.stats*.

5 Результаты

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

	m	σ
$n = 20$	$[-0.7367, -0.0098]$	$[0.5906, 1.1343]$
$n = 100$	$[-0.0307, 0.356]$	$[0.8555, 1.1319]$

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

	m	σ
$n = 20$	$[-0.705, -0.0415]$	$[0.6199, 1.0608]$
$n = 100$	$[-0.0273, 0.3527]$	$[0.8668, 1.1201]$

6 Выводы

Качество оценок растёт с увеличением объёма выборки, оба метода показывают схожие точности оценки, но у ассимптотического подхода очевидно преимущество в применимости к выборке из произвольного распределения.

7 Список литературы

[1] Модуль numpy - https://physics.susu.ru/vorontsov/language/numpy.html

[2] Модуль scipy - https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/

[3] Шевляков Г. Л. Лекции по математической статистике, 2020.

8 Приложения

Код лаборатрной: https://github.com/dkamianskii/MatStatLabs/tree/master/Lab8