III Исследование применимости метода

] A — матрица ограничений задачи в канонической форме.

] rang(A) = M, M — число ограничений

] N — число переменных

Симплекс метод применим при $M \leq N$

V Описание алгоритма

1) Приведение задачи к канонической задаче ЛП
   - матрица ограничений задачи $A[M,N]$
   - вектор ограничений $b[M]$
   - целевая функция $C[N]$

2) Теоретически доказано, что оптимальное решение поставленной задачи ЛП достигается на опорном векторе.

алгоритм нахождения опорного вектора:

Нахождение начального приближения

] общий вид задачи: $c^T[N]\, x[N] \to \min$

$$S = \{x[N] \mid A[M,N]\,x[N] = b[M];\ x[N] \geq 0\}$$

3,4,
5,6

$N_0^+ = \{i \in N \mid x_0[i] > 0\}$ $N_0^0 = \{i \in N \mid x_0[i] = 0\}$

Рассм. вспомогательную каноническую задачу для нахождения опорного вектора (нач. приближ.):

$\sum_{i\in M} y[i] \to \min$

$A[M,N]x[N] + E[M,M]y[M] = b[M]$, !

$b[M] \geq 0$ (иначе $\times(-1)$) $x[N] \geq 0$, $x[M] \geq 0$

В данной задаче начальный опорный вектор таков: $x[N] = 0$ $y[M] = b[M] > 0$

Методом искусственного базиса, основанного на симплекс методе находим $x_0^*[N]$, $y_0^*[M]$

существует несколько исходов

— $\exists i \in M \mid y^*[i] > 0 \Rightarrow$ исходная задача не имеет допустимых решений

— x_0^* - невырожденный, x_0^* - начальное приближ. исходной задачи

— x_0^* - вырожденный, заменим столбцы $E[M,M]$ на столбцы $A[M, N \setminus N^+]$

Решение исходной задачи с начальным опорным вектором x_0^* (симплекс метод)

опишем один шаг алгоритма

$] k=1$; $|N| = n$; $|M| = m$

! $N_k^+ = \{i \in N \mid x_0^*[i] > 0\}$; если $|N_k^+| < m$, то дополняем $i \in N \mid x_0^*[i] = 0$ так, что $|N_1^+| = m$

$L_k = N \setminus N_k$

Матрицу $A[M, N_k^+]$ дополним столбцами из $A[M, N_k^0]$ так, чтобы она стала квадратной и $\det A[M, N_k] \neq 0$

Находим $B[N_k, M] = A^{-1}[M, N_k]$

Строим $y_k^T[M] = c^T[N_k]B[N_k,M]$

$d_k^T[L_k] = c^T[L_k] - c^T[L_k]B[N_k,M]A[M,L_k]$

- Если $d_k[L_k] \geq 0$! x_0^* - оптимальное решение конец метода.
- Если $\exists j_k \in L_k$: $d_k[j_k] < 0$! продолжаем алгоритм $u_k[L_k[j_k]] = 0$

Строим $u_k[N_k] = B[N_k, M]A[M, j_k]$; $u_k[j_k] = -1$;

- Если $u_k[N_k] \leq 0 \Rightarrow$ ф-ция цели не ограничена снизу на S. конец метода.

• Если $\exists$ [redacted] $i \in N_k \mid U_k[i] > 0$:

- $x_0^*[N]$ – невыр. оп. вектор $\Rightarrow N_k = N_k^+ \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \theta_k = \min \dfrac{x_0^*[i]}{U_k[i]}$ (1)

  строим новый опорный вектор:

  (2) $x_1^*[N] = x_0^*[N] - \theta_k U_k[N]$ переходим к новому шагу алгоритма

- $x_0^*[N]$ – выр. оп. вектор:

  • $\exists\, i \in N_k \setminus N_k^+ : U_k[i] > 0$ – замена базиса, новый шаг алгоритма.

  • $U_k[N_k \setminus N_k^+] \le 0 \Rightarrow$ находим θ_k и x_1^* по (1) и (2) переходим к новому шагу алгоритма.

Замена базиса

Берём столбец $\overline{a_i} : i \in N_k \setminus N_k^+$ и заменяем на $\overline{a_i} : i \in L_k$. Проверяем, является ли новая система векторов линейно независимой ($\det(\ldots) \neq 0$)

[redacted] ЛЗ – продолжаем замену столбцов

Для предотвращения зацикливания вносим случайный параметр в выбор сменяемых индексов.

Нахождения начального приближения методом перебора.

Для каждого набора индексов N_k строится матрица $A[M, N_k]$; $k = 1, \dots, C_n^m$

Если $\det(A[M, N_k]) = 0$, тогда берем следующий N_{k+1}.

Находим решение л.у. $A[M, N_k] x[N_k] = b[M]$

- Если $x[N_k] \geq 0$ —] $x[N \setminus N_k] = 0$, $x[N]$ — опорный вектор.
- Если $\exists x[i] < 0$, $i \in N_k$ — переходим к N_{k+1}

VII Чувствительность решения к изменениям ресурсов.

Аналитические оценки:

- для вектора $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$; вносим погрешность Δb в каждый элемент вектора.

x_* — точное решение $A x_* = b$

Т.к. в оптимальном решении задействуется m переменных вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а

9, 14

незадействованные переменные равны 0,
можно рассматривать $X_{опт} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}$ —
элем. которого являются задействованные
в опт. решении переменные, $A_{опт}$ размер. $M \times M$ —
т.к. [redacted] незадейств. переменные равны 0.

Тогда имеем $A_{опт} X_{опт} = b$

$f(X_{опт}) = C^T_{опт} X_{опт}$, где $C_{опт}$ — вектор цен задейств. в решении переменных.

Тогда $X'_{опт}$ — новое решение задачи

$$A_{опт} X'_{опт} = b + \Delta b$$

$$X_{опт} = A^{-1}_{опт} b \qquad X'_{опт} = A^{-1}_{опт} b + A^{-1}_{опт} \Delta b$$

$$f(X'_{опт}) - f(X_{опт}) = C^T A^{-1}_{опт} \Delta b$$

Рассм. показатель относительной погрешности

$$\delta = \frac{|f(X'_{опт}) - f(X_{опт})|}{\Delta b} = C^T_{опт} A^{-1}_{опт} \cdot e,$$

где $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_M$. Из данного выражения видно, что относительная погрешность $\delta = const$, а разность значения ф-ции прямо пропорц. Δb.

14+

Можем рассчитать значение δ для нашей задачи: $X_{опт} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$ $\quad C_{опт} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_{опт} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}_{опт} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 1.2 & -0.2 & 0 \\ 5.4 & -0.4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T_{опт} \cdot A^{-1}_{опт} = (6.06 \quad -0.26 \quad 0)$$

$\underline{\delta = 5.8}$

Рассм. внесение погрешности в вектор ф-ции цен $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$f_1(x) = (c_1 + \Delta c_1) x_1 + (c_2 + \Delta c_2) x_2 + \ldots + (c_n + \Delta c_n) x_n = f(x) + \Delta c_1 x_1 + \Delta c_2 x_2 + \ldots + \Delta c_n x_n$$

Отсюда видно, что внесение погрешности (положительной) в коэф. цен незадействованых переменных не влияет на решение и значение ф-ции.

14+

Если погрешность вносится в цену задейство-
ванной переменной (при этом оптимальный
план остаётся тем же), то относительная
погрешность $\delta = \frac{|f_1(x) - f(x)|}{\Delta c_i} = \frac{\Delta c_i x_i}{\Delta c_i} = x_i$
равна значению переменной, а изменение
функции равно значению переменной умнож.
на значение погрешности Δc. То есть чем
выше значения переменных, тем сильнее
погрешности в ценах влияют на значения ф-ции.

14+