Отчёт по лабораторной работе №3
"Решение задачи одномерной минимизации"

Выполнили студенты:

Проверил:
к.ф.-м.н.
Родионова Е.А.

Санкт-Петербург
2020 г.

I Постановка задачи

$f(x) \to \min \quad x \in [a, b]$

$[a, b]$ – исходный интервал неопределённости

$[a_k, b_k]$ – конечный интервал неопределённости:

$x_* \in [a_k, b_k] : b_k - a_k < \varepsilon$, где $x_* : f(x_*) = \min f(x)$, $x \in [a, b]$, ε – заданная точность.

Требуется решить поставленную задачу одномерной минимизации методами:

- Метод дихотомии
- Метод золотого сечения.

Получить результаты с точностями 0.1; 0.01; 0.001

Будем рассматривать ф-цию

$$f(x) = \frac{(x^5 - e^x)}{\ln(x+10)} \qquad x \in [-0.5 ; 1.5]$$

II Применимость методов

Для применимости данных методов требуется, чтобы ф-ция $f(x)$ была унимодальна на рассматриваемом участке.

Подтвердим унимодальность рассм. ф-ции построив её график.

III Описание алгоритма

а) Метод дихотомии

Идея метода состоит в вычислении на каждой очередной итерации двух значений целевой ф-ции в точках, отстоящих на величину α в обе стороны от середины интервала неопределённости. Величина α в этом методе называется константой различимости, такова, что, с одной стороны, величина 2α была близка к желаемому конечному значению интервала неопределённости, с другой, значения оптимизируемой ф-ции на краях интервала 2α были различимы.

Алгоритм:

Зададим $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $[a_1, b_1]$ – начальный интервал

$k = 1$

Шаг 1: Если $b_k - a_k \le \varepsilon$, то $x_* \in [a_k, b_k]$ и $x_* = \frac{a_k + b_k}{2}$ – конец алгоритма, иначе

$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \alpha$, $\mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \alpha$.

Шаг 2: Вычислить $f(\lambda_k)$, $f(\mu_k)$.

Шаг 3: Если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, иначе $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$.

Шаг 4: $k = k+1$, переходим на Шаг 1.

Рассм. длину интервала неопределённости:

$b_1 - a_1$ – начальный интервал

После 1-й итерации $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} + \alpha$

2-й итерации: $b_3 - a_3 = \frac{b_1 - a_1}{4} + \frac{\alpha}{2} + \alpha$

...

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^k} + 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

Тогда конечный интервал неопределённости:

[redacted] $\frac{b_1 - a_1}{2^n} + 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon - 2\alpha}{b_1 - a_1 - 2\alpha}$$

$$2^n \geq \frac{b_1 - a_1 - 2\alpha}{\varepsilon - 2\alpha}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b_1 - a_1 - 2\alpha}{\varepsilon - 2\alpha}\right)}{\ln 2}$$ – количество итераций для достижения заданной точности.

4 Метод сходится при $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$.

Число обращений к ф-ции: $2n$

в) Метод золотого сечения

Идея метода состоит в использовании на каждой итерации для сокращения интервала неопределённости одной из внутренних точек предыдущей итерации. Должны быть выполнены условия:

- Пробные точки на каждой итерации находятся на одинаковых расстояниях от концов интервала неопределённости $\lambda_k - a_k = b_k - \mu_k$
- Для новой итерации точки λ_{k+1}, μ_{k+1} выбираются так, чтобы λ_{k+1} совпало с μ_k либо μ_{k+1} совпало с λ_k.
- Сжатие интервала неопределённости осуществляется на каждой итерации с одним и тем же коэффициентом сжатия τ, удовлетворяющее уравнению $\tau^2 + \tau - 1 = 0$. Золотое сечение можно вычислить как $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,61803$
- При выполнении этих условий λ_k и μ_k вычисляются по формулам

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \lambda_k &= a_k + (1-\tau)(b_k - a_k) \\ \mu_k &= a_k + \tau(b_k - a_k) \end{aligned}, \quad \tau = \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k}$$

Алгоритм

Зададим $\varepsilon > 0$, $[a_1, b_1]$ - начальный интервал, $k=1$

Вычислить λ_1, μ_1 по формулам (1), $f(\lambda_1), f(\mu_1)$

Шаг 1: Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то $x_* \in [a_k, b_k]$

$x_* = \frac{a_k + b_k}{2}$ - конец алгоритма, иначе

если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то перейти на Шаг 2,

если $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$, то перейти на Шаг 3.

Шаг 2: Положить $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$

$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \tau(b_{k+1} - a_{k+1})$, вычислить $f(\mu_{k+1})$,

перейти на Шаг 4.

Шаг 3: Положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$,

$\lambda_{k+1} = a_{k+1} - (1-\tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$, вычислить

$f(\mu_{k+1})$, перейти на Шаг 4.

Шаг 4: $k = k+1$, переходим на Шаг 1.

Рассмотрим длину интервала неопределённости: $b_n - a_n = (b_1 - a_1)\tau^{n-1} \leq \varepsilon$

$$\tau^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{b_1 - a_1}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b_1 - a_1}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + 1$$

Число обращений к функции: n

IV Результаты

а) Метод дихотомии $\alpha = \frac{\varepsilon}{10}$; $b_1 - a_1 = 2$.

• $\varepsilon = 0.1$

Теор. оценка n' (числа обращений):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{2-0.02}{0.1-0.02}\right)}{\ln 2} = \frac{3.2088}{0.693} = 4.63 \simeq 5$$

$$n' = \underline{10}$$

Численная:

обращений к ф-ции: $\underline{10}$

$x_* = 0.840312$ $f(x_*) = 0.485171$

• $\varepsilon = 0.01$

Теор. оценка n':

$$n = \frac{5.52}{0.693} = 7.966 \simeq 8 \quad n' = \underline{16}$$

Численная:

обращений к ф-ции: 16

$x_* = 0.808285$ $f(x_*) = 0.48126$

• $\varepsilon = 0.001$

Теор. оценка n':

$$n = \frac{7.824}{0.693} = 11.29 \approx 12 \quad n' = 24$$

Численная:

обращений к функции: 24

$x_* = 0.810272 \quad f(x_*) = 0.481242$

в) Метод Золотого сечения $b_1 - a_1 = 2$

• $\varepsilon = 0.1$

Теор. оценка n':

$$n = \frac{\ln\left(\frac{0.1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + 1 = \frac{-2.9957}{-0.4812} + 1 =$$

$$= 7.2255 \approx 8 \quad n' = 8$$

Численная:

обращений к функции: 8

$x_* = 0.804952 \quad f(x_*) = 0.481363$

• $\varepsilon = 0.01$

Теор. оценка n':

$$n = \frac{-5.2983}{-0.4812} + 1 = 12.0106 \approx 13 \quad n' = 13$$

Численная:

обращений к функции: 13

$x_* = 0.811163 \quad f(x_*) = 0.481244$

• $\varepsilon = 0.001$

Теор. оценка n':

$$n = \frac{-7.6009}{-0.4812} + 1 = 16.7957 \approx 17 \quad n' = 17$$

Численная:

обращений к функции: 17

$x_* = 0.810257 \quad f(x_*) = 0.481242$

V Сравнение методов

Сравним методы по числу обращений к ф-ции, т.к. от этого напрямую зависит время вычислений.

$b_1 - a_1 = S$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \tau$, $\exists\, \alpha = 0$

$$\frac{-2\ln\left(\frac{\varepsilon}{S}\right)}{\ln 2} \cdot \frac{\ln \tau}{\ln\left(\frac{\varepsilon}{S}\tau\right)} = \frac{1{,}3888x}{x - 0{,}4812}$$

где $x = \ln\left(\frac{\varepsilon}{S}\right)$, $x < 0$ т.к. $\varepsilon < S$.

Рассм. случай, когда метод дихотомии будет лучше метода золотого сечения, то есть $\frac{1{,}3888x}{x-0{,}4812} < 1$

$-1{,}23765 < x < 0$ $\quad \ln\left(\frac{\varepsilon}{S}\right) > -1{,}23765$

$\frac{\varepsilon}{S} > 0{,}290065$ $\quad \varepsilon > 0{,}290065S$

То есть при низком значении точности метод дихотомии будет работать лучше, но подобные значения погрешности на практике не допустимы.