Отчёт по лабораторной работе №2
"Решение транспортной задачи"

Выполнили студенты

Проверил:
к.ф.-м.н.
Родионова Е.А.

Санкт-Петербург
2020

I Постановка задачи

Поставим транспортную задачу.

$\exists\, m$ пунктов хранения, в которых сосредоточен однотипный груз

$\exists\, n$ пунктов назначения

$\exists\, a_i$ – запас груза в i-ом пункте хранения, $i=\overline{1,m}$

$\exists\, b_j$ – потребность в грузе в j-ом пункте назначения, $j=\overline{1,n}$

$\exists\, c_{ij}$ – тариф перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

- Необходимо определить оптимальный план перевозок, способный удовлетворить потребность в грузе в каждом пункте назначения и минимизирующий стоимость перевозок всего груза.
- Формулируем задачу: $\exists\, x_{ij}$ – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта хранения в j-й пункт назначения. $x_{ij} \geq 0$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m}) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n})$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

$\sum_{i=1}^{m} a_i$ – общее наличие груза у поставщиков.

$\sum_{j=1}^{n} b_j$ – общая потребность в грузе в пунктах назначения

Транспортная задача называется закрытой, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, а открытой, если данное условие не выполнено.

Нужно решить транспортную задачу, выбрав начальное приближение методом северо-западного угла, а основным методом выбрать методом потенциалов.

II Исследование применимости метода

Перед решением задачи, необходимо убедится, что она разрешима.

<u>Теорема</u>: Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть чтобы она была закрытой.

Любую транспортную задачу можно свести к закрытой:

• Если $\sum^{m} a_i > \sum^{n} b_j$, то вводится $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum^{m} a_i - \sum^{n} b_j$ и соответствующ. тарифами равными нулю: $c_{i\,n+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$

• Если $\sum^{m} a_i < \sum^{n} b_j$, то вводится $(m+1)$-ый пункт отправл. с запасом $a_{m+1} = \sum^{n} b_j - \sum^{m} a_i$ и соотв. тарифами равными нулю: $c_{m+1\,j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$

Для получения начального опорного плана используется метод северо-западного угла. Он применим для любой закрытой транспортной задачи.

Основным методом выбран метод потенциалов. Он позволяет, отправляясь от некоего допустимого плана, получить оптимальное решение. Начальный опорный план всегда существует, т.к. он находится с помощью метода северо-западного угла.

Таким образом данный метод применим к любой транспортной задаче.

III Описание алгоритма

- матрица C тарифов перевозки $\|c_{ij}\|$, размера $m \times n$.
- вектор A запасов груза в пунктах хранения, размера m.
- вектор B потребностей в грузе в пунктах назначения, размера n.

Все элементы матрицы и векторов должны быть ≥ 0.

Необходимо посчитать сумму элементов A и B.

Если $S_A = S_B$, то задача уже сбалансирована.

Если $S_A > S_B$, то: 1) добавить в вектор B элемент $(S_A - S_B)$
2) добавить в матрицу C нулевой столбец

Если $S_A < S_B$, то: 1) добавить в вектор A элемент $(S_B - S_A)$
2) добавить в матрицу C нулевую строку

Метод северо-западного угла

Создаём матрицу решений размера $m \times n$, помечая все её элементы -1, как неиспользованные.

Цикл

Начинаем с левого верхнего угла матрицы решений ($i=0, j=0$).

Выбираем $min = min\{A[i], B[j]\}$.

Это значение записываем в позицию $[i][j]$ мат. решений.

Уменьшаем $B[j]$ и $A[i]$ на значение min.

Если $A[i]$ оказалось равным 0, то переходим на след. строку ($i=i+1$) и помечаем флагом flag=true, что мы совершили переход.

Если $B[j]$ оказалось равным 0, то:

1) проверяем значение флага, если flag=true, то совершается переход по диагонали и нужно соотв. эл. в матр. решений $[i][j]$ обозначить 0. flag=false
2) переходим на след. столбец ($j=j+1$)

Цикл продолжается пока не выйдем за пределы A или B.

Получаем опорный план (начальное приближение)

Шаг 1: Проверка оптимальности плана

- Создаём вектора U и V. Размерности:

U — кол-во строк матр. C

V — кол-во столбцов матр. C

- Помечаем все их элементы как невычисленные.

Т.к. одну любую переменную мы можем взять любого значения, то обозн. $U[0]=0$.

- У нас есть stack, в котором мы храним коорд. i и j вычисленных значений (пара (i, j))

$v_j - u_i = c_{ij}$

- Кладём на стек пару $(0, 0)$
- Цикл, пока stack не опустеет:

Снимаем со stack последний элем. (пару (x, y)).

Известно, что u_i и v_j уже вычислены, значит можем вычислить крест:

— вычисляем всевозможные $u[i]$, используя $V[y]$

— вычисляем всевозможные $v[j]$, используя $u[x]$

вычисляя значения, кладём их в stack

- Проверяем все разности $C[i][j]-(V[j]-U[i])=\Delta$
- Если $\Delta<0$, то оптимальность нарушена. Находим точку, где это нарушение максимальное — maxpoint. Переходим на Шаг 2.
- Если $\Delta \geq 0$ для всех i,j, то план является оптимальным. Конец алгоритма.

Шаг 2: Нахождение цикла пересчёта

Для нахождения цикла пересчёта используется метод перебора с возвратом. Его ищем для точки maxpoint. Известно, что он существует, что он единственен и имеет отрицательную стоимость передвижения товара по нему.

Шаг 3: Поворот по циклу

Проходим по всем нечётным элементам цикла и находим минимальное значение (т.к. эти элем. могут уменьшатся, но не могут стать меньше 0). Из каждого нечётного элемента вычитаем это мин. значение, а к каждому чётному прибавляем. Переходим к Шагу 1.

IV Результаты решения

Условия:

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	19	18	19	4	20	9
A_2	2	3	4	5	3	29
A_3	15	14	19	2	19	22
A_4	20	18	21	8	20	19
Потребности	18	12	28	12	9	

Полученное решение

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	0	0	7	2	0	9
A_2	18	0	11	0	0	29
A_3	0	12	0	10	0	22
A_4	0	0	10	0	9	19
	18	12	28	12	9	

$f = 799$

V Обоснование достоверности полученных результатов

Воспользуемся теоремой!

Теорема | опорный план $X=(x_{ij})$ $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

оптимальный $\Leftrightarrow \exists u_i, i=\overline{1,m}$ и $\exists v_j, j=\overline{1,n}$:

$v_j - u_i = c_{ij}$ при $x_{ij}>0$

$v_j - u_i \leq c_{ij}$ при $x_{ij}=0$

Именно это условие используется в методе.

$\exists u_1, u_2, u_3, u_4$

$\exists v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$

Для $x_{ij}>0$:

$v_1 - u_2 = 2$

$v_2 - u_3 = 14$

$v_3 - u_1 = 19$

$v_3 - u_2 = 4$

$v_3 - u_4 = 21$

$v_4 - u_1 = 4$

$v_4 - u_3 = 2$ $\quad v_5 - u_4 = 20$

$\exists u_1 = 0 \Rightarrow$

$u_1 = 0$	$v_1 = 17$
$u_2 = 15$	$v_2 = 16$
$u_3 = 2$	$v_3 = 19$
$u_4 = -2$	$v_4 = 4$
	$v_5 = 18$

Для $x_{ij} = 0$:

$v_1 - u_1 = 17 \leq c_{11} = 19$	$v_3 - u_3 = 17 \leq c_{33} = 19$
$v_1 - u_3 = 15 \leq c_{31} = 15$	$v_4 - u_2 = -11 \leq c_{24} = 5$
$v_1 - u_4 = 19 \leq c_{41} = 20$	$v_4 - u_4 = 6 \leq c_{44} = 8$
$v_2 - u_1 = 16 \leq c_{12} = 18$	$v_5 - u_1 = 18 \leq c_{15} = 20$
$v_2 - u_2 = 1 \leq c_{22} = 3$	$v_5 - u_2 = 3 \leq c_{25} = 3$
$v_2 - u_4 = 18 \leq c_{42} = 18$	$v_5 - u_3 = 16 \leq c_{35} = 19$

Условие теоремы выполнено $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ полученный план – оптимальный.

Решение транспортной задачи методом перебора

Приведём закрытую ТЗ к ЗЛП в каноническом виде: $A'x' = b'$, $f(x) = c'^T x'$.

$$b' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{m+n}$$ — вектор b' состоит из эл-тов a_i — запасов груза и b_j — потребностей грузов.

$$x' = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}_{m \cdot n}$$ — вектор x' составлен из эл-тов x_{ij} — количества единиц груза, перевозимого из i-го пункта хранения в j-й пункт назначения.

$$c' = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \\ \vdots \\ c_{m1} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}_{m \cdot n}$$ — вектор c' составлен из тарифов c_{ij} перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

$$A' = \begin{pmatrix} 1_1 \ldots 1_n \, 0_{n+1} \ldots 0_{mn} \\ \ldots \\ 0_1 \ldots 0_{mn-n} \, 1_{mn-n+1} \ldots 1_{mn} \\ 1_1 \ldots 0_n \, 1_{n+1} \ldots 0_{mn} \\ \ldots \\ 0_1 \ldots 0_{n-1} \, 1_n \, 0_{n+1} \ldots 1_{mn} \end{pmatrix}_{m+n}$$

матрица A' составлена из строк соотв. уравнениям $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i=\overline{1,m})$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j=\overline{1,n})$

Для полученных векторов получаем C_{mn}^{m+n} наборов индексов.

Для каждого набора индексов N_k строится вектор X'_k, полученный из X' переменных с индексами N_k, строится матрица $A[m+n, N_k]$; $k=1, \ldots, C_{mn}^{m+n}$.

Если $\det(A[m+n, N_k])=0$, тогда берём следующий N_{k+1}

Находим решение л.у. $A[m+n, N_k] X'_k = b'$

Если $\exists x'_k[i]<0$, переходим к N_{k+1}, иначе

Если $x'_k \geq 0$, $X'[N \setminus N_k]=0$

считаем $f(x')$, если $k=1$, то $min=f(x')$, иначе если $f(x')<min$, то $min=f(x')$.

Таким образом перебрав все возможные наборы переменных получим минимальное значение ф-ции цели (min) и оптимальный план x'.

Результаты методом перебора:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad min=f(x')=799$$