

Отчет по лабораторной работе №2 "Решение транспортной задачи"

Выполнили студенты
Короженков Д.В.
Иванкин А.С.
Лебедев К.С.

Проверил:
к.ф.-м.н.

Родионов Е.А.

Санкт-Петербург
2020

I Постановка задачи

Поставим транспортную задачу.

m пунктов хранения, в которых сосредоточен однотипный груз

n пунктов назначения

a_i — запас груза в i -ом пункте хранения, $i = \overline{1, m}$

b_j — потребность в грузе в j -ом пункте назначения, $j = \overline{1, n}$

c_{ij} — тариф перевозки единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения.

• Необходимо определить оптимальный план перевозки, способный удовлетворить потребность в грузе в каждом пункте назначения и минимизирующий стоимость перевозки всего груза.

• Формулируем задачу: x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i -го пункта хранения в j -й пункт назначения, $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$\sum_{i=1}^m a_i$ — общий запас груза у поставщиков.

$\sum_{j=1}^n b_j$ — общая потребность в грузе в пунктах назначения.

Транспортная задача называется закрытой, если

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, а открытой, если данное условие не выполнено.

Нужно решить транспортную задачу, выбрав начальный приближение методом северо-западного угла, а основным методом выбрать методом потенциалов.

II Исследование применимости метода

Перед решением задачи, необходимо убедиться, что она разрешима.

Теорема: Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то есть чтобы она была закрытой.

Любую транспортную задачу можно свести к закрытой:

• Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится $(n+1)$ -й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ и соответствующ. тарифами равными нулю:

$$c_{i, n+1} = 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

• Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится $(m+1)$ -ый пункт отправки, с запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ и соотв. тарифами равными нулю: $c_{m+1, j} = 0 \quad (j = \overline{1, n})$

Для получения начального опорного плана используется метод северо-западного угла. Он применим для любой закрытой транспортной задачи.

Основным методом выбран метод потенциалов.

Он позволяет, отправившись от некоего допустимого плана, получить оптимальное решение. Начальный опорный план всегда существует, т.к. он находится с помощью метода северо-западного угла.

Таким образом данный метод применим к любой транспортной задаче.

III Описание алгоритма

- матрица C тарифов перевозки $\|c_{ij}\|$, размера $m \times n$.
- вектор A запасов груза в пунктах хранения, размера m .
- вектор B потребностей в грузе в пунктах назначения, размера n .

Все элементы матрицы и векторы должны быть ≥ 0 .

Необходимо посчитать сумму элементов A и B .

Если $S_A = S_B$, то задача уже сбалансирована.

Если $S_A > S_B$, то: 1) добавить в вектор B элемент $(S_A - S_B)$
2) добавить в матрицу C нулевой столбец

Если $S_A < S_B$, то: 1) добавить в вектор A элемент $(S_B - S_A)$
2) добавить в матрицу C нулевую строку

Метод северо-западного угла

Создаём матрицу решений размера $m \times n$, помещая все её элементы -1 , как неиспользованные.

Цикл

Начинаем с левого верхнего угла матрицы решений ($i=0, j=0$).

Выбираем $\min = \min\{A[i], B[j]\}$.

Это значение записываем в позицию $C[i][j]$ мат. решений.

Уменьшаем $B[j]$ и $A[i]$ на значение \min .

Если $A[i]$ оказался равным 0, то переходим на след. строку ($i=i+1$) и помечаем флагом $\text{flag}=\text{true}$, что мы совершили переход.

Если $B[j]$ оказался равным 0, то:

1) проверим значение флага, если $\text{flag}=\text{true}$, то совершается переход по диагонали и нужно соотв. эл. в матр. решений $C[i][j]$ обозначить 0.
 $\text{flag}=\text{false}$

2) переходим на след. столбец ($j=j+1$)

Цикл продолжается пока не выйдем за пределы A или B .

Получаем опорный план (начальное приближение)

Шаг 1: Проверка оптимальности плана

• Создаём векторы U и V . Размеры:

U — кол-во строк матр. C

V — кол-во столбцов матр. C

• Помечаем все их элементы как невычисленные.

Т.к. одну любую переменную мы можем взять любого значения, то обозн. $U[0]=0$.

• У нас есть stack , в котором мы храним координаты i и j вычисленных значений (пара (i, j))

$$V_j - U_i = C_{ij}$$

• Кладем на стек пару $(0, 0)$

• Цикл, пока stack не опустеет:

Снимаем со stack последний эл. (пару (x, y)).

Известно, что U_i и V_j уже вычислены, значит можем вычислить клетку:

— вычисляем всевозможные $U[i]$, используя $V[y]$

— вычисляем всевозможные $V[j]$, используя $U[x]$

вычисляя значения, кладем их в stack

- Проверим все разности $c[i][j] - (v[j] - u[i]) = \Delta$
- Если $\Delta < 0$, то оптимальность нарушена.
Находим точку, где это нарушение максимальное — maxpoint. Переходим на Шаг 2.
- Если $\Delta \geq 0$ для всех i, j , то план является оптимальным. Конец алгоритма.

Шаг 2: Нахождение цикла пересчёта

Для нахождения цикла пересчёта используется метод перебора с возвратом. Его ищем для точки maxpoint. Известно, что он существует, что он единственный и имеет отрицательную стоимость передвижения товара по нему.

Шаг 3: Поворот по циклу

Проходим по всем неотрицательным элементам цикла и находим минимальное значение (т.к. эти элем. могут уменьшаться, но не могут стать меньше 0). Из каждого неотрицательного элемента вычитаем это мин. значение, а к каждому отрицательному прибавляем. Переходим к Шагу 1.

IV Результаты решения

Условия:

| Пункты отправления | Пункты назначения | | | | | Запасы |
|-----------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|
| | B ₁ | B ₂ | B ₃ | B ₄ | B ₅ | |
| A ₁ | 19 | 18 | 19 | 4 | 20 | 9 |
| A ₂ | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 29 |
| A ₃ | 15 | 14 | 19 | 2 | 19 | 22 |
| A ₄ | 20 | 18 | 21 | 8 | 20 | 19 |
| Потребности | 18 | 12 | 28 | 12 | 9 | |

Полученное решение

| | B ₁ | B ₂ | B ₃ | B ₄ | B ₅ | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| A ₁ | 0 | 0 | 7 | 2 | 0 | 9 |
| A ₂ | 18 | 0 | 11 | 0 | 0 | 29 |
| A ₃ | 0 | 12 | 0 | 10 | 0 | 22 |
| A ₄ | 0 | 0 | 10 | 0 | 9 | 19 |
| | 18 | 12 | 28 | 12 | 9 | |

$$f = 799$$

V Обоснование достоверности полученных результатов

Воспользуемся теоремой!

Теорема 1 оптимальный план $X = (x_{ij})$ $i = \overline{1, m}$
 $j = \overline{1, n}$

оптимальный $\Leftrightarrow \exists u_i, i = \overline{1, m}$ и $\exists v_j, j = \overline{1, n}$:

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

Именно это условие используется в методе.

$$\exists u_1, u_2, u_3, u_4$$

$$\exists v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$$

Для $x_{ij} > 0$:

$$v_1 - u_2 = 2$$

$$v_2 - u_3 = 14$$

$$v_3 - u_1 = 19$$

$$v_3 - u_2 = 4$$

$$v_3 - u_4 = 21$$

$$v_4 - u_1 = 4$$

$$v_4 - u_3 = 2$$

$$v_5 - u_4 = 20$$

$$\exists u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad v_1 = 17$$

$$u_2 = 15 \quad v_2 = 16$$

$$u_3 = 2 \quad v_3 = 19$$

$$u_4 = -2 \quad v_4 = 4$$

$$v_5 = 18$$

Для $x_{ij} = 0$:

$$v_1 - u_1 = 17 \leq c_{11} = 19$$

$$v_1 - u_3 = 15 \leq c_{31} = 15$$

$$v_1 - u_4 = 19 \leq c_{41} = 20$$

$$v_2 - u_1 = 16 \leq c_{12} = 18$$

$$v_2 - u_2 = 1 \leq c_{22} = 3$$

$$v_2 - u_4 = 18 \leq c_{42} = 18$$

$$v_3 - u_3 = 17 \leq c_{33} = 19$$

$$v_4 - u_2 = -11 \leq c_{24} = 5$$

$$v_4 - u_4 = 6 \leq c_{44} = 8$$

$$v_5 - u_1 = 18 \leq c_{15} = 20$$

$$v_5 - u_2 = 3 \leq c_{25} = 3$$

$$v_5 - u_3 = 16 \leq c_{35} = 19$$

Условие теоремы выполнено \Rightarrow

\Rightarrow полученный план — оптимальный.

Решение транспортной задачи методом перебора

Приведём задачу ТЗ к ЗЛП в каноническом
виде! $A'x' = b'$, $f(x) = c'^T x'$.

$$b' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{m+n}$$

— вектор b' состоит из эл-тов a_i —
запасов груза и b_j — потребностей
грузов.

$$x' = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}_{m \cdot n}$$

— вектор x' составлен из эл-тов x'_{ij} —
количество единиц груза, перевозимого
из i -го пункта хранения в j -й
пункт назначения.

$$c' = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \\ \vdots \\ c_{m1} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}_{m \cdot n}$$

— вектор c' составлен из тарифов
 c'_{ij} перевозки единицы груза
из i -го пункта отправления в
 j -й пункт назначения.

матрица A' составлена из строк соотв.
уравнениям $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (i = \overline{1, m})$,
 $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (j = \overline{1, n})$

Для каждого набора индексов N_k строится вектор X'_k , полученный из X' заменой с индексами N_k , строится матрица $A[m+n, N_k]$:

$$k=1, \dots, C_{m+n}^{m+n}$$

Находим решение л.у. $A[m+n, N_k]x'_k = b'$

Es sei $x'_k \geq 0, [x' [N \setminus N_k]] = 0$

Таким образом перебрал все возможные
наборы переменных получил минимальное
значение ф-ции цели (\min) и оптималь-
ный план X' .

$\frac{X}{11}$

$$\min = f(x') = 799$$