Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

«КИНЕМАТИКА»

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Выполнила:

Студентка группы 924401

Подкопаева А.А.

Минск 2022

**Задача №1**

* 1. Условие

Точка движется по закону Найти

1.2 Решение

Вектор скорости определяется как первая производная от радиуса-вектора по времени:

Вектор ускорения материальной точки, показывающий быстроту изменения направление и модуля вектора скорости, равен:

Проекции вектора ускорения на координатные оси равны:

Модули векторов скорости и ускорения равны:

.

Вектор скорости равен:

Вектор ускорения равен:

Модуль вектора скорости равен:

Модуль вектора ускорения равен:

.

Косинус угла равен:

1.3 Ответ

**Задача №2**

* 1. Условие

Частица движется по прямой со скоростью Найти путь, пройденный телом до остановки, и минимальную скорость тела .

* 1. Решение

Уравнение, данное в условии, является уравнением прямолинейного равнопеременного движения. Время до остановки тела:

Путь, пройденный телом до остановки:

Скорость движения тела равна:

Тело имеет минимальную скорость, когда Минимальная скорость тела:

2.3 Ответ:

**Задача №3**

3.1 Условие

Материальная точка движется по прямой по закону Найти скорость и ускорение точки как функцию времени.

3.2 Решение

Тело движется прямолинейно со скоростью:

Вектор ускорения точки равен:

3.3 Ответ:

**Задача №4**

4.1 Условие

Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону Найти вектор скорости (), модуль вектора скорости (V) , вектор ускорения ( ), модуль вектора ускорения (a) .

4.2 Решение

Вектор скорости определяется как первая производная от радиуса-вектора по времени:

Вектор ускорения материальной точки, показывающий быстроту изменения направление и модуля вектора скорости, равен:

Модули векторов скорости и ускорения равны:

.

Вектор скорости равен:

Вектор ускорения равен:

Модуль вектора скорости равен:

Модуль вектора ускорения равен:

.

4.3 Ответ:

.

**Задача №5**

5.1 Условие

Материальная точка движется по окружности радиусом R так, что В какой момент времени t тангенциальное и нормальное ускорения будут равны?

5.2 Решение

Cкорость является функцией пути и для нахождения тангенциального ускорения необходимо использовать кинематические уравнения:

Скорость есть функция пути по времени:

Тогда тангенциальное ускорение равно:

Нормальное ускорение равно:

Тангенциальное и нормальное ускорения равны:

Полученное уравнение является квадратным уравнением относительно t, поэтому его корни можно найти через дискриминант:

Второй корень данного уравнения отрицательный, что не удовлетворяет условию.

5.3 Ответ:

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

«ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА»

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Выполнила:

Студентка группы 924401

Подкопаева А.А.

Минск 2022

**Задача №1**

* 1. Условие

Тела массами и связаны нитью и двигаются под действием постоянной силы , направленной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между обоими телами и поверхностью одинаков и равен µ. Найти ускорение тел и силу натяжения нити между телами.

1.2 Решение

На рисунке изображены силы, которые действуют на тела:

По второму закону Ньютона:

Второй закон Ньютона для тел с массами и

Сила трения (сухого трения) возникает между поверхностями твердых тел как в случае попытки вызвать скольжение одного тела по другому, так и при скольжении поверхности одного тела относительно поверхности другого тела. Формула силы трения:

где µ – коэффициент трения, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей, − сила реакции опоры.

Второй закон Ньютона для тел в проекции на ось Ox и Oy имеет вид:

Тело с массой

Тело с массой

Отсюда можно найти силу натяжения и подставить в основное уравнение динамики:

Тогда ускорение равно:

Отсюда сила натяжения будет равна:

1.3 Ответ

**Задача №2**

* 1. Условие

Шарик подвесили на нити длиной l и раскрутили в горизонтальной плоскости так, что он поднялся на высоту h. Найти скорость вращения шарика.

2.2 Решение

Изобразим шарик и действующие на него силы на рисунке:

Согласно второму закону Ньютона:

Отсюда можно выразить ускорение:

Радиус вращения равен:

Тогда угловая скорость шарика равна:

2.3 Ответ

**Задача №3**

* 1. Условие

Частица массой летит со скоростью вдоль оси ОХ. Частица массой летит со скоростью под углом к оси ОХ. Частицы совершают совершенно неупругий удар. Найти импульс системы после удара и выделившуюся при этом теплоту.

3.2 Решение

На рисунке изображены положения частиц до и после удара:

Согласно закону сохранения импульса системы:

Импульс до удара:

Импульс после удара:

Далее через MN и ОХ проведём плоскость и введём новую систему координат:

Ось Z перпендикулярна плоскости XOY, поэтому по закону сохранения импульса: p12 = p22 = 0. Следовательно, можно считать, что движение частиц после удара происходит в плоскости XOY.

Координатные уравнения в выбранной системе координат имеют вид:

,

Исходя из этого:

,

Искомый вектор импульса системы после удара:

После удара часть кинетической энергии переходит в тепло Q, по закону сохранения энергии:

где кинетическая энергия системы до удара:

,

кинетическая энергия системы после удара равна:

Из связи кинетической энергии и импульса:

Теплота, которая выделилась во время удара, равна:

Q =

3.3 Ответ

**Задача №4**

* 1. Условие

В вагонетку массой , движущуюся под действием постоянной силы , насыпают песок со скоростью . Найти скорость и ускорение вагонетки как функцию времени.

4.2 Решение

Со временем масса вагонетки изменяется по закону:

Скорость вагонетки есть функция от времени. Закон изменения импульса в интегральной форме имеет вид:

где сумма внешних сил. Проекция данного уравнения на ось ОХ имеет вид:

Отсюда имеем:

Тогда скорость вагонетки равна:

Ускорение есть производная скорости, откуда:

4.3 Ответ

**Задача №5**

* 1. Условие

В тело массой , висящее на невесомой нерастяжимой нити длиной l , попадает пуля массой и застревает в нем. Найти ускорение тела в точке максимального подъема.

5.2 Решение

Состояния системы изображены на рисунке:

При ударе пули о шар действует закон сохранения импульса, который выглядит следующим образом:

Принимая за ″нулевой″ уровень потенциальной энергии положение покоящегося шара, запишем закон сохранения механической энергии после удара:

Из рисунка легко найти угол α, а именно:

5.3 Ответ

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

«ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ»

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Выполнила:

Студентка группы 924401

Подкопаева А.А.

Минск 2022

**Задача №1**

* 1. Условие

Веревку длиной и массой m , лежащую на гладкой горизонтальной поверхности, затягивают на наклонную плоскость, имеющую коэффициент трения μ и расположенную под углом α к горизонту. Найти работу, затраченную на передвижение веревки, если первоначально один конец веревки лежал у основания наклонной плоскости.

1.2 Решение

Силы, действующие на тело, изображены на рисунке:

Предположим, что коэффициент трения верёвки по горизонтали равен нулю, тогда:

1.3 Ответ

**Задача №2**

* 1. Условие

Однородный кабель длиной l перекинут через блок и находится в равновесии. Легким толчком кабель выводится из положения равновесия. Найти скорость кабеля в момент соскальзывания с блока. Трением пренебречь.

2.2 Решение

Изобразим положение кабеля на рисунке:

Будем считать, что в момент соскальзывания верёвки с блока её потенциальная энергия равна 0, тогда начальная потенциальная энергия будет равна:

В момент начала соскальзывания верёвки её кинетическая энергия равна нулю, так как скорость движения равна нулю. В момент скольжения кинетическая энергия верёвки равна:

2.3 Ответ

**Задача №3**

* 1. Условие

Вода выбрасывается из гладкого шланга сечением S под углом α к горизонту на высоту *h*, выше конца шланга. Резервуар, в который погружен шланг, на ниже выходного отверстия. Если КПД установки равен η, то какова мощность мотора?

3.2 Решение

Изобразим шланг и покажем заданные значения на рисунке:

Мощность равна:

Согласно закону сохранения энергии:

Длина шланга равна:

Выразим время работы шланга:

Отсюда:

Найдём время работы шланга:

Тогда мощность мотора равна:

3.3 Ответ

**Задача №4**

* 1. Условие

Небольшое тело массой покоится на полусфере радиусом R . В тело стреляют пулей массой , летящей со скоростью . Пуля застревает в теле и оно начинает соскальзывать с полусферы. На какой высоте от стола тело оторвется от полусферы?

4.2 Решение

Изобразим тело на рисунке:

Запишем закон сохранения импульса для системы (тело и пуля):

Исходя из закона сохранения энергии имеем:

Откуда следует, что тело оторвалось от сферы в верхней точке. Второй вариант решения:

4.3 Ответ

**Задача №5**

* 1. Условие

На чашку пружинных весов массой M падает с высоты h небольшое тело массой m и прилипает к весам. Найти максимальное сжатие пружины весов, если коэффициент упругости пружины k.

5.2 Решение

Изобразим падающее тело и весы на рисунке:

Высота, с которой падает тело, и скорость равны:

По закону сохранения импульса:

Кинетическая энергия тел в момент удара равна энергии пружины:

Пусть сжатие пружины равно х, тогда:

5.3 Ответ

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

«МОМЕНТ ИНЕРЦИИ»

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Выполнила:

Студентка группы 924401

Подкопаева А.А.

Минск 2022

**Задача №1**

1.1 Условие

Найти момент инерции конуса массой m, радиусом основания R относительно оси, совпадающей с осью симметрии.

1.2 Решение

Сделаем рисунок согласно условию задачи:

Ось Оу проходит через центр симметрии конуса. Момент инерции I есть мера инертности тела при вращательном движении. Он зависит от массы тела, её распределении по объёму и оси, относительно которой вычисляется.

Чтобы определить момент инерции твёрдого тела, его необходимо разбить на систему материальных точек. Момент инерции твёрдого тела равен:

где m – элементарная масса, R – расстояние элементарной массы твёрдого тела до оси.

Проведём разбиение конуса на тонкие диски толщиной dx, перпендикулярные оси конуса. Рассмотрим диск элемента радиуса r и толщину dx на расстоянии x от точки 0. Тогда радиус и объём диска равны:

Отсюда масса диска равна:

Момент инерции этого элемента вокруг оси Оу:

Таким образом, искомый момент инерции:

Следовательно:

1.3 Ответ:

**Задача №2**

2.1 Условие

Найти момент инерции прямоугольного параллелепипеда массой m и размерами l, H, h относительно оси, параллельной H и проходящей через его центр.

2.2 Решение

Сделаем рисунок прямоугольного параллелепипеда с осью, проходящей через его центр:

где l – длина параллелепипеда, H – ширина, h – высота, О – центр, х – ось, проходящая через центр параллелепипеда и параллельная его ширине H.

Три оси параллелепипеда, проходящие через центр масс и параллельные его рёбрам, называются главными осями инерции параллелепипеда. Для главной оси инерции Ох принято считать верным равенство:

где Ix – момент инерции относительно оси Ох, у – длина ребра, параллельного оси Оу, z – длина ребра, параллельного оси Oz, а dm – элементарная масса тела.

Элементарная масса равна:

Элементарный объём твёрдого тела можно найти по формуле:

Объёмная плотность параллелепипеда находится по формуле:

Тогда момент инерции равен:

+

2.3 Ответ:

**Задача №3**

3.1 Условие

Найти момент инерции шара массой *m* и радиусом *R* относительно оси, проходящей через центр шара, и имеющего боковую сферическую полость радиусом .

3.2 Решение

Сделаем рисунок к задаче:

Согласно условию, форма полости – сфера с радиусом . Поэтому её центр располагается на расстоянии от центра О.

Так как момент инерции – аддитивная величина, то искомый момент инерции тела можно представить в виде суммы:

где - момент инерции сплошного шара радиусом R,

- момент инерции сферы с радиусом со знаком минус.

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр:

Аналогично находим момент инерции для шара и плотность – относительно оси *BB’*:

Для нахождения момента инерции шара относительно оси *AA’* используем теорему Штейнера:

где Тогда:

Отсюда:

Учтём, что тогда:

3.3 Ответ:

**Задача №4**

4.1 Условие

Найти момент инерции тонкой пластины массой m и имеющей форму

прямоугольного треугольника с катетами a и b относительно оси инерции,

совпадающей с катетом a.

4.2 Решение

Проведём ось Ох вдоль катета а, ось Оу вдоль катета b:

Момент инерции вычисляется по формуле:

Далее проведём разбиение пластины на бесконечно малые элементарные массы:

Расстояние до катета а будет равно: r = y.

Проведя интегрирование по двум осям найдём момент инерции тонкого стержня:

4.3 Ответ:

**Задача №5**

5.1 Условие

Найти момент инерции полусферы массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с диаметром основания полусферы.

5.2 Решение

Масса полусферы:

Разобьём полусферу на множество пластинок, перпендикулярных оси Оу толщиной

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

«МОМЕНТ СИЛЫ, МОМЕНТ ИМПУЛЬСА, ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА»

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА»

Выполнила:

Студентка группы 924401

Подкопаева А.А.

Минск 2022

**Задача №1**

1.1 Условие

Шарик попадает в водоворот на расстоянии R1 от центра воронки. Во сколько раз увеличится его угловая скорость на расстоянии R2 от центра?

1.2 Решение

Сделаем рисунок согласно условию задачи:

Тело движется от окружности радиусом R1 к точке на окружности с радиусом R2.

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью . Любая точка этого тела движется по окружности радиусом r. Модуль момента импульса этой точки относительно центра этой окружности равен:

Для замкнутой системы тел момент внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему. Закон сохранения импульса гласит, что момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Момент импульса характеризует количество вращательного движения. Величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью происходит вращение.

Момент импульса L материальной точки относительно некоторого начала отсчёта определяется векторным произведением её радиус-вектора и импульса:

,

где – радиус-вектор частицы относительно выбранного неподвижного в данной системе отсчёта, – импульс частицы.

Для систем, совершающих вращение как целое (как абсолютно твёрдое тело) вокруг одной из осей симметрии, справедливо соотношение:

где I – момент инерции относительно оси вращения, – вектор угловой скорости.

Момент инерции твёрдого тела относительно какой-либо оси зависит от массы, формы и размеров тела, а также и от положения тела по отношению к этой оси. Согласно теореме Штейнера, момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния r между осями:

В итоге можно получить соотношение:

1.3 Ответ:

**Задача №2**

2.1 Условие

Планета вращается вокруг звезды по эллиптической орбите с полуосями a и b. Найти отношение минимальной и максимальной угловых скоростей планеты.

2.2 Решение

Изобразим схематично на рисунке:

Для решения этой задачи необходимо применить формулу момента импульса точки относительно центра окружности:

где – угловая скорость, r – радиус, m – масса тела.

Система находится в равновесии, следовательно, выполняется закон сохранения момента импульса, который записывается в виде:

Тогда:

Отношение угловых скоростей:

2.3 Ответ:

**Задача №3**

3.1 Условие

Диск массой m и радиусом R раскрутили до угловой скорости ω и положили на стол. Через время t он остановился. Найти коэффициент трения стола.

3.2 Решение

Рассмотрим случай, в котором диск положили на ребро, его высота в таком положении h = 2R, сделаем рисунок:

В этом случае полагая, что диск движется без скольжения, он остановится под действием силы трения качения. Тогда имеем:

Предположим, что сила трения качения равна:

*Тогда:*

*, где I =*

3.3 Ответ:

**Задача №4**

4.1 Условие

Шар радиусом R начинает скатываться с наклонной плоскости длиной l и расположенной под углом α к горизонту. Найти конечную угловую скорость шара.

4.2 Решение

Сделаем рисунок к задаче:

Полная кинетическая энергия равна:

Найдём кинетическую энергию шара:

Найдём потенциальную энергию шара:

Используя закон сохранения энергии найдём конечную угловую скорость шара:

4.3 Ответ:

**Задача №5**

5.1 Условие

Человек массой m находится на краю платформы массой M и радиусом R, вращающейся с угловой скоростью ω0. Найти угловую скорость платформы с человеком, если человек переместился в центр платформы.

5.2 Решение

Сделаем рисунок к данной задаче:

Закон сохранения момента импульса в проекции на ось Оу имеет вид:

где I1 – момент инерции платформы с человеком на краю,

I2 - момент инерции платформы с человеком в центре платформы

Подставляя (2) в (1) получим:

Получим угловую скорость платформы с человеком в центре неё:

5.3 Ответ: