

Raport

Dominika Filimonow, Monika Bednarek, Dominika Kawczyńska

6 grudnia 2022

1 Wstęp

1.1 Opis zadania

Zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań różniczkowych opisującego model rozwoju epidemii typu SIR. Trzeba było je wykonać za pomocą programu Microsoft Excel. Celem znalezienia rozwiązań należało zaimplementować dwie wybrane metody rozwiązywania określonego zagadnienia początkowego.

1.2 Opis modelu SIR

Model SIR jest prostym modelem epidemiologicznym dzielącym populację na trzy kategorie:

- S - podatni (Susceptible),
- I - zarażeni (Infected),
- R - usunięci (Removed)

opisane równaniami:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu \cdot N - \beta \cdot \frac{SI}{N} - \nu \cdot S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \cdot \frac{SI}{N} - \gamma \cdot I - \nu \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I - \nu \cdot R \end{cases},$$

gdzie dodatkowo używamy parametrów:

- μ - intensywność narodzin,
- β - szybkość rozchodzenia się infekcji,
- ν - śmiertelność,
- γ - szybkość zdrowienia.

Liczebność populacji wynosi $N = S + I + R$. Dodatkowo w dalszych rozwiązaniach zakładamy, że $\mu = \nu$, z czego wynika, że N jest stałe. Będziemy również badać wpływ na wyniki bazowego współczynnika reprodukcji, danego wzorem

$$R_0 = \frac{\beta}{\nu + \gamma}$$

2 Rozwiązanie

2.1 Etap I.

Równania różniczkowe zwyczajne są początkiem wielu modeli zjawisk świata wokół nas. W pierwszym etapie zaimplementowaliśmy metody Rungego-Kutty trzeciego rzędu oraz Ralstona rozwiązywania równań różniczkowych pierwszego rzędu.

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(a) &= \bar{y} \text{ lub } y(b) = \bar{y}\end{aligned}$$

Oznaczenia

$$\begin{aligned}h &= \frac{(b-a)}{M}, \quad x_n = a + n \cdot h, \quad n = 0, \dots, M, \\ y_n &= y(x_n),\end{aligned}$$

Chcemy wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia początkowego. Mamy

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

2.2 Metoda Rungego-Kutty trzeciego rzędu

W tej metodzie wybieramy z danego przedziału trzy punkty: jego początek, punkt dokładnie w $\frac{1}{2}$ jego długości oraz koniec przedziału. Poprzez k_1 oznaczmy wartość rozważanej funkcji w punkcie początkowym. Następnie analogicznie k_2 wartość w punkcie środka przedziału oraz k_3 - w ostatnim wybranym punkcie. Do y_n dodajemy średnią z k_1 , k_2 oraz k_3 przyjmując wagę k_2 jako 4. Ostatecznie otrzymujemy:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

gdzie

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1), \\ k_3 &= f(x_n + h, y_n - h \cdot k_1 + 2 \cdot h \cdot k_2)\end{aligned}$$

2.3 Metoda Ralstona

Wybieramy w zadanym przedziale dwa punkty, jego początek i punkt w dokładnie $\frac{3}{4}$ jego długości. Przez k_1 oznaczmy wartość rozważanej funkcji w pierwszym z punktów, zaś przez k_2 oznaczamy wartość w drugim z nich. Do y_n dodajemy $\frac{1}{3}k_1$ oraz $\frac{2}{3}k_2$ przemnożone przez h . Ostatecznie otrzymujemy:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot k_1 + \frac{2}{3} \cdot k_2 \right)$$

gdzie

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{3}{4} \cdot h, y_n + \frac{3}{4} \cdot h \cdot k_1)$$

3 Etap II.

Po napisaniu metod umożliwiających nam rozwiązanie wcześniej zadanego układu równań, utworzyliśmy dwie funkcje **SOLVE_SIR_RUNGE_KUTTA** oraz **SOLVE_SIR_RALSTON**.

Przyjmują one następujące argumenty:

- a, b - odpowiednio początek i koniec przedziału, po którym całkujemy,
- M - liczba części, na który dzielimy nasz przedział,
- $S(a), R(a), I(a)$ - zagadnienia początkowe dla każdego z równań
- μ, ν, β, γ - wartości współczynników, opisanych we wstępie.

Funkcje te wyliczają rozwiązania $S(t), I(t), R(t)$ w każdym kolejnym punkcie t . Zwracają tabelę o M wierszach i 4 kolumnach.

4 Etap III.

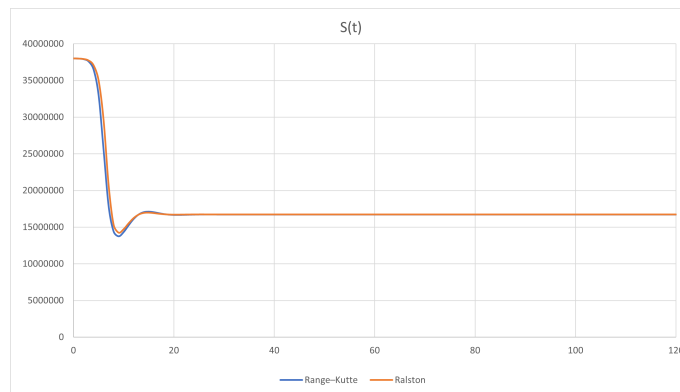
W tym etapie skupimy się na graficznym pokazaniu efektów naszej dotychczasowej pracy. Sprawdzimy czy obie metody są równoważne. Jeżeli nie, to w jakim stopniu od siebie odbiegają.

4.1 Przykład 1.

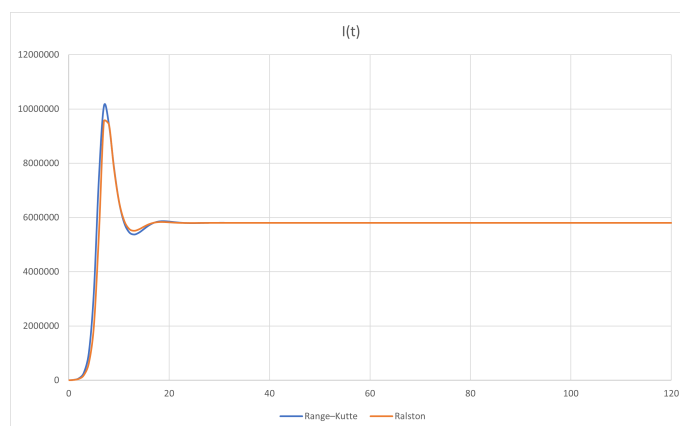
Poniżej przedstawiamy wykresy stworzone przy użyciu obu wcześniej wspomnianych funkcji z parametrami:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| • $a = 0;$ | • $I(a) = 5000;$ |
| • $b = 120;$ | • $\mu = 0,3;$ |
| • $M = 120;$ | • $\nu = 0.3;$ |
| • $S(a) = 38000000;$ | • $\beta = 2.5$ |
| • $R(a) = 0;$ | • $\gamma = 0.8.$ |

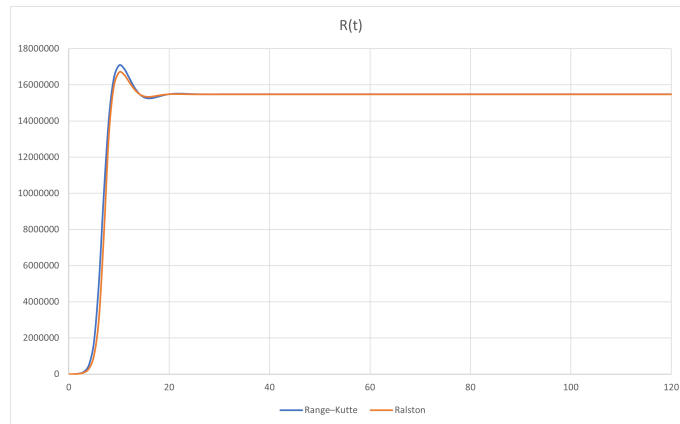
Zauważmy, że dla tych danych $R_0 \approx 2,27$, więc $R_0 > 1$ oraz h dane wzorem $h = \frac{(b-a)}{M}$ jest równe 1.



Rysunek 1: Porównanie metod rozwiązywanie układu równań dla zależności $S(t)$.



Rysunek 2: Porównanie metod rozwiązywanie układu równań dla zależności $I(t)$.



Rysunek 3: Porównanie metod rozwiązywania układu równań dla zależności $R(t)$.

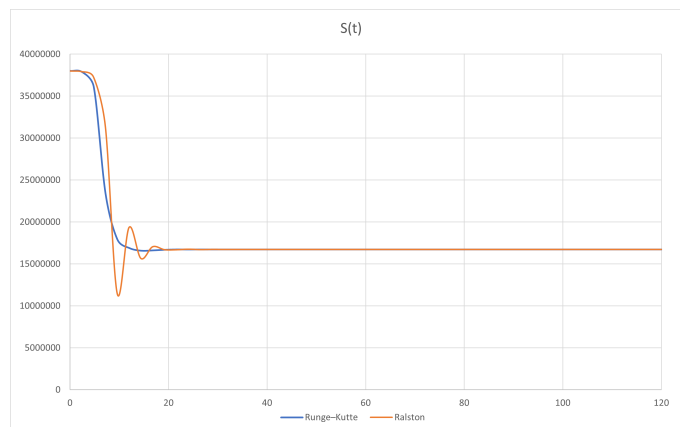
Jak możemy zaobserwować metody te nie nachodzą na siebie w każdym punkcie. W miejscach wystąpienia ekstremów różnią się, jednakże są to odchylenia w dopuszczalnych granicach.

4.2 Przykład 2.

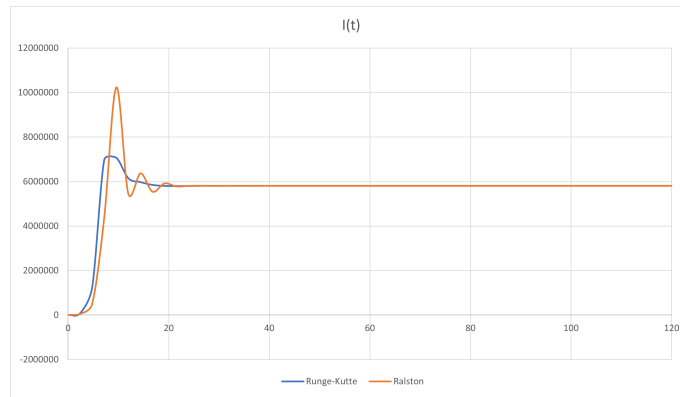
Jak sytuacja zmienia się przy większej wartości h ? Będziemy operować na zmodyfikowanych parametrach z powyższego porównania. Zmieni się:

- $M = 50$.

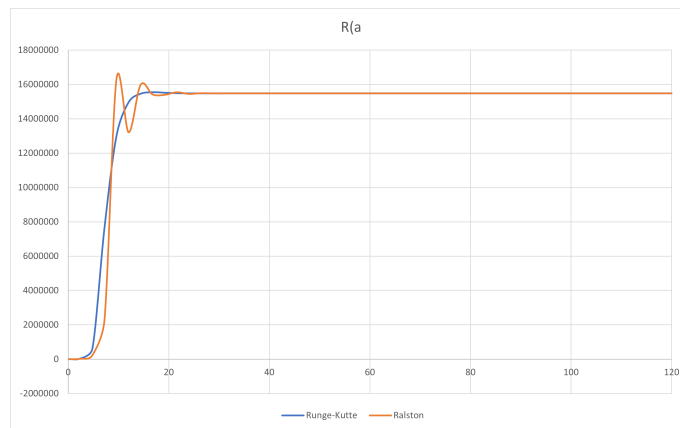
Wtedy R_0 nie zmienia się, zaś $h = 2, 4$.



Rysunek 4: Porównanie metod rozwiązywania układu równań dla zależności $S(t)$.



Rysunek 5: Porównanie metod rozwiązywanie układu równań dla zależności $I(t)$.



Rysunek 6: Porównanie metod rozwiązywanie układu równań dla zależności $R(t)$.

W tej sytuacji widać już duże różnice w rozwiązaniach stworzonych przez obie metody. Na przedziale możemy zauważyć wysokie skoki metody Ralstona, tymczasem rozwiązanie Rungego-Kutty jest bardziej przewidywalne. Metoda Rungego-Kutty daje bardziej dokładne wyniki, więc jest skuteczniejsza. Możemy z tego wyciągnąć wnioski, że dla dużych h wyniki będą się od siebie coraz bardziej różnić. Zatem równoważność metod zachodzi dla odpowiednio małego h .

5 Etap IV.

5.1 Wykresy fazowe

Przedstawiając na wykresach krzywe fazowe (S, I) korzystaliśmy z funkcji **SOLVE_SIR_RALSTON_R** oraz **SOLVE_SIR_RUNGE_KUTTA_R**, która przyjmuje następujące argumenty:

- a, b - odpowiednio początek i koniec przedziału, po którym całkujemy,
- M - liczba części, na który dzielimy nasz przedział,
- $S(a), R(a), I(a)$ - zagadnienia początkowe dla każdego z równań
- μ, ν, β, γ - wartości współczynników, opisanych we wstępie.

Przy czym dodatkowo ustalamy tutaj N , które jak wcześniej wspomnieliśmy jest stałe. Zaś zagadnienia początkowe zmieniają się:

- $S(a) = 0, I(a)$ zmienia się od 1000 do N oraz $R(a) = N - I(a)$,
- $R(a) = 0, S(a)$ zmienia się od 5000 do N oraz $I(a) = N - S(a)$,
- $I(a) = 0, S(a)$ zmienia się oraz $R(a) = N - S(a)$.

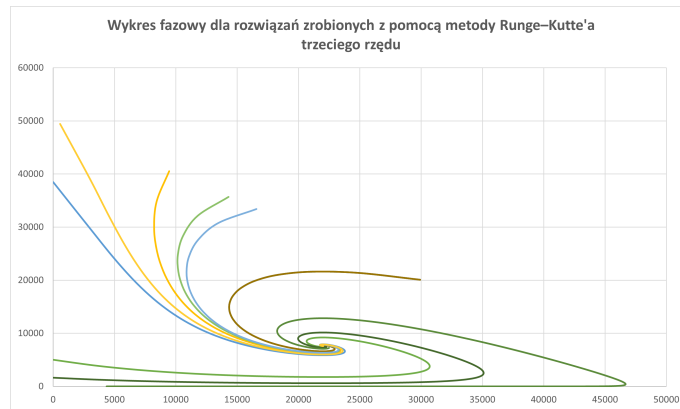
Funkcje te wyliczają rozwiązania $S(t), I(t)$ korzystając z wcześniej napisanych metod. Zwracają tabelę o M wierszach i 2 kolumnach.

5.1.1 Przykład 1.

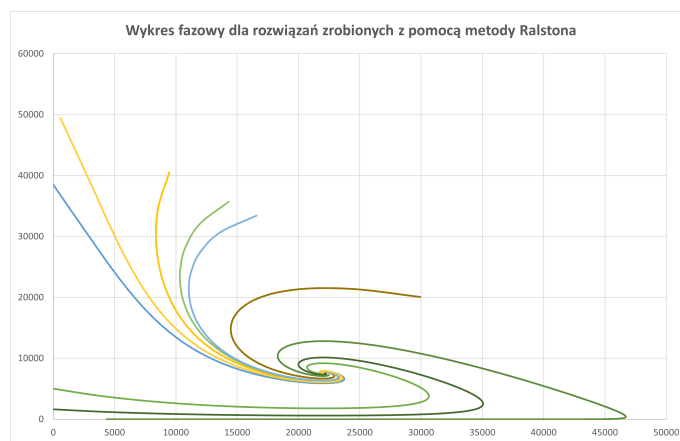
Użyliśmy parametrów:

- | | |
|------------------|------------------|
| • $a = 0$; | • $\nu = 0.3$; |
| • $b = 90$; | • $\beta = 2.5$ |
| • $M = 390$; | • $\gamma = 0.8$ |
| • $\mu = 0, 3$; | • $N = 50000$. |

Widzimy, że w tym przypadku $R_0 \approx 2,27 > 1$.



Wykres w kształcie spirali zbiega do punktu (22000; 7636, 36). Możemy zauważyć duże zagęszczenie tych funkcji wokół wspomnianego punktu.



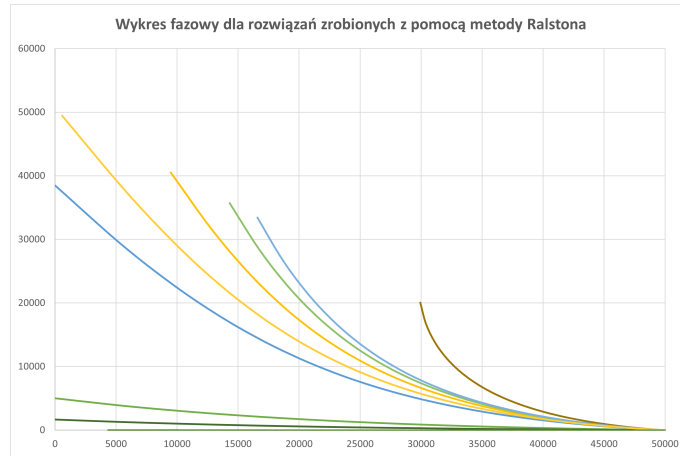
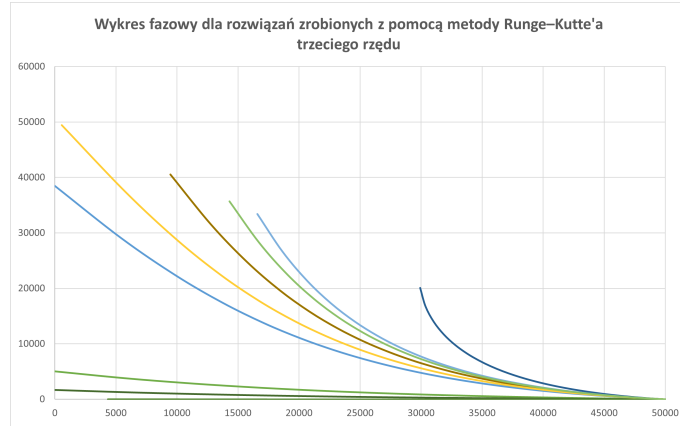
Dalej mamy do czynienia z spiralami. Krzywe i w tym przypadku także zbiegają do punktu (22000; 7636, 36). Możemy zauważyć, że są one niewiele bardziej rozproszone niż w metodzie Rungego-Kutty.

5.1.2 Przykład 2.

Zmieńmy parametry życiowe na

- $\mu = 0,53$;
- $\nu = 0.53$;
- $\beta = 0.78$
- $\gamma = 0.73$.

Wtedy $R_0 \approx 0,62 < 1$



Powyższe wykresy znacznie odbiegają od poprzednich. Widzimy tutaj również różnicę między metodami rozwiązywania naszego układu równań. Krzywe są tutaj dużo łagodniejsze, oraz $I(t)$ zbiega do 0.

5.2 Bazowy współczynnik reprodukcji

Skupimy się teraz jedynie na wpływie bazowego współczynnika reprodukcji na rozwój pandemii. Korzystając z programu Mathematica wyznaczyliśmy granice naszego układu przy $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} S & \rightarrow \frac{N \cdot (\gamma + \nu)}{\beta} \\ I & \rightarrow \frac{N(-\gamma \cdot \nu - \nu^2 + \beta \cdot \mu)}{\beta \cdot (\gamma + \nu)} \\ R & \rightarrow -\frac{N \cdot \gamma \cdot (\gamma \cdot \nu + \nu^2 - \beta \cdot \mu)}{\beta \cdot (\gamma \cdot \nu + \nu^2)} \end{cases},$$

dla $R_0 > 1$, lub

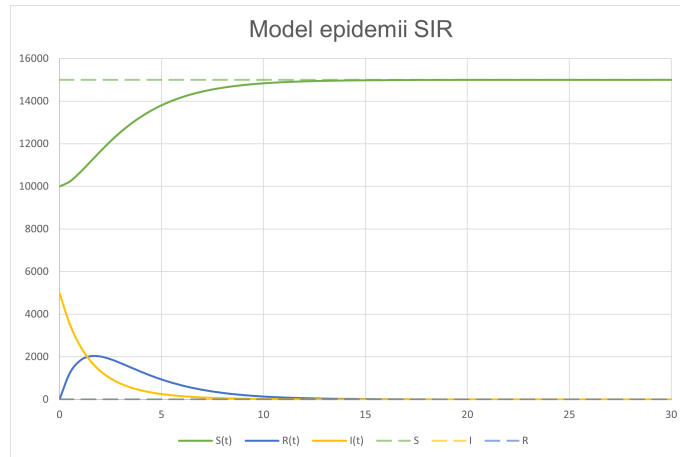
$$\begin{cases} S \rightarrow \frac{N \cdot \mu}{\nu} \\ I \rightarrow 0 \\ R \rightarrow 0 \end{cases},$$

dla $R_0 \leq 1$.

Wykorzystamy metodę **SOLVE_SIR_RUNGE_KUTTA** z argumentami:

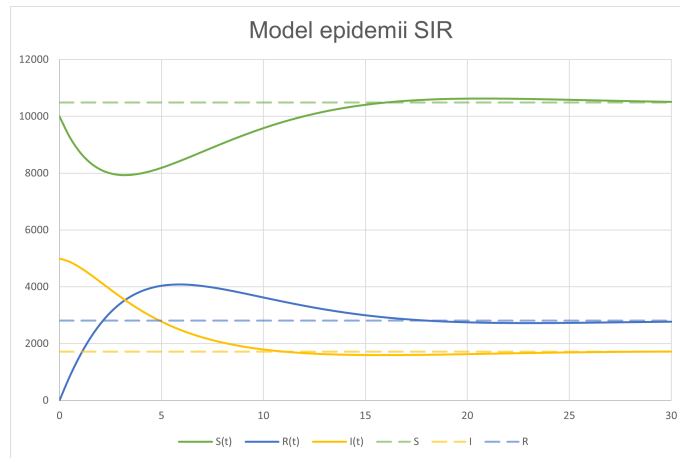
- $a = 0$;
- $b = 30$;
- $M = 60$;
- $S(a) = 10000$;
- $R(a) = 0$;
- $I(a) = 5000$.

oraz ze zmiennymi współczynnikami μ, ν, β, γ .



Rysunek 7: Wykres SIR dla $\mu = 0,52$, $\nu = 0,52$, $\beta = 0.73$, $\gamma = 0,66$ z zaznaczonymi granicami dla $R_0 \approx 0,62$

Tutaj mamy do czynienia z równowagą bez chorobową. Liczba osób zakażonych zbiega do 0. Choroba została usunięta z społeczeństwa.



Rysunek 8: Wykres SIR dla $\mu = 0,22$, $\nu = 0,22$, $\beta = 0,83$, $\gamma = 0,36$ z zaznaczonymi granicami dla $R_0 \approx 1,43$

W tym przypadku liczba zakażonych jak i narażonych utrzymuje się na pewnym, stałym poziomie przez długi czas. W tym przypadku możemy zaobserwować stan równowagi endemicznej.