作业题 9

设单元 K 与 $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ 仿射等价，证明局部的 Poincaré 不等式：

$$\|v - v_K\|_{L^2(K)} \le Ch_K \|\nabla v\|_{L^2(K)} \quad \forall v \in H^1(K),$$

其中 $v_K = \frac{1}{|K|}\int_K v, C = C(\hat{K})$.

证明.

首先在参考单元 $\hat{K}$ 上有 Poincaré 不等式: 存在常数 $C(\hat{K})$ 使得对任意 $\hat{v} \in H^1(\hat{K})$ 有

$$\|\hat{v} - \hat{v}_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} \le C(\hat{K}) \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}.$$

其中 $\hat{v}_{\hat{K}} = \frac{1}{|\hat{K}|}\int_{\hat{K}} \hat{v}$ 是 $\hat{v}$ 在 $\hat{K}$ 上的平均值.

由于单元 K 与 $\hat{K}$ 仿射等价，存在仿射映射 $F : \hat{K} \to K$ 定义为:

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$$

其中 B 是 $d \times d$ 可逆矩阵，$b \in \mathbb{R}^d$. 对于任意函数 $v \in H^1(K)$ ，定义其拉回函数 $\hat{v} = v \circ F$ ，即 $\hat{v}(\hat{x}) = v(F(\hat{x}) = v(x)$. 则有

$$v_K = \frac{1}{|K|}\int_K v dx = \frac{1}{|K|}\int_{\hat{K}} \hat{v} |\det B| d\hat{x} = \frac{1}{|\hat{K}|}\int_{\hat{K}} \hat{v} d\hat{x} = \hat{v}_{\hat{K}}$$

因为 $|K| = |\det B| \cdot |\hat{K}|$.

故

$$\begin{aligned}
\|v - v_K\|^2_{L^2(K)} &= \int_K |v - v_K|^2 \, dx \le C(d) \int_{\hat{K}} \left|\hat{v} - \hat{v}_{\hat{K}}\right|^2 |\det B| d\hat{x} = C(d) |\det B| \cdot \left\|\hat{v} - \hat{v}_{\hat{K}}\right\|^2_{L^2(\hat{K})} \\
&\le C(d, \hat{K}) |\det B| \cdot \|\nabla \hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})} \le C(d, \hat{K}) \|B\| \cdot \|\nabla v\|^2_{L^2(K)} \\
&\le C(d, \hat{K}) \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \|\nabla v\|^2_{L^2(K)} \le C(d, \hat{K}) h_K \|\nabla v\|^2_{L^2(K)}, \quad \forall v \in H^1(K).
\end{aligned}$$

□