矩阵计算读书笔记

cdk

2025 年 8 月 31 日

目录

1 预备知识

1.1 简介

待续!

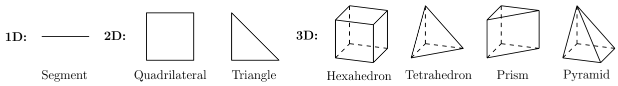

图 1: 各种单元

1.2 能量空间与正合序列 (exact sequence)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个区域, 其中 $N = 1, 2, 3$. 在各种变分公式的背景下会自然地导出能量空间 $H^1(\Omega)$ 、$H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 、$H(\mathrm{div}, \Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$. 在分布的意义下, 结合梯度旋度和散度算子, 这些空间构成了所谓的*复形*. 即序列中任意两个算子的复合都归结为平凡算子. 在对应的一维复形中, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{id}} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}\,.$$

其中符号 $\mathbb{R}$ 代表常值函数空间, 而 $\{0\}$ 代表仅包含零函数的平凡向量空间.

通过使用“complex”这个名称, 我们传达了两个简单的事实: (a) 常数函数的导数为零; (b) 导数 (实际上, 任何线性算子) 与平凡 (零) 算子的复合仍然是平凡的. 同样地, 我们可以用相关算子的零空间 (null space) 和像 (range) 来表达这些事实.

$$R(\text{ id }) \subseteq N(\nabla) \quad \text{以及} \quad R(\nabla) \subseteq N(0).$$

如果上述包含关系变为等式, 则称该复形（序列）是正合的. 在单连通区域 $\Omega = (0, 1)$ 上确实是正合序列. 从而蕴含了更多的信息 (a) 一个函数的导数为零当且仅当该函数是常数; (b) 映射 $\nabla : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是满射 (即“onto”). 从现在开始不再提及正合序列的首尾两项. 空间 $\mathbb{R}$ 和 0，以及算子 id 和 0, 总是默认作为我们后续给出的每个序列的支撑部分. 此外, 只要可能, 我们会将 Ω 的记号吸收到每个能量空间的记号中. 区域 Ω 总是被假定为相关的 $\mathbb{R}^N$ 中的单连通区域.

一维正合序列

$\mathbb{R}$ 中单连通区域上的正合序列:

$$H^1 \xrightarrow{\nabla} L^2. \tag{1}$$

二维正合序列

$\mathbb{R}^2$ 中单连通区域上的正合序列:

$$H^1 \xrightarrow{\nabla} H(\text{ curl }) \xrightarrow{\nabla\times} L^2, \tag{2}$$

其中 $\nabla\times$ 和 $\times$ 在二维中被定义为:

$$\nabla\times E = \nabla\times\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial E_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial E_1}{\partial \xi_2}, \quad E\times F = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = E_1F_2 - E_2F_1. \tag{3}$$

通过" 旋转" $H(\text{curl})$ 空间可以自然的得到 $H(\text{div})$ 空间:

$$H(\text{div}) = \left\{ V_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} E_2 \\ -E_1 \end{pmatrix} : E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \in H(\text{curl}) \right\}. \tag{4}$$

满足如下正合序列:

$$H^1 \xrightarrow{\text{curl}} H(\text{ div }) \xrightarrow{\nabla\cdot} L^2, \tag{5}$$

其中对于所有的 $\phi \in H^1$ 和 $E \in H(\text{curl})$, 满足如下运算:

$$\text{curl}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla\phi, \quad \nabla\cdot V_E = \nabla\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E = \nabla\times E. \tag{6}$$

注 1.1. *注意到本文中的 $H(\text{div})$ 空间定义与常规 $(\nabla\cdot v \in L^2)$ 不同, 但是由上述运算关系可知, 两个定义是等价的.*

三维正合序列

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的单连通区域, 有如下 3D 正合序列:

$$H^1 \xrightarrow{\nabla} H(\text{ curl }) \xrightarrow{\nabla\times} H(\text{ div }) \xrightarrow{\nabla\cdot} L^2. \tag{7}$$

其中三维旋度为:

$$\nabla \times E = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right)$$

三维散度为:

$$\nabla \cdot E = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}$$

对于所有的单元, 这些正合序列将在离散层面通过用适当的多项式子空间[1]来代替能量空间来再现.

我们使用如下标准记号:

$$\begin{aligned} &\text{1D}: && W^p \xrightarrow{\nabla} Y^p\,, \\ &\text{2D}: && \begin{cases} W^p \xrightarrow{\nabla} Q^p \xrightarrow{\nabla\times} Y^p\,, \\ W^p \xrightarrow{\text{curl}} V^p \xrightarrow{\nabla\cdot} Y^p\,, \end{cases} \\ &\text{3D}: && W^p \xrightarrow{\nabla} Q^p \xrightarrow{\nabla\times} V^p \xrightarrow{\nabla\cdot} Y^p\,. \end{aligned} \tag{8}$$

符号 p [2]大致代表多项式次数.**存疑: 不清楚这个 p 到底是什么意思?**

待续: 工作总结等阅读全文后再补!

1.3 形函数

首先需要区别各种离散空间 (如 W^p、Q^p、V^p 和 Y^p 在 (8) 中), 然后引入相应形函数来为这些空间提供基函数. 事实上, 在形函数理论中存在两种相互竞争的思想流派.

经典的 Ciarlet (1994) 定义从 *自由度*开始，这些自由度是定义在某个能量空间 U 的大子集 $\mathcal{X}$ 上的泛函 (例如 $C^\infty \cap H^1 \subseteq H^1$). 形状函数, 即构成某个离散（有限维）空间 $X \subseteq \mathcal{X}$ 的元素 (例如 $W^p \subseteq C^\infty \cap H^1$), 被定义为在限制到 X 时线性无关的自由度的对偶基. 然后自然地定义了从 $\mathcal{X}$ 到 X 的一个 *插值算子*. 在此构造中, 我们通常必须预先计算形状函数, 例如以单项式组合的形式表示, 其对应的系数被存储.

Szabó (Szabó and Babuška, 1991) 提出的竞争性方法从直接构造形状函数开始，这些形状函数是通过遵循由一致性要求引起的拓扑分类（顶点、边、面和单元内部）来确定的。形状函数通过一族多项式（例如勒让德多项式）及其积分来定义，并使用简单的递归公式计算。这正是本文采用的方法。所谓的基于投影的插值（Demkowicz, 2006; Demkowicz et al., 2007）是通过在单元的边、面和内部进行局部投影来定义的，其引入与形状函数的构造

[1] 在金字塔单元的情形下需要有理多项式子空间.

[2] 由此我们意指 p 实际上应被解释为笛卡尔积元素的多重索引.

相互独立。因此，无需预先计算定义形状函数的系数，遵循 Szabó 的方法可能更加方便且直接

参考文献

Ainsworth, M. and Coyle, J. (2001). Hierarchic *hp*-edge element families for Maxwell's equations on hybrid quadrilateral/triangular meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:6709–6733.

Ainsworth, M., Andriamaro, G., and Davydov, O. (2011). Bernstein-Bézier finite elements of arbitrary order and optimal assembly procedures. *SIAM J. Sci. Comput.*, 33(6):3087–3109.

Bergot, M. and Duruflé, M. (2013). Approximation of $H(\mathrm{div})$ with high-order optimal finite elements for pyramids, prisms and hexahedra. *Commun. Comput. Phys.*, 14(5):1372–1414.

Bergot, M., Cohen, G., and Duruflé, M. (2010). Higher-order finite elements for hybrid meshes using new nodal pyramidal elements. *J. Sci. Comput.*, 42:345–381.

Beuchler, S. and Pillwein, V. (2007). Sparse shape functions for tetrahedral *p*-FEM using integrated Jacobi polynomials. *Computing*, 80(4):345–375.

Beuchler, S. and Schöberl, J. (2006). New shape functions for triangular *p*-FEM using integrated Jacobi polynomials. *Numer. Math.*, 103(3):339–366.

Beuchler, S., Pillwein, V., Schöberl, J., and Zaglmayr, S. (2012a). Sparsity optimized high order finite element functions on simplices. In *Numerical and Symbolic Scientific Computing*, edited by Langer, U. and Paule, P., Texts & Monographs in Symbolic Computation, pp. 21–44. Springer, Vienna.

Beuchler, S., Pillwein, V., and Zaglmayr, S. (2012b). Sparsity optimized high order finite element functions for $H(\mathrm{div})$ on simplices. *Numer. Math.*, 122(2):197–225.

Beuchler, S., Pillwein, V., and Zaglmayr, S. (2013). Sparsity optimized high order finite element functions for $H(\mathrm{curl})$ on tetrahedra. *Adv. in Appl. Math.*, 50(5):749–769.

Ciarlet, Ph. G. (1994). *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. North Holland, New York.

Demkowicz, L. (2006). *Computing with hp Finite Elements. I. One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems.* Chapman & Hall/CRC Press, New York.

Demkowicz, L. (2015). Various variational formulations and closed range theorem. ICES Report 15-03, The University of Texas at Austin.

Demkowicz, L. and Gopalakrishnan, J. (2014). An overview of the DPG method. In *Recent Developments in Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, edited by Feng, X., Karakashian, O., and Xing, Y., The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 157, pp. 149–180. Springer.

Demkowicz, L., Kurtz, J., Pardo, D., Paszyński, M., Rachowicz, W., and Zdunek, A. (2007). *Computing with hp Finite Elements. II. Frontiers: Three Dimensional Elliptic and Maxwell Problems with Applications.* Chapman & Hall/CRC, New York.

Gatto, P. and Demkowicz, L. (2010). Construction of H^1-conforming hierarchical shape functions for elements of all shapes and transfinite interpolation. *Finite Elem. Anal. Des.*, 46:474–486.

Gradinaru, V. and Hiptmair, R. (1999). Whitney elements on pyramids. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 8:154–168.

Karniadakis, G. and Sherwin, S. J. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York.

Monk, P. and Demkowicz, L. (2000). Discrete compactness and the approximation of Maxwell's equations in $\mathbb{R}^3$. *Math. Comp.*, 70(234):507–523.

Nédélec, J. C. (1980). Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 35: 315–341.

Nigam, N. and Phillips, J. (2012). High-order conforming finite elements on pyramids. *IMA J. Numer. Anal.*, 32(2):448–483.

Schöberl, J. and Zaglmayr, S. (2005). High order Nédélec elements with local complete sequence property. *COMPEL*, 24(2):374–384.

Szabó, B. A. and Babuška, I. (1991). *Finite Element Analysis.* Wiley, New York.

Zaglmayr, S. (2006). *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz, Linz.