§2 变分形式

强解（几乎处处）

$$(P)\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) + cu = f & \text{in } \Omega \qquad c>0 \qquad a\text{ - 一致椭圆条件.} \\ u = 0 & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

$v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f v = \int_\Omega (-\nabla\cdot(a\nabla u) v + cuv)\, dx$$

向量值.

$$\int_\Omega \nabla\cdot F = \int_\Gamma F\cdot n. \qquad F = a\nabla u\cdot v$$

$$\nabla\cdot F = \nabla\cdot(a\nabla u) v + a\nabla u\cdot\nabla v$$

Green 公式: $-\int_\Omega \nabla\cdot(a\nabla u) v = \int_\Omega a\nabla u\cdot\nabla v - \int_\Gamma a\nabla u\cdot n v \qquad a\in C^1 \qquad u\in W^{2,p} \qquad v\in W^{1,q}$

$u_n \xrightarrow{\in C^\infty} u \qquad v_n \longrightarrow v$

Sobolev

弱问题 　　　　variational problem

$(u,v) := \int_\Omega uv. \qquad (a\nabla u, \nabla v) + c(u,v) = (f,v) \qquad (VP1)$ 弱解.

假设 $a, c \in L^\infty$

求 $u \in H_0^1(\Omega)$. s.t. $a(u,v) = (f,v) \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$

Thm.

假设 $a\in C^1$. $c\in C(\Omega)$. $f\in C(\Omega)$ $u\in H_0^1 \cap C^2(\Omega)$ 则. $(VP1) \Leftrightarrow (P)$

弱解存在性与光滑性?

Lax-Milgram 引理: V 是 Hilbert 空间, 内积 $(\cdot,\cdot)$ 范数 $\|\cdot\|$. $a(u,v)$ 是 $V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ 上双线性形式

$\exists\, \alpha, \beta>0$ s.t. (i). $a(u,v) \le \beta\|u\|\|v\| \quad \forall u, v\in V$ 连续性

对偶空间 (ii) $a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 \quad \forall v\in V$ 强制. Coercivity.

则. $\forall f\in V'$ 　(VP) 存在唯一解.

(VP) 求 $u\in V$ s.t. $a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v\in V$ 　　$|\langle f,v\rangle| \le c\|v\|.$

证明: 由 Riesz 表示定理: $f\in V' \quad \exists\, w\in V$ s.t. $\langle f, v\rangle = (w, v)$

∃有界线性算子. $K: V' \longrightarrow V$ s.t. $(Kf, v) = \langle f, v\rangle$

$J: V \longrightarrow V$ s.t. $(Ju, v) = a(u,v)$

$(VP) \Leftrightarrow Ju = Kf$

$\|Jv\|\|v\| \ge a(v,v) = (Jv, v) \ge \alpha\|v\|^2 \qquad Jv_n \xrightarrow{V} w = Jv \quad \|Jv_n - Jv_m\| \ge \alpha\|v_n - v_m\|.$

$\Rightarrow \|Jv\| \ge \alpha\|v\| \Rightarrow J$ 单射. $R(J)$ 闭 　　v_n Cauchy 列. $v_n \to v\in V$

$(Jv, v) > 0. \quad \forall v\neq 0 \qquad v\notin R(J)^\perp \Rightarrow R(J)^\perp = \{0\}.$

$(VP1)'$. 求 $u\in H_0^1$ s.t $a(u,v) = \underline{(f,v)} \quad \forall v\in H_0^1$ 　　$\langle f, v\rangle \quad f\in H^{-1}$

$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' \qquad f_0,\dots, f_d \in L^2(\Omega)$ 令 $\langle f, v\rangle = \int_\Omega (f_0 v + f_1 v_{x_1} + \dots + f_d v_{x_d})$

$$|\langle f, v\rangle| \le \|f_0\|\|v\| + \sum \|f_i\|\|v_{x_i}\| \le C\|v\|$$

推论1：设 $a.c\in L^\infty$ $a\geq a_0>0$ $c\geq 0$ 则 $\forall f\in H^{-1}$ (VP1') 存在唯一解.

proof：$|a(u.v)|\leq \|a\|_{L^\infty}\|\nabla u\|\|\nabla v\|+\|c\|_{L^\infty}\|u\|\|v\|$

$\leq \beta\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$

$a(v.v)=\int_\Omega(a|\nabla v|^2+c|v|^2)\geq a_0\|\nabla v\|^2\geq\alpha\|v\|_{H^1}^2$

$\|v\|\leq C\|\nabla v\|$ $\forall v\in H_0^1$ Friedrichs □

非齐次 Dirichlet B.C.：$\gamma_0 u=g$ on Γ

(VP2) 求 $u\in H^1$. $\gamma_0 u=g$. s.t. $a(u.v)=\langle f.v\rangle$ $\forall v\in H_0^1$

$g\in H^{\frac12}(\Gamma)$

推论2：在推论1条件下. (VP2) $\exists!$

证 由迹定理 $\exists\, w\in H^1(\Omega)$ s.t. $\gamma_0 w=g$.

$\|w\|_{H^1(\Omega)}\leq C\|g\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}$ 令. $\tilde u=u-w\in H_0^1$

(VP2) $\Longleftrightarrow$ 求 $\tilde u\in H_0^1$ s.t. $a(\tilde u.v)=\underbrace{\langle f.v\rangle-a(w.v)}_{\langle F.v\rangle}$ $\forall v\in H_0^1$ 不使用该变分形式. 主要是避免引入 w 对实施造成困难.

$|\langle F.v\rangle|\leq\|f\|_{H^{-1}}\|v\|_{H^1}+\beta\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$

$\leq(C\|f\|_{H^{-1}}+C\|g\|_{H^{\frac12}(\Gamma)})\|v\|_{H^1(\Omega)}\Rightarrow F\in H^{-1}$

Neumann. B.C. ：$a\nabla u\cdot n=g$ on Γ.

$(f.v)=\int_\Omega(-\nabla\cdot(a\nabla u)+cu)v$

$=\int_\Omega(a\nabla u\cdot\nabla v+cuv)-\int_\Gamma\underbrace{a\nabla u\cdot n}_{g}\,v$

g Neumann 边界条件.

(VP3) 求 $u\in H^1$ s.t. $a(u.v)=\langle f.v\rangle+\int_\Gamma gv$. $\forall v\in H^1$

推论3.若 $a.c\in L^\infty$. $a\geq a_0>0$, $c\geq c_0>0$, $f\in(H^1)'$ $g\in L^2(\Gamma)$ 则. (VP3) $\exists!$

周期 B.C.

(P) $-\nabla\cdot(a\nabla u)+cu=f$ in $\mathbb{R}^d$.

$u(\cdots.\ x_i+T_i.\cdots)=u(x)$ $1\leq i\leq d$.

C^∞ 中周期子空间的闭包 (各阶导也周期) 为 H_{per}^1

$\Omega=(0.T_1)\times(0.T_2)\times\cdots\times(0.T_d)$

$H_{per}^1(\Omega)=\{v\in H^1.\ v(\cdots.0.\cdots)=v(\cdots.T_i\cdots)\ 1\leq i\leq d\}$

(VP4) 求 $u\in H_{per}^1$ st. $a(u.v)=\langle f.v\rangle$ $\forall v\in H_{per}^1$.

Dirichlet 本质

Neumann.

Robin $a\nabla u\cdot n+qu=g$

} 自然边界条件.

定理：设 $a \in C^1$ ($W^{1,\infty}$) $c \in L^\infty$ $f \in L^2$. Ω 是凸或 $C^{1,1}$ $-\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f$.

(1) (VP1) 的解是原问题的解, i.e. $u \in H^2$ 且 $\|u\|_{H^2} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$ 不需要唯一 u.