Računanje presečišč Bezierjevih krivulj z metodo hibridnih izrezkov

Domen Keglevič

Fakulteta za matematiko in fiziko

26. maj 2017

Opis problema

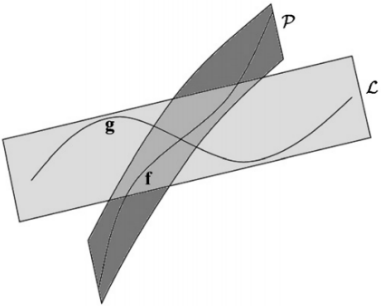
Problem

Dani sta dve ravninski Bezierjevi krivulji $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{g} : [\xi, \eta] \to \mathbb{R}^2$. Želimo najti njuna presečišča.

Drugače povedano: želimo najti algoritem, ki za poljuben $\epsilon > 0$ vrne pare intervalov $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$, ki vsebujejo presečišča, tako da velja $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon$.

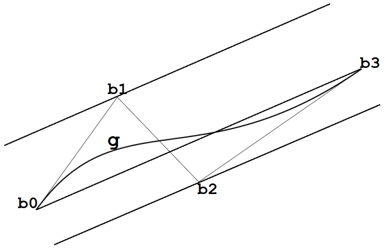
Ideja rešitve

- Krivuljo **g** omejimo z območjem *L*, ki ga omejujejo premice (*fat line*).
- Krivuljo **f** omejimo z območjem *P*, ki ga dobimo s pomočjo aproksimacije krivulje **f** s krivuljo nižje stopnje (*fat curve*).
- Omejimo iskanje rešitve na presek območja *P* in *L*.
- Ponavljamo.



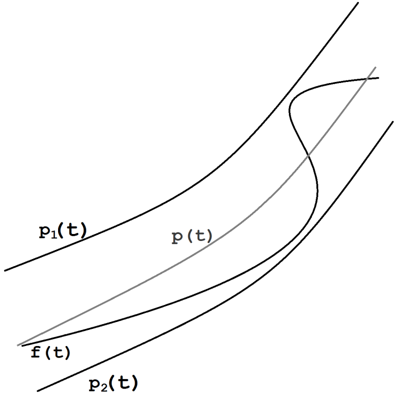
Pas okrog g (*fat line*)

- $\mathbf{g}(s) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{b_i} B_i^m(s)$
- Potegnemo vzporednici od premice $\mathbf{b_0 b_m}$ skozi najbolj oddaljeno kontrolno točko na obeh straneh.
- Krivulja $\mathbf{g}$ je vsebovana v pasu med premicama, saj je vsebovana v konveksni ovojnici kontrolnih točk.



Pas okrog f (*fat curve*)

- $\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a_i} B_i^n(t)$
- Z nižanjem stopnje aproksimiramo $\mathbf{f}$ s krivuljo $\mathbf{p}$ stopnje k.
- $\|\mathbf{f}\|_{BB} = \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a_i}\|$ je norma.
- Za $\delta = \|\mathbf{f}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\|_{BB}$ je $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\| \leq \delta$.



Iskanje intervalov

Naj bodo $\mathbf{b_i}$ kontrolne točke Bezierjeve krivulje $\mathbf{g}$ in $\mathbf{n}$ normala na $\mathbf{b_0 b_m}$. Definiramo

$$\mathbf{p_1}(t) = \mathbf{p}(t) + \delta\mathbf{n}$$

$$\mathbf{p_2}(t) = \mathbf{p}(t) - \delta\mathbf{n}$$

$$d_{max} = \max_{i=0,1,\dots,m}\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b_i} - \mathbf{b_0})\},$$

$$d_{min} = \min_{i=0,1,\dots,m}\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b_i} - \mathbf{b_0})\},$$

$$d_1(t) = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{p_1}(t) - \mathbf{b_0}),$$

$$d_2(t) = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{p_2}(t) - \mathbf{b_0}).$$

Iskana presečišča so rešitve enačb $d_1(t) = d_{min}$ in $d_2(t) = d_{max}$.

Psevdo koda

Vhod: $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \beta], [\xi, \eta], k)$: ravninski Bezierjevi krivulji, njuni domeni in stopnja apr. krivulje

if $|\alpha - \beta| < \epsilon$ in $|\xi - \eta| < \epsilon$ **then**
    return $([\alpha, \beta], [\xi, \eta])$
else
    if $|\alpha - \beta| \geq |\xi - \eta|$ **then**
        $L, P \leftarrow$ raven pas okrog $\mathbf{g}$ (*fat line*), ukrivljen pas okrog $\mathbf{f}$ (*fat curve*)
        Najdi intervale $[\alpha_i, \beta_i]$, kjer je $L \cap P \neq \emptyset$
        if $l > 0$ in $\max_{i=1,\ldots,l} \{|\alpha_i - \beta_i|\} \geq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ **then**
            return $\mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
$\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
$\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
$\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
        else
            $S \leftarrow \emptyset$
            for $i = 1, \ldots, l$ **do**
                $S \leftarrow S \cup \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha_i, \beta_i], [\xi, \eta], k)$
            end for
            return S
        end if
    else
        $\mathit{HybridClip}(\mathbf{g}, \mathbf{f}, [\xi, \eta], [\alpha, \beta], k)$
    end if
end if

Opombe

- Krivuljo **f** aproksimiramo s krivuljo stopnje 2 ali 3, saj v tem primeru ničle lahko najdemo analitično.
- Algoritem nima začetnih pogojev od katerih bi bil odvisen (npr. izbire začetne točke).
- Če sta krivulji zelo blizu, potem lahko vrne napačen rezultat (najde presečišče, ki ga ni).
- V primeru tangentnih presečišč se obnaša kot *divide and conquer*.
- Konvergenca za transverzalna presečišča je vsaj kvadratična.

Red konvergence

Lema 1

Naj bo $\mathbf{f}$ Bezierjeva krivulja stopnje n. Potem obstaja konstanta C, da za poljuben interval $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ velja $\delta \leq C|\alpha - \beta|^{k+1}$.

Lema 2

Naj bo $\mathbf{f}$ Bezierjeva krivulja stopnje n. Potem obstajajo konstante C_j, da za poljuben interval $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ in optimalno aproksimacijo $\mathbf{p}$ stopnje k od $\mathbf{f}$ velja $\|\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{p}^{(j)}\|_\infty \leq C_j|\alpha - \beta|^{k+1-j}$, za $j = 0, 1, \ldots, k$.

Trditev

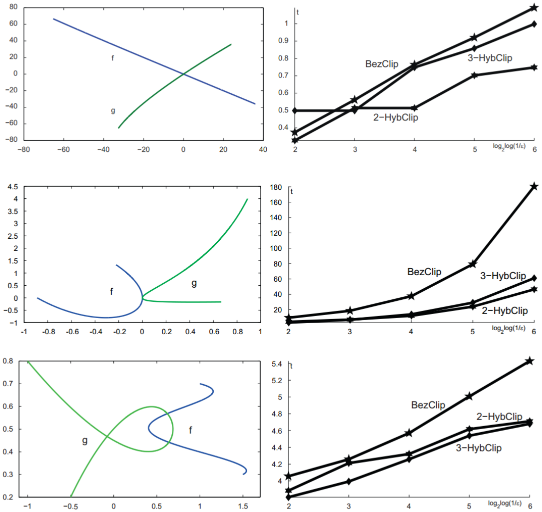
Naj imata Bezierjevi krivulji $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ transverzalno presečišče v $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(s_0)$. Potem obstajajo konstante C_f, C_f', C_g in C_g', da za dovolj velike $i \in \mathbb{N}$ velja

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| \leq C_f|\alpha_i - \beta_i|^{k+1} + C_g|\xi_i - \eta_i|^2$$

oz.

$$|\xi_{i+1} - \eta_{i+1}| \leq C_f'|\alpha_i - \beta_i|^2 + C_g'|\xi_i - \eta_i|^{k+1}.$$

Primeri



f
g
t
BezClip
3−HybClip
2−HybClip
log$_2$log(1/ε)
f
g
t
BezClip
3−HybClip
2−HybClip
log$_2$log(1/ε)
g
f
t
BezClip
2−HybClip
3−HybClip
log$_2$log(1/ε)

Konec