Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Ljubljana, 13. junij 2017

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

Iskanje presečišč Bèzierjevih krivulj z metodo hibridnih izrezkov

Domen Keglevič

1. Uvod

V seminarski nalogi nas bo zanimalo kako najti presečišča dveh ravninskih Bèzierjevih krivulj. Ta problem lahko opišemo na naslednji način. Naj bosta $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{g} : [\xi, \eta] \to \mathbb{R}^2$ ravninski Bèzierjevi krivulji. Želimo najti učinkovit algoritem, ki za poljuben $\epsilon > 0$ vrne pare intervalov $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$, ki vsebujejo presečišča $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{g}(s_i)$, $t_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $s_i \in [\xi_i, \eta_i]$, tako da velja $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon$.

Ta problem se da rešiti na več načinov. Tu bomo predstavili metodo hibridnih izrezkov, ki je razširitev metode Bèzierjevih izrezkov.

Metoda Bèzierjevih izrezkov najprej aproksimira krivuljo $\mathbf{g}$ tako, da leži znotraj ozkega pasa P v ravnini (*fat line*). Nato izračuna presek pasa P in konveksne ovojnice kontrolnih točk krivulje $\mathbf{f}$, ter definicijsko območje krivulje $\mathbf{f}$ omeji na intervale, kjer je presek neprazen. Nato vlogi $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ zamenja in postopek ponavlja dokler ne pride do željene natančnosti.

Ideja metode hibridnih izrezkov je podobna kot ideja metode Bèzierjevih izrezkov, le da ne opazujemo presek pasa P s konveksno ovojnico kontrolnih točk krivulje $\mathbf{f}$, ampak z aproksimacijo krivulje $\mathbf{f}$ (*fat curve*), ki jo dobimo s pomočjo nižanja stopnje.

2. Metoda hibridnih izrezkov

Naj bosta v nadaljevanju $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ ravninski Bèzierjevi krivulji dani z

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i B_{i,[\alpha,\beta]}^{n}(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

in

$$\mathbf{g}(s) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_i B_{j,[\xi,\eta]}^{m}(s), \qquad s \in [\xi, \eta],$$

kjer so $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke od $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ ter

$$B_{i,[\alpha,\beta]}^{n}(t) = \binom{n}{i} \frac{(t-\alpha)^i (\beta - t)^j}{(\beta - \alpha)^n}$$

i-ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n na intervalu $[\alpha, \beta]$. Splošne intervale $[\alpha, \beta]$ namesto fiksnega intervala $[0, 1]$ opazujemo zato, ker bo algoritem generiral zaporedje vedno manjših intervalov.

2.1. ***Fat line* in *fat curve*.** Definiramo

$$\delta = \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{BB} \tag{1}$$

2.2. **Iskanje intervalov.**

2.3. **Psevdo koda.**

Vhod: $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \beta], [\xi, \eta], k)$: ravninski Bèzierjevi krivulji, njuni domeni in stopnja aproksimacijske krivulje

if $|\alpha - \beta| < \epsilon$ in $|\xi - \eta| < \epsilon$ **then** — ustavitveni pogoj
  return $[\alpha, \beta], [\xi, \eta]$
else
  if $|\alpha - \beta| < |\xi - \eta|$ **then** — želimo, da ima **f** večjo domeno
    $HybridClip(\mathbf{g}, \mathbf{f}, [\xi, \eta], [\alpha, \beta], k)$ — zamenjamo vlogi **f** in **g**
  else
    $L, C \leftarrow$ *fat line*$(\mathbf{g})$, *fat curve*$(\mathbf{f})$ — aproksimiraj **f** in **g**
    Najdi intervale $[\alpha_i, \beta_i]$, kjer je $L \cap C \neq \emptyset$
    if $l > 0$ in $\max_{i=1,\ldots,l} \{|\alpha_i - \beta_i|\} \geq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ **then** — aproksimacija ni dobra
      return $HybridClip(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
        $\cup\, HybridClip(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
        $\cup\, HybridClip(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
        $\cup\, HybridClip(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
    else — aproksimacija je dobra
      $S \leftarrow \emptyset$
      for $i = 1, \ldots, l$ **do**
        $S \leftarrow S \cup HybridClip(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha_i, \beta_i], [\xi, \eta], k)$ — rekurziven klic
      end for
      return S — vrnemo rezultat
    end if
  end if
end if

3. Red konvergence

Trditev 3.1. *invarianca norm za afine transormacije*

Dokaz. □

Lema 3.2. *Naj bo* $\mathbf{f}$ *ravninska Bèzierjeva krivulja in* $\mathbf{p}$ *njena optimalna* L_2 *aproksimacija stopnje* k*. Potem obstaja konstanta* C*, da za poljuben interval* $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ *velja* $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq C|\alpha - \beta|^{k+1}$.

Dokaz. Spomnimo se, da za poljubni normi $\|\cdot\|_1$ in $\|\cdot\|_2$ na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V obstajata konstanti $0 < C_1 \leq C_2$, tako da je

$$C_1\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C_2\|v\|_2, \; v \in V. \tag{2}$$

Zato obstajata konstanti D_1 in D_2, da je $\|\mathbf{r}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]}$ in $\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_2\|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$ za vsak $\mathbf{r} \in \Pi^n_{[\alpha,\beta]}$. Pri tem konstanti D_1 in D_2 nista odvisni od intervala $[\alpha, \beta]$, saj so po trditvi (3.1) norme invariantne glede na afine transformacije.

Od tod sledi, da je $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]}$. Naj bodo komponente $\mathbf{q}_\alpha$ Taylorjevi polinomi stopnje k razviti okrog točke $t = \alpha$ za vsako komponento krivulje $\mathbf{f}$. Potem velja

$$D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]},$$

saj je $\mathbf{p}$ optimalna L_2 aproksimacija za $\mathbf{f}$. Iz (2) sledi, da je $D_1\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1D_2\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$. Spomnimo se, da lahko razliko med $\mathbf{f}(t)-\mathbf{q}_\alpha(t)$ zapišemo v obliki

$$\mathbf{f}(t)-\mathbf{q}_\alpha(t) = \frac{\mathbf{f}^{(k+1)}(t_o)}{(k+1)!}(t-\alpha)^{k+1},$$

kjer je $\mathbf{f}^{(k+1)}$ $(k+1)$-vi odvod krivulje $\mathbf{f}$ in kjer vse člene opazujemo po komponentah. Od tod dobimo oceno

$$D_1D_2\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!}D_1D_2\max_{t\in[0,1]}\|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\||\alpha-\beta|^{k+1}.$$

□

Lema 3.3. *Naj bo* $\mathbf{f}$ *ravninska Bèzierjeva krivulja stopnje* n. *Potem obstajajo konstante* C_j, *tako da za poljuben interval* $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ *in optimalno* L_2 *aproksimacijo* $\mathbf{p}$ *stopnje* k *od* $\mathbf{f}$ *velja* $\|\mathbf{f}^{(j)}-\mathbf{p}^{(j)}\|_\infty \leq C_j|\alpha-\beta|^{k+1-j}$, *za* $j=0,1,\ldots,k$.

Dokaz. Definirajmo novo normo z naslednjim predpisom

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha,\beta]} = \|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + |\alpha-\beta|\|\mathbf{r}'\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + \ldots + |\alpha-\beta|^k\|\mathbf{r}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha,\beta]}.$$

To je res norma, saj je $\|\cdot\|_\infty$ norma. Po trditvi (3.1) in iz neka referenca sledi, da obstaja konstanta D_1, da je

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]}.$$

S pomočjo te ocene lahko zapišemo

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_*^{[\alpha,\beta]} = \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + |\alpha-\beta|\|\mathbf{f}'-\mathbf{p}'\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + \ldots + \\ + |\alpha-\beta|^k\|\mathbf{f}^{(k)}-\mathbf{p}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]}$$

Sedaj podobno kot v lemi (3.2) s pomočjo Taylorjevega polinoma in izreka o ostanku ocenimo

$$D_1\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1D_2\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \\ \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!}D_1D_2\max_{t\in[0,1]}\|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\||\alpha-\beta|^{k+1}.$$

□

Definicija 3.4. *Naj bosta* $\mathbf{f}(t)$ *in* $\mathbf{g}(s)$ *ravninski Bèzierjevi krivulji s presečiščem* $\mathbf{z}_0=\mathbf{f}(t_0)=\mathbf{g}(s_0)$. *Presečišče* $\mathbf{z}_0$ *imenujemo:*

- transverzalno presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0)\times\mathbf{g}'(s_0)\neq\mathbf{0}$,
- tangentno presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0)\times\mathbf{g}'(s_0)=\mathbf{0}$ *in* $\mathbf{f}'(t_0)\neq 0$, $\mathbf{g}'(s_0)\neq 0$, *in*
- degenerirano presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0)=\mathbf{0}$ *ali* $\mathbf{g}'(s_0)=\mathbf{0}$.

Trditev 3.5. *Naj imata Bezierjevi krivulji* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{g}$ *transverzalno presečišče v* $\mathbf{f}(t_0)=\mathbf{g}(s_0)$. *Potem obstajajo konstante* C_f, C_f', C_g *in* C_g', *da za dovolj velike* $i\in\mathbb{N}$ *velja*

$$|\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}| \leq C_f|\alpha_i-\beta_i|^{k+1} + C_g|\xi_i-\eta_i|^2 \tag{3}$$

oz.

$$|\xi_{i+1}-\eta_{i+1}| \leq C_f'|\alpha_i-\beta_i|^2 + C_g'|\xi_i-\eta_i|^{k+1}. \tag{4}$$

Dokaz. Dokazali bomo le neenakost (3), saj je dokaz za (4) podoben.

Naj bosta $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$ zaporedji intervalov, ki jih algoritem generira. Oglejmo si kako se algoritem obnaša za velike i. Ker se dolžine intervalov v vsakem koraku zmanjšajo vsaj za polovico, je

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_i - \beta_i| = 0 \;\text{ in }\; \lim_{i\to\infty} |\xi_i - \eta_i| = 0.$$

Sledi, da $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ konvergira proti tangenti $\mathbf{g}'(s_0)$. Zato gre normala $\mathbf{n}$ na $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ proti normali $\mathbf{n}_0$ na $\mathbf{g}(s_0)$.

Naj bo $\omega = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)$. Po predpostavki je $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$, torej je $\omega \neq 0$.

Oglejmo si situacijo v i-tem koraku algoritma, ki jo prikazuje slika (3). Velja

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| = h_{i+1,\mathbf{f}} \leq L_{i+1} = l_{i+1,1} + l_{i+1,2} + l_{i+1,3}.$$

Želimo oceniti člene na desni strani neenakosti. Ker je $\frac{\omega}{4} = \frac{d_{max} - d_{min}}{l_{i+1,1} + l_{i+1,3}}$ je

$$l_{i+1,1} + l_{i+1,3} = \frac{4(d_{max} - d_{min})}{\omega}. \tag{5}$$

Želimo oceniti še člen $l_{i+1,2}$. V ta namen si najprej oglejmo ali sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ naraščajoči. Najprej opazimo, da obstaja tak $\epsilon_1 > 0$, da je za dovolj velike i

$$|d'(t_0) - \omega| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| < \frac{\omega}{4}, \tag{6}$$

ko je $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_1$, saj gre $\mathbf{n}$ proti $\mathbf{n}_0$, ko $i \to \infty$. Obstaja tudi tak $\epsilon_2 > 0$, da je za dovolj velike i

$$\|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| < \frac{\omega}{4}, \tag{7}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_2$ saj je $\mathbf{f}'$ zvezna. Dalje obstaja tudi tak $\epsilon_3 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$|d'(t) - d_1'(t)| < \frac{\omega}{4}, \tag{8}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_3$, saj po lemi (3.3) velja

$$|d'(t) - d_1'(t)| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t))| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq C|\alpha_i - \beta_i|^k.$$

Naj bo $\epsilon_4 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. S pomočjo ocen (6) in (7) lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
|d'(t) - \omega| &= |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\
&\leq |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0)| + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\
&\leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| + |d'(t_0) - \omega| \\
&\leq \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{2},
\end{aligned}$$

za vse dovolj velike i, tako da je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_4$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_4$. Zato je

$$d'(t) < \frac{\omega}{2}, \tag{9}$$

in skupaj z (8) dobimo, da je $d_1'(t) = d_2'(t) > \frac{\omega}{4}$. Torej smo ugotovili, da sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ strogo naraščajoči na dovolj poznih intervalih $[\alpha_i, \beta_i]$.

Od tod sledi, da za poljuben y_0, za katerega velja $d_1(\alpha_i) < y_0 < d_2(\beta_i)$, velja, da imata enačbi $d_1(t) = y_0$ in $d_2(t) = y_0$ rešitvi t_1 in t_2 na intervalu $[\alpha_i, \beta_i]$. Zato je

$$l_{i+1,2} \leq \sup_{y_0 \in (d_1(\alpha_i), d_2(\beta_i))} \{|t_1 - t_2|\,;\, d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0\}.$$

Če najdemo oceno za $|t_1 - t_2|$, potem lahko s pomočjo zgornje enačbe ocenimo $l_{i+1,2}$. Oceno za $|t_1 - t_2|$ bomo dobili na sledeč način. Opazimo, da za $d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0$ velja

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = 2\delta,$$

kjer je δ kot v delta. Naj bo $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$. Potem po Lagrange-ovem izreku o srednji vrednosti obstajata takšna $t^\star$ in $t^\diamond$, da je

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2) = (x(t_1) - x(t_2), y(t_1) - y(t_2)) = (x'(t^\star)(t_1 - t_2), y'(t^\diamond)(t_1 - t_2)).$$

Od tod dobimo oceno

$$\begin{aligned}
|\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star)&,y'(t^\diamond)) - d'(t)| \\
&= |\mathbf{n}(x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t)| \\
&\leq \|(x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - \mathbf{f}'(t)\| \\
&= \|(x'(t^\star), y'(t^\star)) - \mathbf{f}'(t) + (0, y'(t^\diamond)) - (0, y'(t^\star))\| \\
&\leq \|\mathbf{p}'(t^\star) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^\star)\| \\
&\leq \|\mathbf{p}'(t^\star) - \mathbf{p}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^\star)\| \\
&\leq 2 \max_{t^1,t^2 \in [\alpha_i,\beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_\infty^{[\alpha_i,\beta_i]}.
\end{aligned}$$

Po lemi (3.3) in ker je $\mathbf{p}'(t)$ enakomerno zvezna na $[\alpha_i, \beta_i]$ obstaja $\epsilon_5 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$\begin{aligned}
\max_{t^1,t^2 \in [\alpha_i,\beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| &< \frac{\omega}{16}, \\
\|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_\infty^{[\alpha_i,\beta_i]} &< \frac{\omega}{8},
\end{aligned}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_5$. Naj bo $\epsilon_0 = \min(\epsilon_4, \epsilon_5)$. Potem je

$$|\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - d'(t)| < \frac{\omega}{4},$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_0$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_0$. Če (9) kombiniramo z zgornjo neenakostjo dobimo oceno

$$\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond)) > \frac{\omega}{4}.$$

Ker je $2\delta_i = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = (t_1 - t_2)\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond))$, dobimo

$$|t_1 - t_2| < \frac{2\delta_i}{\omega/4} = \frac{8\delta_i}{\omega}.$$

□

4. Zaključki

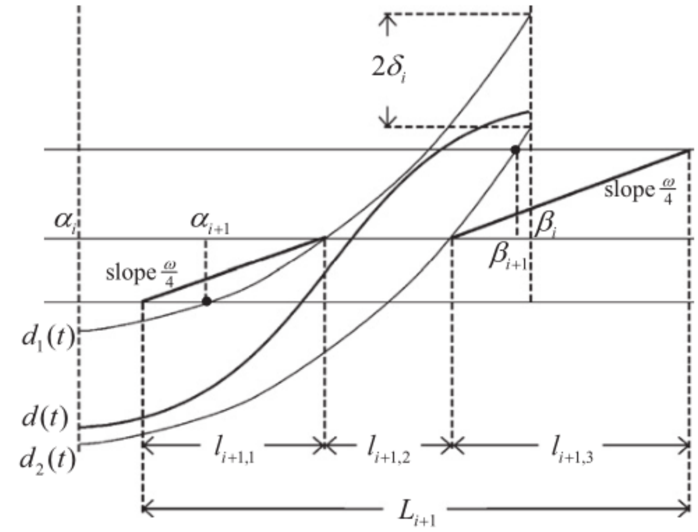
grafi, komentarji

Literatura

[1] Sederberg T, Nishita T. Curve intersection using Bèzier clipping. Comput Aided Des 1990;22(9):538–49.

[2] I. Priimek, *Naslov članka*, okrajšano ime revije **letnik revije** (leto izida) strani od–do.

[3] C. Velkovrh, *Nekaj navodil avtorjem za pripravo rokopisa*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 62–64.



SLIKA 1. Situacija v i-tem koraku algoritma.