Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Ljubljana, 14. junij 2017

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

Iskanje presečišč Bèzierjevih krivulj z metodo hibridnih izrezkov

Domen Keglevič

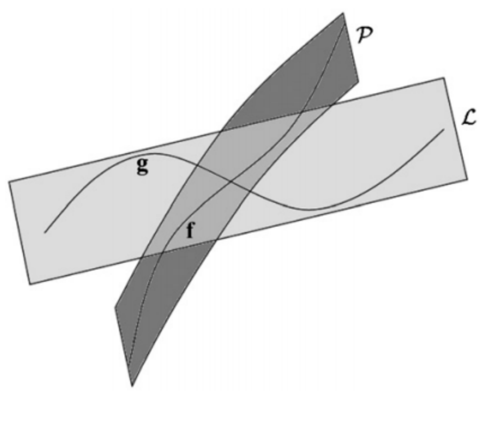
1. Uvod

V seminarski nalogi nas bo zanimalo kako najti presečišča dveh ravninskih Bèzierjevih krivulj. Ta problem lahko opišemo na naslednji način. Naj bosta $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{g} : [\xi, \eta] \to \mathbb{R}^2$ ravninski Bèzierjevi krivulji. Želimo najti učinkovit algoritem, ki za poljuben $\epsilon > 0$ vrne pare intervalov $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$, ki vsebujejo presečišča $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{g}(s_i)$, $t_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $s_i \in [\xi_i, \eta_i]$, tako da velja $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon$.

Ta problem se da rešiti na več načinov. Tu bomo predstavili metodo hibridnih izrezkov, ki je razširitev metode Bèzierjevih izrezkov.

Metoda Bèzierjevih izrezkov najprej aproksimira krivuljo $\mathbf{g}$ z ozkim pasom $\mathcal{L}$ v ravnini (*fat line*), tako da $\mathbf{g}$ leži znotraj $\mathcal{L}$. Nato izračuna presek pasa $\mathcal{L}$ in konveksne ovojnice kontrolnih točk krivulje $\mathbf{f}$, ter definicijsko območje krivulje $\mathbf{f}$ omeji na intervale, kjer je presek neprazen. Nato vlogi $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ zamenja in postopek ponavlja, dokler ne pride do željene natančnosti.

Ideja metode hibridnih izrezkov je podobna kot ideja metode Bèzierjevih izrezkov, le da ne opazujemo presek pasa $\mathcal{L}$ s konveksno ovojnico kontrolnih točk krivulje $\mathbf{f}$, ampak z območjem $\mathcal{P}$ (*fat curve*). Tega dobimo tako, da z nižanjem stopnje krivulje $\mathbf{f}$ dobimo aproksimacijo, ki jo lahko premaknemo v dve nasprotni smeri tako, da je krivulja $\mathbf{f}$ vsebovana v območju $\mathcal{P}$ vmes (slika (1)). Nato krivuljo $\mathbf{f}$ zmanjšamo na tiste intervale, kjer je presek $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ neprazen. V naslednjem koraku vlogi $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ zamenjamo in postopek ponavljamo do željene natančnosti.



Slika 1. *Fat line* $\mathcal{L}$ in *fat curve* $\mathcal{P}$, ki omejujeta $\mathbf{g}$ in $\mathbf{f}$.

2. Metoda hibridnih izrezkov

Vpeljimo nekaj oznak, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. Z

$$B^n_{i,[\alpha,\beta]}(t) = \binom{n}{i} \frac{(t-\alpha)^i(\beta-t)^j}{(\beta-\alpha)^n}$$

označimo i-ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n na intervalu $[\alpha,\beta]$. Intervale $[\alpha,\beta]$ namesto intervala $[0,1]$ opazujemo zato, ker bo algoritem generiral zaporedje vedno manjših intervalov.

Naj bosta $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ ravninski Bèzierjevi krivulji dani z

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i B^n_{i,[\alpha,\beta]}(t), \qquad t \in [\alpha,\beta]$$

in

$$\mathbf{g}(s) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_i B^m_{j,[\xi,\eta]}(s), \qquad s \in [\xi,\eta],$$

kjer so $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke od $\mathbf{f}$ oz. $\mathbf{g}$. Naj bo $\|\cdot\|$ Evklidska norma na $\mathbb{R}^2$. Definiramo še naslednje norme:

(1) Normalizirana L_2 norma

$$\|\mathbf{f}\|_2^{[\alpha,\beta]} = \sqrt{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \|f(t)\|^2 dt},$$

(2) L_∞ norma

$$\|\mathbf{f}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \|\mathbf{f}(t)\|,$$

(3) BB norma

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{BB}}^{[\alpha,\beta]} = \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i\|.$$

2.1. *Fat line.*

Naj bo $\mathbf{n}$ normalni vektor, ki je pravokoten na $\mathbf{b}_m - \mathbf{b}_0$. Definiramo predznačeni razdalji

$$d_{\max} = \max_{i=0,\dots,m} (\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0)),$$
$$d_{\min} = \min_{i=0,\dots,m} (\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0)).$$

Množico $\mathcal{L}$, ki ga sestavljajo točke, ki so od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ oddaljene kvečjemu za $d_{\min}$ oz. $d_{\max}$ imenujemo *fat line*. Krivulja $\mathbf{g}$ je vsebovana v $\mathcal{L}$, saj je v $\mathcal{L}$ vsebovana njena konveksna ovojnica.

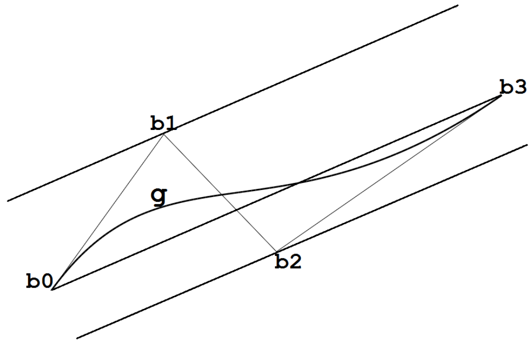
2.2. *Fat curve.*

Naj bo $\hat{\mathbf{p}}(t)$ polinom stopnje $k < n$, ki optimalno aproksimira $\mathbf{f}(t)$ glede na normo L_2. Konstruiramo ga s pomočjo nižanja stopnje krivulje $\mathbf{f}(t)$, kot je opisano v referenca. S pomočjo višanja stopnje mu lahko zvišamo stopnjo do n in zapišemo

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c}_i B^n_{i,[\alpha,\beta]}(t),$$

kjer so $\mathbf{c}_i$ nove kontrolne točke. Naj bo

$$\delta = \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{BB}^{[\alpha,\beta]}. \tag{1}$$



SLIKA 2. Krivulja $\mathbf{g}$ in *fat line.*

Velja naslednja ocena

$$\|\mathbf{f}(t)-\mathbf{p}(t)\| = \|\sum_{i=0}^{n}(\mathbf{a}_i-\mathbf{c}_i)B^n_{i,[\alpha,\beta]}(t)\| \leq \sum_{i=0}^{n}\|\mathbf{a}_i-\mathbf{c}_i\|B^n_{i,[\alpha,\beta]}(t) \leq \delta.$$

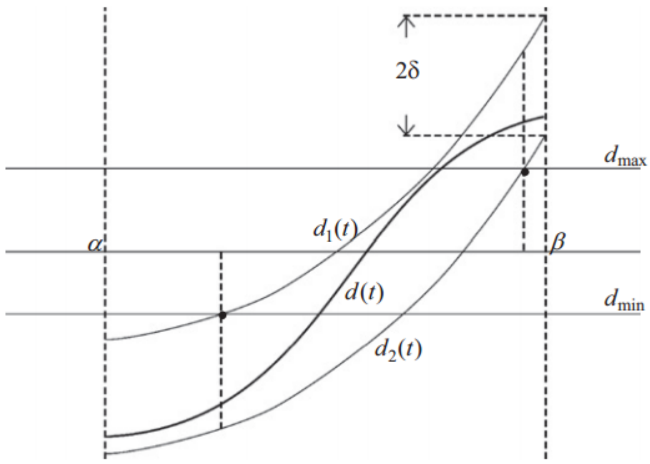
Sledi, da $\mathbf{f}(t)$ leži med $\mathbf{p}_1(t)=\hat{\mathbf{p}}(t)+\delta\mathbf{n}(t)$ in $\mathbf{p}_2(t)=\hat{\mathbf{p}}(t)-\delta\mathbf{n}(t)$, kjer je $\mathbf{n}$ normala pravokotna na $\mathbf{b}_m-\mathbf{b}_0$ (kot v *fat line*). Naj bo

$$\begin{gathered} d(t)=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{f}(t)-\mathbf{b}_0),\ d_0(t)=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}(t)-\mathbf{b}_0) \\ d_1(t)=\mathbf{n}(\mathbf{p}_1(t)-\mathbf{b}_0)=d_0(t)+\delta \\ d_2(t)=\mathbf{n}(\mathbf{p}_2(t)-\mathbf{b}_0)=d_0(t)-\delta. \end{gathered}$$

Potem velja ocena

$$|d(t)-d_0(t)| = |\mathbf{n}\cdot(\mathbf{f}(t)-\mathbf{p}(t))| \leq \|\mathbf{n}\|\cdot\|\mathbf{f}(t)-\mathbf{p}(t)\| \leq \|\mathbf{f}(t)-\mathbf{p}(t)\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \delta.$$

To pomeni, da $d(t)$ leži v pasu med $d_1(t)$ in $d_2(t)$ kot prikazuje slika (3).



SLIKA 3

2.3. **Iskanje intervalov.** Iz zgornjih dveh razdelkov vemo, da je (predznačena) razdalja točke $\mathbf{g}(t)$ od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ med $d_{\min}$ in $d_{\max}$, ter da je (predznačena) razdalja točke $\mathbf{f}(t)$ od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ med $d_1(t)$ in $d_2(t)$. Vsa tista območja, kjer je $d_1(t) < d_{\min}$ in $d_2(t) > d_{\max}$, lahko zavržemo. Natančneje, če najdemo rešitve enačb

$$d_1(t) = d_{\min} \text{ in } d_2(t) = d_{\max},$$

potem lahko v domeni krivulje $\mathbf{f}$ najdemo intervale $[\alpha_i, \beta_i]$, ki jih iščemo. V obeh enačbah iščemo ničle polinoma. Če smo krivuljo $\mathbf{f}$ aproksimirali s krivuljo stopnje 2 ali 3, potem lahko ti dve enačbi rešimo analitično, kar je v praksi najbolj učinkovita možnost.

2.4. **Psevdo koda algoritma.**

Vhod: $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \beta], [\xi, \eta], k)$: ravninski Bèzierjevi krivulji, njuni domeni in stopnja aproksimacijske krivulje

if $|\alpha - \beta| < \epsilon$ in $|\xi - \eta| < \epsilon$ **then** — ustavitveni pogoj
    return $[\alpha, \beta], [\xi, \eta]$
else
    if $|\alpha - \beta| < |\xi - \eta|$ **then** — če ima $\mathbf{f}$ manjšo domeno
        $\mathit{HybridClip}(\mathbf{g}, \mathbf{f}, [\xi, \eta], [\alpha, \beta], k)$ — zamenjamo vlogi $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$
    else
        $L, C \leftarrow \mathit{fat\ line}(\mathbf{g}), \mathit{fat\ curve}(\mathbf{f})$ — aproksimiraj $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$
        Najdi intervale $[\alpha_i, \beta_i]$, kjer je $L \cap C \neq \emptyset$
        if $l > 0$ in $\max_{i=1,\ldots,l} \{|\alpha_i - \beta_i|\} \geq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ **then** — aproksimacija ni dobra
            return $\mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
            $\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
            $\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$
            $\cup\, \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$
        else — aproksimacija je dobra
            $S \leftarrow \emptyset$
            for $i = 1, \ldots, l$ **do**
                $S \leftarrow S \cup \mathit{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha_i, \beta_i], [\xi, \eta], k)$ — rekurziven klic
            end for
            return S — vrnemo rezultat
        end if
    end if
end if

3. Red konvergence

Trditev 3.1. *invarianca norm za afine transormacije*

Dokaz. □

Lema 3.2. *Naj bo* $\mathbf{f}$ *ravninska Bèzierjeva krivulja in* $\mathbf{p}$ *njena optimalna* L_2 *aproksimacija stopnje* k*. Potem obstaja konstanta* C*, da za poljuben interval* $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ *velja* $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq C|\alpha - \beta|^{k+1}$.

Dokaz. Spomnimo se, da za poljubni normi $\|\cdot\|_1$ in $\|\cdot\|_2$ na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V obstajata konstanti $0 < C_1 \leq C_2$, tako da je

$$C_1\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C_2\|v\|_2, \; v \in V. \tag{2}$$

Zato obstajata konstanti D_1 in D_2, da je $\|\mathbf{r}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]}$ in $\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_2 \|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$ za vsak $\mathbf{r} \in \Pi^n_{[\alpha,\beta]}$. Pri tem konstanti D_1 in D_2 nista odvisni od intervala $[\alpha,\beta]$, saj so po trditvi (3.1) norme invariantne glede na afine transformacije.

Od tod sledi, da je $\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]}$. Naj bodo komponente $\mathbf{q}_\alpha$ Taylorjevi polinomi stopnje k razviti okrog točke $t=\alpha$ za vsako komponento krivulje $\mathbf{f}$. Potem velja

$$D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]},$$

saj je $\mathbf{p}$ optimalna L_2 aproksimacija za $\mathbf{f}$. Iz (2) sledi, da je $D_1\|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 D_2 \|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$. Spomnimo se, da lahko razliko med $\mathbf{f}(t)-\mathbf{q}_\alpha(t)$ zapišemo v obliki

$$\mathbf{f}(t)-\mathbf{q}_\alpha(t) = \frac{\mathbf{f}^{(k+1)}(t_o)}{(k+1)!}(t-\alpha)^{k+1},$$

kjer je $\mathbf{f}^{(k+1)}$ $(k+1)$-vi odvod krivulje $\mathbf{f}$ in kjer vse člene opazujemo po komponentah. Od tod dobimo oceno

$$D_1 D_2 \|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!} D_1 D_2 \max_{t\in[0,1]} \|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\| |\alpha-\beta|^{k+1}.$$

□

Lema 3.3. *Naj bo* $\mathbf{f}$ *ravninska Bèzierjeva krivulja stopnje* n. *Potem obstajajo konstante* C_j, *tako da za poljuben interval* $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ *in optimalno* L_2 *aproksimacijo* $\mathbf{p}$ *stopnje* k *od* $\mathbf{f}$ *velja* $\|\mathbf{f}^{(j)}-\mathbf{p}^{(j)}\|_\infty \leq C_j |\alpha-\beta|^{k+1-j}$, *za* $j=0,1,\ldots,k$.

Dokaz. Definirajmo novo normo z naslednjim predpisom

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha,\beta]} = \|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + |\alpha-\beta| \|\mathbf{r}'\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + \ldots + |\alpha-\beta|^k \|\mathbf{r}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha,\beta]}.$$

To je res norma, saj je $\|\cdot\|_\infty$ norma. Po trditvi (3.1) in iz neka referenca sledi, da obstaja konstanta D_1, da je

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha,\beta]}.$$

S pomočjo te ocene lahko zapišemo

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_*^{[\alpha,\beta]} = \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + |\alpha-\beta| \|\mathbf{f}'-\mathbf{p}'\|_\infty^{[\alpha,\beta]} + \ldots + \\ + |\alpha-\beta|^k \|\mathbf{f}^{(k)}-\mathbf{p}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]}$$

Sedaj podobno kot v lemi (3.2) s pomočjo Taylorjevega polinoma in izreka o ostanku ocenimo

$$D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 \|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha,\beta]} \leq D_1 D_2 \|\mathbf{f}-\mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \\ \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!} D_1 D_2 \max_{t\in[0,1]} \|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\| |\alpha-\beta|^{k+1}.$$

□

Definicija 3.4. *Naj bosta* $\mathbf{f}(t)$ *in* $\mathbf{g}(s)$ *ravninski Bèzierjevi krivulji s presečiščem* $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(s_0)$. *Presečišče* $\mathbf{z}_0$ *imenujemo:*

- transverzalno presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$,
- tangentno presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) = \mathbf{0}$ *in* $\mathbf{f}'(t_0) \neq 0$, $\mathbf{g}'(s_0) \neq 0$, *in*
- degenerirano presečišče, *če je* $\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{0}$ *ali* $\mathbf{g}'(s_0) = \mathbf{0}$.

Trditev 3.5. *Naj imata Bezierjevi krivulji* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{g}$ *transverzalno presečišče v* $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(s_0)$. *Potem obstajajo konstante* C_f, C'_f, C_g *in* C'_g, *da za dovolj velike* $i \in \mathbb{N}$ *velja*

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| \leq C_f|\alpha_i - \beta_i|^{k+1} + C_g|\xi_i - \eta_i|^2 \tag{3}$$

oz.

$$|\xi_{i+1} - \eta_{i+1}| \leq C'_f|\alpha_i - \beta_i|^2 + C'_g|\xi_i - \eta_i|^{k+1}. \tag{4}$$

Dokaz. Dokazali bomo le neenakost (3), saj je dokaz za (4) podoben.

Naj bosta $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$ zaporedji intervalov, ki jih algoritem generira. Oglejmo si kako se algoritem obnaša za velike i. Ker se dolžine intervalov v vsakem koraku zmanjšajo vsaj za polovico, je

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_i - \beta_i| = 0 \text{ in } \lim_{i\to\infty} |\xi_i - \eta_i| = 0.$$

Sledi, da $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ konvergira proti tangenti $\mathbf{g}'(s_0)$. Zato gre normala $\mathbf{n}$ na $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ proti normali $\mathbf{n}_0$ na $\mathbf{g}(s_0)$.

Naj bo $\omega = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)$. Po predpostavki je $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$, torej je $\omega \neq 0$.

Oglejmo si situacijo v i-tem koraku algoritma, ki jo prikazuje slika (??). Velja

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| = h_{i+1,\mathbf{f}} \leq L_{i+1} = l_{i+1,1} + l_{i+1,2} + l_{i+1,3}.$$

Želimo oceniti člene na desni strani neenakosti. Ker je $\frac{\omega}{4} = \frac{d_{max} - d_{min}}{l_{i+1,1} + l_{i+1,3}}$ je

$$l_{i+1,1} + l_{i+1,3} = \frac{4(d_{max} - d_{min})}{\omega}. \tag{5}$$

Želimo oceniti še člen $l_{i+1,2}$. V ta namen si najprej oglejmo ali sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ naraščajoči. Najprej opazimo, da obstaja tak $\epsilon_1 > 0$, da je za dovolj velike i

$$|d'(t_0) - \omega| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| < \frac{\omega}{4}, \tag{6}$$

ko je $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_1$, saj gre $\mathbf{n}$ proti $\mathbf{n}_0$, ko $i \to \infty$. Obstaja tudi tak $\epsilon_2 > 0$, da je za dovolj velike i

$$\|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| < \frac{\omega}{4}, \tag{7}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_2$ saj je $\mathbf{f}'$ zvezna. Dalje obstaja tudi tak $\epsilon_3 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$|d'(t) - d'_1(t)| < \frac{\omega}{4}, \tag{8}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_3$, saj po lemi (3.3) velja

$$|d'(t) - d'_1(t)| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t))| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq C|\alpha_i - \beta_i|^k.$$

Naj bo $\epsilon_4 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. S pomočjo ocen (6) in (7) lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
|d'(t) - \omega| &= |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\
&\leq |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0)| + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\
&\leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| + |d'(t_0) - \omega| \\
&\leq \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{2},
\end{aligned}$$

za vse dovolj velike i, tako da je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_4$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_4$. Zato je

$$d'(t) < \frac{\omega}{2}, \tag{9}$$

in skupaj z (8) dobimo, da je $d'_1(t) = d'_2(t) > \frac{\omega}{4}$. Torej smo ugotovili, da sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ strogo naraščajoči na dovolj poznih intervalih $[\alpha_i, \beta_i]$.

Od tod sledi, da za poljuben y_0, za katerega velja $d_1(\alpha_i) < y_0 < d_2(\beta_i)$, velja, da imata enačbi $d_1(t) = y_0$ in $d_2(t) = y_0$ rešitvi t_1 in t_2 na intervalu $[\alpha_i, \beta_i]$. Zato je

$$l_{i+1,2} \leq \sup_{y_0 \in (d_1(\alpha_i), d_2(\beta_i))} \{|t_1 - t_2|\,;\, d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0\}.$$

Če najdemo oceno za $|t_1 - t_2|$, potem lahko s pomočjo zgornje enačbe ocenimo $l_{i+1,2}$. Oceno za $|t_1 - t_2|$ bomo dobili na sledeč način. Opazimo, da za $d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0$ velja

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = 2\delta,$$

kjer je δ kot v delta. Naj bo $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$. Potem po Lagrange-ovem izreku o srednji vrednosti obstajata takšna $t^\star$ in $t^\diamond$, da je

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2) = (x(t_1) - x(t_2), y(t_1) - y(t_2)) = (x'(t^\star)(t_1 - t_2), y'(t^\diamond)(t_1 - t_2)).$$

Od tod dobimo oceno

$$\begin{aligned}
|\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star),&y'(t^\diamond)) - d'(t)| \\
&= |\mathbf{n}(x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t)| \\
&\leq \|(x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - \mathbf{f}'(t)\| \\
&= \|(x'(t^\star), y'(t^\star)) - \mathbf{f}'(t) + (0, y'(t^\diamond)) - (0, y'(t^\star))\| \\
&\leq \|\mathbf{p}'(t^\star) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^\star)\| \\
&\leq \|\mathbf{p}'(t^\star) - \mathbf{p}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^\star)\| \\
&\leq 2 \max_{t^1, t^2 \in [\alpha_i, \beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_\infty^{[\alpha_i, \beta_i]}.
\end{aligned}$$

Po lemi (3.3) in ker je $\mathbf{p}'(t)$ enakomerno zvezna na $[\alpha_i, \beta_i]$ obstaja $\epsilon_5 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$\max_{t^1, t^2 \in [\alpha_i, \beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| < \frac{\omega}{16},$$
$$\|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_\infty^{[\alpha_i, \beta_i]} < \frac{\omega}{8},$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_5$. Naj bo $\epsilon_0 = \min(\epsilon_4, \epsilon_5)$. Potem je

$$|\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond)) - d'(t)| < \frac{\omega}{4},$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_0$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_0$. Če (9) kombiniramo z zgornjo neenakostjo dobimo oceno

$$\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond)) > \frac{\omega}{4}.$$

Ker je $2\delta_i = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = (t_1 - t_2)\mathbf{n} \cdot (x'(t^\star), y'(t^\diamond))$, dobimo

$$|t_1 - t_2| < \frac{2\delta_i}{\omega/4} = \frac{8\delta_i}{\omega}.$$

□

4. Zaključki

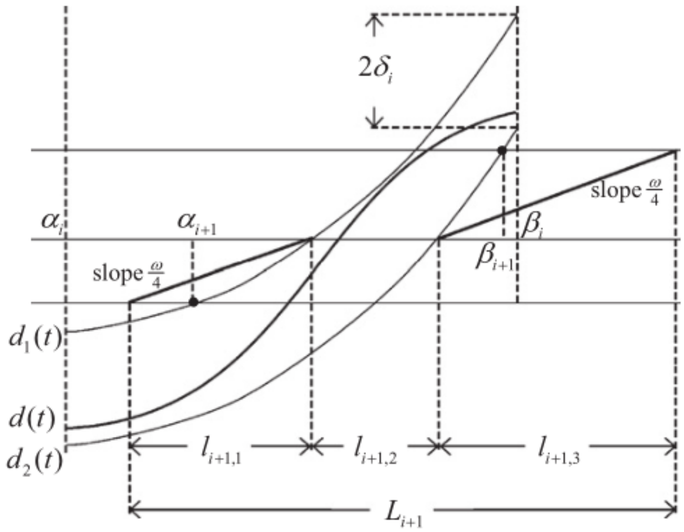
grafi, komentarji

Literatura

[1] Sederberg T, Nishita T. Curve intersection using Bèzier clipping. Comput Aided Des 1990;22(9):538–49.

[2] I. Priimek, *Naslov članka*, okrajšano ime revije **letnik revije** (leto izida) strani od–do.

[3] C. Velkovrh, *Nekaj navodil avtorjem za pripravo rokopisa*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 62–64.



Slika 4. Situacija v i-tem koraku algoritma.