

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

**Iskanje presečišč Bèzierjevih krivulj z metodo hibridnih
izrezkov**

Domen Keglevič

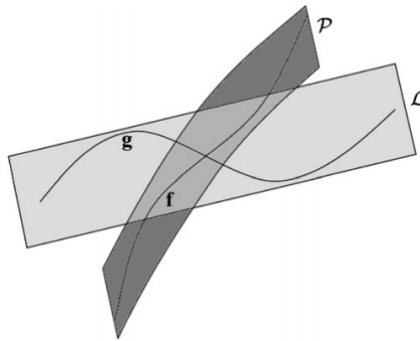
1. UVOD

V seminarski nalogi nas bo zanimalo kako najti presečišča dveh ravninskih Bèzierjevih krivulj. Pri tem nas ne zanimajo koordinate presečišč, temveč točke v domeni, ki se preslikajo v presečišča. Ta problem lahko formalno opišemo na naslednji način. Naj bosta $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{g} : [\xi, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravninski Bèzierjevi krivulji. Želimo najti učinkovit algoritem, ki za poljuben $\epsilon > 0$ vrne pare intervalov $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$, ki vsebujejo presečišča $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{g}(s_i)$, $t_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $s_i \in [\xi_i, \eta_i]$, tako da velja $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon$.

Ta problem se da rešiti na več načinov. Tu bomo predstavili metodo hibridnih izrezkov, ki je razširitev metode Bèzierjevih izrezkov.

Metoda Bèzierjevih izrezkov najprej aproksimira krivuljo \mathbf{g} z ozkim pasom \mathcal{L} v ravnini (*fat line*), tako da \mathbf{g} leži znotraj \mathcal{L} . Nato izračuna presek pasa \mathcal{L} in konveksne ovojnice kontrolnih točk krivulje \mathbf{f} , ter definicijsko območje krivulje \mathbf{f} omeji na intervale, kjer je presek neprazen. Nato vlogi \mathbf{f} in \mathbf{g} zamenja in postopek ponavlja, dokler ne pride do željene natančnosti.

Ideja metode hibridnih izrezkov je podobna kot ideja metode Bèzierjevih izrezkov, le da ne opazujemo presek pasa \mathcal{L} s konveksno ovojnico kontrolnih točk krivulje \mathbf{f} , ampak z območjem \mathcal{P} (*fat curve*). Tega dobimo tako, da z nižanjem stopnje krivulje \mathbf{f} dobimo aproksimacijo, ki jo lahko premaknemo v dve nasprotni smeri tako, da je krivulja \mathbf{f} vsebovana v območju \mathcal{P} vmes (slika (1)). Nato krivuljo \mathbf{f} zmanjšamo na tiste intervale, kjer je presek $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ neprazen. V naslednjem koraku vlogi \mathbf{f} in \mathbf{g} zamenjamo in postopek ponavljamo do željene natančnosti.



SLIKA 1. *Fat line* \mathcal{L} in *fat curve* \mathcal{P} , ki vsebujeta \mathbf{g} in \mathbf{f} .

2. METODA HIBRIDNIH IZREZKOV

Vpeljimo nekaj oznak, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. Z

$$B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t) = \binom{n}{i} \frac{(t-\alpha)^i(\beta-t)^{n-i}}{(\beta-\alpha)^n}$$

označimo i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n na intervalu $[\alpha, \beta]$. Intervale $[\alpha, \beta]$ namesto intervala $[0, 1]$ opazujemo zato, ker bo algoritem generiral zaporedje vedno manjših intervalov.

Trditev 2.1. Velja $B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t) \geq 0$ za vsak $t \in [\alpha, \beta]$.

Dokaz. V definiciji $B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t)$ so vsi členi v števcu in imenovalcu večji ali enaki 0. \square

Trditev 2.2. Velja $\sum_{i=0}^n B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t) = 1$.

Dokaz. Vsoto razpišemo in dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(t-\alpha)^i(\beta-t)^{n-i}}{(\beta-\alpha)^n} \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (t-\alpha)^i(\beta-t)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \cdot ((t-\alpha) + (\beta-t))^n = 1. \end{aligned}$$

\square

Naj bosta \mathbf{f} in \mathbf{g} ravninski Bèzierjevi krivulji dani z

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

in

$$\mathbf{g}(s) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_j B_{j,[\xi,\eta]}^m(s), \quad s \in [\xi, \eta],$$

kjer so $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke od \mathbf{f} oz. \mathbf{g} . Naj bo $\|\cdot\|$ Evklidska norma na \mathbb{R}^2 . Naj bo $\Pi_{[\alpha,\beta]}^n$ vektorski prostor ravninskih Bèzierjevih krivulj stopnje n . Na njem definiramo naslednje norme:

(1) Normalizirana L_2 norma

$$\|\mathbf{f}\|_2^{[\alpha,\beta]} = \sqrt{\frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt},$$

(2) L_{∞} norma

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty}^{[\alpha,\beta]} = \max_{t \in [\alpha,\beta]} \|\mathbf{f}(t)\|,$$

(3) BB norma

$$\|\mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} = \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i\|.$$

Prepričajmo se, da je $\|\cdot\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]}$ res norma. Velja $\|\mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} \geq 0$, saj je $\|\mathbf{a}_i\| \geq 0$. Velja

$$\|\mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} = 0 \Leftrightarrow \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i\| = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}_i\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Homogenost sledi iz enakosti

$$\|\gamma \mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} = \max_{i=0,\dots,n} \|\gamma \mathbf{a}_i\| = |\gamma| \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i\| = |\gamma| \|\mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]},$$

trikotniška neenakost pa iz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} &= \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i\| \leq \max_{i=0,\dots,n} (\|\mathbf{a}_i\| + \|\mathbf{b}_i\|) \\ &\leq \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{a}_i\| + \max_{i=0,\dots,n} \|\mathbf{b}_i\| = \|\mathbf{f}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]} + \|\mathbf{g}\|_{\text{BB}}^{[\alpha,\beta]}. \end{aligned}$$

Tudi za $\|\cdot\|_2^{[\alpha,\beta]}$ in $\|\cdot\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$ se lahko hitro prepričamo, da ustrezata definiciji norme. Za vse navedene norme in poljubno afino preslikavo $\mathcal{A} : t \mapsto A_0 + tA_1$ velja tudi naslednja enakost

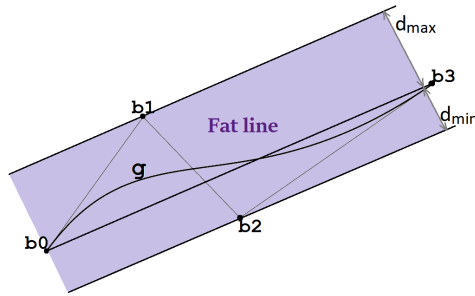
$$\|\mathbf{f}\|_*^{[\alpha,\beta]} = \|\mathbf{f} \circ \mathcal{A}^{-1}\|_*^{\mathcal{A}([\alpha,\beta])}.$$

Drugače povedano, navedene norme so invariantne glede na afino transformacijo domene.

2.1. Fat line. Naj bo \mathbf{n} normalni vektor, ki je pravokoten na $\mathbf{b}_m - \mathbf{b}_0$. Definiramo predznačeni razdalji

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \max_{i=0,\dots,m} (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0)), \\ d_{\min} &= \min_{i=0,\dots,m} (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0)). \end{aligned}$$

Območje \mathcal{L} , ki ga sestavljajo točke, ki so od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ oddaljene kvečjemu za d_{\min} oz. d_{\max} imenujemo *fat line*. Krivulja \mathbf{g} je vsebovana v \mathcal{L} , saj je v \mathcal{L} vsebovana njena konveksna ovojnica.



SLIKA 2. Krivulja \mathbf{g} in *fat line*.

2.2. Fat curve. Naj bo $\hat{\mathbf{p}}(t)$ polinom stopnje $k < n$, ki optimalno aproksimira $\mathbf{f}(t)$ glede na normo L_2 . Konstruiramo ga s pomočjo nižanja stopnje krivulje $\mathbf{f}(t)$, podrobnosti o tem kako to naredimo so v [3]. Sedaj polinomu $\hat{\mathbf{p}}(t)$ s pomočjo višanja stopnje lahko zvišamo stopnjo do n in zapišemo

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i B_{i,[\alpha,\beta]}^n(t),$$

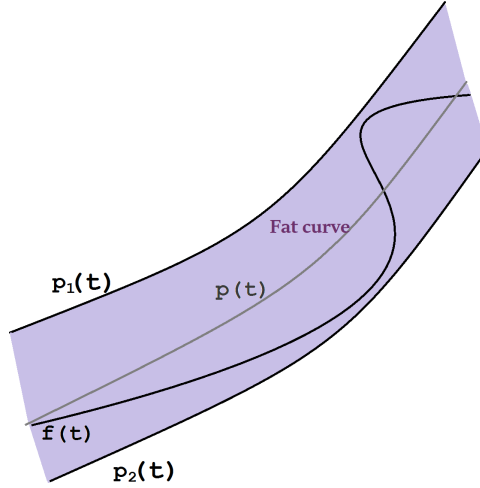
kjer so \mathbf{c}_i nove kontrolne točke. Naj bo

$$\delta = \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{BB}^{[\alpha, \beta]}. \quad (1)$$

Velja naslednja ocena

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\| = \left\| \sum_{i=0}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i) B_{i, [\alpha, \beta]}^n(t) \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i\| B_{i, [\alpha, \beta]}^n(t) \leq \delta.$$

Sledi, da $\mathbf{f}(t)$ leži v območju \mathcal{P} med $\mathbf{p}_1(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) + \delta \mathbf{n}$ in $\mathbf{p}_2(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) - \delta \mathbf{n}$, kjer je \mathbf{n} normala, ki je pravokotna na $\mathbf{b}_m - \mathbf{b}_0$. Območje \mathcal{P} imenujemo *fat curve*.



SLIKA 3. Krivulja \mathbf{f} in *fat curve*.

2.3. Iskanje intervalov. Naj bodo oznake kot zgoraj. Naj bo

$$\begin{aligned} d(t) &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}(t) - \mathbf{b}_0), \\ d_0(t) &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t) - \mathbf{b}_0), \\ d_1(t) &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{b}_0) = d_0(t) + \delta, \\ d_2(t) &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}_2(t) - \mathbf{b}_0) = d_0(t) - \delta. \end{aligned}$$

Potem velja ocena

$$|d(t) - d_0(t)| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t))| \leq \|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\| \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\infty}^{[\alpha, \beta]} \leq \delta.$$

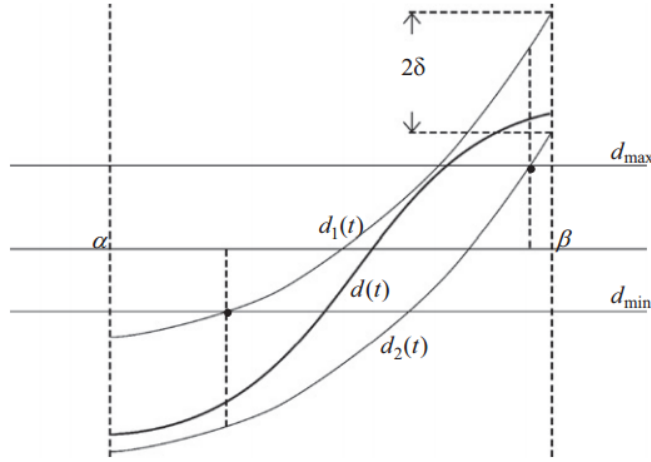
To pomeni, da $d(t)$ leži v pasu med $d_1(t)$ in $d_2(t)$ kot prikazuje slika (4).

Iz zgornjih dveh razdelkov vemo, da je predznačena razdalja točke $\mathbf{g}(t)$ od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ vsebovana v intervalu $[d_{\min}, d_{\max}]$, in da je predznačena razdalja točke $\mathbf{f}(t)$ od premice $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_m$ vsebovana v intervalu $[d_2(t), d_1(t)]$. Zato lahko tista območja, kjer je $d_1(t) < d_{\min}$ in $d_2(t) > d_{\max}$, zavržemo. Splošneje, če najdemo rešitve enačb

$$d_1(t) = d_{\min} \quad \text{in} \quad d_2(t) = d_{\max},$$

potem lahko v domeni krivulje \mathbf{f} najdemo iskane intervale $[\alpha_i, \beta_i]$, ki vsebujejo točke, ki se preslikajo v presečišča od \mathbf{f} in \mathbf{g} .

V obeh zgoraj navedenih enačbah iščemo ničle polinoma. Če smo krivuljo \mathbf{f} aproksimirali s krivuljo stopnje 2 ali 3, potem lahko ti dve enačbi rešimo analitično. To je v praksi najbolj učinkovita možnost.



SLIKA 4

2.4. Psevdo koda algoritma.

Vhod: $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \beta], [\xi, \eta], k)$: ravninski Bèzierjevi krivulji, njuni domeni in stopnja aproksimacijske krivulje

```

1: if  $|\alpha - \beta| < \epsilon$  in  $|\xi - \eta| < \epsilon$  then                                ustavitveni pogoj
2:   return  $[\alpha, \beta], [\xi, \eta]$ 
3: else
4:   if  $|\alpha - \beta| < |\xi - \eta|$  then                                       če ima f manjšo domeno
5:      $\text{HybridClip}(\mathbf{g}, \mathbf{f}, [\xi, \eta], [\alpha, \beta], k)$                     zamenjamo vloge f in g
6:   else
7:      $L, C \leftarrow \text{fat line}(\mathbf{g}), \text{fat curve}(\mathbf{f})$                     aproksimiraj f in g
8:     Najdi intervale  $[\alpha_i, \beta_i]$ , kjer je  $L \cap C \neq \emptyset$ 
9:     if  $l > 0$  in  $\max_{i=1, \dots, l} \{|\alpha_i - \beta_i|\} \geq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$  then    aproksimacija ni dobra
10:      return  $\text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$ 
            $\cup \text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$ 
            $\cup \text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\frac{1}{2}(\xi + \eta), \eta], k)$ 
            $\cup \text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta], [\xi, \frac{1}{2}(\xi + \eta)], k)$ 
11:    else                                                                    aproksimacija je dobra
12:       $S \leftarrow \emptyset$ 
13:      for  $i = 1, \dots, l$  do
14:         $S \leftarrow S \cup \text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha_i, \beta_i], [\xi, \eta], k)$     rekurziven klic
15:      end for
16:      return  $S$                                                                 vrnemo rezultat
17:    end if
18:  end if
19: end if

```

Klic funkcije $\text{HybridClip}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\alpha, \beta], [\xi, \eta], k)$ vrne pare intervalov $[\alpha_i, \beta_i], [\xi_i, \eta_i]$, ki vsebujejo vsa presečišča in so manjši od predpisanega ϵ . Lahko se zgodi, da med njimi vrne tudi par intervalov, kjer se krivulji **f** in **g** ne sekata, ampak prideta le blizu skupaj.

3. RED KONVERGENCE

Zanima nas ali lahko povemo kaj o redu konvergence. Izkaže se, da lahko za nekatere (pogoste) primere dokažemo, da je red konvergence vsaj kvadratičen. Za ta dokaz najprej potrebujemo dve pomožni lemi.

Lema 3.1. *Naj bo \mathbf{f} ravninska Bèzierjeva krivulja in \mathbf{p} njena optimalna L_2 aproksimacija stopnje k . Potem obstaja konstanta C , da za poljuben interval $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ velja $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha, \beta]} \leq C|\alpha - \beta|^{k+1}$.*

Dokaz. Spomnimo se, da za poljubni normi $\|\cdot\|_1$ in $\|\cdot\|_2$ na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V obstajata konstanti $0 < C_1 \leq C_2$, tako da je

$$C_1\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C_2\|v\|_2, \quad v \in V. \quad (2)$$

Zato obstajata konstanti D_1 in D_2 , da je $\|\mathbf{r}\|_{BB}^{[\alpha, \beta]} \leq D_1\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha, \beta]}$ in $\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha, \beta]} \leq D_2\|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha, \beta]}$ za vsak $\mathbf{r} \in \Pi_{[\alpha, \beta]}^n$. Pri tem konstanti D_1 in D_2 nista odvisni od intervala $[\alpha, \beta]$, saj so norme invariantne glede afine transformacije domene.

Od tod sledi, da je $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_{BB}^{[\alpha, \beta]} \leq D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha, \beta]}$. Naj bodo komponente \mathbf{q}_α Taylorjevi polinomi stopnje k razviti okrog točke $t = \alpha$ za vsako komponento krivulje \mathbf{f} . Potem velja

$$D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha, \beta]} \leq D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha, \beta]},$$

saj je \mathbf{p} optimalna L_2 aproksimacija za \mathbf{f} . Iz (2) sledi, da je $D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha, \beta]} \leq D_1D_2\|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha, \beta]}$. Spomnimo se, da lahko razliko med $\mathbf{f}(t) - \mathbf{q}_\alpha(t)$ zapišemo v obliki

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{q}_\alpha(t) = \frac{\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!}(t - \alpha)^{k+1},$$

kjer je $\mathbf{f}^{(k+1)}$ $(k+1)$ -vi odvod krivulje \mathbf{f} in kjer vse člene opazujemo po komponentah. Od tod dobimo oceno

$$D_1D_2\|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha, \beta]} \leq \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!}D_1D_2\max_{t \in [0, 1]}\|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\||\alpha - \beta|^{k+1}.$$

□

Lema 3.2. *Naj bo \mathbf{f} ravninska Bèzierjeva krivulja stopnje n . Potem obstajajo konstante C_j , tako da za poljuben interval $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ in optimalno L_2 aproksimacijo \mathbf{p} stopnje k od \mathbf{f} velja $\|\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{p}^{(j)}\|_\infty \leq C_j|\alpha - \beta|^{k+1-j}$, za $j = 0, 1, \dots, k$.*

Dokaz. Definirajmo novo normo s predpisom

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha, \beta]} = \|\mathbf{r}\|_\infty^{[\alpha, \beta]} + |\alpha - \beta|\|\mathbf{r}'\|_\infty^{[\alpha, \beta]} + \dots + |\alpha - \beta|^k\|\mathbf{r}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha, \beta]}.$$

To je res norma, saj je $\|\cdot\|_\infty$ norma. Zaradi invariance norm pod afino transformacijo obstaja konstanta D_1 , ki je neodvisna od intervala $[\alpha, \beta]$, tako da je

$$\|\mathbf{r}\|_*^{[\alpha, \beta]} \leq D_1\|\mathbf{r}\|_2^{[\alpha, \beta]}.$$

Po eni strani je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_*^{[\alpha, \beta]} &= \|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_\infty^{[\alpha, \beta]} + |\alpha - \beta|\|\mathbf{f}' - \mathbf{p}'\|_\infty^{[\alpha, \beta]} + \dots + \\ &\quad + |\alpha - \beta|^k\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{p}^{(k)}\|_\infty^{[\alpha, \beta]} \leq D_1\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha, \beta]}, \end{aligned} \quad (3)$$

po drugi strani lahko (podobno kot v lemi (3.1)) s pomočjo Taylorjevega polinoma in izreka o ostanku ocenimo

$$D_1 \|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^{[\alpha, \beta]} \leq D_1 \|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_2^{[\alpha, \beta]} \leq D_1 D_2 \|\mathbf{f} - \mathbf{q}_\alpha\|_\infty^{[\alpha, \beta]} \leq \frac{\sqrt{2}}{(k+1)!} D_1 D_2 \max_{t \in [0,1]} \|\mathbf{f}^{(k+1)}(t_0)\| |\alpha - \beta|^{k+1}. \quad (4)$$

□

Iz (3) in (4) sledijo ocene iz leme.

Definicija 3.3. Naj bosta $\mathbf{f}(t)$ in $\mathbf{g}(s)$ ravninski Bèzierjevi krivulji s presečiščem $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(s_0)$. Presečišče \mathbf{z}_0 imenujemo:

- transverzalno presečišče, če je $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$,
- tangentno presečišče, če je $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) = \mathbf{0}$ in $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$,
- degenerirano presečišče, če je $\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{0}$ ali $\mathbf{g}'(s_0) = \mathbf{0}$.

Trditev 3.4. Naj imata Bèzierjevi krivulji \mathbf{f} in \mathbf{g} transverzalno presečišče v $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(s_0)$. Potem obstajajo konstante C_f, C'_f, C_g in C'_g , da za dovolj velike $i \in \mathbb{N}$ velja

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| \leq C_f |\alpha_i - \beta_i|^{k+1} + C_g |\xi_i - \eta_i|^2 \quad (5)$$

oz.

$$|\xi_{i+1} - \eta_{i+1}| \leq C'_f |\alpha_i - \beta_i|^2 + C'_g |\xi_i - \eta_i|^{k+1}. \quad (6)$$

Dokaz. Dokazali bomo le neenakost (5), saj je dokaz za (6) podoben.

Naj bosta $[\alpha_i, \beta_i]$ in $[\xi_i, \eta_i]$ zaporedji intervalov, ki jih algoritem generira. Oglejmo si kako se algoritem obnaša za velike i . Ker se dolžine intervalov v vsakem koraku zmanjšajo vsaj za polovico, je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\alpha_i - \beta_i| = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |\xi_i - \eta_i| = 0.$$

Sledi, da $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_m$ konvergira proti tangenti $\mathbf{g}'(s_0)$. Zato gre normala \mathbf{n} na $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_m$ proti normalni \mathbf{n}_0 na $\mathbf{g}(s_0)$.

Naj bo $\omega = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)$. Po predpostavki je $\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}'(s_0) \neq \mathbf{0}$, torej je $\omega \neq 0$.

Oglejmo si situacijo v i -tem koraku algoritma, ki jo prikazuje slika (5). Velja

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| = h_{i+1, \mathbf{f}} \leq L_{i+1} = l_{i+1,1} + l_{i+1,2} + l_{i+1,3}.$$

Želimo oceniti člene na desni strani neenakosti. Ker je $\frac{\omega}{4} = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{l_{i+1,1} + l_{i+1,3}}$ je

$$l_{i+1,1} + l_{i+1,3} = \frac{4(d_{\max} - d_{\min})}{\omega}. \quad (7)$$

Želimo oceniti še člen $l_{i+1,2}$. V ta namen si najprej oglejmo ali sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ naraščajoči. Najprej opazimo, da obstaja tak $\epsilon_1 > 0$, da je za dovolj velike i

$$|d'(t_0) - \omega| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| < \frac{\omega}{4}, \quad (8)$$

ko je $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_1$, saj gre \mathbf{n} proti \mathbf{n}_0 , ko $i \rightarrow \infty$. Obstaja tudi tak $\epsilon_2 > 0$, da je za dovolj velike i

$$\|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| < \frac{\omega}{4}, \quad (9)$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_2$ saj je \mathbf{f}' zvezna. Dalje obstaja tudi tak $\epsilon_3 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$|d'(t) - d'_1(t)| < \frac{\omega}{4}, \quad (10)$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_3$, saj po lemi (3.2) velja

$$|d'(t) - d'_1(t)| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t))| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\| \leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{p}'(t)\|_{\infty}^{[\alpha, \beta]} \leq C|\alpha_i - \beta_i|^k.$$

Naj bo $\epsilon_4 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. S pomočjo ocen (8) in (9) lahko ocenimo

$$\begin{aligned} |d'(t) - \omega| &= |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\ &\leq |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0)| + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{f}'(t_0)| \\ &\leq \|\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)\| + |d'(t_0) - \omega| \\ &\leq \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

za vse dovolj velike i , tako da je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_4$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_4$. Zato je

$$d'(t) < \frac{\omega}{2}, \quad (11)$$

in skupaj z (10) dobimo, da je $d'_1(t) = d'_2(t) > \frac{\omega}{4}$. Torej smo ugotovili, da sta funkciji $d_1(t)$ in $d_2(t)$ strogo naraščajoči na dovolj poznih intervalih $[\alpha_i, \beta_i]$.

Od tod sledi, da za poljuben y_0 , za katerega velja $d_1(\alpha_i) < y_0 < d_2(\beta_i)$, velja, da imata enačbi $d_1(t) = y_0$ in $d_2(t) = y_0$ rešitvi t_1 in t_2 na intervalu $[\alpha_i, \beta_i]$. Zato je

$$l_{i+1,2} \leq \sup_{y_0 \in (d_1(\alpha_i), d_2(\beta_i))} \{|t_1 - t_2|; d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0\}. \quad (12)$$

Če najdemo oceno za $|t_1 - t_2|$, potem lahko s pomočjo zgornje enačbe ocenimo $l_{i+1,2}$. Oceno za $|t_1 - t_2|$ bomo dobili na sledeč način. Opazimo, da za $d_1(t_1) = d_2(t_2) = y_0$ velja

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = 2\delta,$$

kjer je δ kot v (1). Naj bo $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$. Potem po Lagrangeovem izreku o srednji vrednosti obstajata takšna t^* in t^\diamond , da je

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2) = (x(t_1) - x(t_2), y(t_1) - y(t_2)) = (x'(t^*)(t_1 - t_2), y'(t^\diamond)(t_1 - t_2)).$$

Od tod dobimo oceno

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \cdot (x'(t^*), y'(t^\diamond)) - d'(t)| &= |\mathbf{n}(x'(t^*), y'(t^\diamond)) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'(t)| \\ &\leq \|(x'(t^*), y'(t^\diamond)) - \mathbf{f}'(t)\| \\ &= \|(x'(t^*), y'(t^*)) - \mathbf{f}'(t) + (0, y'(t^\diamond)) - (0, y'(t^*))\| \\ &\leq \|\mathbf{p}'(t^*) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^*)\| \\ &\leq \|\mathbf{p}'(t^*) - \mathbf{p}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\| + \|\mathbf{p}'(t^\diamond) - \mathbf{p}'(t^*)\| \\ &\leq 2 \max_{t^1, t^2 \in [\alpha_i, \beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| + \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_{\infty}^{[\alpha_i, \beta_i]}. \end{aligned}$$

Po lemi (3.2) in ker je $\mathbf{p}'(t)$ enakomerno zvezna na $[\alpha_i, \beta_i]$ obstaja $\epsilon_5 > 0$, da za dovolj velike i velja

$$\begin{aligned} \max_{t^1, t^2 \in [\alpha_i, \beta_i]} \|\mathbf{p}'(t^1) - \mathbf{p}'(t^2)\| &< \frac{\omega}{16}, \\ \|\mathbf{p}'(t) - \mathbf{f}'(t)\|_{\infty}^{[\alpha_i, \beta_i]} &< \frac{\omega}{8}, \end{aligned}$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_5$. Naj bo $\epsilon_0 = \min(\epsilon_4, \epsilon_5)$. Potem je

$$|\mathbf{n} \cdot (x'(t^*), y'(t^\diamond)) - d'(t)| < \frac{\omega}{4},$$

ko je $|\alpha_i - \beta_i| < \epsilon_0$ in $|\xi_i - \eta_i| < \epsilon_0$. Če (11) kombiniramo z zgornjo neenakostjo dobimo oceno

$$\mathbf{n} \cdot (x'(t^*), y'(t^\diamond)) > \frac{\omega}{4}.$$

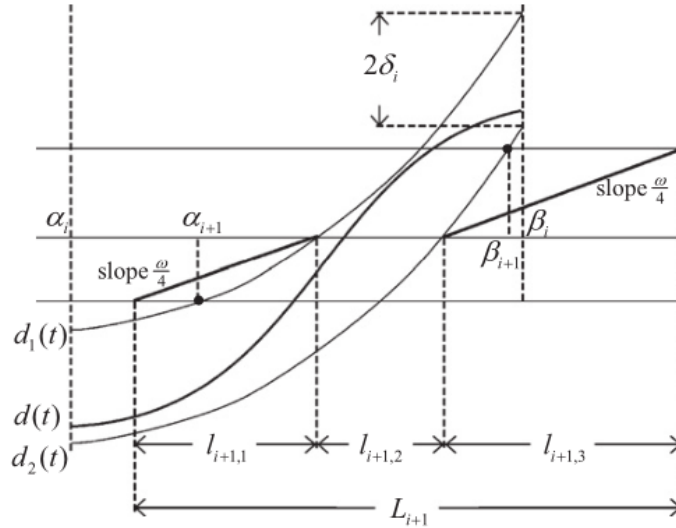
Ker je $2\delta_i = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2)) = (t_1 - t_2)\mathbf{n} \cdot (x'(t^*), y'(t^\diamond))$, dobimo

$$|t_1 - t_2| < \frac{2\delta_i}{\omega/4} = \frac{8\delta_i}{\omega}.$$

Zgornja neenakost in oceni (7) ter (12) nam dajo

$$|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| \leq L_{i+1} \leq \frac{8\delta_i}{\omega} + \frac{4(d_{\max} - d_{\min})}{\omega}.$$

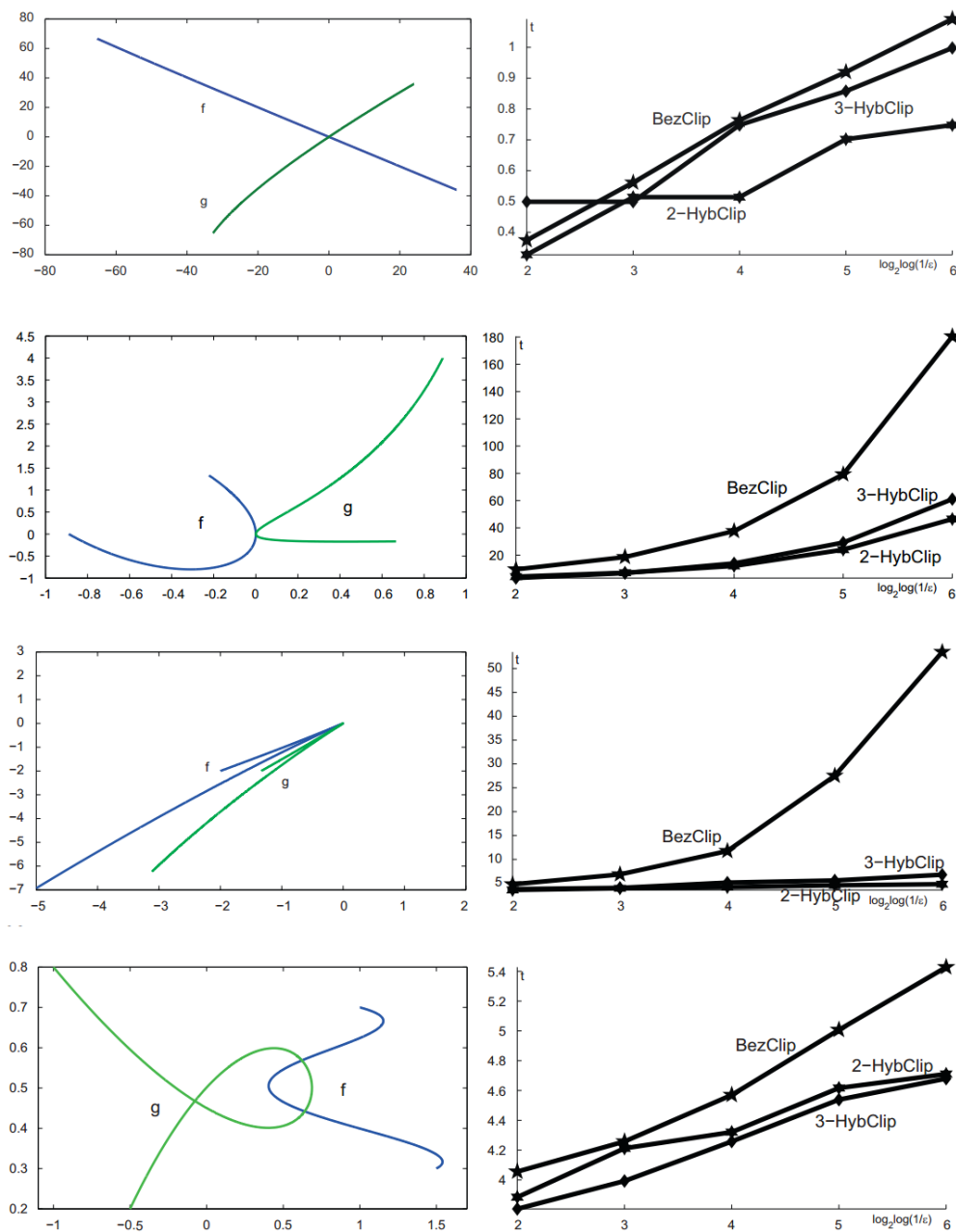
Po lemi (3.2) je $\delta_i \leq C_1|\alpha_i - \beta_i|^{k+1}$. Velja tudi $d_{\max} - d_{\min} < C_2|\xi_i - \eta_i|^2$ in od tod sledi trditev. \square



SLIKA 5. Situacija v i -tem koraku algoritma.

4. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

V [2] so opisani eksperimentalni testi metode hibridnih izrezkov. Implementirani sta aproksimaciji s krivuljo stopnje 2 in 3 ter narejene primerjave z metodo Bèzierjevih izrezkov za vse tri različne tipe presečišč in za krivulji z več kot enim presečiščem. Izkaže se, da je tudi v praksi konvergenca metode hibridnih izrezkov boljša. Pri tem je aproksimacija s krivuljo stopnje 2 pogosto boljša kot aproksimacija s krivuljo stopnje 3, razlog pa je verjetno računsko manj zahtevna aproksimacija. Primerjave so prikazane na sliki (6).



SLIKA 6. Primerjave časovne zahtevnosti, vzeto iz [2].

5. ZAKLJUČEK

Predstavili smo metodo hibridnih izrezkov, ki omogoča izračun presečišč dveh ravninskih Bèzierjevih krivulj. Algoritem temelji na aproksimaciji ene in druge krivulje z območjema, ki krivulji vsebujeta in zmanjšanjem domene le na tiste dele, kjer je presek območij neprazen. Na ta način dobimo zaporedje vedno manjših intervalov, ki konvergirajo proti presečiščem.

Pokazali smo, da je v primeru transversalnih presečišč konvergenca vsaj kvadratična. Tega nismo mogli pokazati za primer tangentnih in degeneriranih presečišč. V primeru tangentnih presečišč algoritem degenerira v metodo *deli in vladaj*, saj

območja ne omejuje krivulj dobro. V primeru degeneriranih presečišč je aproksimacija boljša. Podobno sliko pokažejo tudi eksperimentalni rezultati. Hitrost konvergence transversalnih presečišč je najboljša, hitro sledijo degenerirana presečišča in precej slabše se odrežejo tangentna presečišča.

Zaključimo, da je metoda hibridnih izrezkov uporabna tudi v praksi, saj najde vsa presečišča in je hitrejša od metode Bèzierjevih izrezkov. Možnosti za razširitve metode hibridnih izrezkov vključujejo izračun presečišč dveh racionalnih Bèzierjevih krivulj in izračun preseka dveh Bèzierjevih ploskev.

LITERATURA

- [1] Sederberg T., Nishita T., *Curve intersection using Bèzier clipping*, Comput. Aided Des., 1990, 538–49.
- [2] Qi Lou, Ligang Liu, *Curve intersection using hybrid clipping*, Computers and Graphics, 36 (5), 2012, 309–320.
- [3] Zhang R., Wang G., *Constrained Bèzier curves best multi-degree reduction in the L_2 -norm*, Prog. Nat. Sci., 2005, 15(9): 843–50