El Colegio de México A.C.
Centro de Estudios Económicos
Licenciatura en Economía
Macroeconomía III
Laboratorio 2: modelo de crecimiento de Robert Solow y Trevor Swan

1. Considere una economía con la siguiente función de producción agregada:

$$Y_t = A_t L_t^{\frac{1}{4}} K_{t-1}^{\frac{3}{4}}$$

   (a) Explique qué tipo de rendimientos a escala y marginales tiene esta economía.

   (b) Muestre analítica y formalmente la forma en la que esta economía acumula capital de manera agregada entre períodos. Ahora suponga que en cualquier año t la tasa de crecimiento del capital agregado es de 10%, la tasa de crecimiento de la población es de 3% y la tasa de crecimiento de la tecnología o el progreso tecnológico es de 3%. Con estos datos calcule la tasa de crecimiento del ingreso agregado en el año t.

   (c) Obtenga la función de producción *per capita* y utilizando los datos del inciso b) calcule la tasa de crecimiento del ingreso *per capita* en el año t.

   (d) ¿Qué pasaría con las respuestas a los incisos b) y c) si la tasa de crecimiento de la población disminuyera a 2%? ¿Y si la tasa de crecimiento del parámetro tecnológico aumentara a 5%?

2. Considere la siguiente función de producción:

$$Y_t = L_t^{\frac{1}{2}} K_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

   (a) Calcule la producción agregada suponiendo que $K_{t-1} = 49$ y $L_t = 81$ y la producción por trabajador.

   (b) Si se duplica tanto el capital como el trabajo, ¿qué ocurre con la producción?

   (c) ¿Se caracteriza esta función de producción por tener rendimientos constantes a escala? ¿Qué significa esto en términos de la homogeneidad de la función? Explique su respuesta.

   (d) Obtenga la función de producción por trabajador. Si $\frac{K_{t-1}}{L_t} = k_{t-1} = 4$, ¿cuál es el valor de $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$(ingreso por trabajador)? Ahora duplique k_{t-1} a 8. ¿Se multiplica y_t por más o por menos de dos?

   (e) ¿Muestra rendimientos constantes a escala la relación entre el ingreso por trabajador y el capital por trabajador? ¿Es esta respuesta igual a su respuesta en la parte c)? ¿Por qué si o no?

   (f) Dibuje la función de producción *per capita*, ¿tiene la misma forma general que la función de producción agregada? Explique su respuesta.

3. Entre 1950 y 1973 el PIB real *per capita* en los Estados Unidos creció a una tasa de 2.2% por año. Entre 1973 y 1992, creció a una tasa de 1.2% por año. En 1992, el PIB real *per capita* fue de \$17, 945.

   (a) Suponiendo que la tasa de crecimiento más baja (1.2%) permaneciera constante a partir de 1992, calcule cuál sería el PIB real *per capita* después de transcurridos 40 años.

   (b) Ahora suponga que la tasa de crecimiento es la más alta (2.2%) y se mantiene constante. Calcule cuál sería el PIB real *per capita* después de transcurridos 40 años.

   (c) Compare sus respuestas en a) y b). ¿Qué sugiere este análisis sobre lo que le pasará a la tasa de crecimiento del PIB *per capita*?

4. Considere a una economía que cuenta con la siguiente función de producción agregada:

$$Y_t = A_t L_t^{\frac{1}{4}} K_{t-1}^{\frac{3}{4}}$$

   (a) Suponga que $\delta = 20\%$, $s = 40\%$, $\gamma = 3\%$ y $\mu = 2\%$, calcule los niveles del capital e ingreso por trabajador efectivo, así como los niveles de consumo por trabajador efectivo en el estado estacionario. Recuerde que $\gamma = \dfrac{A_{t+1} - A_t}{A_t}$ y que $\mu = \dfrac{L_{t+1} - L_t}{L_t}$, representan las tasas de crecimiento del parámetro tecnológico y de la población, respectivamente.

   (b) En el estado estacionario ¿a qué tasa crecen las siguientes variables: el ingreso por trabajador efectivo, el ingreso por trabajador, el ingreso y capital agregados?

5. Considere una economía con la siguiente función de producción agregada:

$$Y_t = 30 L_t^{\frac{1}{2}} K_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

   (a) Obtenga la función de producción por trabajador en esta economía y calcule los niveles de ingreso, capital y consumo por trabajador en el estado estacionario suponiendo que $\delta = 15\%$ y $s = 40\%$.

   (b) Calcule el nivel de capital por trabajador de la regla de oro. ¿Es el nivel del capital en el estado estacionario obtenido en el inciso a) el nivel de la regla de oro?

   (c) Suponga que ahora la tasa de ahorro aumenta a $s = 60\%$, ¿esto generará un aumento en el consumo por trabajador en el nuevo estado estacionario? Explique y calcule el nuevo valor del consumo en el estado estacionario y compárelo con el nivel de consumo de la regla de oro.

   (d) ¿A qué tasa crecen en el estado estacionario tanto el ingreso por trabajador como el ingreso agregado en esta economía? ¿Cambian estas tasas entre los incisos a) y c)?

6. Los siguientes datos pertenecen a una economía pequeña descrita por el modelo de Robert Solow-Trevor Swan y una función de producción tipo Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} s &= 0.18 \\ \delta &= 0.05 \\ \mu &= 0.02 \\ \alpha &= 0.4 \\ K_{2010} &= 8500 \\ L_{2010} &= 4500 \end{aligned}$$

   (a) Obtenga el consumo agregado en 2011 cuando α representa la contribución al costo marginal que el uso del capital tiene en esta economía, y

   (b) Cuando α representa la contribución al costo marginal que el uso del trabajo tiene en esta economía,

   (c) Comente sobre las diferencias.

7. La función de producción de una economía es

$$Y_t = F\left(L_t, K_{t-1}\right) = \sqrt{L_t K_{t-1}}$$

Suponga que la tasa de ahorro de las familias es constante e igual a s. Asuma que el capital se deprecia a la tasa constante δ, mientras que la población crece a una tasa constante igual a μ.

   (a) Obtenga la tasa de crecimiento instantánea del capital *per capita* $\dot{k}_t$.

   (b) Suponga que se cuenta con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} s &= 0.25 \\ \delta &= 0.1 \\ \mu &= 0.025 \\ k_{t-1} &= 1 \end{aligned}$$

   Determine si el capital *per capita* en t es mayor o menor al que se tiene en $t-1$.

   (c) ¿Qué ocurre con el capital *per capita* desde $t-1$ hasta que se alcanza el estado estacionario? Obtenga los valores numéricos del capital *per capita*, el consumo *per capita* y el producto *per capita* en equilibrio (estado estacionario). ¿A qué tasa crecen estas tres variables en el estado estacionario? ¿A qué tasa crecerían el capital agregado K, el producto agregado Y y el consumo agregado C?

   (d) Obtenga el capital *per capita* de la regla de oro k_{oro}. ¿Por qué se afirma que el capital *per capita* de la regla de oro es el acervo de capital *per capita* óptimo?

   (e) Calcule la tasa de ahorro con la que se alcanzaría el nivel de capital *per capita* de la regla de oro en estado estacionario. Represente en un gráfico su resultado.

8. Una economía descrita por el modelo de Robert Solow y Trevor Swan cuenta con una función de producción:

$$Y_t = F\left(L_t, K_{t-1}\right) = L_t^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha}$$

que está caracterizada por los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} s &= 0.32 \\ \alpha &= 0.5 \\ \delta &= 0.065 \\ k^* &= 16 \end{aligned}$$

con k^* representando al capital en el estado estacionario.

(a) Calcule la tasa de crecimiento de la población en esta economía.

(b) Obtenga el producto *per capita* y el consumo *per capita* en el estado estacionario.

(c) En el año t la población es $L_t = 1000$ habitantes. Obtenga el producto agregado en t, es decir, Y_t . Ahora obtenga el nivel del producto agregado en $t = 70$.

9. Una economía cuenta con una función de producción con pesos relativos constantes en el gasto de factores productivos. La tasa de ahorro es del 18%, el coeficiente de la función de producción asociado al capital es $\alpha = 0.5$, la tasa de depreciación del capital es del 7% cada año y la población crece un 2% cada año. En 2008, el PIB total era de 48 millones de unidades y la población de 24 millones de personas.

(a) Describa la ecuación de acumulación del capital y obtenga la variación del capital *per capita* en 2009. ¿Se encuentra esta economía en el estado estacionario?

(b) Representa en una gráfica a la ecuación de acumulación del capital y la situación en la que se encuentra la economía en función de los datos previos.

(c) Las autoridades en la materia desean alcanzar un PIB total de 75 millones de unidades en 2020. Para ello, se desea conocer la tasa de ahorro que permitiría generar este aumento del PIB total. Asumiendo que en menos de doce años se alcanzaría el nuevo estado estacionario, ¿cuál debería ser la tasa de ahorro para alcanzar el objetivo deseado?

(d) Ahora asuma que el parámetro α está asociado al factor productivo trabajo. ¿Cómo cambian las respuestas de los incisos previos?

10. Una economía evoluciona de acuerdo con el modelo de Robert Solow-Trevor Swan y un progreso tecnológico que aumenta las capacidades del trabajo (labour augmenting) con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} s &= 0.24 \\ \alpha &= 0.5 \\ \delta &= 0.08 \\ \mu &= 0.025 \\ \gamma &= 0.015 \\ k_{t-1} &= 2.94 \\ A_t &= 1.5 \end{aligned}$$

donde $k_{t-1} = 2.94$ representa al capital *per capita*.

(a) Obtenga la ecuación que describe la acumulación de capital por unidad de trabajo efectivo y obtenga su tasa de variación. Represente el resultado gráficamente.

(b) Obtenga los valores del capital por unidad de trabajo efectivo y consumo por unidad de trabajo efectivo en el estado estacionario.

(c) Calcule el producto *per capita* en los periodos t y $t+1$. ¿A qué tasa está creciendo? ¿A qué tasa crecerá en el largo plazo? Represente gráficamente la evolución esperada de la tasa de crecimiento del PIB *per capita* durante el tiempo y comente de manera pormenorizada.