# 第 3 章-多维随机变量及其分布

李孟棠, 朱彬

中山大学-智能工程学院

*{limt29,zhub26}@mail.sysu.edu.cn*

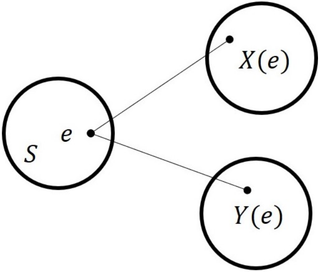
2021 年 x 月 x 日

# 章节概述

知识点:

1. 二维随机变量
2. 边缘分布
3. 条件分布
4. 相互独立的随机变量
5. 两个随机变量的函数的分布

# 3.1 二维随机变量

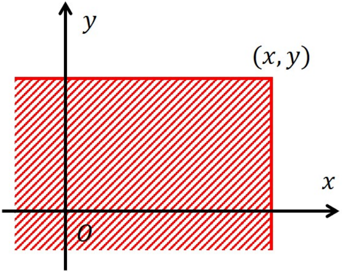


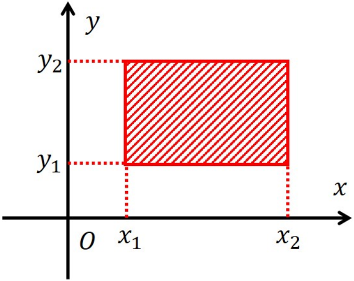
## 定义

设 $(X,Y)$ 是二维随机变量，对于任意实数 $x,y$，二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{denote}}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 $(X,Y)$ 的**分布函数**，或**联和 (joint) 分布函数**.




$F(x,y)$ 表示随机变量 $(X,Y)$ 落在 $(x,y)$ 构成的左下方无穷矩形内的概率.

随机变量 $(X,Y)$ 落在矩形内的概率为 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$

# 性质 (分布函数 $F(x,y)$)

分布函数 $F(x,y)$ 具有如下基本性质:

1. $F(x,y)$ 是 $x,y$ 的非减函数: 如固定 $y$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $F(x_1,y) \leq F(x_2,y)$. 同理如固定 $x$, 若 $y_1 < y_2$, 有 $F(x,y_1) \leq F(x,y_2)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 并且
$$\begin{cases} F(-\infty,y)=0 & \text{对于任意固定的 } y \\ F(x,-\infty)=0 & \text{对于任意固定的 } x \\ F(-\infty,-\infty)=0 & \\ F(\infty,\infty)=1 & \end{cases}$$
3. $F(x,y)$ 关于 $x$、$y$ 右连续
$$\begin{cases} F(x+0,y)=F(x,y) \\ F(x,y+0)=F(x,y) \end{cases}$$
4. 对于任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有
$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1) \geq 0 \tag{1}$$

## 定义

若二维随机变量 $(X, Y)$ 全部可能取值 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \ldots$ 为有限对或可列无限对，则称为离散型二维随机变量. 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$，则称下式为 $(X, Y)$ 的分布律或联和分布律.

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

联合分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} p_{ij} \tag{2}$$

联和分布律也可以用表格表示，例如

| $Y \backslash X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_i$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | $\ldots$ | $p_{i1}$ | $\ldots$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | $\ldots$ | $p_{i2}$ | $\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_j$ | $p_{1j}$ | $p_{2j}$ | $\ldots$ | $p_{ij}$ | $\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

## 例 (1)

设随机变量 $X$ 在 $1,2,3,4$ 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 $Y$ 在 $1\sim X$ 中等可能地取一个值. 求 $(X,Y)$ 的分布律.

解

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4}, i=1\sim 4, j\le i$$

$(X,Y)$ 的分布律由表格列出

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 1/8 | 1/12 | 1/16 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/12 | 1/16 |
| 3 | 0 | 0 | 1/12 | 1/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/16 |

## 定义

若对于二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数 $F(x,y)$，存在非负可积函数 $f(x,y)$ 使得对于任意 $x,y$ 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

## 性质 (概率密度 $f(x,y)$)

1. $f(x,y)\geq 0$
2. $F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)dudv=1$
3. 设 $G$ 为 $Oxy$ 平面内区域，点 $(X,Y)$ 落在 $G$ 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy \tag{3}$$

4. 若 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 连续，则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

## 例 (2)

设二维随机变量 $(X,Y)$ 具有如下概率密度, 求 (1) 分布函数 $F(x,y)$,(2) 概率 $P\{Y \le X\}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

解 (1)

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2u+v)}dudv$$

$$= 2\cdot\left[\int_0^x e^{-2u}du\right]\cdot\left[\int_0^y e^{-v}dv\right] = 2\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big|_0^x\right]\cdot\left[-e^{-v}\big|_0^y\right]$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{1}{2}(e^{-2x}-1)\right]\cdot\left[-(e^{-y}-1)\right] = (1-e^{-2x})(1-e^{-y}),\ x>0, y>0$$

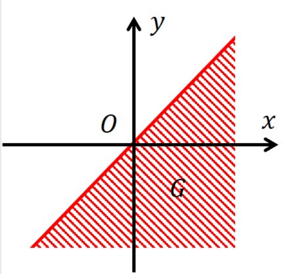
## 例 (2 续)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 具有如下概率密度, 求 (1) 分布函数 $F(x, y)$,(2) 概率 $P\{Y \le X\}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

解

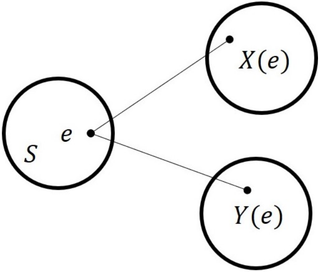
(2) $(X, Y)$ 为平面内随机点 (坐标), 那么 $Y \le X$ 即为平面上位于直线 $y = x$ 右下方部分. 概率 $P\{Y \le X\}$ 为联合概率密度 $f(x, y)$ 在此部分的积分.




$$P\{Y \le X\} = \iint_G f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \frac{1}{3}$$

# 3.2 边缘分布

$(X, Y)$ 作为整体 $\rightarrow$ 分布函数 $F(x, y)$.
$X$ 和 $Y \rightarrow$ 分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

## 定义 (边缘分布函数)

连续型:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty) \tag{4}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y) \tag{5}$$

离散型:

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

## 定义 (边缘分布律/边缘概率密度)

连续型 ($f_X(x), f_Y(y)$ 称为 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的**边缘概率密度**):

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right] dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \tag{6}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \tag{7}$$

离散型 ($p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$ 称为 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的**边缘分布律**):

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

## 例 (1)

等可能地在 $1 \sim 10$ 中取一个整数 $N$, 设 $D = D(N)$ 是能整除 $N$ 的正整数的个数,$F = F(N)$ 是能整除 $N$ 的质数的个数, 求 $D$ 和 $F$ 的联合分布律, 及分别的边缘分布率.

**解**

| 样本点 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| $F$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

| $F \backslash D$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{F = j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/10$ | 0 | 0 | 0 | $1/10$ |
| 1 | 0 | $4/10$ | $2/10$ | $1/10$ | $7/10$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | $2/10$ | $2/10$ |
| $P\{D = i\}$ | $1/10$ | $4/10$ | $2/10$ | $3/10$ | 1 |

## 例 (1 续)

等可能地在 $1 \sim 10$ 中取一个整数 $N$, 设 $D = D(N)$ 是能整除 $N$ 的正整数的个数,$F = F(N)$ 是能整除 $N$ 的质数的个数, 求 $D$ 和 $F$ 的联合分布律, 及分别的边缘分布率.

**解**

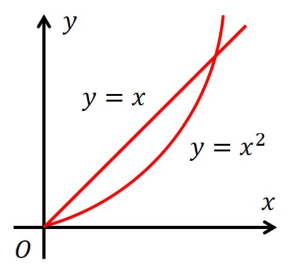
| $F \backslash D$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{F=j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/10 | 0 | 0 | 0 | 1/10 |
| 1 | 0 | 4/10 | 2/10 | 1/10 | 7/10 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 2/10 | 2/10 |
| $P\{D=i\}$ | 1/10 | 4/10 | 2/10 | 3/10 | 1 |

| $D$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{i\cdot}$ | 1/10 | 4/10 | 2/10 | 3/10 |

| $F$ | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $p_{\cdot j}$ | 1/10 | 7/10 | 2/10 |

## 例 (2)

设随机变量 $X, Y$ 的联合概率密度如下, 求边缘概率密度.




$$f(x,y) = \begin{cases} 6 & x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

解

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2}^{x} 6dy = 6(x - x^2), \ 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y} - y), \ 0 \le y \le 1$$

## 例 (3)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度如下，称为二维正态分布，其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数，$\sigma_1, \sigma_2 > 0$，$\rho \in (-1, 1)$，记 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < \infty,\quad -\infty < y < \infty$$

边缘概率密度可由公式 (6,7) 求得

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty < y < \infty$$

# 3.3 条件分布

# 离散型随机变量

设 $(X, Y)$ 是二维离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij},\ \ i, j = 1, 2, \dots$$

$(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布律分别为

$$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ \ i = 1, 2, \dots$$

$$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ \ j = 1, 2, \dots$$

考虑事件 $\{Y = y_j\}$ 已经发生, 事件 $\{X = x_i\}$ 的概率

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ \ i = 1, 2, \dots$$

容易发现, 上式具有如下性质:

1. $$P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0$$

2. $$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1$$

## 定义 (离散型随机变量的条件分布)

设 $(X, Y)$ 是二维离散型随机变量, 对于固定的 $j$, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称下式为 $Y=y_j$ 条件下随机变量 $X$ 的条件分布律.

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\ldots \tag{8}$$

同理, 对于固定的 $i$, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称下式为 $X=x_i$ 条件下随机变量 $Y$ 的条件分布律.

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\ldots \tag{9}$$

## 例 (1)

在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是有机器人完成的. 其一是紧固 3 只螺栓，其二是焊接 2 处焊点. 以 $X$ 表示由机器人紧固的螺栓不良的数目，以 $Y$ 表示由机器人焊接的不良数目. 根据积累的资料知 $(X, Y)$ 的分布律如下，求:
1) 在 $X=1$ 的条件下,$Y$ 的条件分布律; 2) 在 $Y=0$ 的条件下,$X$ 的条件分布律.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $P\{Y=j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.840 | 0.030 | 0.020 | 0.010 | 0.900 |
| 1 | 0.060 | 0.010 | 0.008 | 0.002 | 0.080 |
| 2 | 0.010 | 0.005 | 0.004 | 0.001 | 0.020 |
| $P\{X=i\}$ | 0.910 | 0.045 | 0.032 | 0.013 | 1 |

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045}$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045}$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045}$$

## 例 (1 续)

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $P\{Y=j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.840 | 0.030 | 0.020 | 0.010 | 0.900 |
| 1 | 0.060 | 0.010 | 0.008 | 0.002 | 0.080 |
| 2 | 0.010 | 0.005 | 0.004 | 0.001 | 0.020 |
| $P\{X=i\}$ | 0.910 | 0.045 | 0.032 | 0.013 | 1 |

$$P\{X=0|Y=0\} = \frac{P\{X=0, Y=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0.840}{0.900}$$

$$P\{X=1|Y=0\} = \frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0.030}{0.900}$$

$$P\{X=2|Y=0\} = \frac{P\{X=2, Y=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0.020}{0.900}$$

$$P\{X=3|Y=0\} = \frac{P\{X=3, Y=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0.010}{0.900}$$

## 例 (2)

一射手进行射击，击中目标的概率为 $0 < p < 1, q = 1 - p$，射击直至击中目标两次为止. 设以 $X$ 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 $Y$ 表示总共进行的射击次数. 求 $X, Y$ 的联合分布律和条件分布律.

解 事件 $P\{X = m, Y = n\}$ $(m < n)$ 的概率

$$P\{X = m, Y = n\} = p \cdot p \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-2} = p^2 q^{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots, m = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$P\{X = m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2} = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$P\{Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$P\{X = m | Y = n\} = \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{Y = n\}} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, \ldots, n-1$$

$$P\{Y = n | X = m\} = \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{X = m\}} = \frac{p^2 q^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \ldots$$

Ex. 验证本题中边缘分布的归一化。

# 连续型随机变量

现在考虑连续型随机变量 $(X, Y)$. 此时 $P\{X = x\} = 0, P\{Y = y\} = 0$.
只能考虑 $P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}$:

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} \tag{10}$$

$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x, y) dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

类似离散型随机变量, 这里也有如下性质:

1. $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \geq 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = 1$$

## 定义 (连续型随机变量的条件分布)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为 $f(x, y)$, $(X, Y)$ 关于 $Y$ 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对固定的 $y$ 有 $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y = y$ 条件下 $X$ 的条件概率密度, 记作

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \tag{11}$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt$ 为 $Y = y$ 条件下 $X$ 的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t, y)}{f_Y(y)}dt. \tag{12}$$

## 例 (3)

设 $G$ 是平面上的一个有界区域, 其面积为 $A$. 若二维随机变量 $(X, Y)$ 具有如下概率密度, 则称其服从在区域 $G$ 上的均匀分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

现在设 $G$ 为单位圆域 $x^2+y^2\le 1$, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ -1\le y\le 1.$$

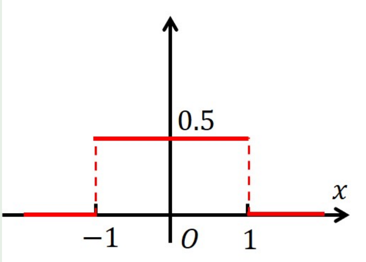
当 $-1<y<1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}},\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}.$$

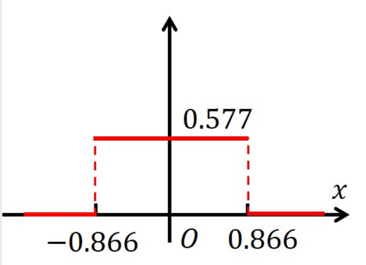
## 例 (3 续)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, \ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

当 $y = 0$ 时的 $f_{X|Y}(x|y)$:




当 $y = 0.5$ 时的 $f_{X|Y}(x|y)$:



## 例 (4)

设数 $X$ 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x$ $(0<x<1)$ 时，数 $Y$ 在区间 $(x,1)$ 上随机取值，求 $Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 易知 $X$ 的概率密度为

$$f_X(x)=1,\ 0<x<1$$

对于任意给定的 $x$ $(0<x<1)$，在 $X=x$ 的条件下 $Y$ 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{1-x},\ x<y<1$$

由公式 (11) 可得 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=\frac{1}{1-x},\ 0<x<y<1$$

于是 $Y$ 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y),\ 0<y<1$$

# 3.4 相互独立的随机变量

相互独立的事件 $\rightarrow$ 相互独立的随机变量

## 定义

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 $x,y$ 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\} \tag{13}$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \tag{14}$$

则称随机变量 $X, Y$ **相互独立**.

1. 连续型情况: $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ 分别为 $(X,Y)$ 的联合概率密度和边缘概率密度, 则 $X, Y$ 相互独立的条件 (14) 等价于

$$f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \tag{15}$$

2. 离散型情况: $X, Y$ 相互独立的条件 (14) 等价于对于 $(X,Y)$ 所有可能的取值 $(x_i, y_j)$ 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} \tag{16}$$

# 例

离散型情况:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $P\{Y=j\}$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1/6 | 2/6 | 1/2 |
| 2 | 1/6 | 2/6 | 1/2 |
| $P\{X=i\}$ | 1/3 | 2/3 | 1 |

则有

$$P\{X=0,Y=1\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=0,Y=2\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=2\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=2/6=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=2\}=2/6=P\{X=0\}P\{Y=2\}.$$

也就是说，对 $(X,Y)$ 所有可能的取值 $(x_i,y_j)$ 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

因此 $X,Y$ 相互独立.

## 例

离散型情况:
或例如 (3.2 节例 2)，分布律

| $F \backslash D$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{F=j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/10$ | 0 | 0 | 0 | $1/10$ |
| 1 | 0 | $4/10$ | $2/10$ | $1/10$ | $7/10$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | $2/10$ | $2/10$ |
| $P\{D=i\}$ | $1/10$ | $4/10$ | $2/10$ | $3/10$ | 1 |

对 $P\{D=1, F=0\} = 1/10 \neq P\{D=1\}P\{F=0\}$, 因此 $X, Y$ 不相互独立.

## 例

连续型情况 (3.1 节例 2):

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases},$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 因此 $X,Y$ 相互独立.

例：二维正态（高斯）随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\ x,y\in\mathbb{R}$$

由 3.2 节例 3 可知边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ y\in\mathbb{R}$$

$f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$ 的乘积为

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因此，若 $\rho=0$，则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，即 $X, Y$ 相互独立. 反之，若 $X, Y$ 相互独立，则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，导出 $\rho=0$（证明？）. 故对二维正态分布随机变量 $(X, Y)$，其分量 $X, Y$ 相互独立的充要条件为 $\rho=0$.

## 例

一负责人到达办公室的时间均匀分布在 8-12 时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 7-9 时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间差不超过 5 分钟 (1/12 小时) 的概率.

解设 $X, Y$ 分别为负责人和秘书到达办公室的时间，则其概率密度分别为

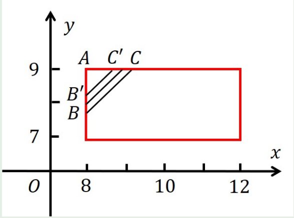
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 8 < x < 12 \\ 0 & else \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 7 < x < 9 \\ 0 & else \end{cases}$$

因为 $X, Y$ 相互独立，因此 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1/8 & 8 < x < 12, 7 < x < 9 \\ 0 & else \end{cases}$$

两人到达办公室的时间差不超过 5 分钟 (1/12 小时)，即求 $|X - Y| \le 1/12$ 的概率.

$$P\{|X - Y| \le 1/12\} = \iint_G f(x,y)dxdy = 1/48$$



**定义 ($n$ 维随机变量的概率密度函数)**

$n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的分布函数为

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n\}$$

其中 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为任意实数. 若存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 使得对于任意实数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 ... dx_n$$

则称 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的概率密度函数.

## 定义 ($n$ 维随机变量的 $k$ 维边缘分布函数、边缘概率密度函数)

$n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, 则其 $k$ 维边缘分布函数就可以确定. 例如 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 关于 $X_1$、关于 $(X_1, X_2)$ 的边缘分布函数为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, ..., \infty)$$

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, ..., \infty)$$

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 关于 $X_1$、关于 $(X_1, X_2)$ 的边缘概率密度函数为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_2 dx_3 ... dx_n$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_3 ... dx_n$$

若对所有的 $x_1, x_2, ..., x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) ... F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, ..., X_n$相互独立.

## 定义

若对于所有的 $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_1(X_1, X_2, \ldots, X_m)F_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

则称随机变量 $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立.

## 定理

若 $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 相互独立, 则有

1. $X_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ 和 $Y_j(j = 1, 2, \ldots, n)$相互独立.
2. 若有连续函数 $h(\cdot), g(\cdot)$, 则 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立.

# 3.5 两个随机变量的函数的分布

已知 $X$ 的概率密度, 求 $Y = func(X)$ 例如 $Y = X^2$ 的概率密度.

# 一、$Z = X + Y$

## 定义

设 $(X, Y)$ 是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy, \tag{17}$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx, \tag{18}$$

又若 $X$ 和 $Y$ **相互独立**，其边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则公式 (17) 和 (18) 变为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy, \tag{19}$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx. \tag{20}$$

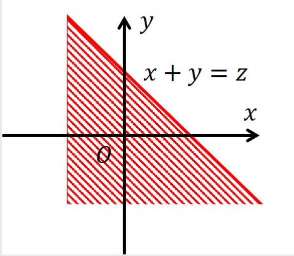
以上两式称为 $f_X$ 和 $f_Y$ 的**卷积公式**，记为 $f_X * f_Y$，即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

## 证明.

新的随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$




积分区域为直线 $x + y = z$ 的左下方区域. 将二重积分化为累次积分, 得到

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定 $z$ 和 $y$, 对积分 $\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx$ 做变量替换 $x = u - y$, 得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy\right]du.$$

# 例 (1)

设 $X, Y$ 是两个相互独立的随机变量，且都服从 $N(0,1)$，概率密度如下，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, -\infty<x<\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}, -\infty<x<\infty$$

由公式 (20) 得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\cdot e^{-(z-x)^2/2}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-z/2)^2}dx$$

令 $t=x-z/2$，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/4}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-z^2/4}$$

即 $Z\sim N(0,2)$.

## 定理

一般地，若随机变量 $X, Y$ 相互独立且

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

则新随机变量 $Z = X + Y$

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

结论可以推广到 $n$ 个相互独立的随机变量

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, ..., n,$$

则新随机变量 $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$Z \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2).$$

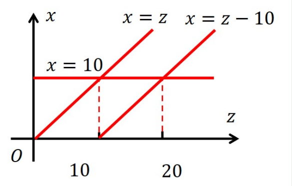
更一般的结论：有限多个相互独立的正态随机变量的**线性组合**仍然服从正态分布.

# 例 (2)

一简单电路中串联两个电阻 $R_1, R_2$，设其相互独立，概率密度均如下，求总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

解

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50} & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$




由公式 (20) 得

$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x) dx$$

易知当满足如下积分区间时，被积函数才非负

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le z - x \le 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ z - 10 \le x \le z \end{cases}$$

带入 $f_R(z)$ 得

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) f(z-x) dx & 0 \le z < 10 \\ \int_{z-10}^{10} f(x) f(z-x) dx & 10 \le z \le 20 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{15000}(z^3 - 60z^2 + 600z) & 0 \\ \frac{1}{15000}(-z+20)^3 & 1 \\ 0 & \text{e} \end{cases}$$

## 例 (3)

设随机变量 $X, Y$ 相互独立，且分别服从参数为 $\alpha, \theta; \beta, \theta$ 的 $\Gamma$ 分布，记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta), Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$，概率密度如下，证明 $Z = X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta)$.

证

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} & x > 0 \\ 0 & else \end{cases}, \alpha > 0, \theta > 0$$

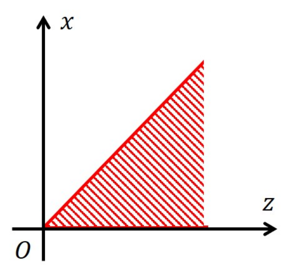
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-y/\theta} & y > 0 \\ 0 & else \end{cases}, \beta > 0, \theta > 0$$

由公式 (20) 得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

易知当满足如下积分区间时，被积函数才非负

$$\begin{cases} x > 0 \\ z - x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < z \end{cases}$$



## 例 (3 续)

当 $z < 0$ 时 $f_Z(z) = 0$; 当 $z > 0$ 时

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \cdot \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)/\theta} dx$$

$$= \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx$$

$$\overset{x=zt}{=} \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx$$

THIS IS UNFINISHED HERE!!
TBA...

## 二、$Z = Y/X, Z = XY$

设 $(X, Y)$ 是二维连续型随机变量，概率密度 $f(x, y)$，则 $Z = Y/X, Z = XY$ 仍为连续型随机变量，概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx \tag{21}$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \tag{22}$$

若 $X, Y$ 相互独立，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则公式 (21) 与 (22) 分别变为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx \tag{23}$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx \tag{24}$$

# 证明.

$$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \le z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x,y)dxdy$$

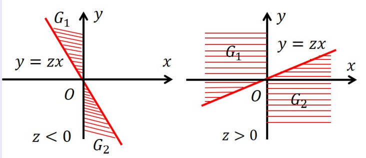
$$= \iint_{y/x \le z,\ x<0} f(x,y)dxdy + \iint_{y/x \le z,\ x>0} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{zx}^{\infty} f(x,y)dy\right] dx + \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right] dx$$

$$\overset{y=xu}{=} \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)du\right] dx + \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)du\right] dx + \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} |x|f(x,xu)du\right] dx = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x,xu)dx\right] du$$



## 例 (4)

某公司提供一种地震保险，保险费 $Y$ 及保险赔付 $X$ 的概率密度如下，设其相互独立，求 $Z = Y/X$ 的概率密度.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-y/5} & y > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

**解** 由公式 (23) 可知，当 $z < 0$ 时，$f_Z(z) = 0$；当 $z > 0$ 时

$$f_Z(z) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} \cdot \frac{xz}{25} e^{-xz/5}$$

$$= \frac{z}{125} \int_0^\infty x^2 \cdot \exp\left(-x \cdot \frac{1+z}{5}\right) dx = \frac{2z}{(1+z)^3}$$

# 三、$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$

设 $(X, Y)$ 相互独立, 分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$, 则

1. $M = \max\{X, Y\}$:

$$F_{\max(X,Y)}(z) = P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\}$$

$$F_{\max(X,Y)}(z) = F_X(z)F_Y(z) \tag{25}$$

2. 类似的,$N = \min\{X, Y\}$:

$$F_{\min(X,Y)}(z) = P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\}$$
$$= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} = 1 - [1 - P\{X \leq z\}][1 - P\{Y \leq z\}]$$

$$F_{\min(X,Y)}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \tag{26}$$

3. 推广到 $n$ 个随机变量:$X_1, X_2, ..., X_n$:

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)...F_{X_n}(z) \tag{27}$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]...[1 - F_{X_n}(z)] \tag{28}$$

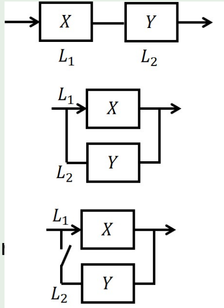
4. 若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立且同分布

$$F_{\max}(z) = [F_X(z)]^n \tag{29}$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n \tag{30}$$

# 例 (5)

设系统 $L$ 由两个相互独立的子系统 $L_1, L_2$ 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联 (ii) 并联 (iii) 备用 (当 $L_1$ 损坏时,$L_2$ 工作), 已知 $L_1, L_2$ 的寿命分别为 $X, Y$, 他们的概率密度如下,$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$, 求三种连接 $L$ 的寿命 $Z$ 的概率密度.



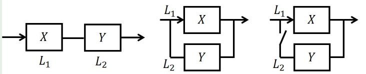

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & \text{elsewher} \end{cases}$$

**解**(i) 串联: 当 $L_1, L_2$ 有一个损坏时,$L$ 就停止工作, 因此 $Z = \min\{X, Y\}$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] = 1 - e^{-(\alpha+\beta)z},\ \ z > 0$$

$$f_{\min}(z) = (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z},\ \ z > 0$$

## 例 (5 续)




(ii) 并联: 仅当 $L_1, L_2$ 都损坏时,$L$ 才停止工作, 因此 $Z = \max\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}),\ z > 0$$

$$f_{\max}(z) = \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z},\ z > 0$$

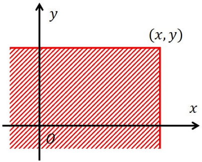
(iii) 备用: 当 $L_1$ 损坏时 $L_2$ 开始工作, 因此 $L$ 的寿命为 $Z = X + Y$(根据公式 (19))

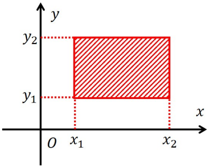
$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy = \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)\beta e^{-\beta y}} dy$$

$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}),\ z > 0$$

知识点:

1. 二维随机变量 $X, Y$, 分布函数 $F(x,y)$, 概率密度 $f(x,y)$




2. 离散型: 联合分布律; 连续型: 联合概率密度 $f(x,y)$.
3. 离散型: 边缘分布律 (公式 (4,5)); 连续型: 边缘概率密度 (公式 (6,7)).
4. 二维随机变量的条件分布: 离散型:(公式 (8,9)); 连续型:(公式 (11))
5. 相互独立的随机变量: 离散型:(公式 (16); 连续型:(公式 (15))
6. 两个随机变量的函数的分布:$Z = X + Y, Z = Y/X, Z = XY, Z = \max\{X, Y\}, Z = \min\{X, Y\}$

# 章节结束

**作业**:1、3、4-7、9、11、13、15、17、19、21、23、24、26、28、30-36.