Решение уравнений

Храмов Д. А.

24.04.2019

Нелинейные уравнения

Поиск корней полинома: roots

Полином n-й степени имеет вид:

$$p_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + ... + c_n x + c_{n+1}.$$

Корни полинома – корни уравнения

$$p_n(x) = 0.$$

В MATLAB полином n-й степени запишется как

```
c(1)*x^n + c(2)*x^(n-1)+... + c(n)*x + c(n+1)
```

Вектор коэффициентов полинома `C` равен

```
C = [c(1) c(2) ... c(n) c(n+1)]
```

`roots(C)` — вычисляет корни полинома (действительные и комплексные), коэффициенты которого заданы вектором `C`.

Число элементов вектора `C` всегда на единицу больше степени полинома. Нулевые коэффициенты должны содержаться в векторе.

Пример. Найти корни полинома $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Запишем вектор коэффициентов и применим к нему функцию `roots`.

```
>> P = [2 3 1];
>> roots(P)
   -1.0000
   -0.5000
```

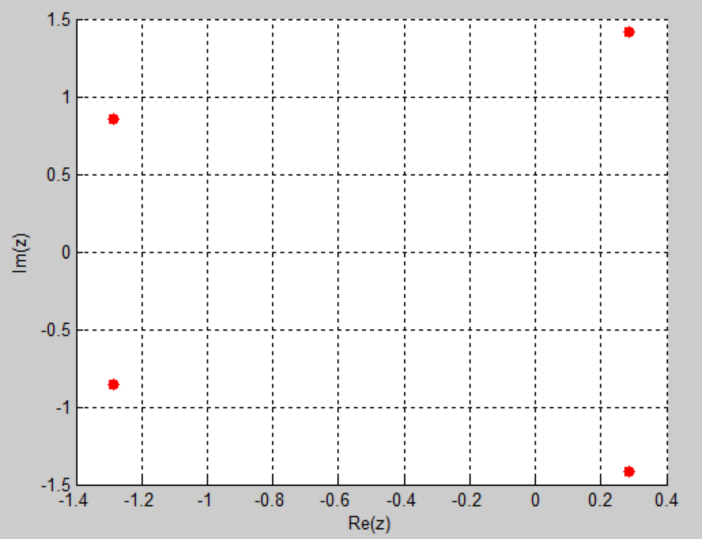
Комплексные корни

Уравнение: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$.

```
p = [1 2 3 4 5];
r = roots(p)
scatter(real(r),imag(r),'filled','red'), grid on
xlabel('Re(z)'),ylabel('Im(z)')
```

Результат:

```
r =

   0.2878 + 1.4161i
   0.2878 - 1.4161i
  -1.2878 + 0.8579i
  -1.2878 - 0.8579i
```



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Im(z)
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
Re(z)

Задача 1. Найти корни уравнения

$$x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 9 = 0.$$

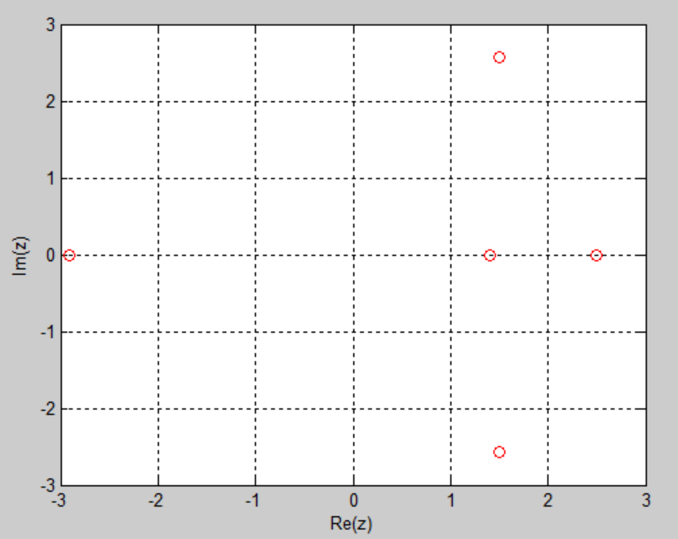
Отобразить найденные корни на комплексной плоскости.

Пример. Найти корни функции

$$f(x) = x^3 - \frac{10}{(2-x)^2} + 25.$$

```
syms x
% Исходная функция
f = x^3 - 10/(2-x)^2 + 25;
% Приводим к общему знаменателю
ff = factor(f)
% Извлекаем числитель
[f_nm,~] = numden(ff)

ff =
  (x^5 - 4*x^4 + 4*x^3 + 25*x^2 - 100*x + 90)/(x - 2)^2

f_nm =
  x^5 - 4*x^4 + 4*x^3 + 25*x^2 - 100*x + 90
```

```
% Собираем коэффициенты в порядке убывания
[my_coeffs,~] = coeffs(f_nm,x)
% Найдем корни полинома
r = roots(my_coeffs)

my_coeffs =
  [ 1, -4, 4, 25, -100, 90]

r =

                                     -2.9077407016914873169506191942647
                                      1.3996100646468305812335683631853
                                      2.4965355242358652368432085736757
1.5057975564043957494369211287019 - 2.5672365012647893529547353691146*i
1.5057975564043957494369211287019 + 2.5672365012647893529547353691146*i

plot(real(r),imag(r),'ro'), grid on
xlabel('Re(z)'),ylabel('Im(z)')
```



Im(z)
Re(z)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Поиск действительных корней произвольной функции одной переменной: fzero

```
x = fzero(@fun, x0)
```

- `fun` – имя функции
- `x0` – начальное приближение (число или вектор)
- `x` – корень уравнения

Если `x0` — число, то `fzero` пытается отыскать интервал в окрестности начального приближения `x0`, на котором функция `fun` меняет знак.

Для поиска начального приближения удобно использовать графические функции: `plot`, `fplot`.

Задать интервал поиска можно с помощью вектора `x0`. Тогда `fzero` будет искать значение корня на интервале `[x0(1), x0(2)]`. Если корней на этом интервале нет или функция терпит разрыв в окрестности начального приближения, то возвращается значение `NaN` (Not a Number).

Пример. Найти корни функции $x^3 - 1.1x^2 - 2.2x + 1.8$

```
% Функция:
f = @(x) x^3-1.1*x^2-2.2*x+1.8;
% задаем начальное приближение
x = fzero(f,-1.5)
% или интервал поиска
x = fzero(f,[1.5 2])

x1 =
   -1.3970

x2 =
    1.7685
```

Еще один вариант использования функции fzero

Создадим в отдельном файле `poly4.m` m-функцию

```
%%%%%%% poly4.m %%%%%%%%%%%
function y = poly4(x)
y = x.^3-1.1*x.^2-2.2*x+1.8;
```

и запустим fzero, передав в нее созданную функцию

```
fzero(@poly4,0.5)

x3 =

    0.7286
```

Все и сразу

```
fzero(f,[-1.5 1.5])

% Error using fzero
% The function values at the interval endpoints
% must differ in sign.
```

А вот `roots()` может все и сразу:

```
r = roots([1 -1.1 -2.2 1.8])

% r =
%
%    -1.3970
%     1.7685
%     0.7286
```

Задача 2

Найти корни функции

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2$$

с помощью:

1. `roots()`
2. `fzero()`

Зачем нужно несколько функций поиска корней?

`solve()` ищет аналитические и численные решения уравнений, работает с более широким классом функций, чем `roots` и единственная среди подобных функций работает с системами уравнений. Зачем тогда нужны остальные функции?

Но:

- `fzero` работает с любыми действительными функциями одной переменной, а `solve` только с теми, которые можно задать формулой. Это не всегда возможно: функция может быть задана, например, виде m-функции.
- если нужно численное значение корней полиномов, то `roots` работает быстрее `solve`.

Еще: `fsolve` (Optimization Toolbox)

Пример. Найти корни уравнения $\cos 5x = x$ на промежутке $-2\pi \le x \le 2\pi$

```
f = @(x) cos(5*x) - x;
z = fzero(f, [-2*pi,2*pi])
```

```
 z =

     0.2613
```

Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений встречаются почти в каждой области прикладной математики.

Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными (n-го порядка). Каждый член такого уравнения содержит только одно неизвестное, и каждое неизвестное входит в него в первой степени. Такая система уравнений называется **линейной**

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

В матричной записи система линейных уравнений имеет вид

$$Ax = b.$$

Геометрическая трактовка решения

Рассмотрим систему линейных уравнений 2-го порядка. На общность рассуждений это не повлияет.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2.
\end{aligned}
$$

Или, в матричной записи

$$Ax = b.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

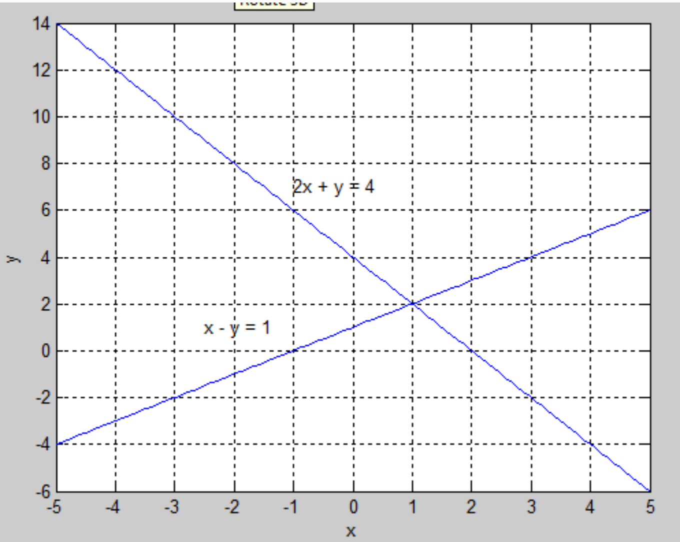
В случае двух неизвестных каждое уравнение графически изображается прямой линией на плоскости.

Искомое решение должно удовлетворять одновременно всем уравнениям. На плоскости это — точка пересечения графиков прямых.

Пример

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 4, \\
x - y &= -1.
\end{aligned}
$$

```
x = linspace(-5,5,100);

y = x+1;
plot(x,y), grid on, hold on
xlabel('x'), ylabel('y')
text(-2.5,1,'x - y = 1')

y1 = -2*x+4;
plot(x,y1)
text(-1,7,'2x + y = 4')
```



Корень x = 1, y = 2

Задача 3

Найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 5, \\ 3x + 5y + 6z &= 7, \\ 2x + 4y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Сколько решений у линейной системы?

Имеет ли данная система какое-либо решение и, в случае если это решение существует, является ли оно единственным? На этот вопрос существуют три варианта ответа.

1. Решение системы уравнений существует и является единственным.
2. Система уравнений не имеет решения.
3. Система уравнений имеет бесконечное множество решений.

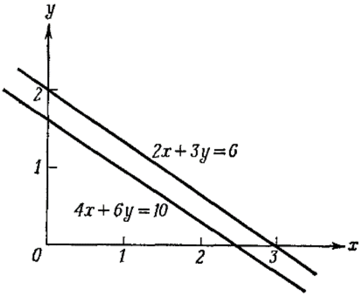
1. Решение существует и является единственным

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4, \\ x - y &= -1. \end{aligned}$$

```
A = [2 1;
     1 -1];
b = [4;
     -1];
x = A\b

  x =
       1
       2

det(A) % определитель A

  ans =
       -3
```

2. Система уравнений не имеет решения

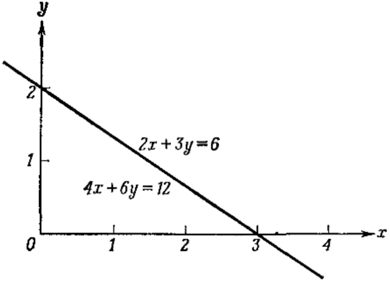
$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 6, \\
4x + 6y &= 10.
\end{aligned}
$$



```
A = [2 3; 4 6];
b = [6; 10];
eps = 1e-4;
if abs(det(A))<eps, error('det(A)=0'), end
x = A\b

>> det(A)

ans =

     0
```

3. Система имеет бесконечное множество решений

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6, \\ 4x + 6y &= 12. \end{aligned}$$

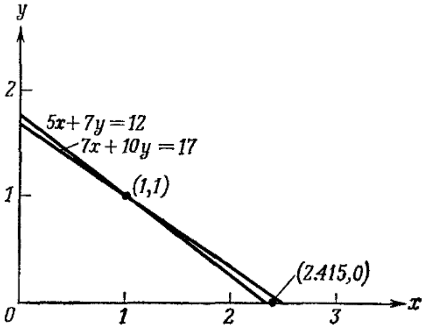


```
A = [2 3; 4 6];
b = [6; 12];
x = A\b
```

```
Warning: Matrix is singular to working precision.

x =

   NaN
   NaN
```

Плохо обусловленные системы

Системы линейных уравнений вида 2 и 3 являются вырожденными случаями. На практике гораздо чаще встречаются почти вырожденные системы, при решении которых можно получить недостоверные значения неизвестных. Рассмотрим систему:



Если коэффициенты системы заданы приближенно, то вместо точного решения (1,1), можно получить сильно отличающееся от него решение. Например, (2.415,0)

Пример плохо обусловленной системы

```
A = [5 7; 7 10];
b = [12; 17];
det(A)
x = A\b
% или так:
x = A^-1*b
x = inv(A)*b
x = mldivide(A,b)
```

У плохо обусловленной системы $detA \approx 0$.

В этом случае найти численное решение системы трудно, а точность его весьма сомнительна.

Хотя ошибка в решении проявляется из-за погрешностей данных (коэффициентов системы), сама система “предрасположена” чутко реагировать на наличие таких погрешностей.

Возможно, следует:

1. переформулировать задачу так, чтобы избежать плохо обусловленной системы или
2. использовать для решения плохо обусловленных систем специальные методы.

Задача 4

Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90, \\ 20x_1 + 10x_2 &= 80 \end{aligned}$$

и проверить правильность полученного решения.

Список задач

- Задача 1
- Задача 2
- Задача 3
- Задача 4