Особенности компьютерной арифметики. Символьные вычисления

Храмов Д. А.

23.04.2019

Особенности компьютерной арифметики

Что не так?

Значения функции на компьютере отличаются от принятых в математике:

$\cos \pi/2 = 0$, а `cos(pi/2) = 6.1232e-17`.

Результат суммирования зависит от порядка выполнения операций:

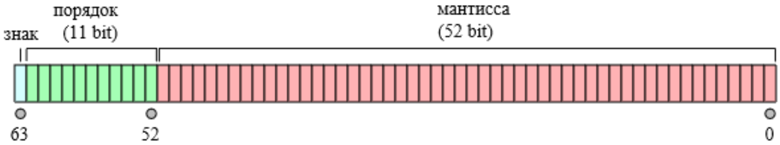
```
>> x = 0.1+(0.2+0.3);
>> y = (0.1+0.2)+0.3;
>> % x и y равны?
>> x==y

ans =
     0
```

Математический объект $\neq$ Компьютерная реализация

Источник проблем лежит в несовпадении машинной арифметики с обычной из-за конечности разрядной сетки компьютера.

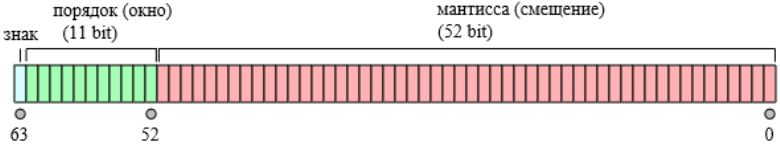
Вещественные числа представляется в памяти компьютера в форме записи с *плавающей точкой*.

Для хранения вещественного числа в памяти компьютера отводится поле стандартной длины — машинное слово длиной 64 бита.



Запись числа с плавающей точкой похожа на экспоненциальную запись в математике:

$$1045.86 \Rightarrow 0.104586 \cdot 10^4 \Rightarrow 104586E04$$

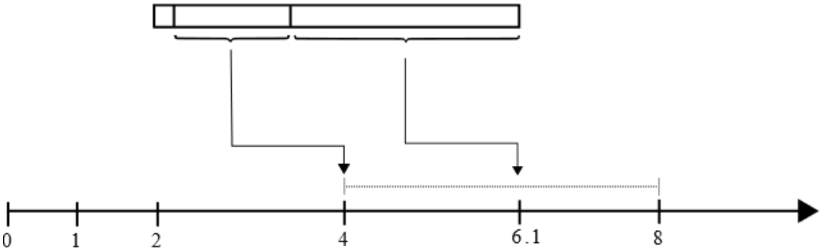


Порядок (окно) сообщает нам, между какими двумя последовательными степенями двойки будет число: $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 8]$, $\ldots$, $[2^{2047}, 2^{2048}]$.

Мантисса или смещение разделяет окно на $2^{53} = 9007199254740992$ сегментов.

С помощью окна и смещения можно аппроксимировать число.

Пример аппроксимации числа



Значение 6.1 аппроксимируется с помощью числа с плавающей точкой

Расстояние между соседними числами

В окне $[0, 1]$ 9007199254740992 смещений накладываются на интервал размером 1, что дает нам точность

$$\frac{(1-0)}{9007199254740992} = 1.1102230246251565404236316680908e^{-16}.$$

В окне $[2^{12}, 2^{13}]$ смещения накладываются на интервал размером $8192 - 4096 = 4096$, что дает нам точность

$$\frac{(8192-4096)}{9007199254740992} = 4,5474735088646411895751953125e^{-13}.$$

В окне $[2^{127}, 2^{128}]$ смещения накладываются на интервал $2^{128} - 2^{127} \approx 1,7014e^{+38}$, что дает точность

$$\frac{(2^{128}-2^{127})}{9007199254740992} = 18889465931478580854784.$$

Следствие 1. В компьютере представимо конечное подмножество рациональных чисел

В компьютере представимы не все числа, а лишь конечное подмножество рациональных чисел, “укладывающихся” в рамки машинного слова. Любое другое число будет представлено с ошибкой округления, не меньшей единицы самого младшего разряда мантиссы.

Машинным эпсилоном (машинной точностью, eps) называется наименьшее представимое в компьютере число ε, удовлетворяющее условию $1 + \varepsilon > 1$.

Машинный эпсилон характеризует наименьшую относительную погрешность вычислений и зависит от архитектуры компьютера и разрядности вычислений (single, double,...).

```
eps = 1; x = 1;
while x + eps > x, eps = eps/2, end
```

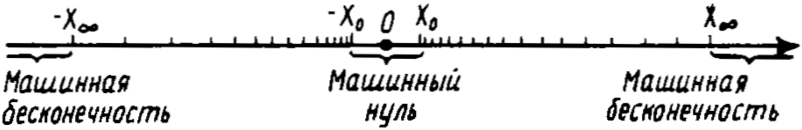
Следствие 2. Диапазон изменения чисел в компьютере ограничен

Существует минимальное X_0 (`realmin`) и максимальное X_∞ (`realmax`) числа, которые можно представить на данном компьютере.

```
>> realmin
ans =
    2.225073858507201e-308
>> realmax
ans =
    1.797693134862316e+308
```

- Числа, меньшие по модулю X_0 для машины не различимы и представляют собой **машинный нуль** ($X_0 \ll \varepsilon$).
- Числа, большие X_∞ рассматриваются как машинная **бесконечность** (`Inf`).
- Диапазон представления чисел на компьютере определяется разрядностью порядка.

Следствие 3. Числа на “компьютерной” числовой прямой распределены неравномерно



Плотность чисел с плавающей точкой возрастает по мере приближения к нулю и убывает по мере отдаления

Вывод

Почти наверняка в представимом на компьютере множестве числе нет числа `y`, являющегося решением поставленной задачи.

Лучшее, что можно попытаться сделать, — это найти его представление `y* = fl(y)` с относительной точностью порядка ε.

Символьные расчеты

Сравним следующие варианты кода:

```
a = sqrt(2)       % тип double, 8 байт
a = 1.4142
a = sqrt(sym(2)) % sym object, 138 байт (не бит!)
a = 2^(1/2)
```

Здесь `2^(1/2)` – символьная запись числа, которое нельзя представить ни в виде обычной дроби, ни (за конечное время) в виде дроби десятичной.

Переменная a – символьный объект.

Мы можем представлять числа в символьном виде, вводить символьные объекты и осуществлять операции над ними. Все это – **символьные вычисления**.

С помощью символьных вычислений мы можем раскрыть скобки и преобразовать формулу, найти решение уравнения, найти предел функции, ее производную, вычислять интегралы, разложить функцию в ряд Тейлора или Фурье и мн. др.

Создание символьных объектов

Чтобы работать с «буквенными» выражениями, нужно определить все входящие в них «буквы» как символьные переменные.

- `syms x y z ...` — создание символьных объектов. Запятые между переменными не ставят!

По умолчанию символьные переменные принимают комплексные значения. Но это можно изменить, делая различные предположения:

- syms a1 a2 ... real — переменные определены в области действительных чисел.
- syms a1 a2 ... positive — переменные действительные и положительные.

Тип переменной виден в `Workspace`.

Решение уравнений и систем

Уравнения представляют в виде

$$f(x) = 0.$$

Системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Запись в MATLAB

```
x = solve(f,x)
[x1,x2,...xn] = solve(f1,f2,...,fn,x1,x2,...xn)
```

`fi` — функции; `xi` — неизвестные.

Примеры

```
syms x
f = 3*x^2-2*x+1; % Если f(x)=0, то правая часть не нужна
solve(f)
```

Даст 2 корня:

```
 (2^(1/2)*i)/3 + 1/3
 1/3 - (2^(1/2)*i)/3
```

Найдем формулу для корней квадратного уравнения

```
syms a b c x
f = a*x^2+b*x+c;
root = solve(f,x)
```

```
root =
 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))
 -1/2*(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/a
```

Пример. Решение системы уравнений, зависящих от параметров

$$\begin{cases} ax_1 + x_1 x_2 + 1 = 0, \\ x_1^2 + bx_2 = 0, \end{cases}$$

```
syms a b x1 x2
f1 = a*x1+x1*x2+1;
f2 = x1^2+b*x2;
[x1,x2] = solve(f1,f2,x1,x2)
```

Другой вариант записи

```
[x1,x2] = solve('a*x1+x1*x2+1','x1^2+b*x2','x1','x2')
```

Если аналитическое решение найти невозможно, возвращается численное значение корней.

Задача 1. Найти действительные корни уравнения

$$x^5 - x - 2 = 0.$$

с помощью функции `solve`.

Построить график кривой, заданной уравнением. На графике построить сетку и отметить корень уравнения точкой с маркером-кружком красного цвета.

Задача 2. Решить систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
9x_1 - 10x_2 - x_3 &= 4,\\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 &= -3,\\
7x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

1. при помощи `solve()`;
2. используя матричную запись системы $Ax = b$.

Сравните полученные решения, преобразовав символьные значения в вещественные числа (функцией `eval`) и вычислив модуль разности между решениями. Что можно сказать о различии между решениями?

Математический анализ

Предел

limit(f,x,x0) — вычисление пределов $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

`f` – символьная запись функции $f(x)$, `x` — символьная переменная, `x0` – предельное значение `x`.

Значение 1-го замечательного предела

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

```
syms z
f = sin(z)/z;
limit(f,z,0)

ans =

1
```

Задача 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

Производная

`diff(f,x,n)` — вычисление производной функции $f(x)$.

`n` – порядок производной. По умолчанию `n=1`.

```
syms x
f = x*cos(x);
diff(f,x)

ans =

cos(x) - x*sin(x)
```

Задача 4. Вычислить первую и вторую производные функции

$$y = \sqrt{10 - x^2}.$$

Интегралы

- `int(f,x)` — неопределенный интеграл вида $\int f(x)dx$.
- `int(f,x,a,b)` — определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$; a, b – границы области интегрирования $[a,b]$.

Вычислим интеграл $\int_0^\pi \sin x dx$

```
>> syms x
>> int(sin(x),x,0,pi)

ans =

2
```

sym() превращает строку в символьный объект

```
>> int(sym('sin(x)'),sym('x'),0,pi)

ans =

2
```

Несобственные интегралы

`int()` позволяет вычислять несобственные интегралы вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Для этого соответствующий предел интегрирования нужно указать равным `+inf`/`-inf`.

Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx.$$

Результатом выполнения

```
syms a x
f = exp(-a*x^2); % точка не обязательна!
int(f,x,-inf,inf)
```

будет сообщение о невозможности найти интеграл. Между тем, он равен `sqrt(pi/a)`.

Интеграл можно найти только в предположении, что $a > 0$. Тогда подынтегральная функция будет представлять собой гауссову кривую.

Уточняем область определения a.

```
syms a positive
syms x
int(exp(-a*x^2),x,-inf,inf)



ans =

pi^(1/2)/a^(1/2)
```

Кратные интегралы

Двойные интегралы вычисляются повторным применением `int()`. Найдем интеграл

$$\int_c^d \int_a^b y \sin x dx dy$$

```
syms a b c d x y
Ix = int(y*sin(x),x,a,b);
Iy = int(Ix,y,c,d);
pretty(Iy)

     2    2
   (c  - d ) (cos(a) - cos(b))
 - ---------------------------
                2
```

Задача 5. Вычислить интегралы

$$\int \cos 3x dx,$$

$$\int_{-a}^{a} x^2 dx.$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора

```
taylor(f,x,x0)
```

`f` – функция; `x` – переменная дифференцирования; `x0` – точка, в окрестности которой выполняется разложение. По умолчанию возвращает 5 первых членов ряда.

Разложим в ряд Тейлора функцию $y = \sin x$ в окрестности точки $x = 0$

```
syms x
f = sin(x);
df = taylor(f,x)

df =

  x^5/120 - x^3/6 + x
```

Задача 6. Разложить функцию в ряд Тейлора

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

в окрестности точки $x = 0$ с точностью до членов 5-го порядка.

Постройте графики исходной функции и ее разложения в ряд Тейлора на интервале $x \in [-1; 1]$. На графике построить сетку. Для преобразования символьного выражения в вещественные числа использовать `eval()`.

Суммирование рядов $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$

```
symsum(f,k,a,b)
```

k – индекс суммирования; a,b – начальное и конечное значения индекса соответственно.

Вычислим $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$:

```
syms k
f = (-1)^k/k^2;
s = symsum(f,k,1,inf)


s =


  -1/12*pi^2
```

`symsum` удобно использовать для вычисления сумм, вместо использования циклов.

Задача 7. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

Построить график частичных сумм ряда для $n \in [1, 100]$. Для этого удобно воспользоваться функцией `cumsum`.

Арифметика заданной точности

vpa(x,n) вычисляет значение x с заданным числом цифр после запятой (n).

Вычислим pi с 320 знаками после запятой:

```
my_pi = vpa(pi,320) % my_py - 1x1 sym

my_pi =

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582
09749445923078164062862089986280348253421170679821480865
132823066470938446095505822317253594081284811174502841
0270193852110555964462294895493038196442881097566593344
6128475648233786783165271201909145648566923460348610454
3266482133936072602491412737245870066063155882
```

Преобразование/упрощение выражений

“Вкалывают роботы, счастлив человек”

Точнее: достаточно задать начальные формулы, чтобы система символьных вычислений (система компьютерной математики, computer algebra system) произвела все расчеты и представила результаты в требуемом виде.

Но! Не всегда готовые формулы получаются такими короткими и изящными, как бы нам того хотелось. Все преимущества формулы теряются из-за ее громоздкости.

Появляется задача: как упростить получено выражение.

Отчего появляются длинные формулы?

Отчасти, это связано с тем, что MATLAB не «знает», что для нас важно, а что нет – и это нужно ему «объяснить».

Мы можем получать формулы, даже не зная стоящей за ними математической теории. Но чтобы воспользоваться результатами, нужно вспомнить все предположения, которые делаются при расчетах.

Даже в этом случае результат все равно может получиться громоздким. Тогда можно попробовать упростить его.

Функции преобразования/упрощения выражений

Функциям преобразований и упрощения выражений в системах для символьных расчетов уделяется большое внимание. В MATLABе существует около дюжины таких функций, в частности:

- `simplify`
- `collect`
- `factor`
- `simple`
- `subs`

Упрощение символьных выражений: simplify(f)

```
>> f = sin(x)^2+cos(x)^2;
>> simplify(f)

ans =

1
```

simplify способен упрощать выражения, содержащие алгебраические и тригонометрические функции, логарифмы и экспоненты, а также некоторые спецфункции.

collect и factor

`collect(f,x)` — разложение полинома по степеням независимой переменной.

`x` – переменная, при степенях которой следует находить коэффициенты.

```
>> f = (x-1)*(x-2)*(x-3);
>> collect(f)

ans = x^3-6*x^2+11*x-6
```

`factor(f,x)` представляет полином `f` в виде произведения полиномов низших степеней с рациональными коэффициентами. То есть выполняет операцию, обратную `collect`:

```
>> f = x^3-6*x^2+11*x-6;
>> factor(f)

ans = (x-1)*(x-2)*(x-3)
```

Упрощение методом грубой силы: `simple()`

`simple(f)` — упрощает символьные выражения, применяя для этого `simplify`, `collect`, `factor` и другие подобные функции, а затем возвращает самый короткий результат. Работает медленнее всех остальных функций упрощения.

Подстановка одного выражения в другое: subs

```
subs(f,old,new)
```

`f` – выражение, в котором мы собираемся произвести замену; `old` – фрагмент, подлежащий замене; `new` – символьное выражение, которым нужно заменить `old`.

```
f = sym('a^2+b^2');
f1 = subs(f,'a','cos(x)');
f2 = subs(f1,'b','sin(x)');
f2
simplify(f2)

f2 =
      cos(x)^2 + sin(x)^2
ans =
      1
```

Куда идти дальше?

Символьные расчеты в MATLAB выполняются с помощью Symbolic Math Toolbox. Чтобы воспользоваться символьными расчетами нужно, чтобы Symbolic Math Toolbox был установлен на вашей машине.

Toolbox (набор инструментов) в MATLABе — набор функций, направленных на решение определенной группы задач.

Для более продвинутых символьных расчетов понадобится самостоятельные системы символьной математики.

Проприетарные:

- Maple
- Mathematica

Свободные:

- Maxima. GUI: wxMaxima, поддерживается Jupyter.

Ссылки

1. *Амосов А.А, Дубянский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994. – п. 2.5 "Особенности машинной арифметики", иллюстрация неравномерного распределения чисел на машинной прямой.
2. Хабр. Наглядное объяснение чисел с плавающей запятой – иллюстрации, дополняющие объяснение чисел с плавающей запятой из книги Амосова и др.
3. Floating point addition is not associative – простой пример не-ассоциативности сложения чисел на компьютере.
4. Double-precision_floating-point_format – исходная иллюстрация 64-битного представления чисел.

Список задач

- Задача 1
- Задача 2
- Задача 3
- Задача 4
- Задача 5
- Задача 6