# Численное решение дифференциальных уравнений

Храмов Д. А.

20.01.2019

# 1. Метод Эйлера

# Численное решение

## Задача

Дано уравнение вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.
Нужно найти значения $x$ в моменты времени $T > t_0$

$$x = F(t) - ?$$

# Проблема

- Далеко не каждое дифференциальное уравнение имеет аналитическое решение. Для таких уравнений формулы вида $x = F(t)$ просто не существует.
- В этом случае уравнение решается численно.
- Численный метод — это алгоритм, позволяющий вычислить значение $x(T)$ при заданных начальных условиях.
- Простейшим из численных методов является метод Эйлера.

# Метод Эйлера

Заменяем бесконечно малые интервалы $d$ на малые интервалы $\Delta$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx f(x,t). \tag{1}$$

Разобьем промежуток $[t_0; t_N]$ на части длины $h$ (шаг)

$$\Delta t = h - const.$$

Разность $x$ в соседних точках разбиения составит

$$\Delta x = x(t+h) - x(t).$$

Тогда из (1) следует

$$x(t+h) - x(t) = hf(x,t). \tag{2}$$

# Вспомним модель Мальтуса

Изменение численности населения на промежутке времени $\Delta t$:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta t \cdot \delta \cdot x(t)$$

Нам нужно вычислить $x(t + \Delta t)$, опираясь на известное значение $x(t)$. Перенесем $x(t)$ в правую часть уравнения.

# Формула метода Эйлера

Тогда из (2) следует

$$x(t+h) = x(t) + hf(x,t)$$

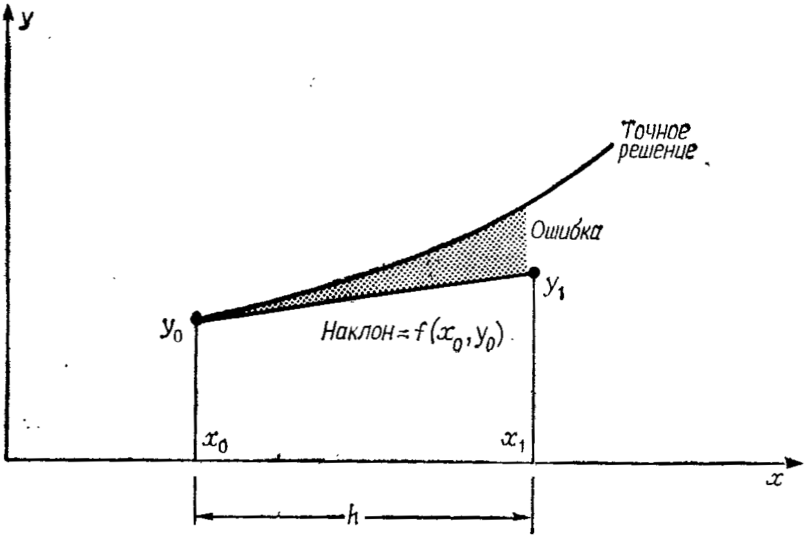
— формула **метода Эйлера**.

Последовательность расчета:

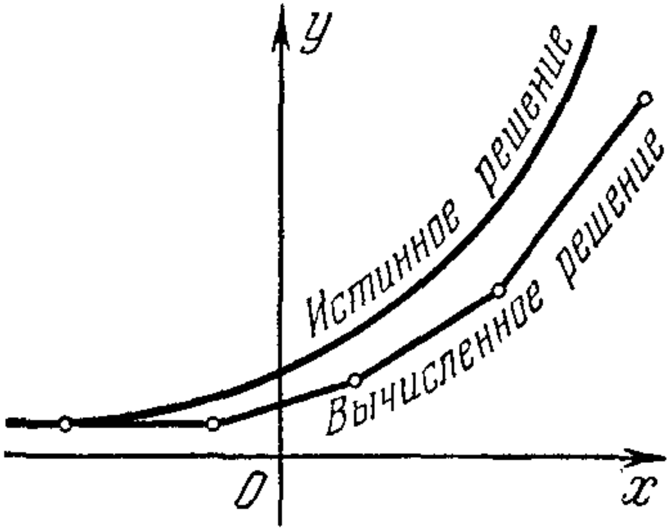
$$\begin{aligned}
x(t_1) &= x(t_0) + hf(x_0, t_0) \\
x(t_2) &= x(t_1) + hf(x_1, t_1) \\
\dots \quad & \quad \dots \\
x(t_n) &= x(t_{n-1}) + hf(x_{n-1}, t_{n-1})
\end{aligned}$$

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, \dots, N.$$

## На каждом шаге в вычисления вносится локальная ошибка



Накопление локальных ошибок на каждом шаге счета приводит к общей (глобальной) ошибке



# Причины появления погрешности

1. ошибка дискретизации, возникающая в результате замены дифференциального уравнения разностной аппроксимацией;
2. ошибка округления, накопившаяся при выполнении арифметических операций по формулам метода Эйлера (ограничения на представление чисел в используемом компьютере, погрешность аппроксимации функций).

# Точность метода Эйлера

Формула метода Эйлера

$$x(t_i + h) = x(t_i) + hf(x_i, t) = x(t_i) + \frac{h}{1!}x'(t_i)$$

является частью разложения функции $x(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t_i$

$$x(t_i + h) = x(t_i) + \frac{h}{1!}x'(t_i) + \frac{h^2}{2!}x''(t_i) + \dots$$

Локальная ошибка: $\frac{h^2}{2!}x''(t_i) \sim O(h^2)$.

Общая ошибка, накопившаяся за $n$ шагов расчета:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2!}x''(t_i) \approx n\frac{h^2}{2!}x''(t^*) = \frac{nh}{2}x''(t^*)h = \frac{(T - t_0)}{2}x''(t^*)h \sim O(h)$$

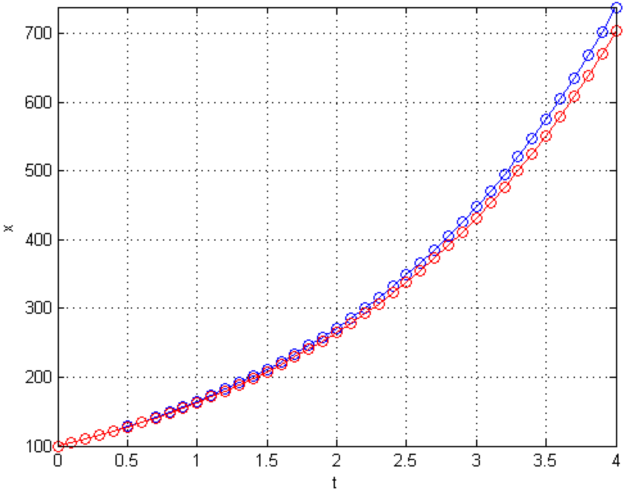
Общая ошибка метода Эйлера $\varepsilon \sim O(h)$ — этот метод является **методом 1-го порядка**.

# Численное решение методом Эйлера

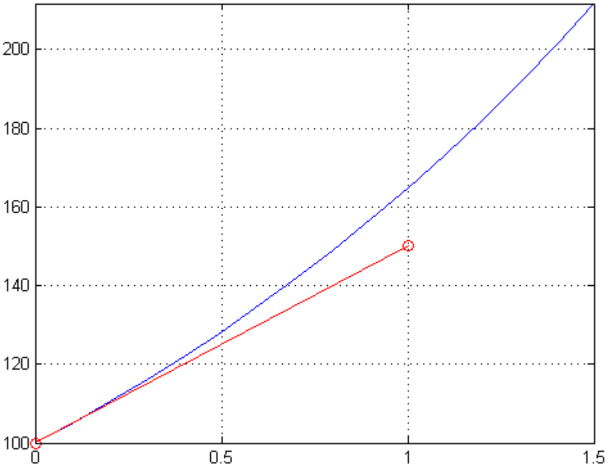
```
h = .1;               % шаг интегрирования
t = 0; tStop = 4; % промежуток интегрирования [t;tStop]
x = 100;              % x(0)
a = .5;
% dx/dt = f(x,t)
f = @(x,t) a*x;

tSol(1) = t; xSol(1) = x;
i = 1;
while t < tStop
    x = x + h*f(x,t);
    t = t + h;
    i = i + 1;
    tSol(i) = t;
    xSol(i) = x;
end
```

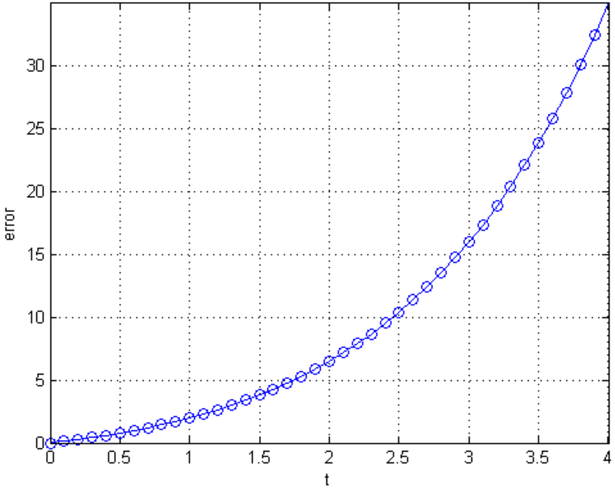
# Сравнение аналитического и численного решения для закона Мальтуса



# Первый шаг расчета по методу Эйлера



# Ошибка расчета



# Метод Эйлера для системы ДУ

$$X'(t) = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0,$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_m \end{bmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{bmatrix} f_1(t, X) \\ f_2(t, X) \\ \dots \\ f_m(t, X) \end{bmatrix}.$$

Формула метода Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + hF(t, X_k).$$

# Достоинства и недостатки метода Эйлера

Основное достоинство метода Эйлера — его простота. В реальных расчетах он практически не используется в силу:

1. большой погрешности вычислений $(O(h))$;
2. вычислительной неустойчивости.

# Простая модификация метода Эйлера

Точность метода Эйлера можно существенно повысить, улучшив аппроксимацию производной.

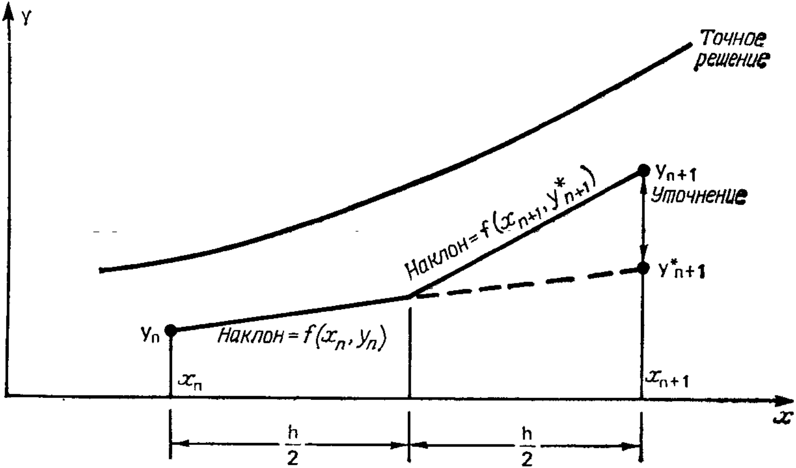
Например, можно использовать среднее значение производной в начале и конце интервала.

$$x_{k+1}^* = x_k + hf(x_k, t_k),$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, t_k) + f(x_{k+1}^*, t_{k+1})\right].$$

Общая ошибка модифицированного метода Эйлера: $O(h^2)$.

# Модифицированный метод Эйлера



# Изменения в коде

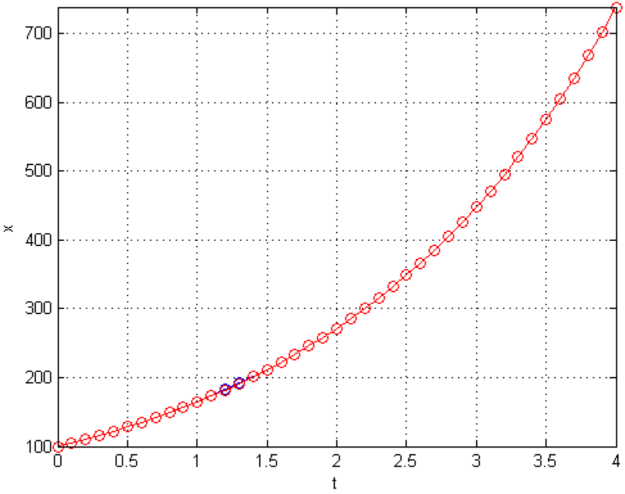
## Было

```
while t < tStop
    x = x + h*f(x,t);
    ...
end
```

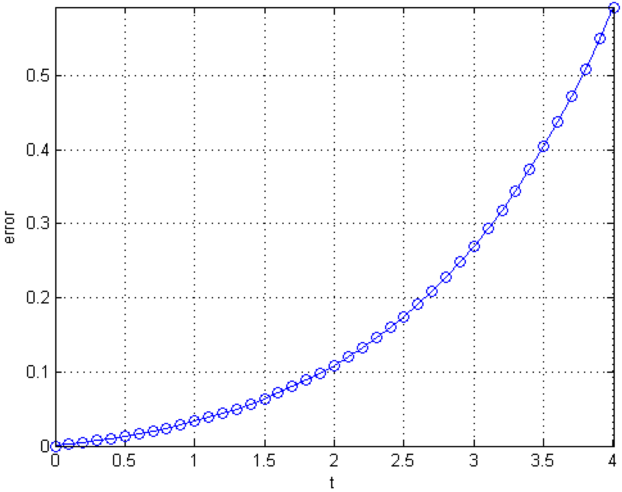
## Стало

```
while t < tStop
    k1 = f(x,t);
    k2 = f(x+h*k1,t+h);
    x = x + (h/2)*(k1 + k2);
    ...
end
```

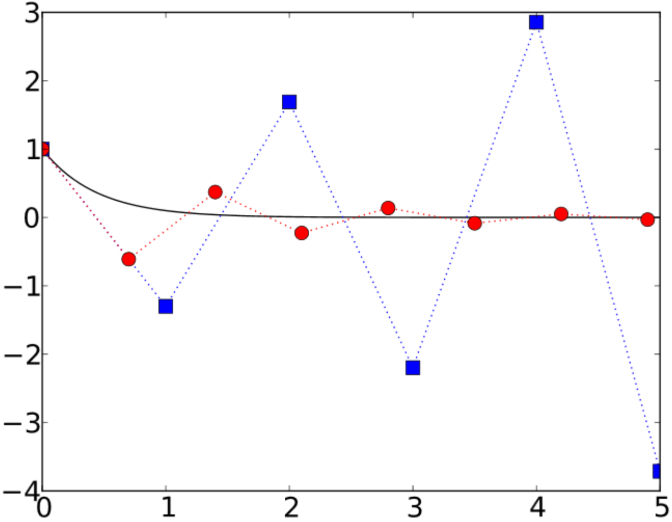
# Сравниваем аналитическое и численное решения



# Величина погрешности



# Вычислительная неустойчивость метода Эйлера




$x' = 2.3x, x(0) = 1$. Решение: $x(t) = e^{-2.3t}$. Шаг $h = 1$

# Задача.

Найдите решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 2t^2 + 2x, \quad x(0) = 1.$$

аналитически и с помощью метода Эйлера.

Подберите шаг $h$ так, чтобы разность между аналитическим и численным решениями в точке $x(1)$ составляла не более 1%.

Чему равна эта величина шага?

# 2. Решатели ОДУ в Matlab

# Пример

Найдем численное решение ОДУ

$$x'' + 2x' + 10x = \sin t.$$

Начальные условия: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Можно считать, что уравнение описывает колебания материальной точки под действием периодической внешней силы с учетом сопротивления среды. Координата точки в начальный момент времени равняется 1, а скорость — 0.

# Схема решения в MATLAB

1. Приведение дифференциального уравнения $f(t, x, x', x'', x^{(n)}) = 0$ к системе дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = F(t, Y)$.
2. Написание m-функции для правой части системы уравнений $F(t, Y)$.
3. Вызов подходящего решателя.
4. Визуализация результата.

## Приведем уравнение к системе уравнений 1-го порядка

$$x'' + 2x' + 10x = \sin t.$$

Делаем замену

$$y = x'.$$

Получаем

$$\begin{aligned} y &= x', \\ y' + 2y + 10x &= \sin t. \end{aligned}$$

Переносим производные в левую часть равенств, а члены без производных – в правую

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -2y - 10x + \sin t. \end{aligned}$$

Делаем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= y_1, \\ y &= y_2. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2y_2 - 10y_1 + \sin t \end{bmatrix}.$$

Вектор начальных условий:

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вместо одного уравнения 2-го порядка получили 2 уравнения 1-го порядка.

В общем случае ОДУ $n$-го порядка сводится к системе $n$ уравнений 1-го порядка.

# Решатели (солверы)

Для решения задачи Коши в MATLAB существует семь решателей:

`ode45`, `ode23`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` и `ode23tb`.

Вызов решателя:

```
[t,y] = solver(@fun,interval,y0,options)
```

Входные параметры:

- `fun` — функция в которой вычисляется правая части системы ДУ — $F(t, Y)$;
- `interval = [t0 tn]` — массив из двух чисел, задающий промежуток для решения уравнения;
- `y0` — матрица-столбец начальных условий;
- `options` — настройки для управления параметрами и ходом вычислительного процесса.

# Решатели (солверы) — 2

Выходные параметры:

- массив `t` с координатами узлов сетки, в которых найдено решение;
- матрицу решений `y`, каждый столбец которой является значением $Y_k$.

# m-функция для правой части системы уравнений $F(t, Y)$

```
% файл func.m
function F = func(t, y)
F = [y(2); -2*y(2) - 10*y(1) + sin(t)];
```

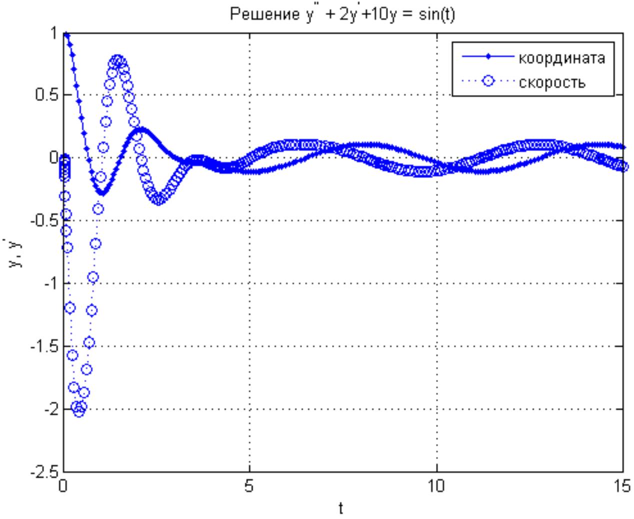
# Вызов решателя

Рекомендуется начинать с `ode45` — он подходит для большинства случаев.

# Код

```
% сформируем вектор начальных условий
y0 = [1; 0];
% зададим интервал исследования
dT = [0 15];
% воспользуемся решателем ode45
[T, Y] = ode45(@func, dT, y0);
% выведем график решения исходного ДУ - x(t)
% (маркеры - точки, линия - сплошная)
plot(T, Y(:, 1), '.-'), grid on;
```

# Визуализация



# Ссылки


1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов, М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
2. Плохотников К. Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB: курс лекций. 2-е изд., испр. М.: Горячая линия – Телеком, 2013. 496 с.
3. Kiusalaas J. Numerical Methods in Engineering with MATLAB, 2nd ed., Cambridge University Press, 2009, 431 p.