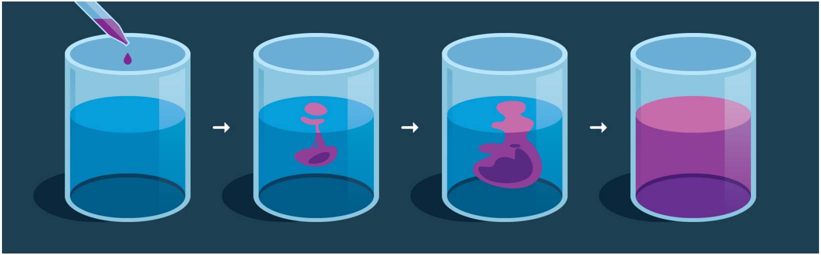
Клеточные автоматы и агентное моделирование

Храмов Д. А.

23.01.2019

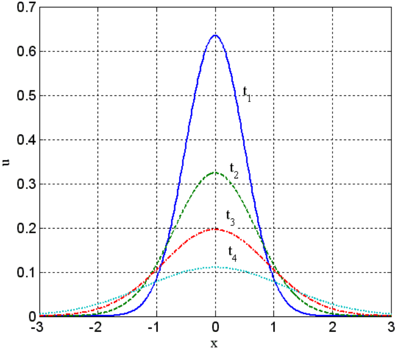
1. Диффузия и клеточные автоматы

Диффузия



Диффузия — процесс переноса вещества из области с высокой концентрацией в область с низкой концентрацией

Концентрация — количество вещества



$t_1 < t_2 < t_3 < t_3$

Концентрация примеси является функцией места и времени,

$$u = u(x, t)$$

если

- температура вещества постоянна
- в среде нет особых, энергетически более выгодных областей

Клеточный автомат

Клеточный автомат представляет собой набор конечного числа элементов (клеток или ячеек), образующих регулярную структуру (сетку).

Каждая клетка может находиться в одном из конечного числа состояний, например, «0» или «1».

Для клетки вводится понятие окрестности, т.е. клеток, располагающихся не более чем на заданном расстоянии от нее.

Каждая клетка может взаимодействовать только с клетками из своей окрестности.

0	33,3	33,3	33,3	0

$$u_j^{n+1} = s_l u_{j-1}^n + s u_j^n + s_r u_{j+1}^n$$
$$s_l + s + s_r = 1.$$

Код

```
ncells = 10; % количество Ячеек
N = 20; % количество шагов по времени

L = 1/3; % влево
S = 1/3; % на месте
R = 1/3; % вправо

c = zeros(ncells,1); % Массив значений концентрации
cmax = 100;          % Максимум концентрации
c(ncells/2) = cmax;  % Начальное значение концентрации
x = 2:ncells-1;

axis([1 ncells 0 cmax]), grid on
xlabel('Position'), ylabel('Value')

for i=1:N   % цикл по времени
    line(1:ncells,c,'EraseMode','none') % рисуем текущие значениЯ концентрации
    c(x) = c(x-1)*L + c(x)*S + c(x+1)*R; % считаем новые
    title(['Time Step: ' num2str(i)])
end
```

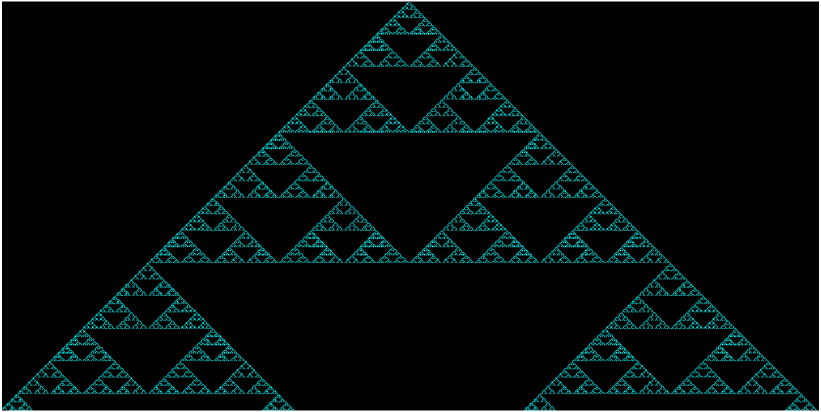
Одномерный клеточный автомат

...	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	...

Окрестность клетки x_t

Текущее состояние окрестности	111	110	101	100	011	010	001	000
Состояние центральной клетки на следующем шаге	0	1	0	1	1	0	1	0

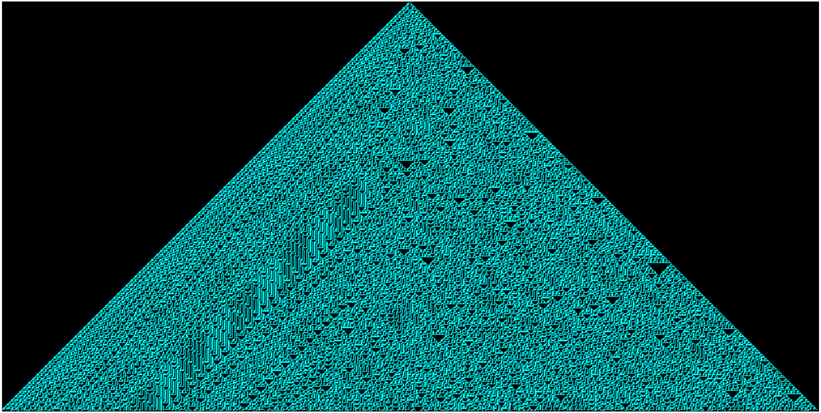
Правила одномерного КА



Правило 30

Текущее состояние окрестности	111	110	101	100	011	010	001	000
Состояние центральной клетки на следующем шаге	0	0	0	1	1	1	1	0

Правило 30 в действии



Правила игры

Место действия — размеченная на клетки плоскость.

Каждая клетка может находиться в двух состояниях: быть "живой" или быть "мертвой" (пустой).

Клетка имеет восемь соседей, окружающих ее.

Игрок задает начальное распределение клеток (первое поколение) и после этого не принимает участия в игре.

Каждое следующее поколение рассчитывается по правилам:

- в пустой клетке, рядом с которой есть ровно три живые клетки, зарождается жизнь;
- если у живой клетки есть две или три живые соседки, то эта клетка продолжает жить; если соседей меньше двух или больше трёх, то клетка умирает ("от одиночества" или "от перенаселённости").

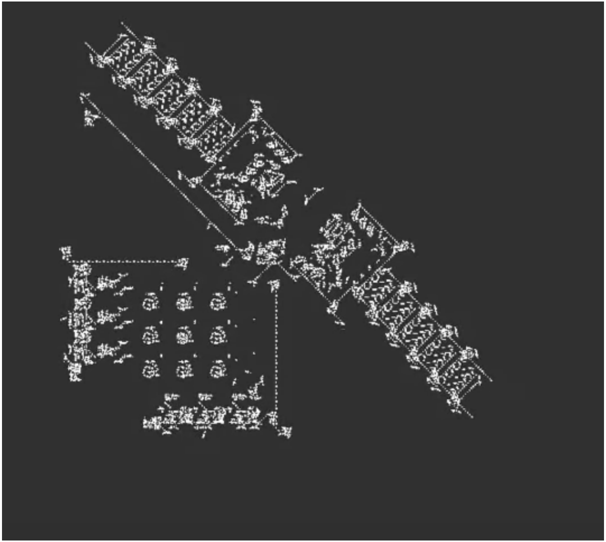
История

Джон Конвей заинтересовался проблемой, предложенной в 1940-х годах Джоном фон Нейманом: можно ли создать гипотетическую машину, которая способна воспроизводить сама себя.

Джону фон Нейману удалось создать математическую модель такой машины с очень сложными правилами.

Конвей попытался упростить эти правила, и, в конце концов, создал правила игры "Жизнь".

Впервые описание этой игры было опубликовано в октябрьском выпуске журнала Scientific American за 1970 год, в рубрике "Математические игры" Мартина Гарднера.



Видео: game of life.wmv

Youtube: epic conway's game of life

Факты и приложения

- **Биология.** Внешнее сходство с развитием популяций примитивных организмов привело к созданию модификаций игры, которые могут с точностью повторять размножение бактерий.
- **Физика.** Клеточные автоматы вообще и игра “Жизнь” в частности используются для анализа “явлений переноса” — диффузии, вязкости и теплопроводности.
- **Информатика.** В игре “Жизнь” можно создать универсальную машину Тьюринга: таким образом все, что может быть вычислено алгоритмически, может быть вычислено внутри игры “Жизнь”.

Станислав Лем «Системы оружия двадцать первого века или Эволюция вверх ногами» (1983 г.)

...для огромного большинства задач, которые выполняют люди, интеллект вообще не нужен. Это справедливо для 97,8% рабочих мест как в сфере физического, так и умственного труда.

Что же нужно? Хорошая ориентация, навыки, ловкость, сноровка и сметливость. Всеми этими качествами обладают насекомые. Оса вида сфекс находит полевого сверчка, впрыскивает в его нервные узлы ... яд, который парализует, но не убивает его, потом выкапывает в песке нужных размеров норку, кладёт рядом с ней жертву, заползает в норку, чтобы исследовать, хорошо ли она приготовлена, нет ли в ней сырости или муравьёв, втаскивает сверчка внутрь, откладывает в нём своё яичко и улетает, чтобы продолжить эту процедуру, благодаря которой развившаяся из яичка личинка осы может до своего превращения в куколку питаться свежим мясом сверчка. Тем самым оса демонстрирует превосходную ориентацию при выборе жертвы, а также при выполнении наркологическо-хирургической процедуры, которой подвергается жертва; навык в сооружении помещения для сверчка; сноровку при проверке того, обеспечены ли условия для развития личинки, а также сметливость, без которой вся последовательность этих действий не могла бы осуществиться. Оса, быть может, имеет достаточно нервных клеток, чтобы с неменьшим успехом водить, например, грузовик по длинной трассе, ведущей из порта в город, или управлять межконтинентальной ракетой, только биологическая эволюция запрограммировала её нервные узлы для совершенно иных целей.

2. Агентное моделирование

Моделирование «снизу вверх»

Традиционный подход к моделированию систем предполагает путь «сверху-вниз»: формулируются законы, управляющие поведением системы в целом, а затем с их помощью устанавливаются как ведут себя элементы системы.

Возможен и подход «снизу вверх»: законы, управляющие поведением системы, неизвестны и должны быть сформулированы на основе изучения того, как взаимодействуют между собой элементы системы.

Агентное моделирование (agent-based modeling)

В агентном моделировании система состоит из множества автономных сущностей — агентов — которые взаимодействуют друг с другом на основе некоторых правил.

Агенты могут представлять собой людей (распространение инфекционного заболевания среди населения), животных (взаимодействие популяций «хищников и «жертв»), молекул (хим. реакции), частиц вещества (вместо сплошной среды моделируются силы притяжения и отталкивания между отдельными частицами) и мн. др.

Агентное моделирование = агенты + правила взаимодействия

Появление агентного моделирования связано с развитием компьютеров.

Агентное моделирование близко к объектно-ориентированному программированию, но они не эквивалентны.

Агентное моделирование — наиболее естественный подход для описания эмерджентных явлений, т. е. явлений, возникающих при взаимодействии частей системы.

Простые правила взаимодействия агентов могут привести к сложному, иногда контринтуитивному, поведению системы в целом.

Роевой интеллект

Каждую пчелу в отдельности нельзя назвать талантливым инженером или архитектором. Другое дело пчелиный рой. Рой может решать задачи, немыслимые для одной пчелы: находить новое место обитания или кратчайший путь к источнику пищи.

В рое нет начальников и подчиненных. Но даже если в нем насчитывается десятки тысяч пчел, он прекрасно функционирует, хотя в человеческом обществе для организации взаимодействия такого количества людей понадобилась бы достаточно сложная иерархическая система.

Жизнь роя вместо этого построена на взаимодействии между отдельными пчелами, каждая из которых соблюдает набор простых правил. В результате возникает то, что называется **роевым интеллектом**: swarm intelligence, от swarm — рой, косяк, стая.

Youtube: Танец пчел

Муравьиные алгоритмы

Один и тот же муравей может сегодня работать строителем, а завтра — фуражиром или мусорщиком.

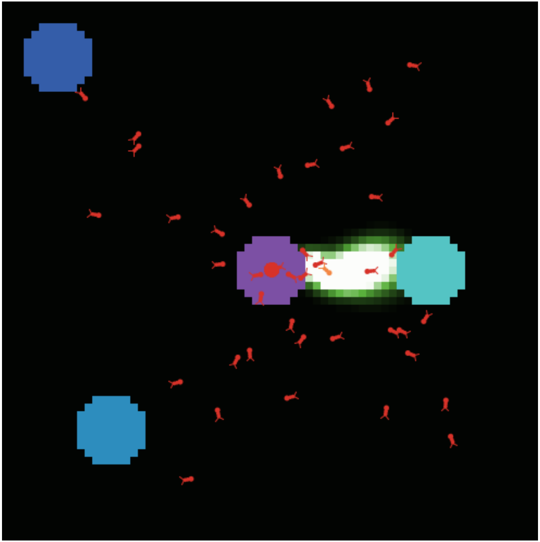
Как у колонии получается действовать слаженно, если в ней нет начальников?

Муравьи общаются при помощи осязания и обоняния. Когда муравьи движутся с пищей от источника к гнезду, они выделяют пахучие вещества — феромоны.

Запах феромонов привлекает других муравьев, и все больше их будет вместо беспорядочных перемещений вокруг двигаться к источнику пищи. При помощи феромонов муравьи метят кратчайший путь от источника пищи до муравейника, и чем чаще им приходится ходить по одной и той же дороге, тем интенсивнее и отчетливее становится феромоновый след.

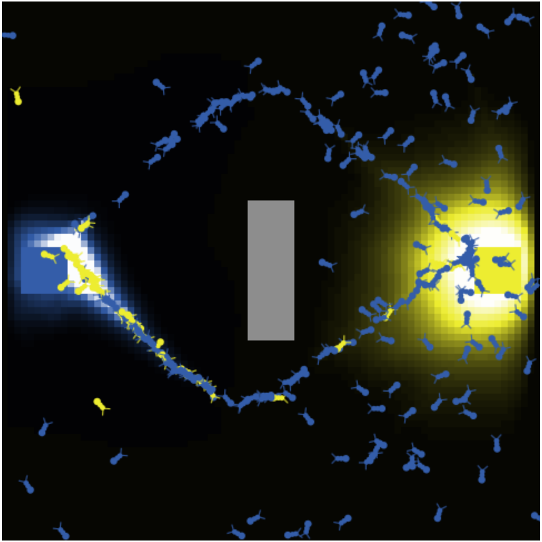
Но запах феромонов выветривается и как только источник иссякнет, муравьи перестанут оставлять запах и колония переключится на новые источники.

Муравьи в поисках пищи



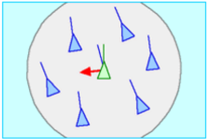
Видео: 04-ants

Муравьи обходят препятствие

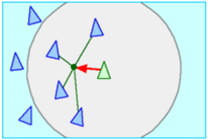


Видео: 05-ants

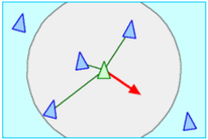
Boids: модель Крейга Рейнольдса, 1986 г.



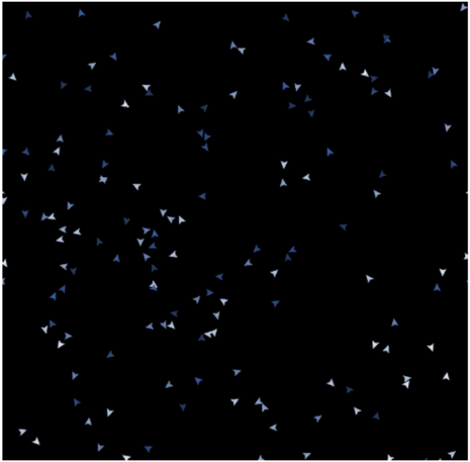
равнение



связанность



разделение



Видео: 06-flocking

boid = *bird* + dro*id*

В 1986 г. Крейг Рейнольдс (Craig Reynolds) предложил компьютерную модель скоординированного движения группы животных (птичьих стай, косяков рыб — flocking). Оказалось, что для реалистичного изображения стаи летящих птиц каждый агент должен следовать трем простым правилам:

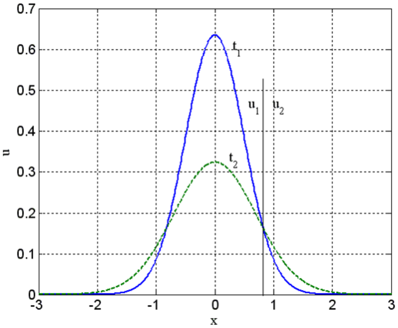
1. **Равнение** (alignment) означает, что птица старается поворачиваться так, чтобы направление ее движения совпадало с направлением движения соседних птиц.
2. **Разделение** (separation) означает, что птица движется так, чтобы избежать столкновения с соседней птицей, находящейся к ней слишком близко.
3. **Связанность** (cohesion) означает, что птица будет двигаться вместе с соседними птицами, если те не находятся слишком близко.

Craig Reynolds, “Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model” // Computer Graphics, 21(4), стр. 25–34, 1987 г.

3. Исследование диффузии при помощи дифференциальных уравнений

Поток

Поток вещества через сечение трубы — количество примеси, проходящее через сечение в единицу времени.



Поток будет тем больше, чем больше перепад концентраций примеси в сечении:

$$\Phi \sim \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{u(x,t)} \approx -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Плотность потока

Поток пропорционален площади сечения S и зависит от свойств вещества D

$$\Phi = -DS\frac{\partial u}{\partial x}$$

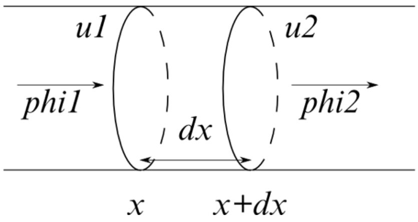
D — коэффициент диффузии. Характеризует диффузионные свойства вещества.

Чтобы избавится от привязки к конкретному сечению, используют понятие **плотности потока вещества —** количества вещества, проходящего в единицу времени через единицу площади сечения

$$\varphi = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

Изменение концентрации со временем

Выделим в трубе элементарный объем и потоки примеси, входящий и выходящий из этого объема.



По закону сохранения материи разность этих потоков равна изменению концентрации внутри данного объема, происходящему с течением времени

$$(u_1 - u_2)S\Delta x = (\varphi_2 - \varphi_1)S\Delta t$$

$$\Delta u \Delta x = -\Delta\varphi\Delta t$$

Уравнение диффузии

$$\Delta u \partial x = -\Delta \varphi \partial t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Вспомним определение потока вещества и получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

D, вообще говоря, является функцией концентрации, т.к. частота обмена местами атома зависит от структуры окружающего этот атом участка вещества. Но если считать $D \sim const$, то получим **уравнение диффузии**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Краевые условия

Кроме самого уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

необходимо задать также

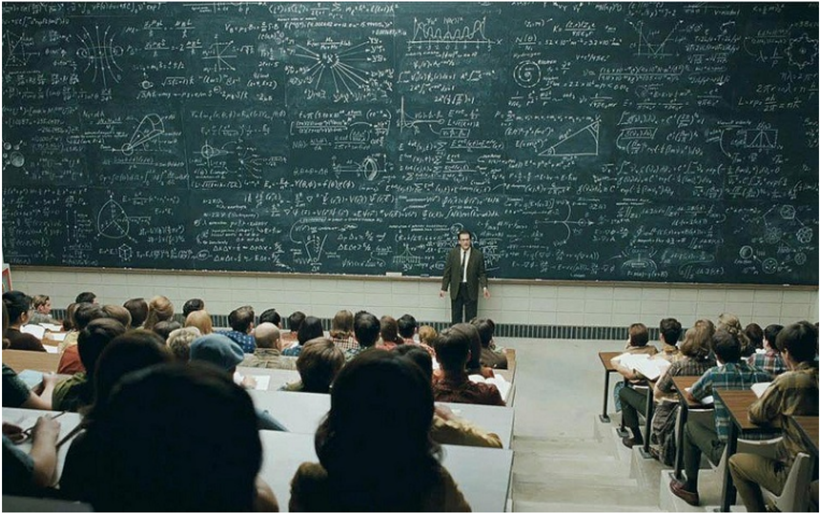
- начальное условие

$$u(x,0) = f(x)$$

- граничные условия

$$u(a,t) = u_a, \quad u(b,t) = u_b$$

Что дальше?



Применим метод конечных разностей

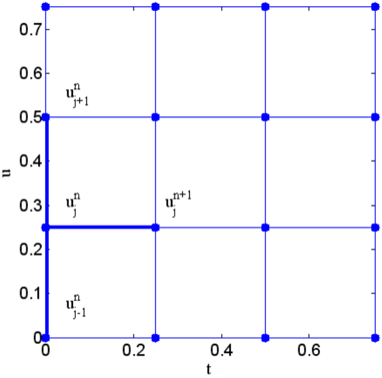
Заменим непрерывную функцию $u(x,t)$ функцией, заданной в дискретные моменты времени

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t = T$$

в дискретных точках пространства

$$a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots, a+J\Delta x = b$$

$$u(x,t) \to u(a+j\Delta x, n\Delta t)$$



Продолжим превращения

Заменим в уравнении диффузии производные их приближенными значениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_j}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Разностное уравнение

Вместо исходного уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

получим

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Если известен профиль концентрации в заданный момент времени, т.е. для определенного момента времени n мы знаем значения все значения u_j^n, то мы можем найти концентрацию в следующий момент времени u_j^{n+1} для каждого j, т.е. для любой точки пространства (сетки) и тем самым решить уравнение.

Расчетная формула

Перепишем

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

следующим образом

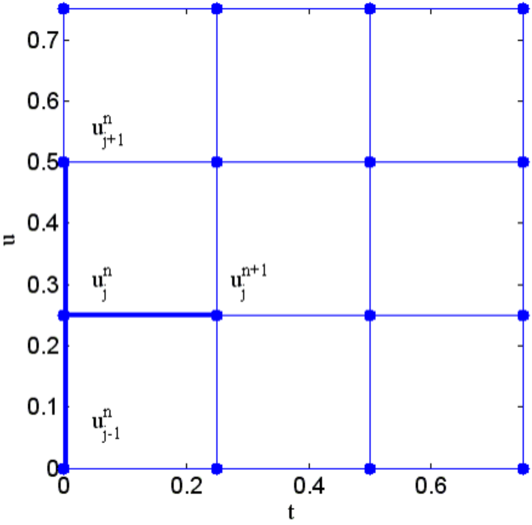
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

или

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1-2s)u_j^n, \quad s = D\Delta t/\Delta x^2.$$

Т.е. концентрация примеси в данной точке в определенный момент времени определяется концентрацией в этой точке (на $(1-2s)$) и в соседних точках (s) в предыдущий момент времени.

Вспомним сетку



Код

```
xmin = -5; xmax = 5; % границы стержня
tmin = 0; tmax = 4;  % интервал времени
J = 10; % число узлов по x
N = 20; % число узлов по t
dx = (xmax-xmin)/J; % шаг разбиения стержня
dt = (tmax-tmin)/N; % шаг по времени

D = 2; % коэф-т диффузии
fmax = 50; % макс. знач-е концентрации
f = zeros(1,J); f( round(J/2) ) = fmax;
u = zeros(N,J);
u(1,:) = f; % нач. условие
ua = 0; ub = 0; % гран. условия в нач. момент времени

s = D*dt/dx^2;
if 1-2*s < 0, error('s incorrect'), end

for n = 1:N-1
    u(n+1,2:J-1) = s*(u(n,3:J) + u(n,1:J-2)) + (1-2*s)*u(n,2:J-1);
    u(n+1,1) = ua;
    u(n+1,J) = ub;
end
surf(u)
xlabel('x'),ylabel('t'),zlabel('u')
```

Замечания

По физическому смыслу задачи масса распространяющейся примеси должна сохранятся

$$s + s + (1 - 2s) = 1$$

Кроме того, коэффициенты s и $(1 - s)$ должны быть положительны: $s > 0$, $(1 - 2s) > 0$, иначе получится, будто примесь движется «вспять во времени».

Но при $N = 10$ имеем $s = 0.8$ и второе неравенство не выполняется. В программу необходимо добавить проверку.