

# Этапы моделирования. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Храмов Д. А.

23.01.2019

# 1. Этапы построения математической модели

# Модель народонаселения

*Англия, середина XVIII века. Церковь в глубинке.*

Прихожане — жители окрестных деревень. Приходский священник замечает, что число прихожан возросло и храм стал тесноват для богослужений.

Священник размышляет: если число прихожан будет увеличиваться и дальше, придется строить новую церковь. Для этого понадобятся средства, и немалые. Срок, за который должен быть построен храм, и его размеры во многом зависят от того, как именно будет изменяться число окрестных жителей. Священник решает попытаться рассчитать это число.

**Источник:** *Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2004.*

Изменение численности населения за  $n$ -й год

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

$x_n$  — численность населения в начале  $n$ -го года.

Подсчитывая число родившихся

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

и умерших

$$d_1, d_2, \dots, d_k$$

в разные годы, священник решает сопоставить полученные числа с общим числом прихожан за эти годы

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

Священник замечает, что отношения

$$\frac{b_1}{x_1}, \frac{b_2}{x_2}, \dots, \frac{b_k}{x_k}$$

и

$$\frac{d_1}{x_1}, \frac{d_2}{x_2}, \dots, \frac{d_k}{x_k}$$

год от года почти не изменяются.

Для простоты расчетов можно считать эти отношения постоянными. Обозначим их через

$$\alpha = \frac{b_i}{x_i}$$

и

$$\beta = \frac{d_i}{x_i}$$

Изменение численности населения за год составляет разность между числом родившихся и числом умерших в этом году.

## Что мы сделали?

Мы сформулировали интересующие нас свойства реального объекта (население) на языке используемой нами отрасли науки (социологии, биологии).

Полученную в результате модель будем называть **содержательной** или **вербальной** (от лат. *verbum* «слово»).

При построении содержательной модели мы сформулировали гипотезы — допущения, при которых эта модель будет работать. В нашем примере это:

- ▶ темпы прироста и убыли населения остаются постоянными;
- ▶ миграция населения отсутствует;
- ▶ половая и возрастная структура населения остаются неизменными.

Число родившихся в  $n$ -м году оказывается равным

$$\alpha x_n$$

число умерших

$$\beta x_n$$

а изменение численности прихода составит

$$\Delta x_n = \alpha x_n - \beta x_n$$

или

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n$$

Обозначив  $\gamma = 1 + \alpha - \beta$ , получим в итоге **модель Мальтуса**

$$x_{n+1} = \gamma x_n$$

# Принципы построения содержательной модели

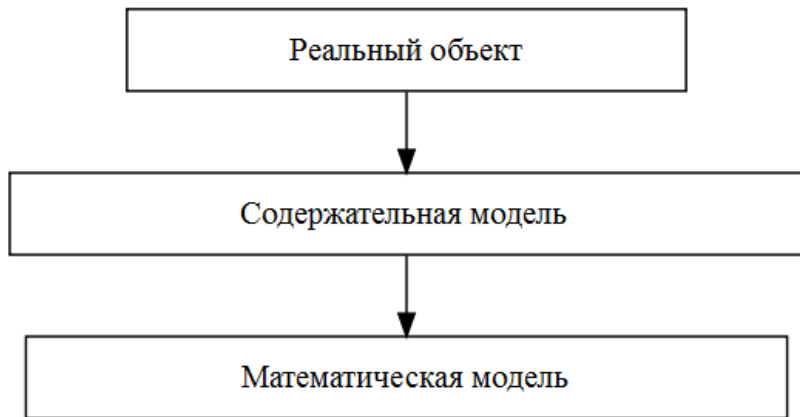
Бритва Оккама: “Не следует привлекать для объяснения новые сущности без крайней на то необходимости”.

А.Эйнштейн: “Всё следует упрощать до тех пор, пока это возможно, но не более того”.

Принцип KISS: “Keep it simple, stupid” (“Не усложняй”).



## Этапы построения модели



1. Процесс построения математической модели начинается с создания содержательной модели.
2. В содержательной модели на словах описываются интересующие нас свойства объекта и принимаются основные допущения.
3. Перечень допущений составляет неотъемлемую часть модели.
4. Содержательная модель формализуется в виде математической модели.
5. Решается математическая задача.

2. Что нам показывает модель?

## Проанализируем модель народонаселения Мальтуса

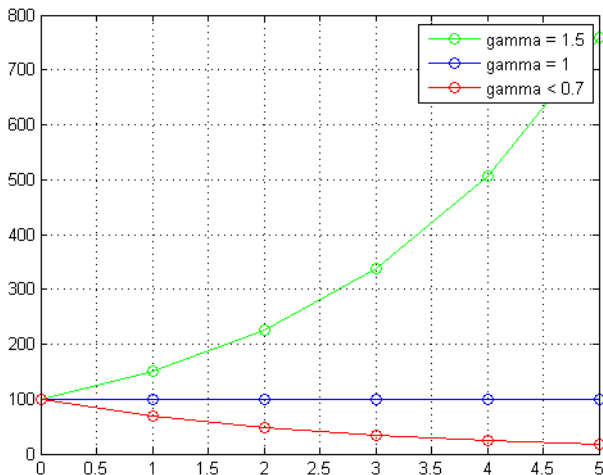
$$x_{n+1} = \gamma x_n$$

Возможны три случая:

1.  $\gamma > 1$  ( $\alpha - \beta > 0$  — рождается больше, чем умирает) — численность прихожан растет год от года;
2.  $\gamma = 1$  ( $\alpha - \beta = 0$  — умирает столько же, сколько рождается) — численность прихожан год от года остается неизменной;
3.  $\gamma < 1$  ( $\alpha - \beta < 0$  — умирает больше, чем рождается) — численность прихожан неуклонно снижается.

**Насколько быстро растет население в первом случае?**

## Три случая изменения численности населения



## В чем проблема?

- ▶ Чтобы узнать численность населения в год  $N$  нужно выполнить расчет населения в годы  $N - 1$ ,  $N - 2$ ,  $N - 3$ , ..., начиная с самого начала.
- ▶ Расчеты выполняются с фиксированным интервалом — 1 год.
- ▶ По виду формулы трудно судить о закономерностях изменения численности населения.

### 3. Дифференциальные уравнения

## Переход к дифференциальному уравнению

Изменение численности населения за 1 год:

$$x_{n+1} - x_n = \delta \cdot x_n \quad (= \alpha x_n - \beta x_n, \delta = \alpha - \beta)$$

За малый промежуток времени  $\Delta t$ :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \delta \cdot x(t) \Delta t$$

Разделим на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{dx}{dt} = \delta \cdot x, \quad \delta - \text{const}$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ),  
выражающее закон Мальтуса.

**Обыкновенное** — потому что содержит производную  $d/dt$ , а не частную производную  $\partial/\partial t$ .



$x = f(t)$  — неизвестная функция, выражающая закон изменения численности населения во времени.

Нам известно, что скорость изменения численности населения  $dx/dt$  пропорциональна самой этой численности  $x$ .

Аналитическое решение дифференциального уравнения Мальтуса имеет вид

$$x = Ce^{\delta t}$$

**В чем смысл постоянной  $C$ ?**

Теперь, задавшись численностью населения в начальный момент времени, можно вычислить ее в любой последующий момент времени.

## Символьные решения в Matlab

```
%% dx/dt = ax  
syms a x  
eqn = 'Dx = a*x';  
dsolve(eqn, 't')
```

$C2 \cdot \exp(a \cdot t)$

```
%% dx/dt = ax, x(0) = b  
syms a x b  
eqn = 'Dx = a*x';  
cond = 'x(0)=b';  
xSol = dsolve(eqn, cond, 't');
```

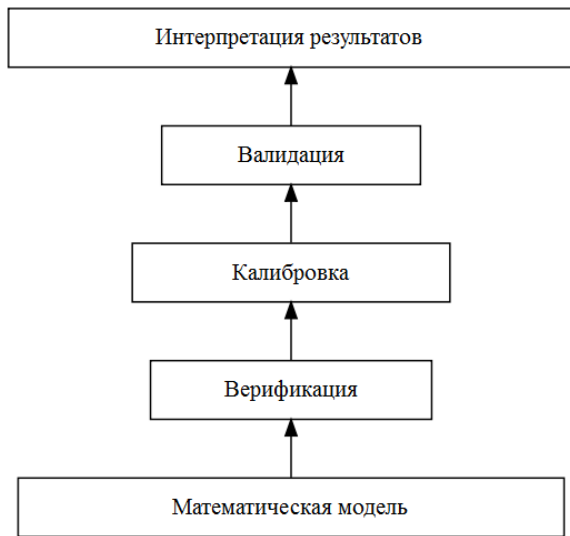
$b \cdot \exp(a \cdot t)$

**Источник:** <https://www.mathworks.com/help/symbolic/dsolve.html>

- ▶ Аналитическое решение дает формулу, с помощью которой можно, задавшись значением в начальный момент времени, получить значение решения в любой последующий момент времени.
- ▶ Знание аналитического решения дает экономию усилий и ресурсов, направленных на расчеты.
- ▶ Далеко не все дифференциальные уравнения имеют аналитические решения.

## 4. Этапы работы с моделью

## От модели к проверке полученных результатов



Анализ результатов работы модели и ее проверка

**Верификация** (от лат. *verus* — истинный, *facere* — делать) — подтверждение соответствия модели (программного продукта) заданным требованиям.

Верификация подтверждает, что модель работает так, как и было задумано.

**Валидация** — проверка соответствия результатов моделирования результатам наблюдений за реальным объектом.

Валидация подтверждает, что мы создали адекватную («правильную») модель.

**Калибровка** модели — процесс определения и настройки параметров модели таким образом, чтобы обеспечить максимальное приближение результатов расчета к данным натурных измерений.

## Вернемся к модели Мальтуса

Калибровка модели состоит в определении  $\gamma$  по данным наблюдений.

Результаты валидации модели Мальтуса: при расчете на 3—4 года вперед формула  $x_{n+1} = \gamma x_n$ , ( $\gamma > 1$ ) работает достаточно хорошо. Более долгосрочный прогноз, основанный на ней, оказывается ошибочным.

Теория Мальтуса пытается описать демографические процессы в доиндустриальных обществах.

## Закон Мальтуса

Т. Р. Мальтус, “Principles of political economy considered with a view to their practical application” (1820 г.)

Население имеет тенденцию размножаться по закону геометрической прогрессии:

$$x_{n+1} = \gamma x_n, \quad \gamma > 1$$

в то время как средства существования могут увеличиваться лишь по закону арифметической прогрессии:

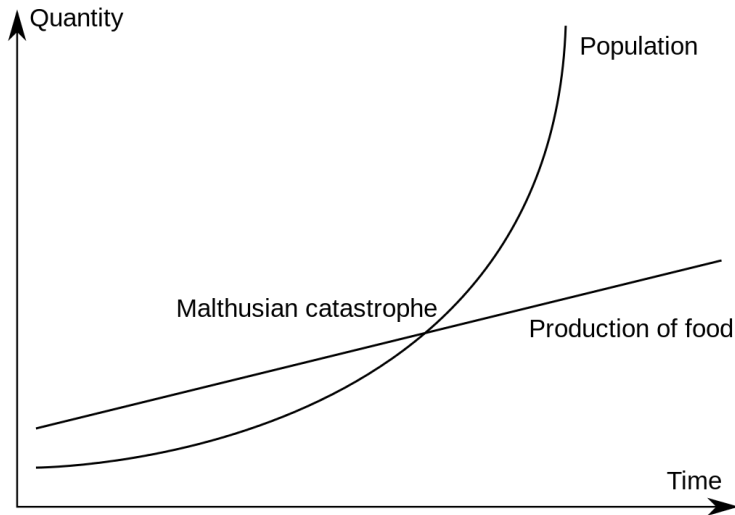
$$y_{n+1} = y_n + d, \quad d > 0.$$

## Выводы Мальтуса

Рост народонаселения может быть остановлен лишь встречными причинами, которые сводятся к нравственному воздержанию или несчастьям (войны, эпидемии, голод).



# Мальтузианская ловушка



Рост населения в конечном счете обгоняет рост производства продуктов питания

## Дополняем модель Мальтуса

Полемика вокруг выводов Мальтуса была весьма острой.

### Аргументы Чарльза Дарвина

Поскольку ни одна популяция не размножается до бесконечности, должны существовать факторы, препятствующие неограниченному размножению.

Этими факторами могут быть:

- ▶ нехватка ресурса (продовольствия), вызывающая конкуренцию внутри популяции за ресурс,
- ▶ хищничество,
- ▶ конкуренция с другими видами.

Результатом является замедление скорости роста популяции и выход ее численности на стационарный уровень.

## Модель Ферхюльста

С ростом конкурентная борьба за средства существования приводит к уменьшению  $\delta$ . Формализуем это

$$\frac{dx}{dt} = \delta(x) \cdot x, \quad \delta(x) = a - bx$$

Получим

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$$

или

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

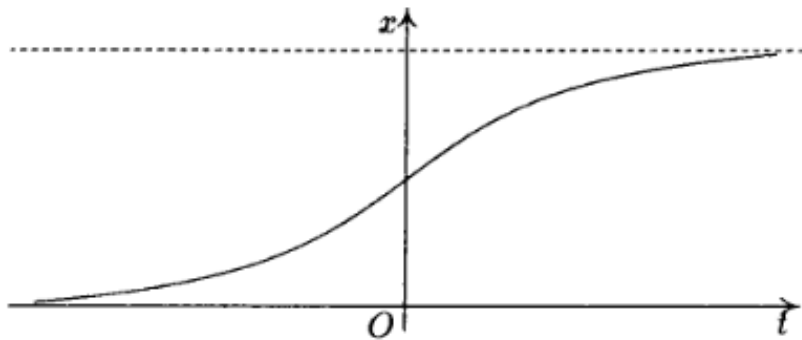
- ▶  $r$  характеризует скорость роста (размножения);
- ▶  $K$  — емкость среды (максимально возможная численность популяции).

В экологии различают две стратегии поведения видов:

1.  $r$ -стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей;
2.  $K$ -стратегия — низкий темп размножения и долгая жизнь.

## Логистическая кривая

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Логистическая кривая

## Закон Ферхюльста

$$\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{K}\right), \quad p(0) = p_0$$

$$K = 100, r = 0.3, p_0 = 10;$$

% Ищем аналитическое решение

```
eqn = 'Dp = r*p*(1-p/K)';
```

```
init = 'p(0)=p0';
```

```
p = dsolve(eqn,init,'t')
```

% Строим график

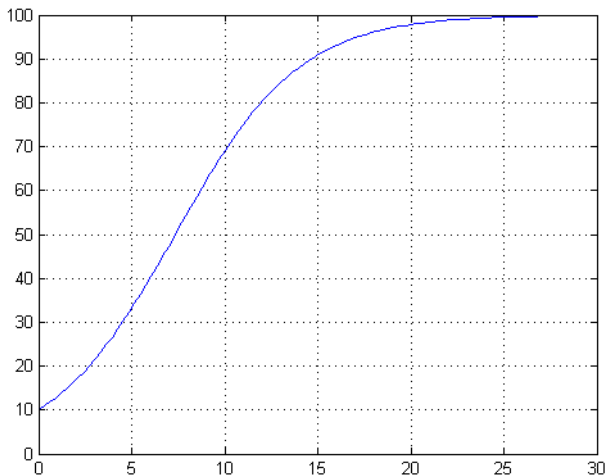
```
K = 100; r = 0.3; p0 = 10;
```

```
t = linspace(0,30,100);
```

```
p = eval(vectorize(p));
```

```
plot(t,p), grid on;
```

## И снова логистическая кривая



## Немного магии

```
p = K/(exp(K*(log((K - p0)/p0)/K - (r*t)/K)) + 1)
```

```
>> p = simplify(p)
```

```
p = (K*p0*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t))
```

# Проверка

Подставим найденное решение в исходное уравнение.

```
syms K r t
z = diff(p,t) - r*p*(1-p/K)

z = (K*p0*r*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t)) -
(K*p0^2*r*exp(2*r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t))^2 +
(K*p0*r*exp(r*t)*((p0*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t)) - 1))/(K

simplify(z)

z = 0
```

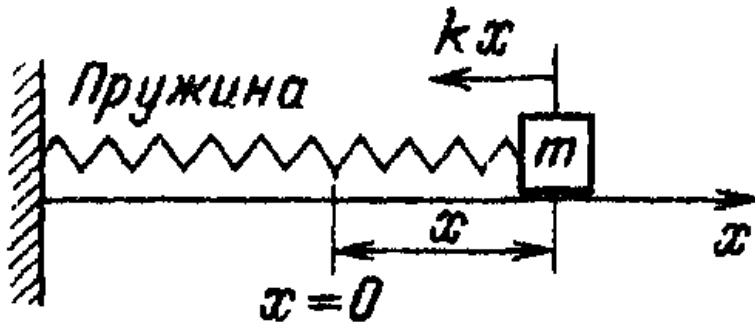


Задача. Найти аналитическое решение дифференциального уравнения

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Построить график полученной функции  $y = f(x, C)$  для нескольких значений произвольной постоянной  $C$ .

## Пример: колебания груза на пружине



- ▶ сила трения отсутствует;
- ▶ масса точечная, т.е. нас не интересуют ее размеры;
- ▶ сила упругости подчиняется закону Гука:  $F = -kx$ .

## Строим математическую модель

Согласно 2-му закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

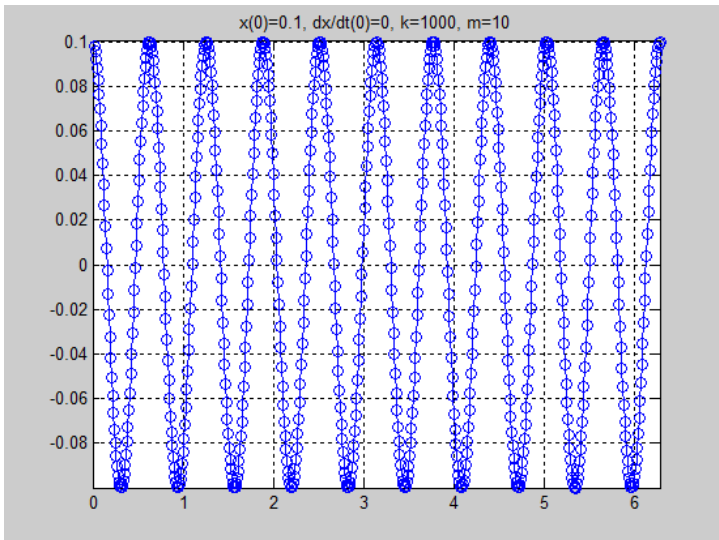
Это уравнение имеет аналитическое решение

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$C_1, C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Груз совершает гармонические колебания с центром  $x = 0$ , с произвольной амплитудой и с угловой частотой  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Колебания маятника без трения при  
 $x(0) = 0.1, x'(0) = 0$



## Решим дифференциальное уравнение

Найдем аналитическое решение уравнения колебаний груза на пружине

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

при следующих начальных условиях:  $x(0) = 0.1, x'(0) = 0$ .

Вторая производная задается как: `diff(x,t,2)`.

$x'(0) = 0$  как `Dx = diff(x,t);`, а затем в начальных условиях:  
`Dx(0)==0`.

## Решение

```
%% для старых версий MATLAB
syms x m k
cond = 'x(0)=pi/4, Dx(0)=0';
eqn = 'm*D2x + k*x = 0';
dsolve(eqn,cond,'t')
```

```
%% для новых версий MATLAB (>R2012b)
syms x(t) m k
Dx = diff(x,t);
cond = [x(0)==pi/4,Dx(0)==0];
eqn = m*diff(x,t,2) + k*x == 0;
dsolve(eqn,cond)
```

## Сводка функций

- ▶ `syms` объявляет символьный объект (класс `sym`);
- ▶ относительно символьных объектов можно делать предположения (`real`, `positive`);
- ▶ `diff` задает производную от переменной;
- ▶ `dsolve` аналитически решает ДУ.

## Дополнительная информация

- ▶ Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей: написание уравнений, упрощение уравнений, выбор решений. Изд. 3-е, испр. М.: КомКнига, 2007. 192 с.