Этапы моделирования. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Храмов Д. А.

21.02.2019

1. Этапы построения математической модели

Модель народонаселения

Англия, середина XVIII века. Церковь в глубинке.

Прихожане — жители окрестных деревень. Приходский священник замечает, что число прихожан возросло и храм стал тесноват для богослужений.

Священник размышляет: если число прихожан будет увеличиваться и дальше, придется строить новую церковь. Для этого понадобятся средства, и немалые. Срок, за который должен быть построен храм, и его размеры во многом зависят от того, как именно будет изменяться число окрестных жителей. Священник решает попытаться рассчитать это число.

Источник: *Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г.* Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2004.

Изменение численности населения за n-й год

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

x_n — численность населения в начале n-го года.

Подсчитывая число родившихся

$$b_1, b_2, \ldots, b_k$$

и умерших

$$d_1, d_2, \ldots, d_k$$

в разные годы, священник решает сопоставить полученные числа с общим числом прихожан за эти годы

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

Священник замечает, что отношения

$$\frac{b_1}{x_1}, \frac{b_2}{x_2}, \ldots, \frac{b_k}{x_k}$$

и

$$\frac{d_1}{x_1}, \frac{d_2}{x_2}, \ldots, \frac{d_k}{x_k}$$

год от года почти не изменяются.

Для простоты расчетов можно считать эти отношения постоянными. Обозначим их через

$$\alpha = \frac{b_i}{x_i}$$

и

$$\beta = \frac{d_i}{x_i}$$

Изменение численности населения за год составляет разность между числом родившихся и числом умерших в этом году.

Что мы сделали?

Мы сформулировали интересующие нас свойства реального объекта (население) на языке используемой нами отрасли науки (социологии, биологии).

Полученную в результате модель будем называть **содержательной** или **вербальной** (от лат. *verbum* «слово»).

При построении содержательной модели мы сформулировали гипотезы — допущения, при которых эта модель будет работать. В нашем примере это:

- темпы прироста и убыли населения остаются постоянными;
- миграция населения отсутствует;
- половая и возрастная структура населения остаются неизменными.

Число родившихся в n-м году оказывается равным

$$\alpha x_n$$

число умерших

$$\beta x_n$$

а изменение численности прихожан составит

$$\Delta x_n = \alpha x_n - \beta x_n$$

или

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n$$

Обозначив $\gamma = 1 + \alpha - \beta$, получим в итоге **модель Мальтуса**

$$x_{n+1} = \gamma x_n$$

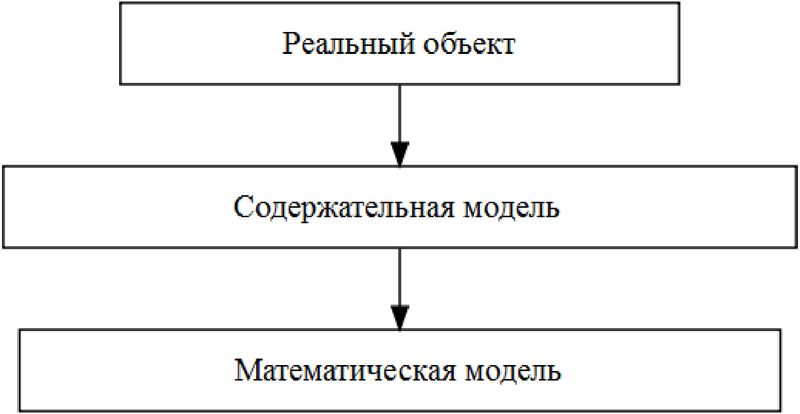
Принципы построения содержательной модели

Бритва Оккама: “Не следует привлекать для объяснения новые сущности без крайней на то необходимости”.

А.Эйнштейн: “Всё следует упрощать до тех пор, пока это возможно, но не более того”.

Принцип KISS: “Keep it simple, stupid” (“Не усложняй”).

Этапы построения модели



Резюме

1. Процесс построения математической модели начинается с создания содержательной модели.
2. В содержательной модели на словах описываются интересующие нас свойства объекта и принимаются основные допущения.
3. Перечень допущений составляет неотъемлемую часть модели.
4. Содержательная модель формализуется в виде математической модели.
5. Решается математическая задача.

2. Что нам показывает модель?

Проанализируем модель народонаселения Мальтуса

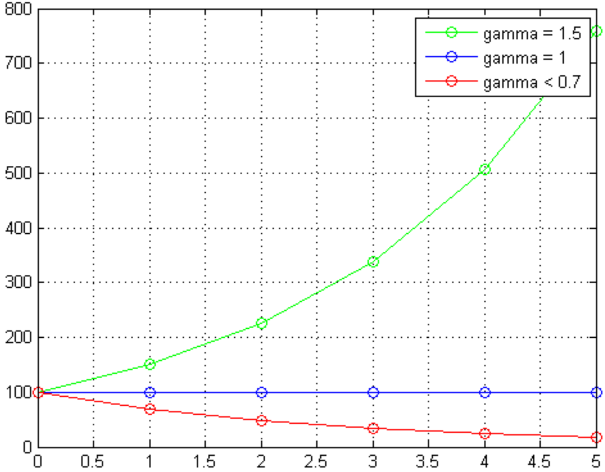
$$x_{n+1} = \gamma x_n$$

Возможны три случая:

1. $\gamma > 1$ ($\alpha - \beta > 0$ — рождается больше, чем умирает) — численность прихожан растет год от года;
2. $\gamma = 1$ ($\alpha - \beta = 0$ — умирает столько же, сколько рождается) — численность прихожан год от года остается неизменной;
3. $\gamma < 1$ ($\alpha - \beta < 0$ — умирает больше, чем рождается) — численность прихожан неуклонно снижается.

Насколько быстро растет население в первом случае?

Три случая изменения численности населения



В чем проблема?

- Чтобы узнать численность населения в год N нужно выполнит расчет населения в годы $N-1$, $N-2$, $N-3$, $\ldots$, начиная с самого начала.
- Расчеты выполняются с фиксированным интервалом — 1 год.
- По виду формулы трудно судить о закономерностях изменения численности населения.

3. Дифференциальные уравнения

Переход к дифференциальному уравнению

Изменение численности населения за 1 год:

$$x_{n+1} - x_n = \delta \cdot x_n \qquad (= \alpha x_n - \beta x_n, \delta = \alpha - \beta)$$

За малый промежуток времени Δt:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \delta \cdot x(t)\Delta t$$

Разделим на Δt и устремив $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \delta \cdot x, \quad \delta - const$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), выражающее закон Мальтуса.

Обыкновенное — потому что содержит производную d/dt, а не частную производную $\partial/\partial t$.

$x = f(t)$ — неизвестная функция, выражающая закон изменения численности населения во времени.

Нам известно, что скорость изменения численности населения dx/dt пропорциональна самой этой численности x.

Аналитическое решение дифференциального уравнения Мальтуса имеет вид

$$x = Ce^{\delta t}$$

В чем смысл постоянной C?

Теперь, задавшись численностью населения в начальный момент времени, можно вычислить ее в любой последующий момент времени.

Символьные решения в Matlab

```
%% dx/dt = ax
syms a x
eqn = 'Dx = a*x';
dsolve(eqn,'t')

      C2*exp(a*t)

%% dx/dt = ax, x(0) = b
syms a x b
eqn = 'Dx = a*x';
cond = 'x(0)=b';
xSol = dsolve(eqn,cond,'t');

      b*exp(a*t)
```

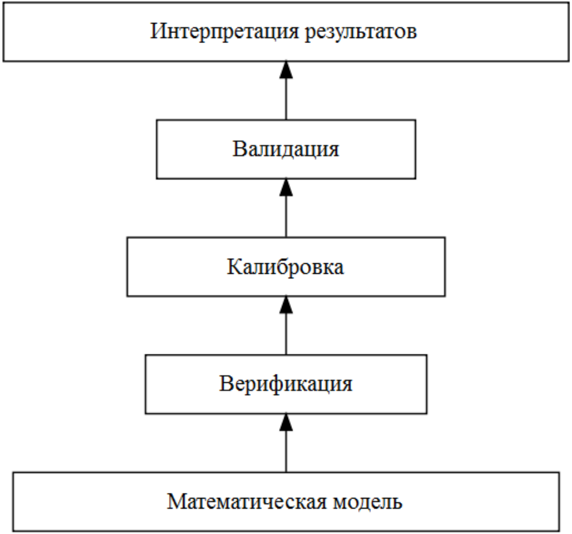
Источник: https://www.mathworks.com/help/symbolic/dsolve.html

Резюме

- Аналитическое решение дает формулу, с помощью которой можно, задавшись значением в начальный момент времени, получить значение решения в любой последующий момент времени.
- Знание аналитического решения дает экономию усилий и ресурсов, направленных на расчеты.
- Далеко не все дифференциальные уравнения имеют аналитические решения.

4. Этапы работы с моделью

От модели к проверке полученных результатов



Анализ результатов работы модели и ее проверка

Терминология

Верификация (от лат. verus — истинный, facere — делать) — подтверждение соответствия модели (программного продукта) заданным требованиям.

Верификация подтверждает, что модель работает так, как и было задумано.

Валидация — проверка соответствия результатов моделирования результатам наблюдений за реальным объектом.

Валидация подтверждает, что мы создали адекватную («правильную») модель.

Калибровка модели — процесс определения и настройки параметров модели таким образом, чтобы обеспечить максимальное приближение результатов расчета к данным натурных измерений.

Вернемся к модели Мальтуса

Калибровка модели состоит в определении γ по данным наблюдений.

Результаты валидации модели Мальтуса: при расчете на 3—4 года вперед формула $x_{n+1} = \gamma x_n$, $(\gamma > 1)$ работает достаточно хорошо. Более долгосрочный прогноз, основанный на ней, оказывается ошибочным.

Теория Мальтуса пытается описать демографические процессы в доиндустриальных обществах.

Закон Мальтуса

Т. Р. Мальтус, “Principles of political economy considered with a view to their practical application” (1820 г.)

Население имеет тенденцию размножаться по закону геометрической прогрессии:

$$x_{n+1} = \gamma x_n, \quad \gamma > 1$$

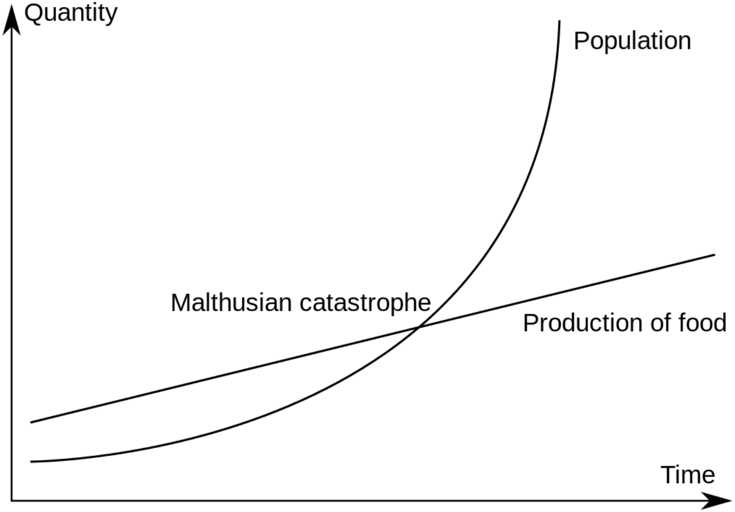
в то время как средства существования могут увеличиваться лишь по закону арифметической прогрессии:

$$y_{n+1} = y_n + d, \quad d > 0.$$

Выводы Мальтуса

Рост народонаселения может быть остановлен лишь встречными причинами, которые сводятся к нравственному воздержанию или несчастьям (войны, эпидемии, голод).

Мальтузианская ловушка



Рост населения в конечном счете обгоняет рост производства продуктов питания

Дополняем модель Мальтуса

Полемика вокруг выводов Мальтуса была весьма острой.

Аргументы Чарльза Дарвина

Поскольку ни одна популяция не размножается до бесконечности, должны существовать факторы, препятствующие неограниченному размножению.
Этими факторами могут быть:

- нехватка ресурса (продовольствия), вызывающая конкуренцию внутри популяции за ресурс,
- хищничество,
- конкуренция с другими видами.

Результатом является замедление скорости роста популяции и выход ее численности на стационарный уровень.

Модель Ферхюльста

С ростом x конкурентная борьба за средства существования приводит к уменьшению δ. Формализуем это

$$\frac{dx}{dt} = \delta(x) \cdot x, \quad \delta(x) = a - bx$$

Получим

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$$

или

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

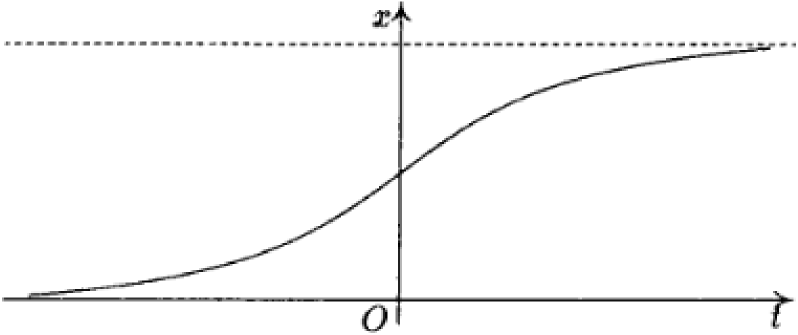
- r характеризует скорость роста (размножения);
- K — емкость среды (максимально возможная численность популяции).

В экологии различают две стратегии поведения видов:

1. r-стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей;
2. K-стратегия — низкий темп размножения и долгая жизнь.

Логистическая кривая

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Логистическая кривая

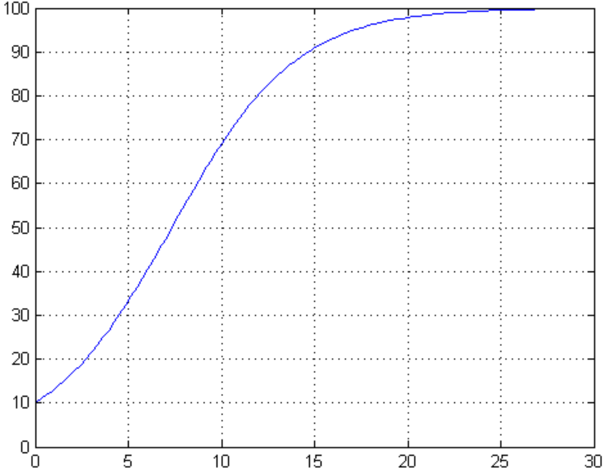
Закон Ферхюльста

$$\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right), \quad p(0) = p_0$$

$K = 100$, $r = 0.3$, $p_0 = 10$;

```
% Ищем аналитическое решение
eqn  = 'Dp = r*p*(1-p/K)';
init = 'p(0)=p0';
p = dsolve(eqn,init,'t')

% Строим график
K = 100; r = 0.3; p0 = 10;
t = linspace(0,30,100);
p = eval(vectorize(p));
plot(t,p), grid on;
```

И снова логистическая кривая



Немного магии

```
p = K/(exp(K*(log((K - p0)/p0)/K - (r*t)/K)) + 1)

>> p = simplify(p)

p = (K*p0*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t))
```

Проверка

Подставим найденное решение в исходное уравнение.

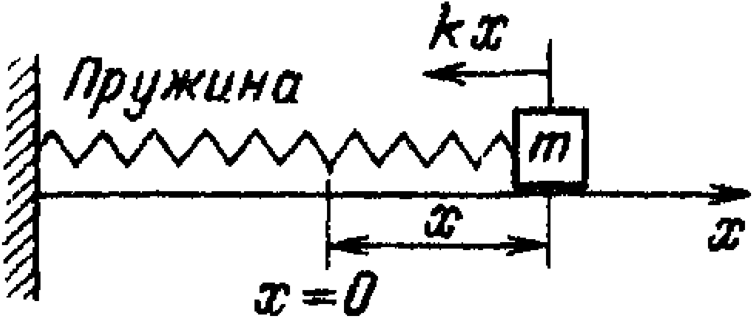
```
syms K r t
z = diff(p,t) - r*p*(1-p/K)

z = (K*p0*r*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t)) -
(K*p0^2*r*exp(2*r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t))^2 +
(K*p0*r*exp(r*t)*((p0*exp(r*t))/(K - p0 + p0*exp(r*t)) - 1))/(K

simplify(z)

z = 0
```

Задача. Найти аналитическое решение дифференциального уравнения

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Построить график полученной функции $y = f(x, C)$ для нескольких значений произвольной постоянной C.

Пример: колебания груза на пружине



- сила трения отсутствует;
- масса точечная, т.е. нас не интересуют ее размеры;
- сила упругости подчиняется закону Гука: $F = -kx$.

Строим математическую модель

Согласно 2-му закону Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

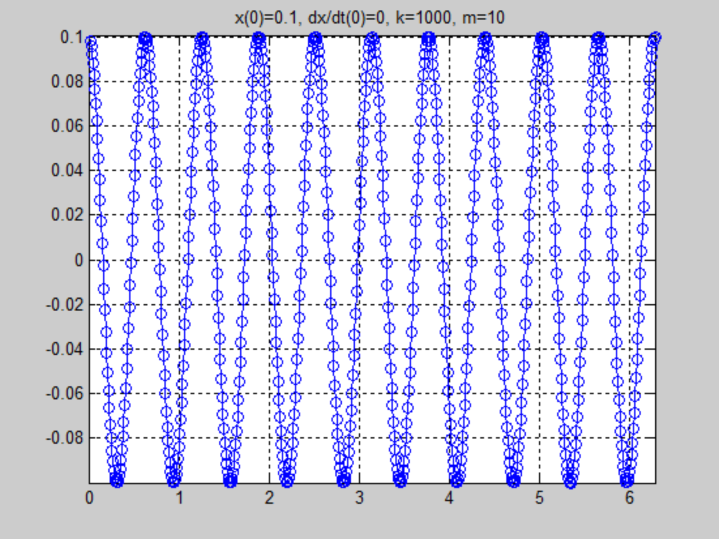
Это уравнение имеет аналитическое решение

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Груз совершает гармонические колебания с центром $x = 0$, с произвольной амплитудой и с угловой частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Колебания маятника без трения при $x(0) = 0.1, x'(0) = 0$



Решим дифференциальное уравнение

Найдем аналитическое решение уравнения колебаний груза на пружине

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

при следующих начальных условиях: $x(0) = 0.1, x'(0) = 0.$

Вторая производная задается как: `diff(x,t,2)`.

$x'(0) = 0$ как `Dx = diff(x,t);`, а затем в начальных условиях: `Dx(0)==0`.

Решение

```
%% для старых версий MATLAB
syms x m k
cond = 'x(0)=pi/4, Dx(0)=0';
eqn = 'm*D2x + k*x = 0';
dsolve(eqn,cond,'t')

%% для новых версий MATLAB (>R2012b)
syms x(t) m k
Dx = diff(x,t);
cond = [x(0)==pi/4,Dx(0)==0];
eqn = m*diff(x,t,2) + k*x == 0;
dsolve(eqn,cond)
```

Сводка функций

- `syms` объявляет символьный объект (класс sym);
- относительно символьных объектов можно делать предположения (`real`, `positive`);
- `diff` задает производную от переменной;
- `dsolve` аналитически решает ДУ.

Дополнительная информация

- Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей: написание уравнений, упрощение уравнений, выбор решений. Изд. 3-е, испр. М.: КомКнига, 2007. 192 с.