Источники погрешности расчетов

Храмов Д. А.

23.01.2019

1. Особенности машинной арифметики

Сложение

Попробуем вычесть на компьютере числа $10^{16} + 1$ и 10^{16}:

```
10^16 + 1 - 10^16 = 0
10^16 - 10^16 + 1 = 1
```

Т.е. сложение/вычитание чисел на компьютере **может оказаться некоммутативным**.

Поскольку это происходит с арифметическими действиями, то и результат вычисления функции на компьютере отличается от принятого в математике:

$\cos \pi/2 = 0$, а `cos(pi/2) = 6.1232e-17`.

Предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.718...$$

Пробуем:

```
n = [1 1e3 1e7 1.2e11 1.2e13 1.7e14 1e15 3e15 5e15 8e15
     1e16 1e19];
(1+1./n).^n
```

Получаем:

```
[2.0000, 2.7169, 2.7183, 2.7183, 2.7161, 2.6683, 3.0350,
 3.7896, 3.0350, 5.9083, 1.0000, 1.0000]
```

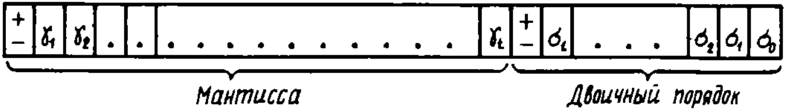
Источник проблем лежит в несовпадении машинной арифметики с обычной из-за конечности разрядной сетки ЭВМ.

Представление вещественных чисел в памяти компьютера

Для хранения вещественного числа в памяти компьютера отводится поле стандартной длины — *машинное слово*.

64-разрядный компьютер имеет машинного слова длиной 64 бита.

Вещественные числа представляется в памяти компьютера в форме записи с плавающей точкой.



1045.86 => $0.104586 \cdot 10^4$ => +104586+4

- 104586 – мантисса числа (цифры после запятой)
- 4 – порядок (показатель степени).

Пусть длина машинного слова равна 9, длина мантиссы m=6, порядка p=1.

Если мантисса имеет меньший порядок, то наше число будет обрезано, чтобы уместится в заданное число разрядов.

При m=4 получим: +1045+4 => $0.1046 \cdot 10^4$.

Из такого представления чисел вытекает ряд следствий...

Следствие 1. В компьютере представимы не все числа

…а лишь конечное подмножество рациональных чисел, «укладывающееся» в рамки машинного слова

Любое другое число будет представлено с ошибкой округления, не меньшей единицы младшего разряда мантиссы.

Машинный эпсилон (машинная точность) ε_M — наименьшее представимое в компьютере число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon_M = \min\{\varepsilon : 1 + \varepsilon > 1\}$$

ε_M характеризует наименьшую относительную погрешность вычислений и зависит от конкретной ЭВМ и разрядности вычислений (`single`, `double`, …). Требовать большего невозможно!

```
eps = 1;
x = 1;
while x + eps > x, eps = eps/2, end
```

Следствие 2. Диапазон изменения чисел в компьютере ограничен

Существует минимальное X_{min} и максимальное X_{max} числа, которые можно представить в данном компе. Все числа, меньшие по модуля X_{min} для машины не различимы и представляют собой машинный нуль. Числа же большие Xmax рассматриваются как машинная бесконечность (`Inf`).

Пусть $10^{-78} \leq |x| \geq 10^{76}$ (одинарная точность).

Вычислим `x = ab/(cd)` при `a = 10^(-30)`, `b = 10^(-35)`, `c = 10^(-40)`, `d = 10^(-25)`

- `x = a*b/c/d` => underflow;
- `x = 1/c/d*a*b` => overflow.
- `x = a/c * b/d` => `x = 1` (правильный ответ). Этот же ответ можно получить, если отмасштабировать переменные, например, умножив на `10^40`.

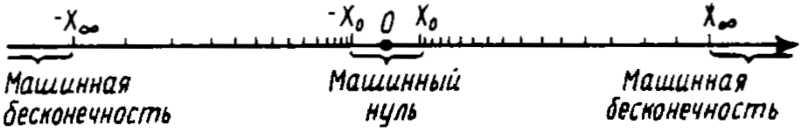
При переполнении или исчезновении порядка нужно попытаться изменить последовательность действий или

Следствие 3. На машинной числовой прямой числа распределены неравномерно

Плотность чисел возрастает по мере приближения к нулю и убывает по мере отдаления.

ε_M зависит от разрядности мантиссы, но ведь есть еще и порядок! Из-за различия в последнем знаке мантиссы 1.001e0 и 1e0 отличаются на 0.001, но если увеличить порядок, то 1.001e3 и 1e3 будут отличаться на 1.000.

При сложении (умножении) следует располагать слагаемые так, чтобы при каждом сложении порядки величин различались мало.



ПРК “Пэтриот”, 25.02.1991 — ошибка при перехвате иракских ракет

Время измерялось системными часами в десятках секунд, а затем умножалось на 1/10 чтобы получить результат в секундах. Вычисление производились с 24-разрядными числами.

1/10 — бесконечная двоичная дробь, которая обрезалась после 24-го разряда. Появлялась ошибка округления, из-за которой батарея противоракет, находившаяся на боевом дежурстве около 100 часов, накапливала погрешность в определении времени в 0.34 с.

Ракета “Scud” (Р-17) летит со скоростью около 1676 м/с и за 0.34 с. пролетает около 0.5 километра. В итоге система ПРО не реагировала на подлетающую ракету, считая что та находится за пределами охраняемого участка.

Источник: http://www-users.math.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html

Проверим?

Что будет, если сравнить

```
0.3 == 0.3
```

А это?

```
0.4 - 0.1 == 0.3
```

Что подлетало: Р-17

Куда прилетело

Ариан-5, 4.06.1996 — взрыв после 40 секунд полета

The rocket was on its first voyage, after a decade of development costing \$7 billion. The destroyed rocket and its cargo were valued at \$500 million. The cause of the failure was a software error in the inertial reference system. Specifically a 64 bit floating point number relating to the horizontal velocity of the rocket with respect to the platform was converted to a 16 bit signed integer. The number was larger than 32768, the largest integer storeable in a 16 bit signed integer, and thus the conversion failed.

Источник: http://www-users.math.umn.edu/~arnold/disasters/ariane.html

2. Приближенные вычисления

Абсолютная и относительная погрешности

- a — точное значение, вообще говоря, неизвестное;
- a^* — известное приближенное значение.

Абсолютная погрешность (absolute tolerance)

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|.$$

Чтобы охарактеризовать точность, абсолютной погрешности недостаточно. Погрешность нужно сопоставлять со значением измеряемой величины.

Относительная погрешность (relative tolerance)

$$\delta(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|}.$$

Относительная погрешность не зависит от масштабов и единиц измерения. Ее удобно определять в процентах.

На практике точное значение числа неизвестно и вместо самих погрешностей оперируют их оценками.

Погрешность вычисления разности

Погрешности вычислительных методов образуются из погрешностей выполнения арифметических операций.

$$\Delta(a^* - b^*) = |(a - a^*) - (b - b^*)| \leq |a - a^*| + |b - b^*| = \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

Найдем относительную погрешность $a - b$ при условии, что a и b одного знака

$$|a - b|\delta(a^* - b^*) \leq |a|\delta(a^*) + |b|\delta(b^*) \leq (|a| + |b|)\delta_{max} = |a + b|\delta_{max}$$

$$\delta(a^* - b^*) \leq \frac{|a + b|}{|a - b|}\delta_{max}$$

При $a \approx b$: $\delta(a^* - b^*) \to \infty$.

Происходит катастрофическая потеря точности.

Пример

$$\delta(a^* - b^*) \leq \frac{\Delta(a^* + b^*)}{|a - b|}$$

$a^* = 47.132 \pm 0.0005$ и $b^* = 47.111 \pm 0.0005$. Вычислим $\delta(a^* - b^*)$.

1. $\Delta(a^* + b^*) = 0.0005 + 0.0005 = 0.001$
2. $a - b = 0.021$
3. $\delta(a^* - b^*) = 0.001/0.021 \approx 0.05$

$\delta(a^* - b^*)$ **в 5000 раз больше** относительных погрешностей исходных данных $(\delta(a^*) = 0.0005/47.132 \approx 0.00001$, $\delta(b^*) \approx 0.00001)$.

Следует избегать вычитания близких чисел. Если это невозможно, нужно использовать для вычитаемых чисел типы данных с большей точностью.

3. Суммируем погрешности

Неустранимые погрешности

Погрешности появляются на каждом этапе работы

1. Математическая модель — всегда идеализированное, приближенное описание задачи. Неучтенные в ней факторы являются источником неточностей.

2. Исходные данные получены либо помощью измерений, либо с помощью других моделей. И те и другие содержат погрешности.

Погрешности модели и исходных данных характерны для любых расчетов. Это **неустранимые погрешности**, поскольку их нельзя убрать или уменьшить в ходе вычислений.

Погрешности вычислений

3. Решением задачи является **вычислительный алгоритм**. Он дает приближенное решение задачи и обладает погрешностями, называемыми погрешности метода.

4. Погрешности округления связаны с представлением чисел на компьютере. Например, на компьютере нельзя представить иррациональное число. Разница между округленным числом и исходным и есть погрешность округления.

Резюме

- Основы точности расчетов закладываются на этапе выбора математической модели. Исходя из этого, выбираются численные методы и программные средства.
- Во время вычислений нашей целью является — не испортить точность, заложенную в модели и исходных данных.
- Цель вычислений состоит в том, чтобы получить результат с заданной точностью.

4. Логистическое отображение

Математическая формулировка

Логистическое отображение — дискретный аналог уравнения Ферхюльста.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

где:

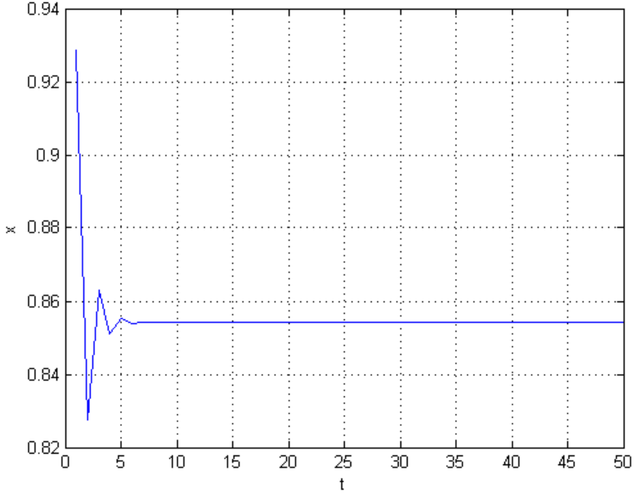
- x_n принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в n-ом году, а x_0 обозначает начальную численность (в год номер 0);
- r — положительный параметр, характеризующий скорость размножения популяции.

Эквивалентная формула:

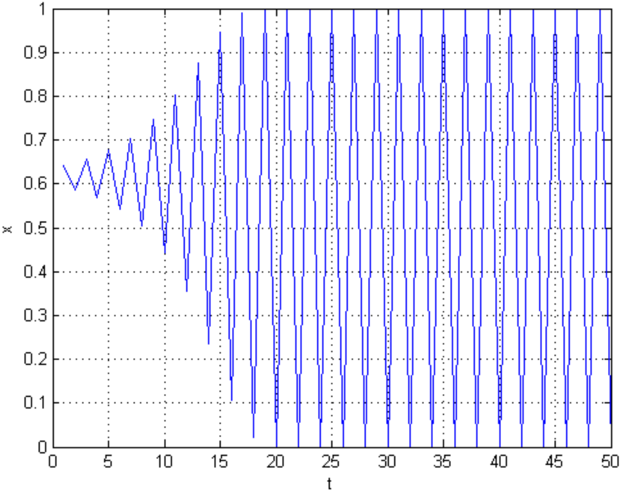
$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2.$$

Будем изменять λ в пределах $(0; 2]$ и проследим за изменениями численности популяции.

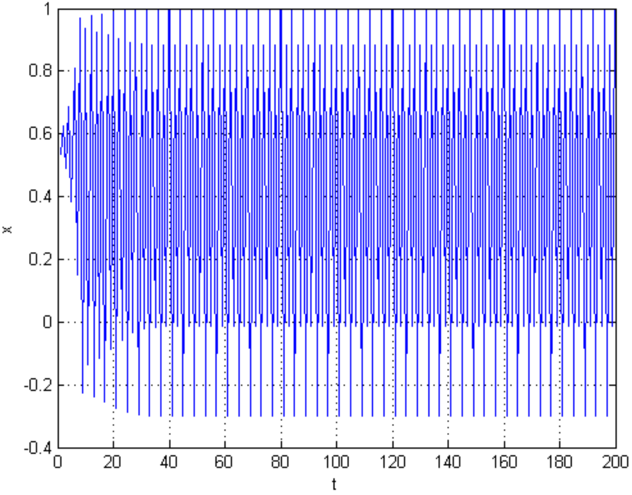
$\lambda = 0.2$



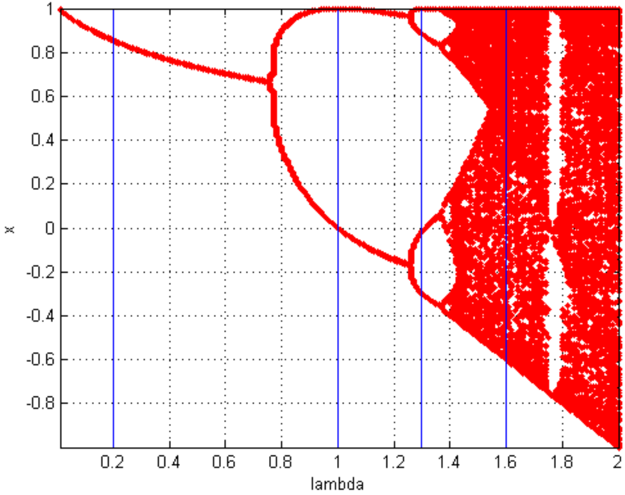
$\lambda = 1$



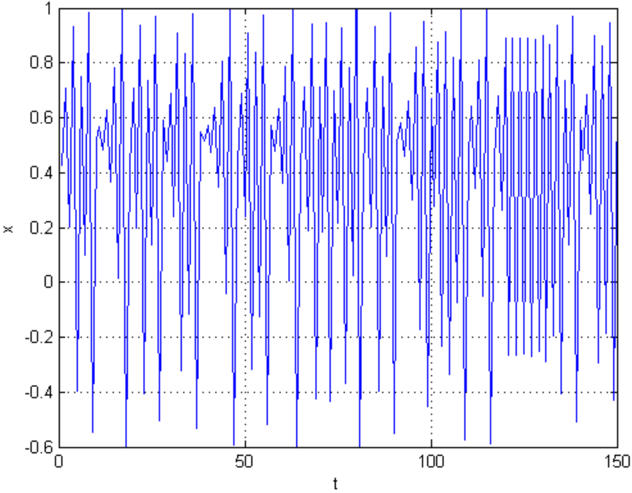
$\lambda = 1.3$



Карта



$\lambda = 1.6$ — детерминированный хаос



Ссылки

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов, М.: Высшая школа, 2002. 840 с.