Оптимизация

Постановка задачи. Одномерный случай

Храмов Д. А.

23.01.2019

1. В поисках постановки задачи

Оптимизация — процесс выбора наилучшего варианта из возможных.

Наилучший вариант — тот, что приносит максимальную прибыль или минимизирует потери.

Как измерить качество результата?

Метрика или **критерий качества** — некоторая функция от параметров системы.

От чего зависит урожай? Как оценить его результаты?

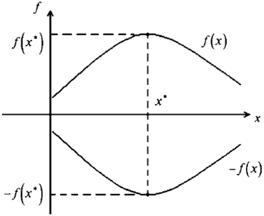
Неочевидность выбора критерия.

Если критерий качества один, задача называется **однокритериальной**. Если критериев несколько, то многокритериальной. Мы такие рассматривать не будем.

Математическая постановка задачи оптимизации

Целевая функция — математическая запись критерия качества. Наилучшие результаты достигаются тогда, когда эта функция имеет экстремум: максимум или минимум (максимальный урожай, минимальный расход денег,...).

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}[-f(x)]$$



Договоримся в дальнейшем искать только минимумы целевой функции. В таком случае целевую функцию удобно называть **функцией потерь**.

Число параметров

По числу входных параметров задачи оптимизации можно разделить на одномерные и многомерные.

Пример двумерной задачи оптимизации — функция потерь метода наименьших квадратов

$$L(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a, b))^2$$

Резюме

Мы будем заниматься однокритериальной оптимизацией, т. е. искать минимумы функции потерь.

Сегодня мы будем рассматривать одномерную оптимизацию — функция потерь $L(x)$ зависит от одной переменной.

2. Воспоминания из МатАна

Необходимое условие и определение типа экстремума

Функция $y = f(x)$ на промежутке $[a; b]$ может достигать своего наименьшего и наибольшего значений либо в граничных точках отрезка a или b, либо в точках минимума и максимума. Если функция дифференцируема на отрезке $[a; b]$, равенство

$$f'(x) = 0$$

является необходимым условием экстремума.

Если функция дважды дифференцируема на $[a; b]$, то с помощью второй производной можно определить тип экстремума. Пусть x^* — точка, в которой $f'(x^*) = 0$. Тогда:

- если $f''(x^*) > 0$, то $f(x^*)$ — минимум функции;
- если $f''(x^*) < 0$, то $f(x^*)$ — максимум функции;
- если $f''(x^*) = 0$, то ничего о характере экстремума сказать нельзя.

К определению типа экстремума

$$f(x^* + h) = f(x^*) + h \cdot f'(x^*) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x^*) + \ldots$$

Пусть x^* — экстремум, следовательно $f'(x^*) = 0$. Тогда

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{h^2}{2} \cdot f''(x^*) + \ldots$$

Пример

Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2$$

на отрезке $[1; 3]$.

Решение

Находим производную

$$y' = x^2 - 2x$$

Ищем корни уравнения

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Анализируем корень $x = 2$ и границы интервала $x = 1$, $x = 3$. В какой точке достигается экстремум?

$$y(2) = -\frac{4}{3}, \quad y(1) = -\frac{2}{3}, \quad y(3) = 0.$$

Минимум со значением $y = -4/3$ достигается в точке $x = 2$.

$$y'' = 2x - 2 \Rightarrow y(2) = 4 - 2 > 0.$$

Внимание!

Для отыскания точек экстремума необходимо решать уравнение $f'(x) = 0$.

Нам удалось решить уравнение непосредственно. На практике используют численные методы решения уравнений. Например, метод Ньютона.

Когда это не работает

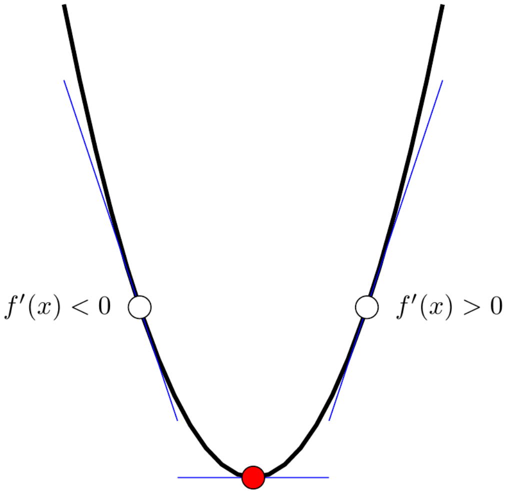
- Если функция не имеет аналитической записи, например, задана программным кодом.
- Если у функции нет необходимых производных.
- Если сама функция и/или ее производные имеют сложную запись.

Когда функция потерь может быть вычислена в некоторых дискретных значениях аргумента используются **методы поиска**. Они основаны на вычислении функции потерь в отдельных точках и выборе среди них наименьшего значения.

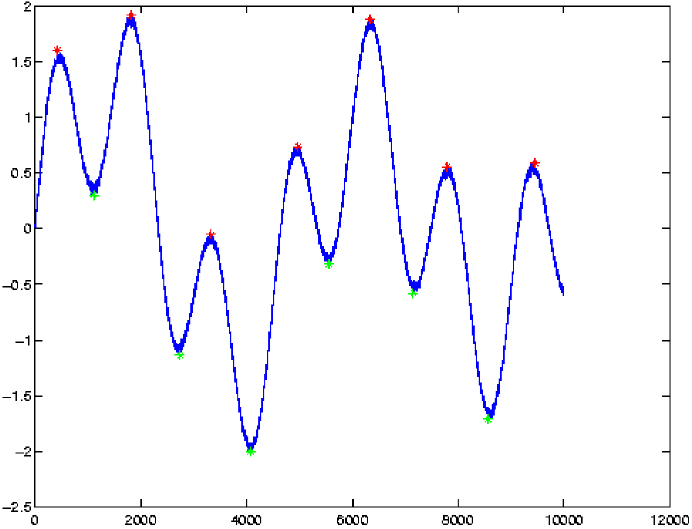
3. Методы поиска

Унимодальность

Все численные методы поиска предполагают, что функция потерь унимодальна, т.е. на отрезке $[a; b]$ она имеет только один минимум.



Область унимодальности



Для одномерной оптимизации область унимодальности легко установить по графику.

Метод перебора

Интервал, внутри которого находится искомый минимум — **интервал неопределенности**.

Наиболее простой способ сузить интервал неопределенности — разбить его на равные части и вычислить функцию потерь в точках разбиения.

Среди вычисленных значений нужно найти минимум. В этом поможет MATLAB-функция `min(x)`.

Рассмотрим прошлый пример

```
x = linspace(1,3,200)
y = x.^3/3-x.^2;   % не забываем про точки в операциях
[ymin,i] = min(y); % неизвестно, как она устроена!
x(i)
```

Этот метод называется **методом перебора**. Его основное и пожалуй единственное (в одномерном случае) достоинство — простота.

Интервал неопределенности

В начале интервал неопределенности был равен $b - a = 3 - 1 = 2$.

Нам потребовалась 200 точек разбиения. В итоге, интервал неопределенности сократился до ≈ 0.01.

Нужен более эффективный, а главное целенаправленный способ сокращения интервала неопределенности.

Метод дихотомии

Как изменяется интервал неопределенности?

$$\frac{b-a}{2} \to \frac{b-a}{2^2} \to \ldots \to \frac{b-a}{2^n}$$

n	2^n
1	2
2	4
4	16
5	32
6	64
7	128

Чтобы уменьшить интервал неопределенности в 100 раз нам понадобится 100 точек в методе перебора и 14 — в методе деления пополам.

fminbnd

Поиск минимума функции одной переменной $f(x)$ для фиксированного интервала $[x1, x2]$

```
x = fminbnd(fun,x1,x2)
```

`fun` принимает на вход скаляр x и может быть задана виде:

- дескриптора функции

  ```
  x = fminbnd(@myfun,x0)
  # где-то в файле myfun.m:
  function f = myfun(x)
  f = ... % Вычисляет значение функции в точке x.
  ```

- анонимной функции

  ```
  fun = @(x) sin(x*x)
  x = fminbnd(fun,x0);
  ```

- inline-функции

  ```
  x = fminbnd(inline('sin(x*x)'),x0);
  ```

Примеры: поиск минимума в одномерном случае

Найти минимум функции $y = \sin(x)$ на промежутке $[0; 2\pi]$:

```
x = fminbnd(@sin,0,2*pi)
    x = 4.7124
```

Значение функции в точке минимума:

```
y = sin(x)
    y = -1.0000
```

Найти минимум функции $y = (x-3)^2 - 1$ на интервале $[0;5]$.

- Создадим M-файл `myfun.m`

```
function f = myfun(x)
f = (x-3).^2 - 1;
```

- Вызовем функцию оптимизации

```
x = fminbnd(@myfun,0,5)
x = 3
```

- Значение в точке минимума:

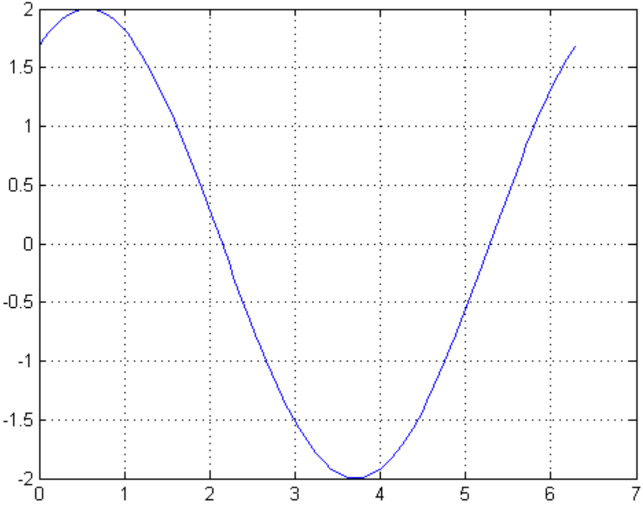
```
y = f(x)
y = -1
```

Найти минимум функции $y = 2\sin(x) + 1$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

```
y = @(x) 2*sin(x+1);
fminbnd(y,0,2*pi)

    3.7124

% проверим себя
x = linspace(0,2*pi);
y = 2*sin(x+1);
plot(x,y), grid on
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7

Задача

Найти минимум функции $y = 5x^2 + 14x - 2$ на отрезке $[-3; 0]$:

- аналитическим методом;
- с помощью `fminbnd`.

Задача

Найти минимум функции $y = x^2 - \cos(x)$ на промежутке $[-2; 3]$.

Оформить функцию как:

1. анонимную;
2. m-файл.

Ссылки

- Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. — 4-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015.