

# 게임 수학 강의 노트 03 - 벡터 연산

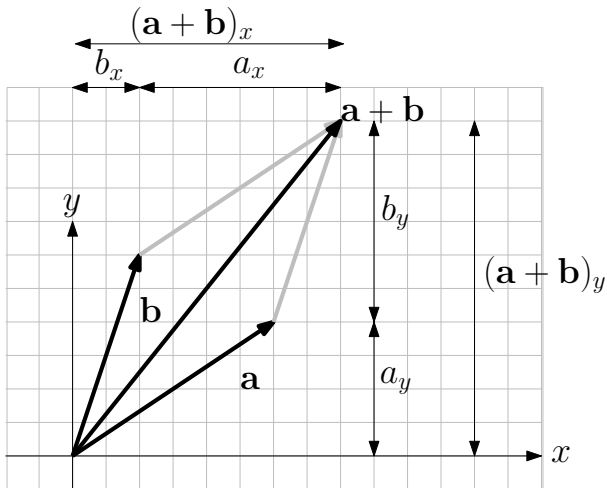
강영민

동명대학교

2015년 2학기

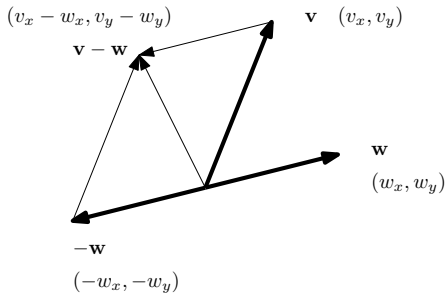
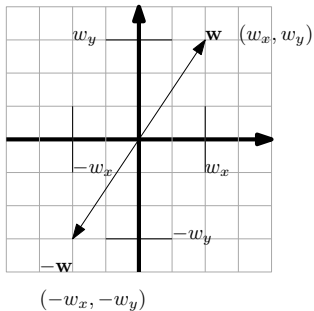
# 벡터의 덧셈

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$



# 벡터의 뺄셈

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$$



# 벡터에 스칼라 곱하기

벡터는 크기만을 가진 스칼라와 곱할 수 있다. 어떤 스칼라 값  $s$ 가 있다고 하자, 이 스칼라 값과 벡터  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 를 곱한  $s\mathbf{v}$ 는 다음과 같다.

$$s\mathbf{v} = (sv_x, sv_y, sv_z)$$

# 벡터의 기본적인 연산 규칙

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} + \vec{0} = \vec{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \vec{0}$$

$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$

$$(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$0\mathbf{a} = \vec{0}$$

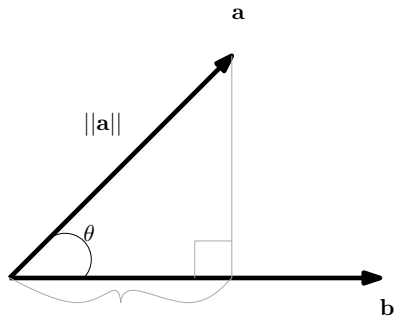
$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

# 벡터의 스칼라 곱, 혹은 내적(dot product)

- 내적

- 스칼라 곱(scalar product)라고도 부름
- 두 개의 벡터를 피연산자(operand)로 하는 이항 연산(binary operator)로서 그 결과가 스칼라 값
- 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 내적은  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 로 표현
- 두 벡터가 이루는 사잇각이  $\theta$ 라고 하며, 내적의 크기는 다음과 같다.
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$
- 실제 계산 방법
  - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$

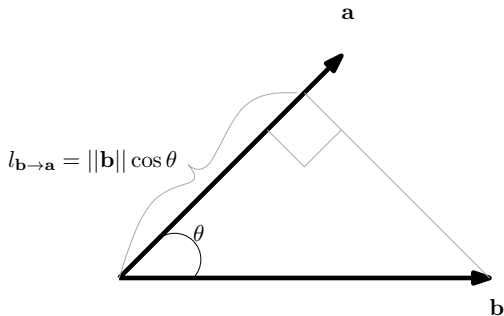
# 벡터 내적의 의미



$$l_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta$$

$$l_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta) / \|\mathbf{b}\|$$

$$l_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / \|\mathbf{b}\|$$



$$l_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}} = \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

$$l_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}} = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta) / \|\mathbf{a}\|$$

$$l_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / \|\mathbf{a}\|$$

# 벡터 내적의 활용

- 코사인 함수의 특성을 통해 간단히 얻어지는 사실
  - $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$
  - $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos \theta = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$
- 벡터를 이용하여 각도를 계산하거나 투영을 계산하는 데에 널리 사용
  - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta$
  - $\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$



# 벡터 내적의 활용

## 예제

어떤 두 벡터가 각각 (3,2)와 (4,1)이라고 하자. 두 벡터가 이루는 각도를 구하라.

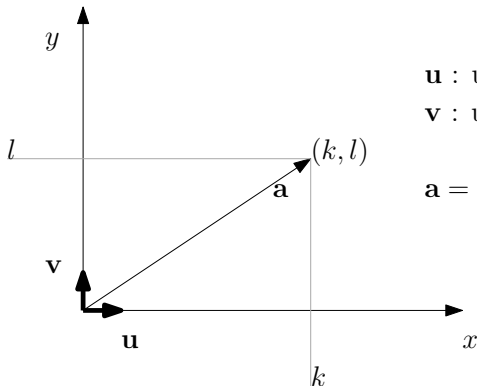
## 정답

두 벡터를 각각  $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{w}$ 로 표현하자. 두 벡터의 내적  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 는  $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$ , 즉 14이다. 각각의 길이는  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ 과  $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$ 이다. 따라서 두 벡터의 사이각은 다음과 같다.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{221}} \simeq \cos^{-1} 0.94174191159484 \simeq 19.65^\circ$$

## 좌표축과 좌표 - 1/3 기본 의미

- $\mathbf{a} = (k, l)$ 로 표현된다는 것은  $xy$  좌표계에서 기저벡터가 되는  $x$ 축 단위벡터를  $\mathbf{u}$ 와  $y$ 축 단위벡터를  $\mathbf{v}$ 를 다음과 같이 합성한 것



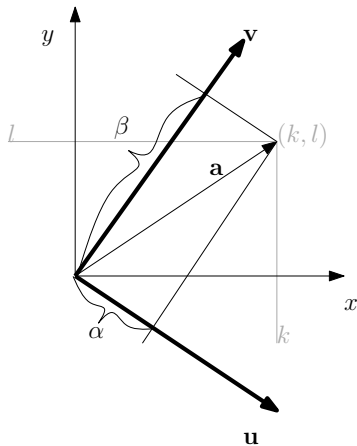
$\mathbf{u}$  : unit vector along  $x$  axis

$\mathbf{v}$  : unit vector along  $y$  axis

$$\mathbf{a} = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$$

## 좌표축과 좌표 - 2/3 새로운 축의 정의

- 새로운 직교 좌표계를 고려해 보자. 여기서는 두 축이  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{v}$
- $\mathbf{a}$ 의  $\mathbf{u}$  축 투영 길이  $\alpha$ ,  $\mathbf{v}$  축 투영 길이  $\beta$  계산
- 이 두 축을 기준으로 하는 좌표계에서는  $\mathbf{a}$ 가  $(\alpha, \beta)$ 의 좌표로 표현됨



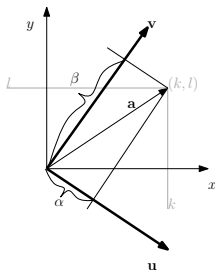
$\mathbf{u}$  : an axis

$\mathbf{v}$  : another axis perpendicular to  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$

# 좌표축과 좌표 - 3/3 내적을 이용한 투영 길이 구하기

- $\mathbf{a}$ 가 축  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{v}$  방향으로 가지는 길이  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 어떻게 구하나
  - 내적을 이용
  - $\alpha$ 는  $\mathbf{a}$ 를  $\mathbf{u}$  방향으로 투영한 그림자의 길이  $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$
  - 축은 단위 벡터로 표현하므로  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . 따라서  $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$
  - 비슷한 방법으로  $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{v}$ 를 축으로 하는 좌표계에서  $\mathbf{a}$ 는  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$



$\mathbf{u}$  : an axis

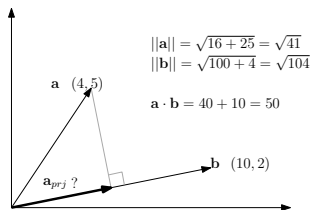
$\mathbf{v}$  : another axis perpendicular to  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$

# 새로운 좌표축의 정의

## 예제

그림처럼 어떤 벡터  $\mathbf{a}$ 가 (4,5)이고, 다른 벡터  $\mathbf{b}$ 는 (10,2)라고 하자. 이때 벡터  $\mathbf{a}$ 를  $\mathbf{b}$  위에 수직방향으로 내린 그림자가 되는 벡터  $\mathbf{a}_{prj}$ 을 구하라.



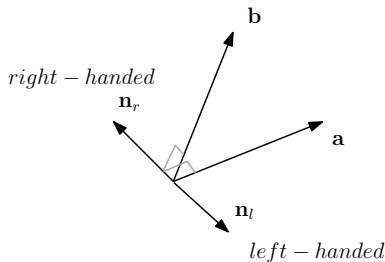
## 정답

$$l = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / \|\mathbf{b}\|$$

$$\mathbf{a}_{prj} = l\tilde{\mathbf{b}} = \frac{50}{104}(10, 2) \simeq (4.8, 0.96)$$

# 벡터의 외적(外積) - 의미

- 벡터의 외적(cross product)
  - 벡터 곱(vector product): 두 벡터를 피연산자로 하는 이항연산으로 그 결과가 벡터
  - 벡터를 곱해 행렬을 얻는 외적(outer product)과 용어의 혼동이 있음. 여기서는 결과가 벡터인 곱
- 표현
  - 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 외적은  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 로 표현
  - 그 결과는 벡터이므로  $k\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$ 은  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 에 동시에 수직인 단위벡터)
  - 동시에 수직인 벡터는 두 개가 존재. 좌표계에 의해 결정됨.

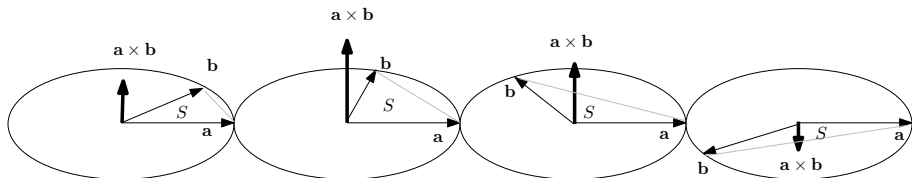


# 벡터의 외적(外積) 의미의 수학적 표현

- 두 벡터의 외적
  - 외적의 크기  $k$ 
    - 두 벡터의 크기와 사잇각의 사인(sine) 값에 비례
    - $k = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$
  - 외적의 방향  $\mathbf{n}$ 
    - $\mathbf{n}$ : 두 벡터에 수직인 방향 벡터
- 따라서 두 벡터의 외적은 다음과 같이 표현할 수 있다.
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \mathbf{n}$

# 외적이 가진 의미

- 외적을 표현하는 식  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta\mathbf{n}$ 의 의미
  - 외적은 두 벡터에 동시에 수직한 벡터
  - 크기는 두 벡터가 수직일 때에 최대, 같은 방향이나 반대방향일 때 최소
  - 외적의 크기는 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 끝점을 연결한 삼각형의 넓이  $S$ 에 비례
    - $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{1}{2}S$





# 외적의 계산

- 3차원 벡터의 외적을 구하기
  - $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$
  - 두 벡터의 외적:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$
- “행렬”을 이용한 곱셈으로 구하기
  - “반대칭(skew-symmetric 혹은 antisymmetric)” 행렬 이용

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

# 외적의 연산 법칙들

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \mathbf{a} = \vec{0}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$$

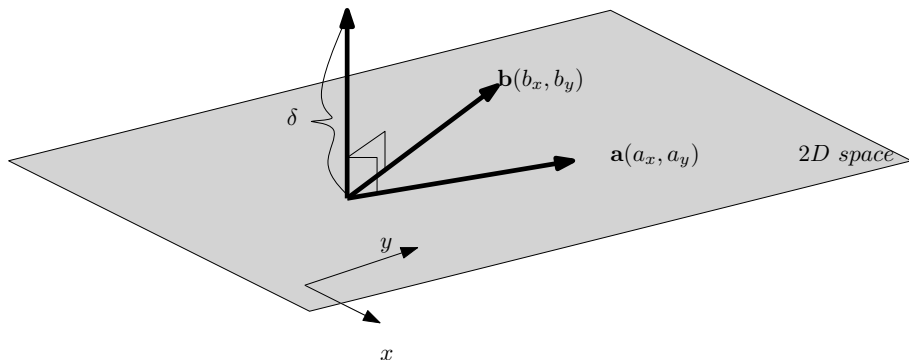
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \vec{0}$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \vec{0}$$

## 2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 공간의 두 벡터  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 와  $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ 의 외적은?
  - 그림의 회색 면은 2차원 공간의 일부
  - 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 외적은 2차원 공간 밖에서 정의
  - 축  $z$ 가 필요하며, 이  $z$  축 성분으로만 표현

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, \delta)$$



## 2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 벡터의 외적이 2차원 공간 밖에 정의가 되고, 이것은 3차원 벡터라고 볼 수 있다.
- 2차원 벡터  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 와  $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ 를 3차원 벡터로 가정
  - $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$
  - $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, a_x b_y - a_y b_x)$
- $z$  성분의 값으로 알 수 있는 것들 (이를  $\delta$ 라고 하자)
  - $\delta > 0$ 인 경우는  $\mathbf{b}$ 가  $\mathbf{a}$ 의 진행 방향을 기준으로 왼쪽에 있음
  - $\delta < 0$ 인 경우는 오른쪽
  - 절대값은 두 벡터 사이에 만들어지는 삼각형의 크기에 비례

# 삼각형 넓이 구하기

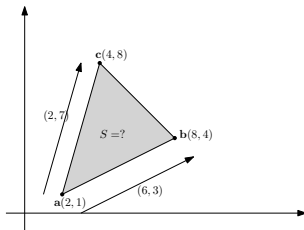
## 예제

꼭지점 좌표가  $(2,1)$ ,  $(8,4)$ ,  $(4,8)$ 인 삼각형의 넓이  $S$ 를 구하라.

## 정답

꼭지점들을 각각  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ 로 표현하자. 우리는  $\mathbf{a}$ 에서  $\mathbf{b}$ 로 가는 벡터를 구할 수 있고,  $\mathbf{u} = (6, 3)$ 가 된다. 비슷한 방식으로  $\mathbf{a}$ 에서  $\mathbf{c}$ 로 가는 벡터는  $\mathbf{v} = (2, 7)$ 이다. 삼각형의 넓이는 이 두 벡터의 외적이 가지는 크기의 반이다.

$$S = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{6 \cdot 7 - 3 \cdot 2}{2} = 18$$



- 외적의 또 다른 응용

- 평면 표현

- 평면은 그 평면 위의 삼각형으로 표현 가능 = 3 개의 점 = 9 개의 원소
    - 좀 더 효율적인 방법 = 법선 벡터를 이용하기
    - 법선벡터 = 평면이 바라보는 방향을 나타내는 벡터
    - 법선벡터가 나타내는 것은 하나의 평면이 아니라 동일한 방향을 쳐다보는 모든 평면
    - 평면의 표현 = (법선벡터, 평면이 지나는 점) : 6 개의 원소로 표현 가능
    - 법선벡터 구하기: 벡터의 외적을 이용