게임 수학 강의 노트 part 1

강영민

동명대학교

2015년 2학기

벡터란 무엇인가?

- 벡터의 의미
  - 벡터(vector)는 ‘나르다’라는 의미의 라틴어 동사 ‘vehere’에서 유래
  - ‘무엇인가를 나르는 것’이라는 의미
  - 벡터라는 것은 무엇인가를 옮겨 놓는 역할을 수행한다.
- 수학과 물리학에서의 개념
  - 크기와 방향으로 결정되는 양(量, quantity)
  - 방향량(方向量)이라고도 함.
  - 예: 힘(force)은 크기만으로는 그 성질을 온전히 표현할 수 없고, 방향도 같이 고려해야 하므로 벡터로 표현된다.

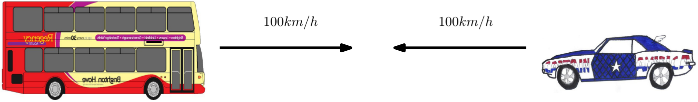
벡터

수학자들은 자연 현상의 많은 것들이 수로 표현될 수 있음을 알았는데, 하나의 숫자로 충분히 표현할 수 있지만 하나 이상의 수가 필요한 경우도 있다. 이러한 양을 벡터(vector)라고 부른다.

벡터의 개념

- 물리적 현상 등을 표현할 때 - 대상을 양(量, quantity)으로 표현
- 이 양은 스칼라(scalar) 혹은 벡터(vector)
  - 스칼라 값은 오로지 크기만으로 완전히 그 양을 표현할 수 것으로서 물체의 질량, 소요된 시간, 길이, 열량 등이 해당
  - 벡터(vector)는 이와 달리 크기와 함께 방향도 같이 존재하는 양으로 힘, 속도, 변위와 같은 양이 바로 여기에 해당

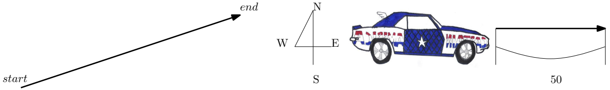
- 속도(速度, velocity)와 속력(速力, speed)
- 속도는 벡터, 속력은 스칼라



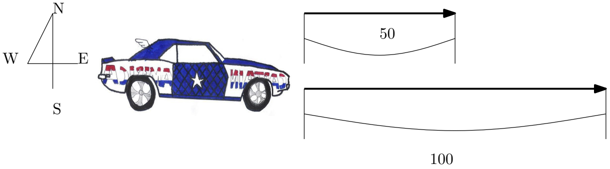
동일한 속력으로 서로 마주 보며 달리는 차량의 속도

화살표를 이용한 벡터 표현

- 벡터를 표현하는 가장 직관적인 방법은 화살표를 이용
- 화살표: 시점(始點)과 종점(終點)으로 구성
- 화살표의 방향은 벡터의 방향을 시각적으로 표현하고, 화살표의 길이는 벡터의 크기를 시각적으로 표현



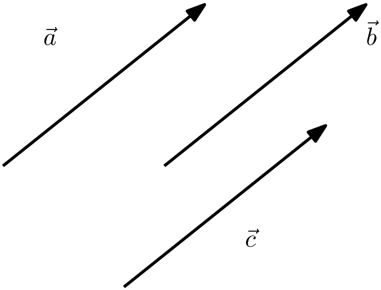
벡터의 시각적 표현과 달리는 자동차 속도 표현의 예



속력이 두 배로 늘어난 자동차의 속도

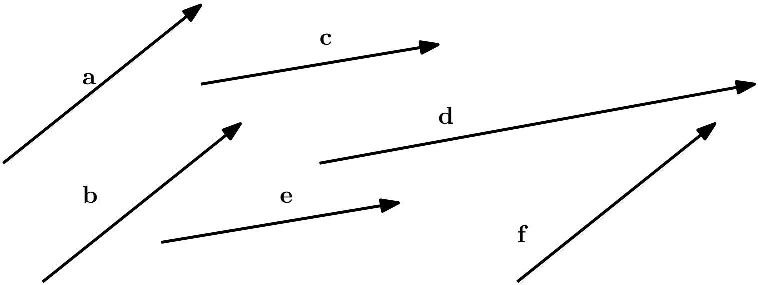
동등벡터(equivalent vector)

- 벡터의 표기법
  - $\vec{a}$, $\mathbf{a}$
- 동등벡터
  - 크기와 방향이 같으면 모두 동등한 벡터로 간주



동등벡터

동등벡터 찾기

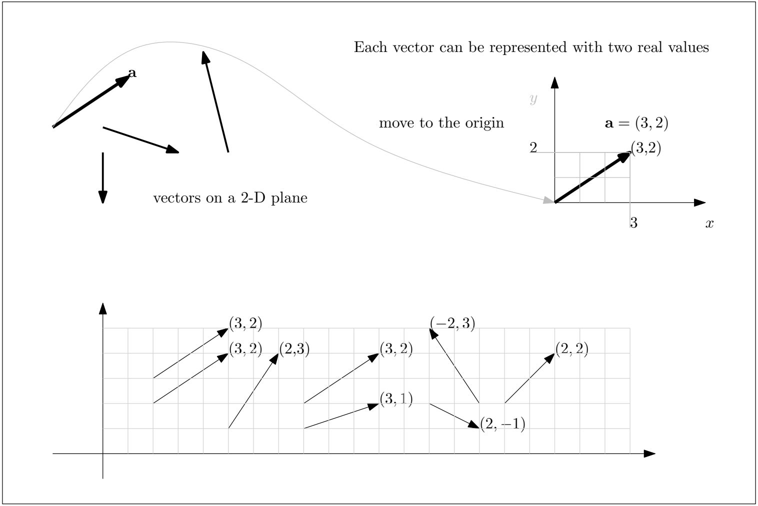


동등벡터 찾기

벡터의 수학적 표현

- 벡터: 화살표가 그려지는 공간의 차원(次元,dimension)에 따라 결정되는 개수의 성분
  - n-튜플(tuple)
  - $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$
  - n 개의 차원을 가진 공간에서 그려지는 화살표 = n차원 벡터

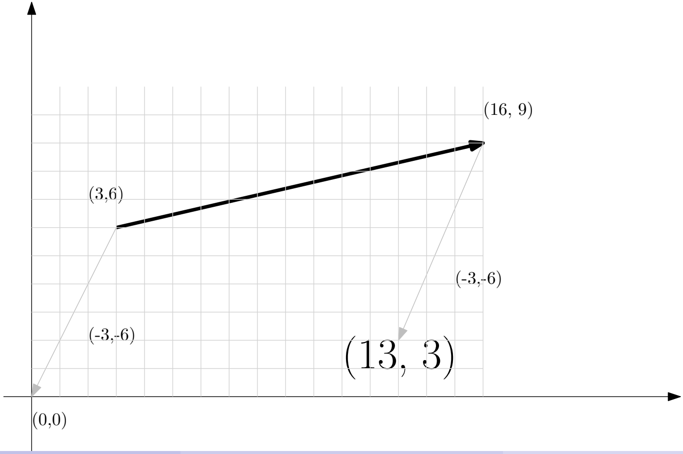
2차원 벡터



Each vector can be represented with two real values
a
move to the origin
a = (3, 2)
y
2
(3,2)
3
x
vectors on a 2-D plane
(3, 2)
(3, 2)
(2,3)
(3, 2)
(−2, 3)
(2, 2)
(3, 1)
(2, −1)

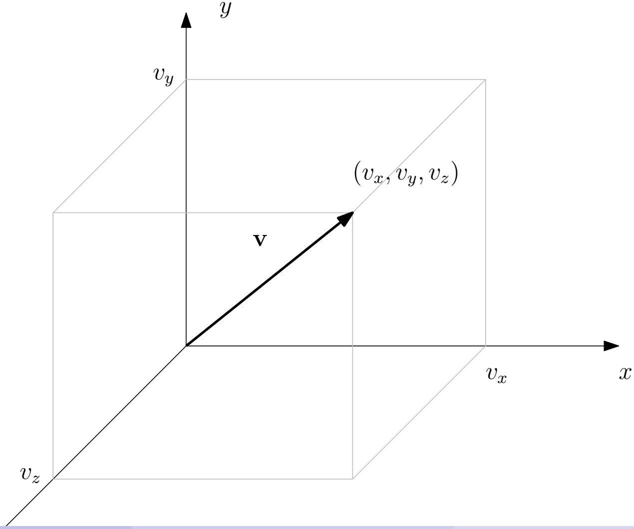
시점을 원점으로 옮기기

시점이 원점이 아닌 벡터는 시점을 원점으로 끌어 오면 된다. 벡터의 시점은 (3,6)의 좌표에 놓여있고, 끝점은 (16,9)이다. 시작점을 원점으로 옮기는 것은 (-3,-6) 만큼의 이동을 하는 것이다. 따라서 끝점은 (13,3)의 위치로 이동하게 된다. 그러므로 이 벡터는 (13,3)으로 표현된다.

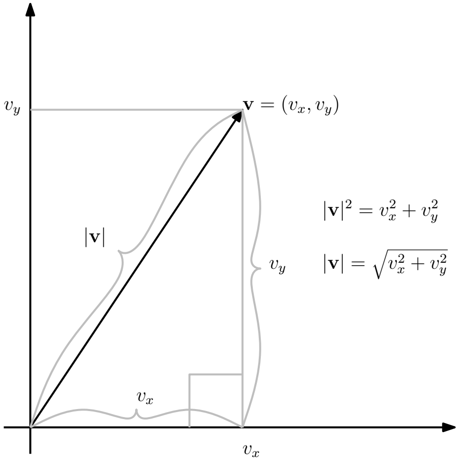


3차원 벡터

3차원 벡터는 지금까지 살펴본 2차원 벡터에 축(軸, axis)을 하나 더하기만 하면 된다.



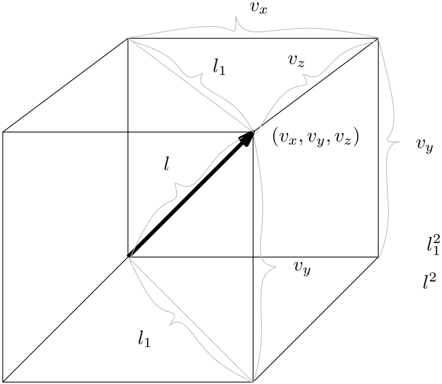
벡터의 크기



어떤 벡터 $\mathbf{v}$가 (v_x, v_y)로 표현될 때 이 벡터의 크기는 v_x와 v_y로 어떻게 구할 수 있을까? 그 값은 '길이'에 대한 상식적 정의에 따라, 스칼라 값이며 양(陽, positive)의 값이 된다. 이렇게 양의 길이(positive length)를 벡터에 할당하는 것을 놈(norm)이라 하며, 어떤 벡터 $\mathbf{v}$의 놈은 $||\mathbf{v}||$로 표현한다. 유클리드 기하에 의해 얻어지는 길이는 Euclidean Norm이라고 한다. 이는 피타고라스의 정리를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

3차원 벡터의 크기

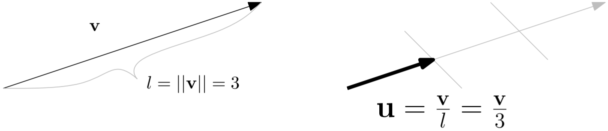
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



$$l_1^2 = v_x^2 + v_z^2$$
$$l^2 = l_1^2 + v_y^2$$

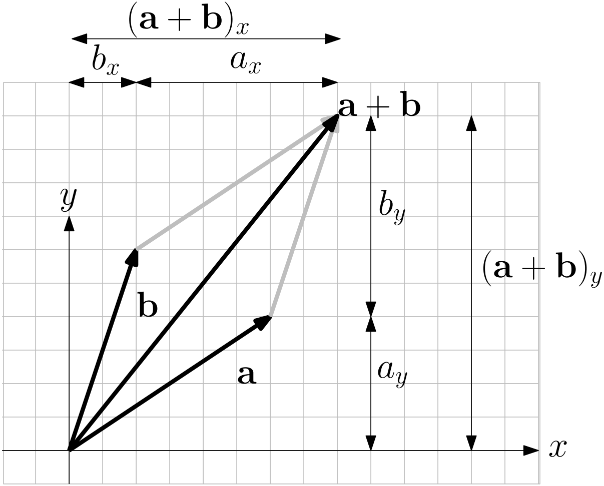
벡터의 정규화

- 정규화
  - 단위 벡터는 길이가 1인 벡터.
  - 어떤 벡터의 방향과 일치하는 단위벡터를 구하는 작업은 종종 많은 응용에서 필요.
  - 이러한 작업은 벡터의 길이를 1로 만드는 것과 같다.
  - 이를 정규화(normalization)이라고 한다.



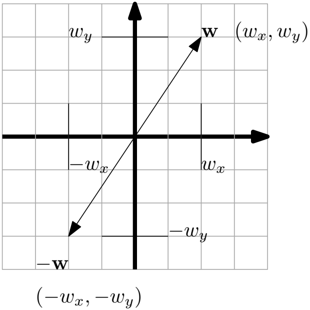
벡터의 덧셈

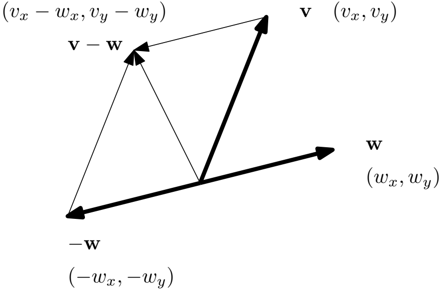
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$



벡터의 뺄셈

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$$





벡터에 스칼라 곱하기

벡터는 크기만을 가진 스칼라와 곱할 수 있다. 어떤 스칼라 값 s가 있다고 하자, 이 스칼라 값과 벡터 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$를 곱한 $s\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$s\mathbf{v} = (sv_x, sv_y, sv_z)$$

벡터의 기본적인 연산 규칙

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} + \vec{0} = \vec{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \vec{0}$$

$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$

$$(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

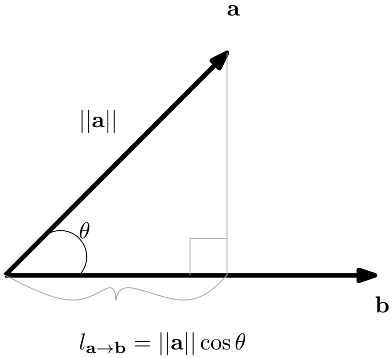
$$0\mathbf{a} = \vec{0}$$

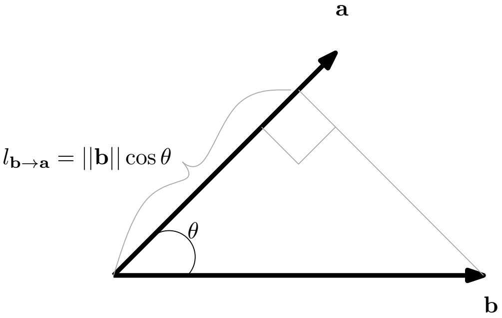
$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

벡터의 스칼라 곱, 혹은 내적(dot product)

- 내적
  - 스칼라 곱(scalar product)라고도 부름
  - 두 개의 벡터를 피연산자(operand)로 하는 이항 연산(binary operator)로서 그 결과가 스칼라 값
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$로 표현
  - 두 벡터가 이루는 사잇각이 θ라고 하며, 내적의 크기는 다음과 같다.
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta$
  - 실제 계산 방법
    - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

벡터 내적의 의미





$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||\cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||\cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

벡터 내적의 활용

- 코사인 함수의 특성을 통해 간단히 얻어지는 사실
  - $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||$
  - $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^2$
- 벡터를 이용하여 각도를 계산하거나 투영을 계산하는 데에 널리 사용
  - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \cos\theta$
  - $\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$

예제

어떤 두 벡터가 각각 (3,2)와 (4,1)이라고 하자. 두 벡터가 이루는 각도를 구하라.

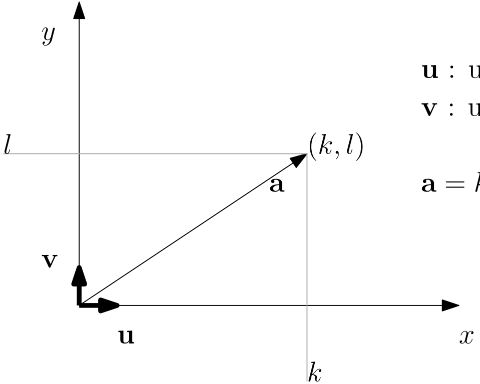
정답

두 벡터를 각각 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$로 표현하자. 두 벡터의 내적 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$는 $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$, 즉 14이다. 각각의 길이는 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$과 $||\mathbf{w}|| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$이다. 따라서 두 벡터의 사이각은 다음과 같다.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{221}} \simeq \cos^{-1} 0.94174191159484 \simeq 19.65^\circ$$

좌표축과 좌표 - 1/3 기본 의미

- $\mathbf{a} = (k, l)$로 표현된다는 것은 xy 좌표계에서 기저벡터가 되는 x축 단위벡터를 $\mathbf{u}$와 y축 단위벡터를 $\mathbf{v}$를 다음과 같이 합성한 것



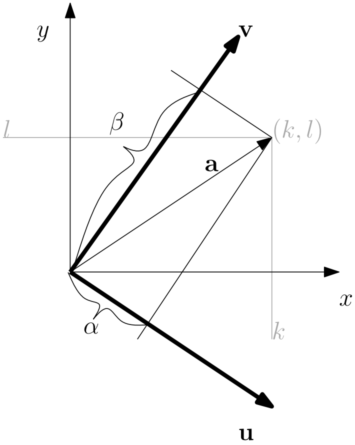
$\mathbf{u}$: unit vector along x axis

$\mathbf{v}$: unit vector along y axis

$\mathbf{a} = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

좌표축과 좌표 - 2/3 새로운 축의 정의

- 새로운 직교 좌표계를 고려해 보자. 여기서는 두 축이 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$
- $\mathbf{a}$의 $\mathbf{u}$ 축 투영 길이 α, $\mathbf{v}$ 축 투영 길이 β 계산
- 이 두 축을 기준으로 하는 좌표계에서는 $\mathbf{a}$가 (α, β)의 좌표로 표현됨



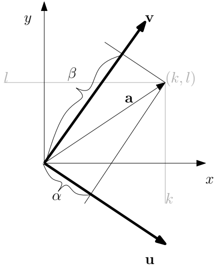
$\mathbf{u}$: an axis

$\mathbf{v}$: another axis perpendicular to $\mathbf{u}$

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

좌표축과 좌표 - 3/3 내적을 이용한 투영 길이 구하기

- $\mathbf{a}$가 축 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 방향으로 가지는 길이 α와 β는 어떻게 구하나
  - 내적을 이용
  - α는 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{u}$ 방향으로 투영한 그림자의 길이 $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} / ||\mathbf{u}||$
  - 축은 단위 벡터로 표현하므로 $||\mathbf{u}|| = 1$. 따라서 $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$
  - 비슷한 방법으로 $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 축으로 하는 좌표계에서 $\mathbf{a}$는 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$



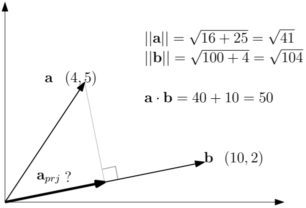
$\mathbf{u}$: an axis
$\mathbf{v}$: another axis perpendicular to $\mathbf{u}$

$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$

새로운 좌표축의 정의

예제

그림처럼 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 (4,5)이고, 다른 벡터 $\mathbf{b}$는 (10,2)라고 하자. 이때 벡터 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{b}$ 위에 수직방향으로 내린 그림자가 되는 벡터 $\mathbf{a}_{prj}$을 구하라.



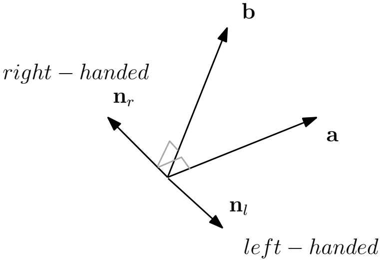
정답

$$l = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / ||\mathbf{b}||$$

$$\mathbf{a}_{prj} = l\tilde{\mathbf{b}} = \frac{50}{104}(10,2) \simeq (4.8, 0.96)$$

벡터의 외적(外積) - 의미

- 벡터의 외적(cross product)
  - 벡터 곱(vector product): 두 벡터를 피연산자로 하는 이항연산으로 그 결과가 벡터
  - 벡터를 곱해 행렬을 얻는 외적(outer product)과 용어의 혼동이 있음. 여기서는 결과가 벡터인 곱
- 표현
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적은 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$로 표현
  - 그 결과는 벡터이므로 $k\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 동시에 수직인 단위벡터)
  - 동시에 수직인 벡터는 두 개가 존재. 좌표계에 의해 결정됨.

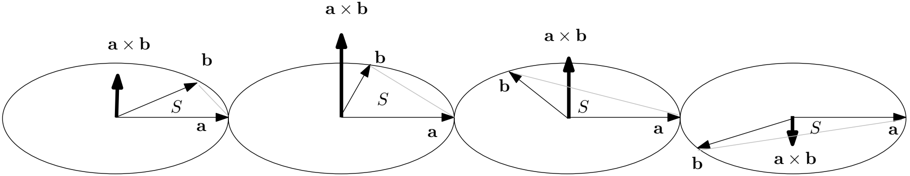


벡터의 외적(外積) 의미의 수학적 표현

- 두 벡터의 외적
  - 외적의 크기 k
    - 두 벡터의 크기와 사잇각의 사인(sine) 값에 비례
    - $k = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}|| \sin\theta$
  - 외적의 방향 $\mathbf{n}$
    - $\mathbf{n}$: 두 벡터에 수직인 방향 벡터
- 따라서 두 벡터의 외적은 다음과 같이 표현할 수 있다.
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}|| \sin\theta\mathbf{n}$

외적이 가진 의미

- 외적을 표현하는 식 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ||\mathbf{a}|||\mathbf{b}|| \sin\theta \mathbf{n}$의 의미
  - 외적은 두 벡터에 동시에 수직한 벡터
  - 크기는 두 벡터가 수직일 때에 최대, 같은 방향이나 반대방향일 때 최소
  - 외적의 크기는 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 끝점을 연결한 삼각형의 넓이 S에 비례
    - $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \frac{1}{2}S$



외적의 계산

- 3차원 벡터의 외적을 구하기
  - $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$
  - 두 벡터의 외적: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
- "행렬"을 이용한 곱셈으로 구하기
  - "반대칭(skew-symmetric 혹은 antisymmetric)" 행렬 이용

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

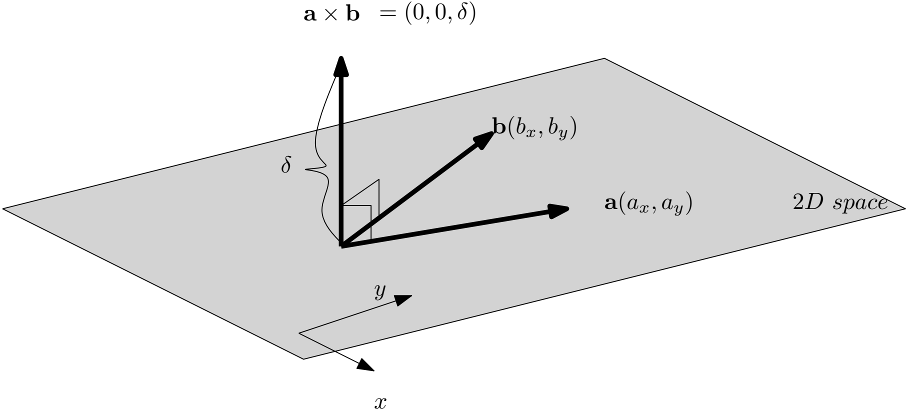
$$\mathbf{A}^*\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

외적의 연산 법칙들

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \\
(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b} \\
\mathbf{a} \times \vec{0} &= \vec{0} \times \mathbf{a} = \vec{0} \\
\mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \vec{0} \\
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \vec{0} \\
\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \vec{0}
\end{aligned}$$

2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 공간의 두 벡터 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$의 외적은?
  - 그림의 회색 면은 2차원 공간의 일부
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적은 2차원 공간 밖에서 정의
  - 축 z가 필요하며, 이 z 축 성분으로만 표현



2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 벡터의 외적이 2차원 공간 밖에 정의가 되고, 이것은 3차원 벡터라고 볼 수 있다.
- 2차원 벡터 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$를 3차원 벡터로 가정
  - $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$
  - $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, a_x b_y - a_y b_x)$
- z 성분의 값으로 알 수 있는 것들 (이를 δ라고 하자)
  - $\delta > 0$인 경우는 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{a}$의 진행 방향을 기준으로 왼쪽에 있음
  - $\delta < 0$인 경우는 오른쪽
  - 절대값은 두 벡터 사이에 만들어지는 삼각형의 크기에 비례

삼각형 넓이 구하기

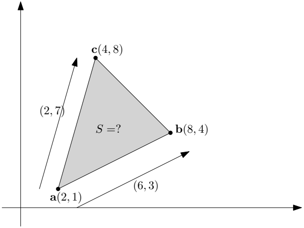
예제

꼭지점 좌표가 (2,1), (8,4), (4,8)인 삼각형의 넓이 S를 구하라.

정답

꼭지점들을 각각 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$로 표현하자. 우리는 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{b}$로 가는 벡터를 구할 수 있고, $\mathbf{u} = (6, 3)$가 된다. 비슷한 방식으로 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{c}$로 가는 벡터는 $\mathbf{v} = (2, 7)$이다. 삼각형의 넓이는 이 두 벡터의 외적이 가지는 크기의 반이다.

$$S = \frac{1}{2}||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \frac{6 \cdot 7 - 3 \cdot 2}{2} = 18$$



외적과 평면

- 외적의 또 다른 응용
  - 평면 표현
    - 평면은 그 평면 위의 삼각형으로 표현 가능 = 3 개의 점 = 9 개의 원소
    - 좀 더 효율적인 방법 = 법선 벡터를 이용하기
    - 법선벡터 = 평면이 바라보는 방향을 나타내는 벡터
    - 법선벡터가 나타내는 것은 하나의 평면이 아니라 동일한 방향을 쳐다보는 모든 평면
    - 평면의 표현 = (법선벡터, 평면이 지나는 점) : 6 개의 원소로 표현 가능
    - 법선벡터 구하기: 벡터의 외적을 이용

행렬

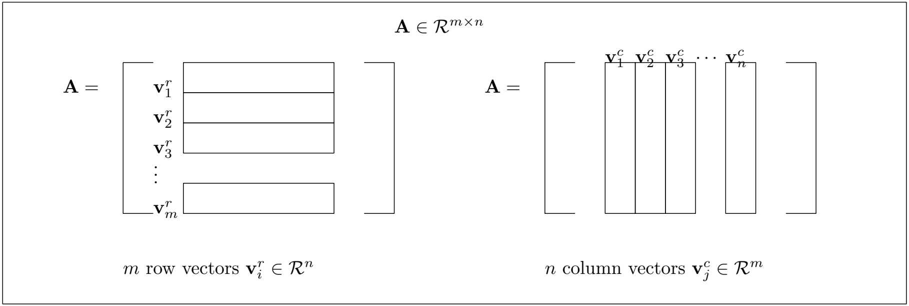
- 행렬의 역사
  - 1차 방정식의 풀이에 아주 오래 전부터 사용
  - 그 특성이 정확히 파악되지 않고 1800년대까지는 배열(array)이라는 이름으로 알려짐
  - 기원전 10세기에서 기원전 2세기 사이에 여러 세대에 걸쳐 쓰여진 중국의 구장산술(九章算術)에 연립 방정식을 풀기 위해 소개
  - 판별식의 개념 등장
  - 1545년에야 이탈리아 수학자 지롤라모 카르다노(Girolamo Cardano)가 그의 저서 "위대한 기술(Ars Magna)"를 통해 유럽에 전함
  - 오랜 기간 동안 많은 수학자들이 이 행렬을 다루며 다양한 성질을 발견
  - 행렬은 공간을 나루는 데에 필요한 유용한 도구
  - 공간 내의 점들을 이떤 위치에서 다른 위치로 옮겨 놓는 다양한 변환이 행렬을 이용하여 표현됨

행렬이란 무엇인가

- 행렬은 2차원으로 배열된 수
- 가로 줄을 행(row), 세로 줄을 열(column)
- m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 행렬은 $\mathbf{A}$는 다음의 모양
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $m \times n$ 행렬이라고 하며 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$로 표현
- 각 행은 n 개의 원소를 가진 행벡터(row vector)
- 각 열은 m 개의 원소를 가진 열벡터(column vector)

$\mathbf{A}$를 행벡터 $\mathbf{v}_i^r$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^r \\ \mathbf{v}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^r \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$를 열벡터 $\mathbf{v}_j^c$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^c & \mathbf{v}_2^c & \cdots & \mathbf{v}_n^c \end{bmatrix}$



정사각 행렬 - square matrix

- 정방행렬, 혹은 정사각형 행렬은 행과 열의 수가 동일한 행렬.
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 인 행렬
  - 정방행렬은 물리 문제에서 운동을 다루거나 그래픽스에서 변환을 다룰 때에 빈번히 나타남
- 다음 행렬 $\mathbf{A}$는 3×3의 정사각 행렬이다.
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

전치 행렬 - transpose

- 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 전치행렬은 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$
  - 따라서, $m \times n$ 행렬의 전치는 $n \times m$ 행렬
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- 전치행렬의 성질
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
  - $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- 그래픽스(graphics) 분야에서 매우 유용한 사용 방법은 회전 변환 행렬의 역행렬을 구할 때
- 3차원 공간의 회전 변환은 정규직교(orthonormal) 특성
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치임이 알려져 있음

대각 행렬 - diagonal matrix

- 대각성분은 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 i 행 j 열 성분을 a_{ij} 라고 표현할 때, $i = j$ 인 성분
- 대각행렬은 대각성분을 제외한 다른 모든 성분의 값이 0인 행렬이다
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$
- 대각행렬을 다른 행렬과 곱했을 때의 성질
  - 어떤 3×3 대각행렬을 $\mathbf{D}$, 1,2,3 행 대각성분은 d_1, d_2, d_3
  - 다른 어떤 3×3 행렬 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{D}$의 곱
    - $\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} \\ d_2a_{21} & d_2b_{22} & d_2b_{23} \\ d_3a_{31} & d_3b_{32} & d_3b_{33} \end{bmatrix}$
    -
    - $\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13} \\ d_1a_{21} & d_2b_{22} & d_3b_{23} \\ d_1a_{31} & d_2b_{32} & d_3b_{33} \end{bmatrix}$

대각 행렬과 벡터의 곱 (1/2)

대각행렬 $\mathbf{D}$와 열벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$이 $(v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$의 곱

$$\mathbf{Dv} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 \\ d_2 v_2 \\ d_3 v_3 \end{bmatrix}$$

대각 행렬과 벡터의 곱 (2/2)

행벡터 $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ 와 대각행렬의 곱

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 & d_2 v_2 & d_3 v_3 \end{bmatrix}$$

행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬의 덧셈과 뺄셈은 동일한 크기의 행렬 사이에 정의됨

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

행렬과 덧셈과 뺄셈은 동일한 행과 열에 있는 성분을 서로 더하고, 빼서 원래의 자리에 기록

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

행렬의 곱셈

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times x}$
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times x}$
- $\mathbf{A}$ 의 앞에 $\mathbf{B}$를 곱할 경우
  - $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{x \times m}$ 이어야 함
  - 그 결과는 $\mathbf{BA} = \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{x \times n}$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times x}$
- $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times x}$
  - $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$
  - $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

행렬 $\mathbf{A}$ 의 i 번째 행 벡터를 $\mathbf{A}_{i,*}$ 라고 하고, j 번째 열 벡터를 $\mathbf{B}_{*,j}$ 라고 하면, 위의 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$c_{ij} = \mathbf{A}_{i,*}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_{*,j} \tag{1}$$

행렬과 스칼라의 곱

행렬에 스칼라를 곱하는 연산은 해당 스칼라 값을 행렬의 모든 원소에 곱하면 된다.

$$k\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow b_{ij} = ka_{ij}$$

행렬 덧셈과 뺄셈의 연산 법칙

행렬은 다음과 같은 연산 법칙을 가진다.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + 0 = 0 + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$$

이때, 0은 $\mathbf{A}$와 같은 차원의 행렬로 모든 원소가 0인 행렬이다.

행렬 스칼라 곱의 연산 법칙

$$(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$0\mathbf{A} = 0$$

행렬 곱셈의 연산 법칙

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$
$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$
$$k\mathbf{AB} = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}k\mathbf{B}$$

$\mathbf{I}$는 항등행렬

행렬식 1/2

- 행렬식은 정방행렬에서 정의된다.
- 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 행렬식은 $det\mathbf{A}$, $det(\mathbf{A})$, 또는 $|\mathbf{A}|$로 표현
- 행렬식을 계산하기 위해 필요한 개념
  - 소행렬식(minor)
  - 여인자(cofactor)
- 소행렬식
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: 이 행렬은 $m \times n$개의 소행렬식(minor) M_{ij}를 가짐
  - 각 M_{ij}는 $\mathbf{A}$ 행렬의 i 행 벡터 전체와 j 열 벡터 전체를 제거하고 얻어지는 행렬($\in \mathbb{R}^{m-1 \times n-1}$)의 행렬식
- 여인자
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 여인자는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정
  - 다음과 같이 정의되는 $m \times n$개의 여인자 C_{ij}가 존재
  - $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

행렬식 2/2

- 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 의 i 행, j 열 여인자 C_{ij} 를 이용한 행렬식 계산

$$\begin{aligned} det\mathbf{A} &= |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} A_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}C_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{mj}C_{mj} \\ & &= \sum_{i=1}^{m} A_{i1}C_{i1} = \sum_{i=1}^{m} A_{i2}C_{i2} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{in}C_{in} \end{aligned} \tag{2}$$

- $\mathbf{A}$ 의 임의의 행 벡터 $\mathbf{A}_{i,*}$ 와 $\mathbf{C}$ 의 동일 위치 행 벡터 $\mathbf{C}_{i,*}$ 의 내적
- $\mathbf{A}$ 의 임의의 열 벡터 $\mathbf{A}_{*,j}$ 와 $\mathbf{C}$ 의 동일 위치 열 벡터 $\mathbf{C}_{*,j}$ 의 내적

$$det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \mathbf{A}_{i,*}\mathbf{C}_{i,*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{*,j}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{*,j} \tag{3}$$

예제

예제

다음 행렬의 행렬식을 구하라. $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

정답

여인자 M_{ij}를 구한다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} det\,[A_{22}] & det\,[A_{21}] \\ det\,[A_{12}] & det\,[A_{11}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

여인자의 정의에 따라, 여인자로 구성된 행렬 $\mathbf{C}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}A_{22} & (-1)^{1+2}A_{21} \\ (-1)^{2+1}A_{12} & (-1)^{2+2}A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$의 임의의 행 벡터를 선택할 수 있으므로 우선 1행을 가지고 오자. 그리고 여인자 행렬 $\mathbf{C}$의 1행을 가지고 와서, 두 행 벡터의 내적을 구하면 다음과 같다.

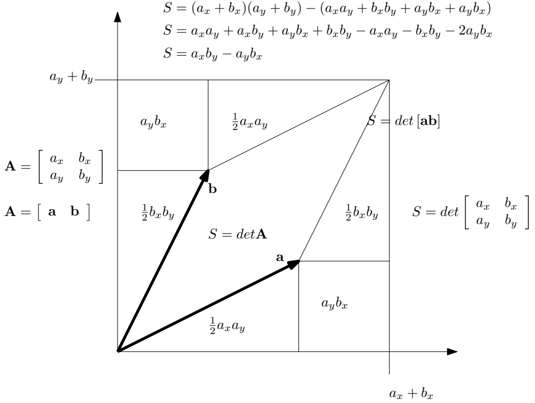
$$det\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1,*}\mathbf{C}_{1,*}^{\mathrm{T}} = A_{11}A_{22} + A_{12}(-A_{21})$$

행렬식의 기하적 의미

두 열 벡터 $\mathbf{a} = (a_x a_y)^{\mathrm{T}}$ 와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)^{\mathrm{T}}$ 를 열로 하는 행렬 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$$

이 두 벡터를 두 개의 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 행렬 $\mathbf{A}$ 의 행렬식

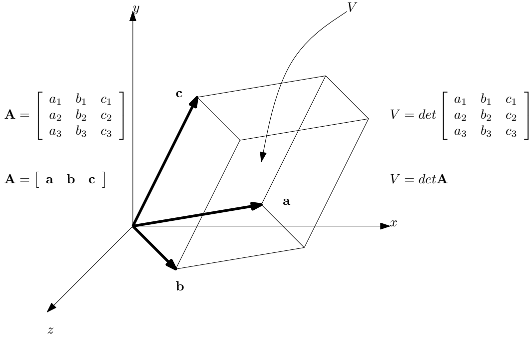


3×3 행렬의 행렬식 의미

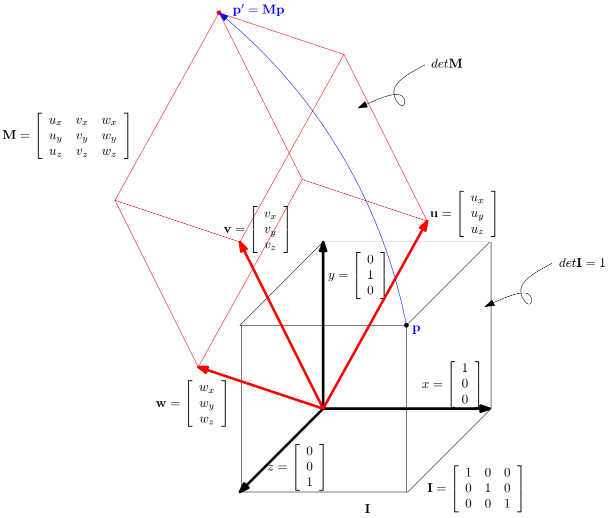
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$는 세 개의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 포함

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

이 세 개의 벡터들이 만드는 평행육면체의 크기가 세 개의 벡터들로 구성된 행렬의 행렬식



행렬과 행렬식의 기하적 의미



행렬식의 특성

몇 가지 기억해 둘 행렬식의 특성은 다음과 같다.

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow |k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

역행렬

- 역행렬은 정방행렬에만 존재
- $\mathbf{A}$의 역행렬이 존재한다면, 이 역행렬을 $\mathbf{A}^{-1}$로 표현
- 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$은 다음과 같은 조건을 만족
  - $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
  - $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

- 역행렬이 존재하는 행렬을 가역행렬(invertible matrix)
- 역행렬이 존재하지 않는 행렬은 특이행렬(singular matrix)

- 의사 역행렬(pseudo-inverse)
  - 행렬 $\mathbf{A}$가 정방행렬이 아니고 $\mathbb{R}^{m\times n}$에 속한다고 하자. 다른 어떤 행렬 $\mathbf{B}$가 $\mathbb{R}^{n\times m}$에 속하면, 두 행렬의 곱 $\mathbf{AB}$는 $\mathbb{R}^{m\times m}$에 속하는 정방행렬이 된다. 만약 $\mathbf{AB} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$이라면, $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$의 의사 역행렬(pseudo-inverse)라고 한다.

역행렬의 계산

- 역행렬의 계산은 수반행렬(adjoint matrix)를 이용하여 쉽게 정의
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 수반행렬: 여인자 C_{ij}를 성분으로 하는 행렬 $\mathbf{C}$의 전치(transpose)

$$adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

- 수반행렬을 행렬의 행렬식으로 나누면 역행렬이 된다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

식은 간단하지만, 여인자를 구하는 재귀호출이 매우 많은 계산을 요구

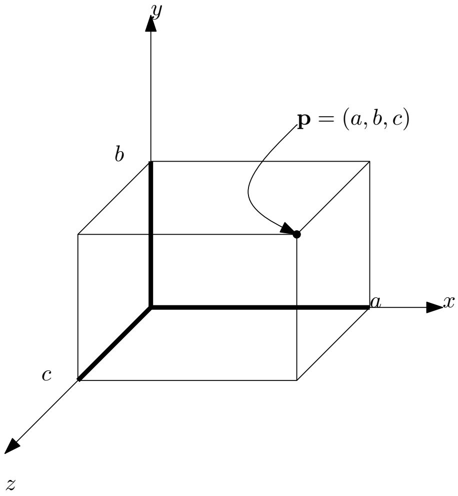
변환이란

수학적 의미에서 변환(transformation)

- 어떤 집합 S를 다른 어떤 집합 S로 대응시키는 함수
- 공간과 점, 그리고 벡터의 문제로 이해할 때, 변환이란 공간 상의 벡터나 점을 다른 벡터나 점으로 바꾸는 연산
- 변환 행렬
  - 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 $\mathbb{R}^n$에 속한다고 할 때, 이 벡터에 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$을 곱하면 $\mathbf{a}$와 같은 차원의 벡터 $\mathbf{b}$를 얻는다.
  - $\mathbf{b} = \mathbf{Aa}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n})$.
  - 어떤 벡터를 동일한 차원의 다른 벡터로 옮기는 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$을 변환행렬(transform matrix)라고 한다.

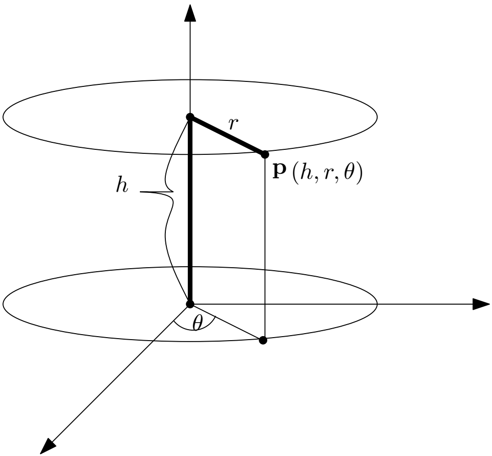
좌표계 - 직교 좌표계

- 일반적으로 가장 익숙한 좌표계
- 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)



좌표계 - 원기둥 좌표계

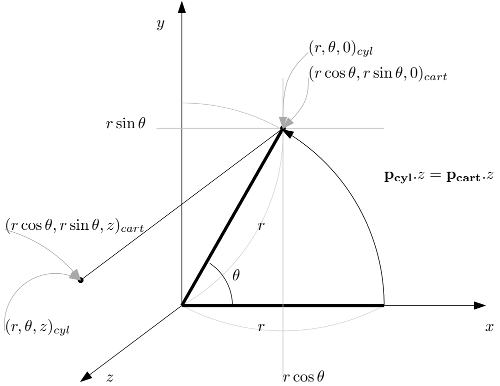
- $\mathbf{p}$는 이러한 높이 h와 반지름 r을 가진 원기둥의 윗쪽 원주에 놓임.
- 원주에서 특정한 위치는 각도 θ로 표현
- 원기둥 좌표: (r, θ, h)



원기둥 좌표를 직교 좌표로 옮기기

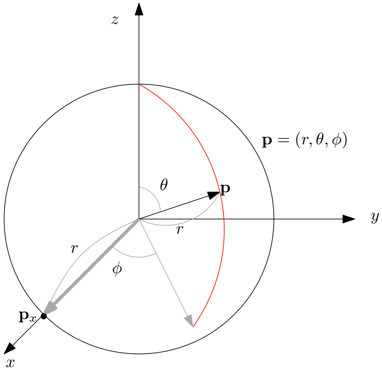
원기둥 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cyl}$, 직교 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cart}$ 으로 표현하면

$$(r, \theta, h)_{cyl} = (r\cos\theta, r\sin\theta, h)_{cart}$$



좌표계 - 구면 좌표계

- $\mathbf{p}$를 지나며 중심이 원점인 구면의 반지름을 r
- 반지름 r인 점 가운데 x 축 위에 있는 점을 $\mathbf{p}_x$
- $\mathbf{p}_x$을 xy 평면 위에서 $\mathbf{p}$와 같은 경도선에 놓는 각도가 ϕ
- 이를 들어 올려 점 $\mathbf{p}$를 지나도록 하는 데에 필요한 각도를 θ
- 구면 좌표 (r, θ, ϕ)



구면 좌표와 직교 좌표

구면 좌표는 일반적으로 다음과 같은 제한을 갖는다.

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

직교 좌표계의 좌표 (x, y, z)를 구면 좌표계로 옮기기

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

구면 좌표계의 좌표를 직교 좌표로 옮기기

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

무슨 좌표계를 사용할 것인가

- 공간에 존재하는 점을 다룰 때에는 어떠한 좌표계를 사용해도 무방
- 컴퓨터 그래픽스 분야에서 가장 많이 사용되는 좌표계는 직교 좌표계
- 우리는 직교 좌표계에서 변환에 대해 다룰 예정
- 직교 좌표계를 기본적인 좌표계로 삼고 변환과 관련된 행렬 연산을 살필 것

어파인(affine) 변환

게임을 구현하기 위한 3차원 그래픽스에서 흔히 사용되는 변환

- 이동변환(translation): 주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮김
- 회전변환(rotation): 2차원은 기준점, 3차원은 기준축을 중심으로 돌림
- 크기변경(scaling): 각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

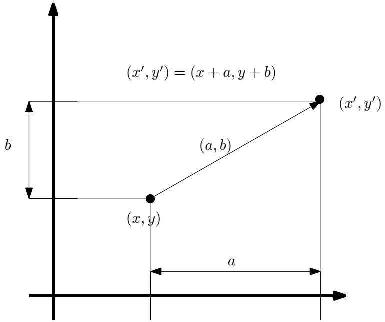
이러한 변환은 어파인 변환(affine transformation)의 일종

- 서로 연결되어 있음을 의미하는 라틴어 'affinis'에서 유래
- 직선 위의 점들을 직선을 유지한 상태로 변환하는 변환
- 직선 위에서의 점들 사이의 거리 비가 변환된 직선 위에서 그대로 유지
- 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지
- 실시간 컴퓨터 그래픽스에서는 여러 가지 효율성의 이유로 어파인 변환을 사용

이동 변환(translation)

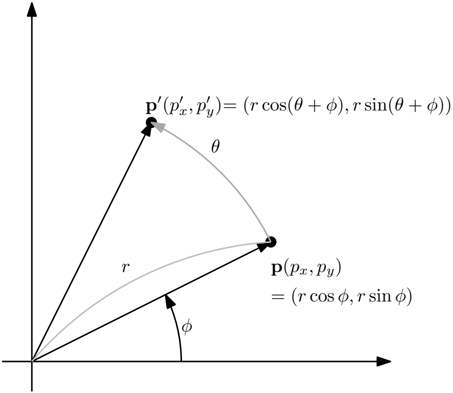
- 2차원: 좌표 (x, y)를 x 축 방향으로 a, y 축 방향으로 b 만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

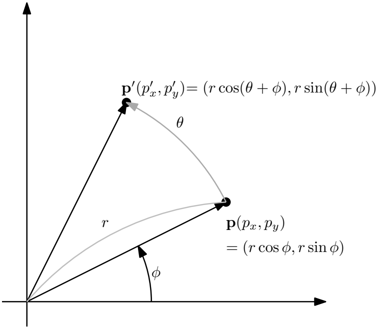
- 모든 차원에 대해 어떤 벡터 $\mathbf{a}$를 변위 벡터 $\mathbf{d}$를 이용하여 $\mathbf{x}'$로 옮기는 이동 변환을 다음과 같이 벡터 더하기로 정의할 수 있음
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{d} \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$



2차원 회전 변환(rotation) - 문제

- 2차원 회전의 중심: 피벗(pivot)
- 기본적인 회전: 피벗이 원점인 경우
  - $\mathbf{p}$를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전하여 놓이는 지점 $\mathbf{p}'$를 구하는 문제
  - 원래 좌표 (p_x, p_y)를 θ 만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)를 얻는 문제





- 원점에서 (p_x, p_y)로 선분: 선분 길이 r과 x축과 이루는 각도 ϕ
- $(p_x, p_y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
- 이 좌표를 θ만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)
  - $(p'_x, p'_y) = (r\cos(\theta+\phi), r\sin(\theta+\phi))$

2차원 회전 변환(rotation) - 회전결과

- ϕ를 계산하지 않고 답을 얻어야 함
- 참조할 공식
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 회전하여 얻는 좌표는 다음과 같이 표현
  - $p'_x = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$
  - $p'_y = (r\cos\phi)\sin\theta + (r\sin\phi)\cos\theta$
- 원래의 좌표 (p_x, p_y)를 이용하여 표현
  - $p'_x = p_x\cos\theta - p_y\sin\theta$
  - $p'_y = p_x\sin\theta + p_y\cos\theta$

2차원 회전 변환(rotation) - 행렬표현

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점 $\mathbf{p}$를 원점 기준으로 θ만큼 회전시켜 $\mathbf{p}'$를 얻는 변환은 회전변환 행렬 $\mathbf{R}(\theta)$을 이용하여 $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3차원 회전 - z 축 회전

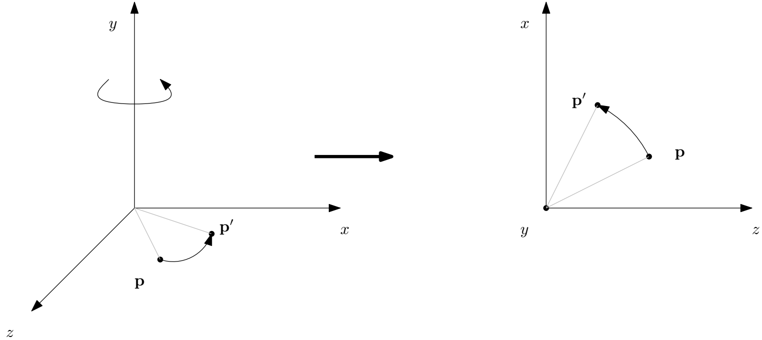
- 2차원 회전을 그대로 3차원에 적용
  - 3차원 좌표 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$을 z 기준으로 회전
- 이 변환은 2차원 변환에 z 성분만 추가
  - z 축 성분은 그대로 유지된다. $(p'_z = p_z)$
  - p_x, p_y 의 값은 2차원 회전과 동일하게 변환된다.

$$\begin{array}{rcrrr} p'_x & = & \cos\theta \cdot p_x & -\sin\theta \cdot p_y & +0 \cdot p_z \\ p'_y & = & \sin\theta \cdot p_x & +\cos\theta \cdot p_y & +0 \cdot p_z \\ p'_z & = & 0 \cdot p_x & +0 \cdot p_y & +1 \cdot p_z \end{array}$$

이것은 다음과 같은 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

3차원 회전 - y 축 회전 (1/2)



- z 축은 2차원 회전의 x축에 대응
- x 축은 2차원 회전의 y축에 대응

$$
\begin{array}{rcrrr}
p'_z & = & \cos\theta \cdot p_z & -\sin\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y \\
p'_x & = & \sin\theta \cdot p_z & +\cos\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y \\
p'_y & = & 0 \cdot p_z & +0 \cdot p_x & +1 \cdot p_y
\end{array}
$$

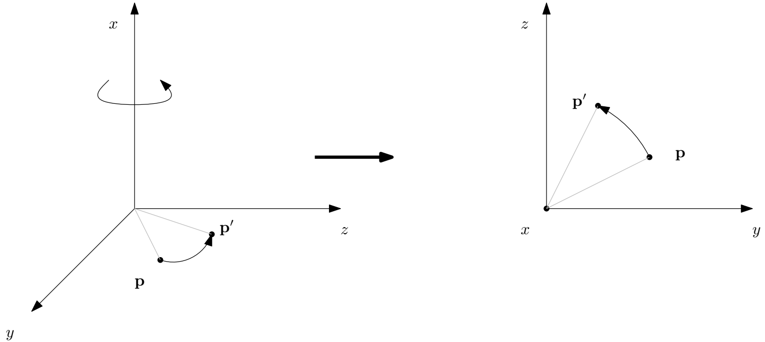
순서를 재배열하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{array}{rcrrr} p'_x & = & \cos\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & +\sin\theta \cdot p_z \\ p'_y & = & 0 \cdot p_x & +1 \cdot p_y & 0 \cdot p_z \\ p'_z & = & -\sin\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & +\cos\theta \cdot p_z \end{array}$$

이것도 역시 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

- 2차원 회전에서 x, y의 역할에 y와 z 축이 각각 대응



$$
\begin{array}{rcrrr}
p'_y & = & \cos\theta \cdot p_y & -\sin\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\
p'_z & = & \sin\theta \cdot p_y & +\cos\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\
p'_x & = & 0 \cdot p_y & +0 \cdot p_z & +1 \cdot p_x
\end{array}
$$

3차원 회전 - x 축 회전 (2/2)

행렬과 벡터의 곱으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

회전 행렬의 역행렬

- 회전행렬은 특별한 특징을 지님 (2차원 회전행렬을 보자)
  - 첫 열 벡터는 길이는 $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$이므로 1
  - 두 번째 열의 길이 역시 $\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$로 1
  - 즉 두 벡터 모두 단위 벡터 (정규)
  - 이 두 벡터를 서로 내적하면 $\cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta$로 0
  - 두 벡터가 서로 수직 (직교)
- 모든 벡터는 단위 벡터이고 서로 직교 = 정규직교(orthonormal)
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치(transpose)와 같음
- 3차원 회전행렬들도 정규직교임을 쉽게 확인 가능

$$\mathbf{R}_x{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$
$$\mathbf{R}_y{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$
$$\mathbf{R}_z{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

임의의 축에 대한 회전

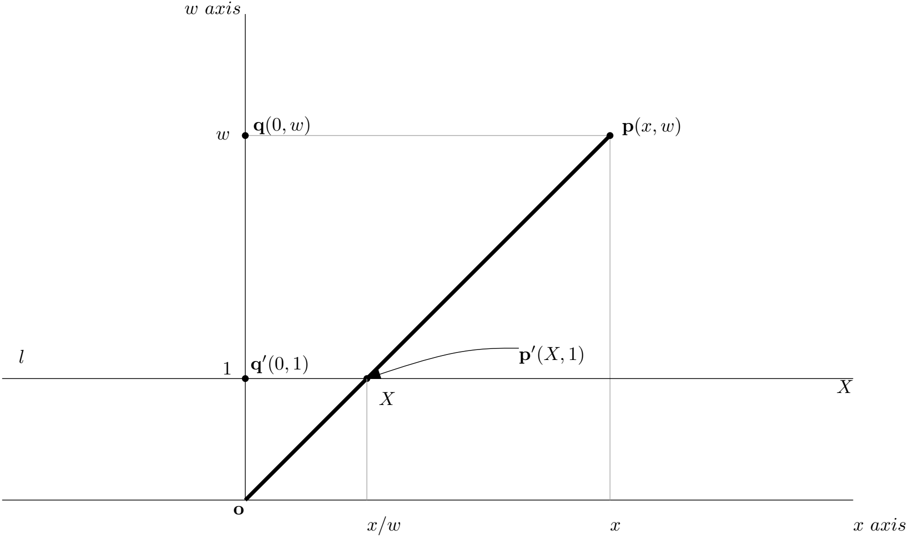
- 임의의 회전축을 기준으로 θ만큼 회전하는 변환은 다음과 같은 절차를 따라 구현할 수 있다.
  1. 회전축이 원점을 지나도록 이동변환 $\mathbf{T}$를 적용한다.
  2. 원점을 지나는 회전축이 xz 평면에 놓이도록 z축 회전 $\mathbf{R}_1$ 적용
  3. 이 회전축이 z축과 동일한 방향이 되도록 y축 회전 $\mathbf{R}_2$를 적용한다.
  4. z축을 기준으로 θ만큼 회전하도록 $\mathbf{R}_z(\theta)$를 적용한다.
  5. ${\mathbf{R}_2}^{-1}$, 즉 ${\mathbf{R}_2}^{\mathrm{T}}$를 적용한다.
  6. ${\mathbf{R}_1}^{-1}$, 즉 ${\mathbf{R}_1}^{\mathrm{T}}$를 적용한다.
  7. $\mathbf{T}^{-1}$, 즉 $-\mathbf{T}$를 적용한다.
- 벡터 더하기(이동변환)와 행렬 곱하기(회전)가 혼재
- 동차좌표계(homogeneous coordinate)을 이용
  - 이동 변환과 회전 변환 모두 4×4 행렬
  - 위의 절차를 모두 누적한 하나의 행렬로 표현 가능
- $\mathbf{R}_{pivot}(\theta) = -\mathbf{T}{\mathbf{R}_1}^{\mathrm{T}}{\mathbf{R}_2}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{T}$

동차좌표계(homogeneous coordinate)

- 사영기하학(射影幾何學, projective geometry)에서 사용되는 좌표계
- n 차원의 사영공간을 $n+1$의 좌표로 표현
- 그래픽 API나 라이브러리들은 동차좌표계를 표준적인 좌표계로 채용
  - 3차원 그래픽스에서 정의된 3차원 가상 공간 객체의 2차원 투영 이미지를 얻는 일과 유관
  - 3차원 공간의 어파인(affine) 변환들을 모두 4×4의 행렬로 표현
- 3차원 공간의 좌표를 표현하는 벡터 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$는 동차좌표계에서 $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$로 표현할 수 있음
- 보다 일반적인 형태는 마지막 숫자를 1이 아닌 다른 값게 하는 것
- 2차원: $[x, y, w]^{\mathrm{T}}$, 3차원: $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$

동차좌표계의 시각적 이해 (1/2)

동차좌표계 이해를 위해 Ammeraal이 사용한 그림



동차좌표계의 시각적 이해 (2/2)

- 두개의 축: x 축이고, 다른 하나는 w 축
  - 동차 좌표계에서 마지막 원소 w를 제외한 모든 성분은 이 x 축 값
  - 마지막 원소는 이 w 축 값
- x축 위에 있지 않는 점 $\mathbf{p}$는 중심 사영(central projection) $\mathbf{p}'$를 가짐
  - $w = 1$의 직선 l과 원점 $\mathbf{o}$에서 $\mathbf{p}$를 연결한 직선의 교차점
  - 이때 원점은 사영중심(center of projection)
- w 축과 x축을 모두 포함한 차원의 공간을 이보다 한 차원 낮은 x축 공간으로 떨어뜨리는 것
- 선분 $\overline{\mathbf{op}}$를 지나는 직선 위의 모든 점들이 이 $\mathbf{p}'$로 사영
- (x, w)에 해당하는 $\mathbf{p}'(X, 1)$ 구하기
  - 닮은 삼각형 $\mathbf{opq}$와 $\mathbf{op'q'}$
  - 등비 관계를 이용하여 구한다
  - $X = \frac{X}{1} = \frac{|\mathbf{p'q'}|}{|\mathbf{oq'}|}$
- 이 식은 다음과 같이 바뀐다.
- $X = \frac{X}{1} = \frac{|\mathbf{oq'}|}{|\mathbf{p'q'}|} = \frac{|\mathbf{oq}|}{|\mathbf{pq}|} = \frac{x}{w}$

동차좌표계와 데카르트 좌표계의 관계

w 좌표의 의미

사영기하에서 **op**를 지나는 직선 위의 모든 점들은 (x, w) 형태의 좌표로 표현할 수 있고, 이 모든 점들은 $w = 1$인 평면으로 중심사영을 수행했을 때, w 좌표는 무의미해지면서 (x/w)의 좌표로 바뀌게 된다. 즉, 3차원 공간의 좌표를 표현하기 위해 동차좌표계를 사용한다면 $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$의 형태가 되며, 이것은 위의 그림에서 w 축을 포함한 공간이 된다. 이를 3차원 데카르트 좌표로 바꾸는 것은 중심사영이 이루어지는 $w = 1$ 평면으로 옮겨 놓는 것이고 이때의 좌표는 $[x/w, y/w, z/w]^{\mathrm{T}}$가 되는 것이다. 그리고 3차원 공간의 측면에서 보면, **op**를 지나는 직선 위의 모든 점들이 동일한 점으로 간주되는 것이다.

동차 좌표계 사용의 이점(利點)

- 3차원 좌표 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$ 를 동차좌표계 좌표로 바꾸는 간단한 방법은 $w = 1$ 평면에서의 좌표인 $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$
- 동차좌표계를 쓰면 좋은 점
  - 좌표와 벡터의 구분이 가능
  - $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$ 가 3차원 좌표라면 이 좌표로 표현되는 지점은 3차원 공간내 유일
  - 벡터로 해석된다면 그것은 수 많은 동등 벡터를 표현하게 되며, 공간 내의 특별한 지점을 가리키지 않음
  - 이 둘은 분명히 다르지만 단순한 좌표 표현 방식으로는 구분이 불가능
- 동차좌표계에서 좌표와 벡터의 구분
  - 좌표는 $w \neq 0$ 인 $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$
  - 벡터는 $w = 0$ 인 $[x, y, z, 0]^{\mathrm{T}}$
  - $[x, y, z, 0]^{\mathrm{T}}$ 는 위치를 가진 좌표 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$ 가 아니라 위치가 없는 벡터 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$
- 또다른 잇점
  - 이동변환와 회전변환을 모두 같은 차원의 행렬로 표현

동차 좌표계에서 이동 변환

동차좌표계에서의 이동

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

행렬 표현

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

이동 변환 행렬의 역행렬

이제 이동변환을 행렬로 표현할 수 있게 되었다. 변위 벡터 $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$ 만큼의 이동을 수행하는 변환행렬을 $\mathbf{T_d}$ 라고 하면 이동 변환은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{p}, \quad \mathbf{T_d} \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

이동변환 행렬 $\mathbf{T_d}$ 의 역행렬은 어떻게 될까? 역행렬은 이 행렬이 일으킨 변환을 원래대로 되돌려 놓는 것이므로 $\mathbf{T_{-d}}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동차좌표계에서의 회전 행렬

- 3차원 공간에서 정의되었던 회전 변환을 $\mathbf{R}_{33}$
- $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 에 속하는 동차좌표계 회전 행렬은 $\mathbf{R}_{44}$
- 원소가 모두 0인 3차원 열벡터를 $\mathbf{O}_3^{col}$, 행벡터를 $\mathbf{O}_3^{row}$

$$\mathbf{R}_{44} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{44}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{44}^y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{44}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

복합변환

좌표를 $\mathbf{R}_{44}$ 를 이용하여 회전하고, 이를 $\mathbf{T_d}$ 만큼 이동하는 변환

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{R}_{44}\mathbf{p}$$

두 변환을 모두 수행하는 하나의 행렬 구할 수 있음

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \end{aligned}$$

- 행렬의 역행렬은?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

복합변환

좌표를 $\mathbf{R}_{44}$ 를 이용하여 회전하고, 이를 $\mathbf{T_d}$ 만큼 이동하는 변환

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{R}_{44}\mathbf{p}$$

두 변환을 모두 수행하는 하나의 행렬 구할 수 있음

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \end{aligned}$$

- 행렬의 역행렬은?

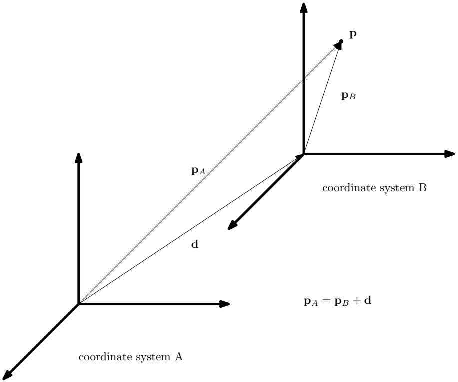
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

좌표계의 변환

- 어떤 점이 좌표계 A에 의해 $\mathbf{p}_A$라 표현된다고 가정
- 다른 좌표계 B의 입장에서 보면 다른 좌표 $\mathbf{p}_B$
- 이렇게 좌표계가 달라질 때 바뀐 좌표계에 따라 새로운 좌표를 계산하는 일은 그래픽스에서 매우 빈번히 나타나는 작업
    - 가상 공간 내의 모든 객체의 위치를 하나의 기준으로 정의하는 데에 필요한 전역좌표계(global coordinate system)과 개별 객체 내에 정의된 지역좌표계(local coordinate system)

좌표계의 이동

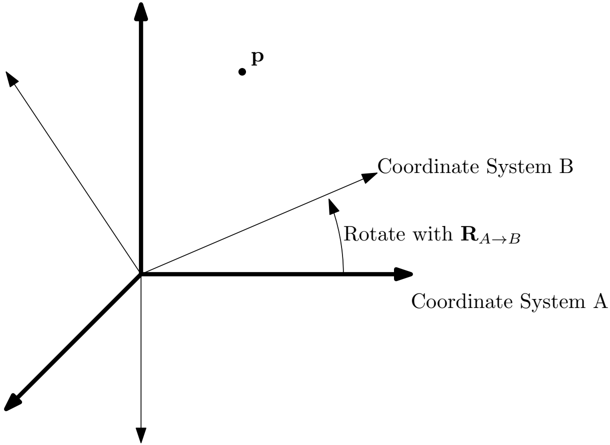
$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B + \mathbf{d}$



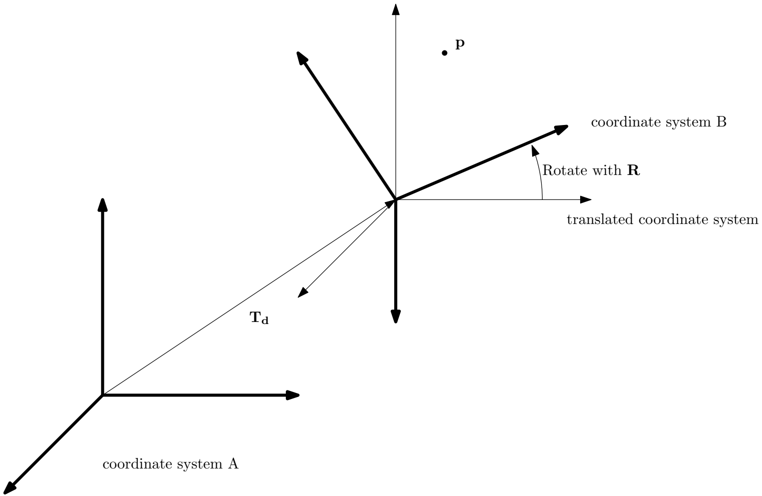
$$\mathbf{T_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_A = \mathbf{T_d}\mathbf{p}_B, \quad \mathbf{p}_B = \mathbf{T}_\mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_A$$

좌표계의 회전

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_A &= \mathbf{R}_{A\rightarrow B}\mathbf{p}_B \\
\mathbf{p}_B &= \mathbf{R}_{A\rightarrow B}^{-1}\mathbf{p}_A &= \mathbf{R}_{A\rightarrow B}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_A
\end{aligned}
$$



회전과 이동이 함께 이뤄진 좌표계 변환 (1/2)



회전과 이동이 함께 이뤄진 좌표계 변환 (1/2)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & 0 \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\mathbf{d}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_B \\ \mathbf{p}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_A \end{aligned}$$