게임 수학 강의 노트 03 - 벡터 연산

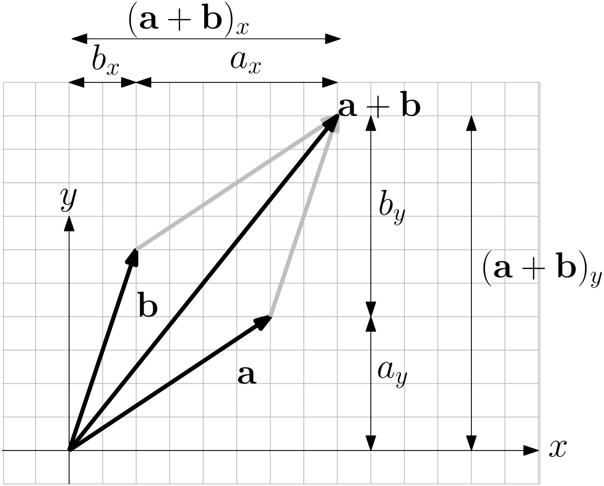
강영민

동명대학교

2015년 2학기

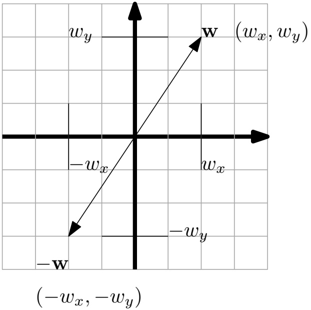
벡터의 덧셈

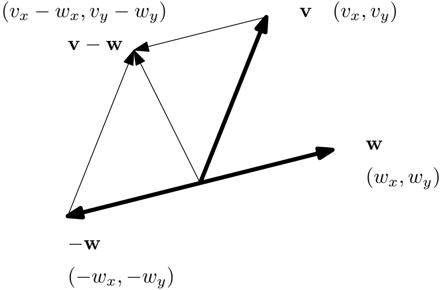
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$



벡터의 뺄셈

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$$





벡터에 스칼라 곱하기

벡터는 크기만을 가진 스칼라와 곱할 수 있다. 어떤 스칼라 값 s가 있다고 하자, 이 스칼라 값과 벡터 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$를 곱한 $s\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$s\mathbf{v} = (sv_x, sv_y, sv_z)$$

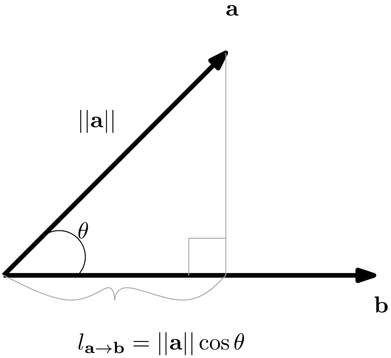
벡터의 기본적인 연산 규칙

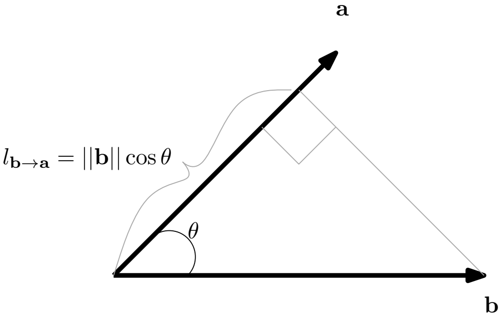
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$
$$\mathbf{a} + \vec{0} = \vec{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \vec{0}$$
$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$
$$(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$$
$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$
$$0\mathbf{a} = \vec{0}$$
$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

벡터의 스칼라 곱, 혹은 내적(dot product)

- 내적
  - 스칼라 곱(scalar product)라고도 부름
  - 두 개의 벡터를 피연산자(operand)로 하는 이항 연산(binary operator)로서 그 결과가 스칼라 값
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$로 표현
  - 두 벡터가 이루는 사잇각이 θ라고 하며, 내적의 크기는 다음과 같다.
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos \theta$
  - 실제 계산 방법
    - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

벡터 내적의 의미





$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

벡터 내적의 활용

- 코사인 함수의 특성을 통해 간단히 얻어지는 사실
  - $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||$
  - $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^2$
- 벡터를 이용하여 각도를 계산하거나 투영을 계산하는 데에 널리 사용
  - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \cos\theta$
  - $\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$

벡터 내적의 활용

예제

어떤 두 벡터가 각각 (3,2)와 (4,1)이라고 하자. 두 벡터가 이루는 각도를 구하라.

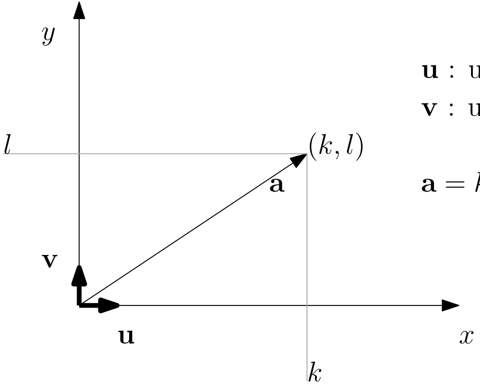
정답

두 벡터를 각각 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$로 표현하자. 두 벡터의 내적 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$는 $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$, 즉 14이다. 각각의 길이는 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$과 $||\mathbf{w}|| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$이다. 따라서 두 벡터의 사이각은 다음과 같다.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{221}} \simeq \cos^{-1} 0.94174191159484 \simeq 19.65^\circ$$

좌표축과 좌표 - 1/3 기본 의미

- $\mathbf{a} = (k, l)$로 표현된다는 것은 xy 좌표계에서 기저벡터가 되는 x축 단위벡터를 $\mathbf{u}$와 y축 단위벡터를 $\mathbf{v}$를 다음과 같이 합성한 것



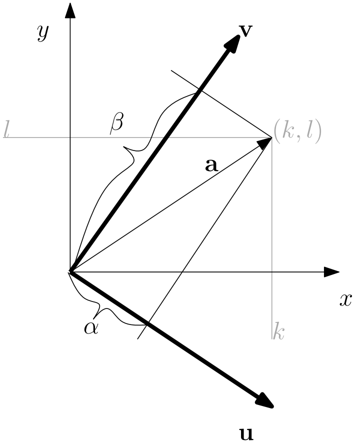
$\mathbf{u}$: unit vector along x axis

$\mathbf{v}$: unit vector along y axis

$\mathbf{a} = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

좌표축과 좌표 - 2/3 새로운 축의 정의

- 새로운 직교 좌표계를 고려해 보자. 여기서는 두 축이 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$
- $\mathbf{a}$의 $\mathbf{u}$ 축 투영 길이 α, $\mathbf{v}$ 축 투영 길이 β 계산
- 이 두 축을 기준으로 하는 좌표계에서는 $\mathbf{a}$가 (α, β)의 좌표로 표현됨



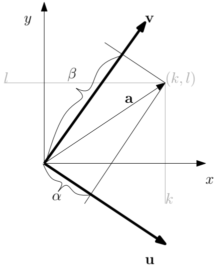
$\mathbf{u}$: an axis

$\mathbf{v}$: another axis perpendicular to $\mathbf{u}$

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

좌표축과 좌표 - 3/3 내적을 이용한 투영 길이 구하기

- $\mathbf{a}$가 축 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 방향으로 가지는 길이 α와 β는 어떻게 구하나
  - 내적을 이용
  - α는 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{u}$ 방향으로 투영한 그림자의 길이 $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} / ||\mathbf{u}||$
  - 축은 단위 벡터로 표현하므로 $||\mathbf{u}|| = 1$. 따라서 $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$
  - 비슷한 방법으로 $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 축으로 하는 좌표계에서 $\mathbf{a}$는 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$



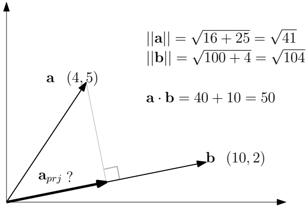
$\mathbf{u}$: an axis
$\mathbf{v}$: another axis perpendicular to $\mathbf{u}$

$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$

새로운 좌표축의 정의

예제

그림처럼 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 (4,5)이고, 다른 벡터 $\mathbf{b}$는 (10,2)라고 하자. 이때 벡터 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{b}$ 위에 수직방향으로 내린 그림자가 되는 벡터 $\mathbf{a}_{prj}$을 구하라.



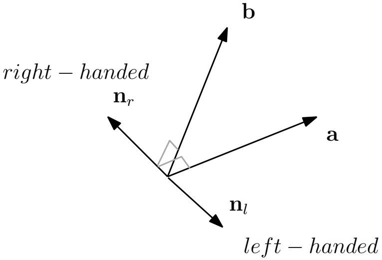
정답

$$l = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

$$\mathbf{a}_{prj} = l\tilde{\mathbf{b}} = \frac{50}{104}(10,2) \simeq (4.8, 0.96)$$

벡터의 외적(外積) - 의미

- 벡터의 외적(cross product)
  - 벡터 곱(vector product): 두 벡터를 피연산자로 하는 이항연산으로 그 결과가 벡터
  - 벡터를 곱해 행렬을 얻는 외적(outer product)과 용어의 혼동이 있음. 여기서는 결과가 벡터인 곱
- 표현
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적은 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$로 표현
  - 그 결과는 벡터이므로 $k\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 동시에 수직인 단위벡터)
  - 동시에 수직인 벡터는 두 개가 존재. 좌표계에 의해 결정됨.

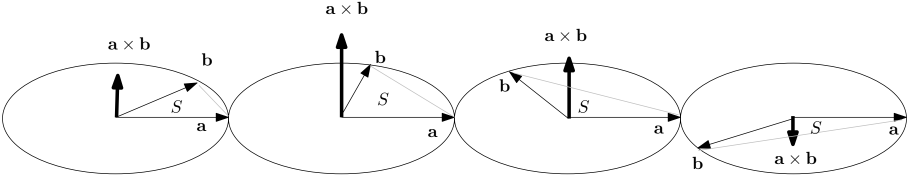


벡터의 외적(外積) 의미의 수학적 표현

- 두 벡터의 외적
  - 외적의 크기 k
    - 두 벡터의 크기와 사잇각의 사인(sine) 값에 비례
    - $k = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}|| \sin\theta$
  - 외적의 방향 $\mathbf{n}$
    - $\mathbf{n}$: 두 벡터에 수직인 방향 벡터
- 따라서 두 벡터의 외적은 다음과 같이 표현할 수 있다.
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}|| \sin\theta \mathbf{n}$

외적이 가진 의미

- 외적을 표현하는 식 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ||\mathbf{a}|||\mathbf{b}|| \sin\theta \mathbf{n}$의 의미
  - 외적은 두 벡터에 동시에 수직한 벡터
  - 크기는 두 벡터가 수직일 때에 최대, 같은 방향이나 반대방향일 때 최소
  - 외적의 크기는 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 끝점을 연결한 삼각형의 넓이 S에 비례
    - $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \frac{1}{2} S$



외적의 계산

- 3차원 벡터의 외적을 구하기
  - $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$
  - 두 벡터의 외적: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$
- "행렬"을 이용한 곱셈으로 구하기
  - "반대칭(skew-symmetric 혹은 antisymmetric)" 행렬 이용

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

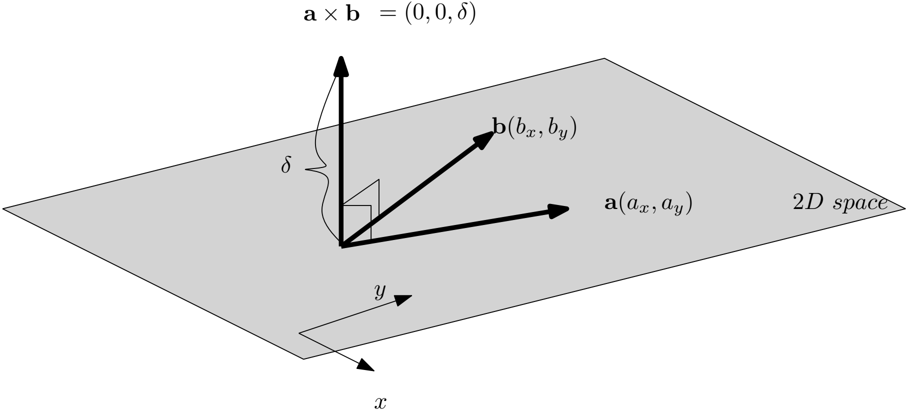
$$\mathbf{A}^*\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

외적의 연산 법칙들

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \\
(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b} \\
\mathbf{a} \times \vec{0} &= \vec{0} \times \mathbf{a} = \vec{0} \\
\mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \vec{0} \\
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \vec{0} \\
\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \vec{0}
\end{aligned}
$$

2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 공간의 두 벡터 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$의 외적은?
  - 그림의 회색 면은 2차원 공간의 일부
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적은 2차원 공간 밖에서 정의
  - 축 z가 필요하며, 이 z 축 성분으로만 표현



2차원 공간에서의 외적과 외적의 응용

- 2차원 벡터의 외적이 2차원 공간 밖에 정의가 되고, 이것은 3차원 벡터라고 볼 수 있다.
- 2차원 벡터 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$를 3차원 벡터로 가정
  - $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$
  - $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, a_x b_y - a_y b_x)$
- z 성분의 값으로 알 수 있는 것들 (이를 δ라고 하자)
  - $\delta > 0$인 경우는 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{a}$의 진행 방향을 기준으로 왼쪽에 있음
  - $\delta < 0$인 경우는 오른쪽
  - 절대값은 두 벡터 사이에 만들어지는 삼각형의 크기에 비례

삼각형 넓이 구하기

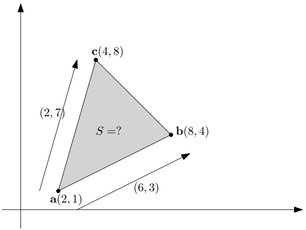
예제

꼭지점 좌표가 (2,1), (8,4), (4,8)인 삼각형의 넓이 S를 구하라.

정답

꼭지점들을 각각 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$로 표현하자. 우리는 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{b}$로 가는 벡터를 구할 수 있고, $\mathbf{u} = (6, 3)$가 된다. 비슷한 방식으로 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{c}$로 가는 벡터는 $\mathbf{v} = (2, 7)$이다. 삼각형의 넓이는 이 두 벡터의 외적이 가지는 크기의 반이다.

$$S = \frac{1}{2}||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \frac{6 \cdot 7 - 3 \cdot 2}{2} = 18$$



외적과 평면

- 외적의 또 다른 응용
  - 평면 표현
    - 평면은 그 평면 위의 삼각형으로 표현 가능 = 3 개의 점 = 9 개의 원소
    - 좀 더 효율적인 방법 = 법선 벡터를 이용하기
    - 법선벡터 = 평면이 바라보는 방향을 나타내는 벡터
    - 법선벡터가 나타내는 것은 하나의 평면이 아니라 동일한 방향을 쳐다보는 모든 평면
    - 평면의 표현 = (법선벡터, 평면이 지나는 점) : 6 개의 원소로 표현 가능
    - 법선벡터 구하기: 벡터의 외적을 이용