게임 수학 강의 노트 03 - 벡터 연산

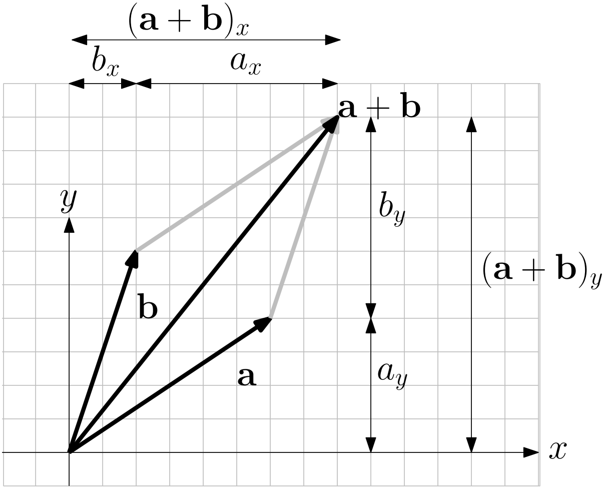
강영민

동명대학교

2015년 2학기

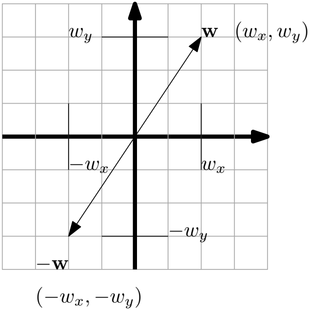
벡터의 덧셈

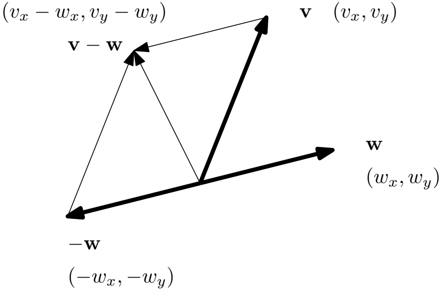
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$



벡터의 뺄셈

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$$





벡터에 스칼라 곱하기

벡터는 크기만을 가진 스칼라와 곱할 수 있다. 어떤 스칼라 값 s가 있다고 하자, 이 스칼라 값과 벡터 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$를 곱한 $s\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$s\mathbf{v} = (sv_x, sv_y, sv_z)$$

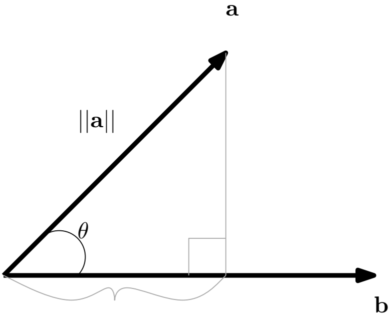
벡터의 기본적인 연산 규칙

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} \\
(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\
\mathbf{a} + \vec{0} &= \vec{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \\
\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \mathbf{a} - \mathbf{a} = \vec{0} \\
(k + l)\mathbf{a} &= k\mathbf{a} + l\mathbf{a} \\
(kl)\mathbf{a} &= k(l\mathbf{a}) \\
1\mathbf{a} &= \mathbf{a} \\
0\mathbf{a} &= \vec{0} \\
(-1)\mathbf{a} &= -\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

벡터의 스칼라 곱, 혹은 내적(dot product)

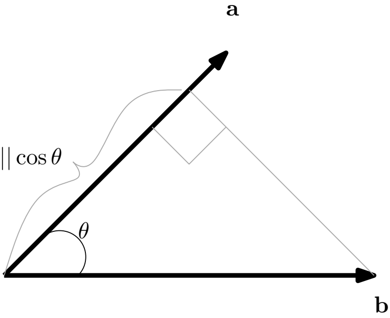
- 내적
  - 스칼라 곱(scalar product)라고도 부름
  - 두 개의 벡터를 피연산자(operand)로 하는 이항 연산(binary operator)로서 그 결과가 스칼라 값
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$로 표현
  - 두 벡터가 이루는 사잇각이 θ라고 하며, 내적의 크기는 다음과 같다.
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta$
  - 실제 계산 방법
    - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

벡터 내적의 의미



$l_{\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}} = ||\mathbf{a}|| \cos\theta$

$l_{\mathbf{b}\rightarrow\mathbf{a}} = ||\mathbf{b}|| \cos\theta$



$$l_{\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

$$l_{\mathbf{b}\rightarrow\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\rightarrow\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

벡터 내적의 활용

- 코사인 함수의 특성을 통해 간단히 얻어지는 사실
  - $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||$
  - $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^2$
- 벡터를 이용하여 각도를 계산하거나 투영을 계산하는 데에 널리 사용
  - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \cos\theta$
  - $\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
  - $\theta = \cos^{-1} \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$

벡터 내적의 활용

예제

어떤 두 벡터가 각각 (3,2)와 (4,1)이라고 하자. 두 벡터가 이루는 각도를 구하라.

정답

두 벡터를 각각 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$로 표현하자. 두 벡터의 내적 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$는 $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$, 즉 14이다. 각각의 길이는 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$과 $||\mathbf{w}|| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$이다. 따라서 두 벡터의 사이각은 다음과 같다.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{221}} \simeq \cos^{-1} 0.94174191159484 \simeq 19.65^\circ$$