게임 수학 강의 노트 06 - 사원수(Quaternion)

강영민

동명대학교

2015년 2학기

사원수

- 사원수(quaternion)는 스칼라(scalar) 값과 3차원 벡터를 묶어 구성한 복소수(complex number)
- 3차원 벡터 $\mathbf{v} = (a, b, c)$를 각각의 축 방향 단위 벡터인 기저 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$로 표현하면 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$
- 사원수는 여기에 스칼라 값 d가 추가된 $d + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$
- 기저를 제외하고 표현하면 $(d, (a, b, c))$와 같이 표현
- 벡터 기호로 표현하면 $(d, \mathbf{v})$
- 스칼라 값은 기저가 실수의 단위 값인 1이라고 이해하면 사원수는 $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$를 기저로 하는 벡터
- 로보틱스와 컴퓨터 그래픽스 분야에서 회전을 다루는 데에 빈번히 이용

사원수의 연산 - 덧셈과 뺄셈

- 사원수 덧셈: 성분별로 더하면 된다.
- 두 개의 사원수 $\hat{p}$와 $\hat{q}$가 각각 $(s_p, \mathbf{v}_p)$와 $(s_q, \mathbf{v}_q)$일 때, 덧셈은
  - $\hat{p} + \hat{q} = (s_p + s_q, \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q)$
  - $\hat{p} = (a_p, b_p, c_p, d_p)$와 $\hat{q} = (a_q, b_q, c_q, d_q)$
    - $\hat{p} + \hat{q} = (a_p + a_q, b_p + b_q, c_p + c_q, d_p + d_q)$
- 뺄셈
  - $\hat{p} - \hat{q} = (a_p - a_q, b_p - b_q, c_p - c_q, d_p - d_q)$
  - 스칼라와 벡터로 나누어 표현하면 다음과 같다.
    - $\hat{p} = (s_p, \mathbf{v}_p), \quad \hat{q} = (s_q, \mathbf{v}_q)$
    - $\hat{p} + \hat{q} = (s_p - s_q, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q)$

사원수의 연산 - 스칼라 곱셈

사원수와 어떤 스칼라 λ를 곱하는 것은 모든 성분에 이 스칼라 값을 곱하는 것이다.

$$\lambda\hat{p} = (\lambda s_p, \lambda\mathbf{v}_p) = (\lambda a_p, \lambda b_p, \lambda c_p, \lambda d_p)$$

사원수의 연산 - 사원수 곱셈 1/4

- 두 사원수 $\hat{p}$와 $\hat{q}$를 곱하려면 어떻게 해야 할까?
- 사원수는 서로 다른 허수 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$를 가진 벡터와 스칼라의 합인 복소수
- 허수들 사이의 곱
  - $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$
  - $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$
  - $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$
- $\hat{p}\hat{q}$는 다음과 같이 표현 가능
  - $\hat{p} = d_p + a_p\mathbf{i} + b_p\mathbf{j} + c_p\mathbf{k}$
  - $\hat{q} = d_q + a_q\mathbf{i} + b_q\mathbf{j} + c_q\mathbf{k}$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q + d_p + d_p a_q\mathbf{i} + d_p b_q\mathbf{j} + d_p c_q\mathbf{k} + \\
& a_p\mathbf{i}d_q + a_p\mathbf{i}a_q\mathbf{i} + a_p\mathbf{i}b_q\mathbf{j} + a_p\mathbf{i}c_q\mathbf{k} + \\
& b_p\mathbf{j}d_q + b_p\mathbf{j}a_q\mathbf{i} + b_p\mathbf{j}b_q\mathbf{j} + b_p\mathbf{j}c_q\mathbf{k} + \\
& c_p\mathbf{k}d_q + c_p\mathbf{k}a_q\mathbf{i} + c_p\mathbf{k}b_q\mathbf{j} + c_p\mathbf{k}c_q\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

사원수의 연산 - 사원수 곱셈 2/4

정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q + d_p a_q \mathbf{i} + d_p b_q \mathbf{j} + d_p c_q \mathbf{k} + \\ & a_p d_q \mathbf{i} + a_p a_q \mathbf{i}^2 + a_p b_q \mathbf{ij} + a_p c_q \mathbf{ik} + \\ & b_p d_q \mathbf{j} + b_p a_q \mathbf{ji} + b_p b_q \mathbf{j}^2 + b_p c_q \mathbf{jk} + \\ & c_p d_q \mathbf{k} + c_p a_q \mathbf{ki} + c_p b_q \mathbf{kj} + c_p c_q \mathbf{k}^2\end{aligned} \tag{1}$$

허수의 곱이 나타나는 부분을 정리하면,

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q + d_p a_q \mathbf{i} + d_p b_q \mathbf{j} + d_p c_q \mathbf{k} + \\ & a_p d_q \mathbf{i} - a_p a_q + a_p b_q \mathbf{k} - a_p c_q \mathbf{j} + \\ & b_p d_q \mathbf{j} - b_p a_q \mathbf{k} - b_p b_q + b_p c_q \mathbf{i} + \\ & c_p d_q \mathbf{k} + c_p a_q \mathbf{j} - c_p b_q \mathbf{i} - c_p c_q\end{aligned} \tag{2}$$

사원수의 연산 - 사원수 곱셈 3/4

허수별로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q - a_p a_q - b_p b_q - c_p c_q \\ & + d_p a_q \mathbf{i} + a_p d_q \mathbf{i} + (b_p c_q - c_p b_q)\mathbf{i} \\ & + d_p b_q \mathbf{j} + b_p d_q \mathbf{j} + (c_p a_q - a_p c_q)\mathbf{j} \\ & + d_p c_q \mathbf{k} + c_p d_q \mathbf{k} + (a_p b_q - b_p a_q)\mathbf{k}\end{aligned}$$

계산의 의미는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q - (a_p a_q + b_p b_q + c_p c_q) \\ & + d_p (a_q \mathbf{i} + b_q \mathbf{j} + c_q \mathbf{k}) \\ & + d_q (a_p \mathbf{i} + b_p \mathbf{j} + c_p \mathbf{k}) \\ & + (b_p c_q - c_p b_q)\mathbf{i} + (c_p a_q - a_p c_q)\mathbf{j} + (a_p b_q - b_p a_q)\mathbf{k}\end{aligned}$$

사원수의 연산 - 사원수 곱셈 4/4

벡터의 내적과 외적을 이용하여 설명하면,

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} = \quad & d_p d_q - (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q) \\ & + d_p \mathbf{v}_q + d_q \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q\end{aligned}$$

사원수를 스칼라 값과 벡터 표현인 $(d, \mathbf{v})$로 표현하면,

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{q} &= (d_p, \mathbf{v}_p)(d_q, \mathbf{v}_q) \\ &= (d_p d_q - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q, \quad d_p \mathbf{v}_q + d_q \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q)\end{aligned}$$

- 스칼라: 두 사원수가 가진 스칼라 값의 곱에서 두 사원수가 가진 벡터 내적을 뺀 것
- 벡터: 각 사원수가 가진 스칼라 값을 상대편의 벡터 부분에 곱한 결과 두 개를 더하고, 두 사원수가 가진 벡터를 서로 외적하여 얻는 벡터를 추가로 더하여 얻음

사원수의 연산 규칙

$$\hat{p} + \hat{q} = \hat{q} + \hat{p}$$

$$(\hat{p} + \hat{q}) + \hat{r} = \hat{p} + (\hat{q} + \hat{r})$$

$$\lambda\hat{p} = \hat{p}\lambda$$

$$-\lambda\hat{p} = \lambda(-\hat{p})$$

$$\hat{p}\hat{q} \neq \hat{q}\hat{p}$$

켤레 사원수 1/2

- 켤레 사원수(공액 사원수, conjugate)
  - 어떤 사원수 $\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p)$의 켤레 사원수를 $\hat{p}^*$라고 표현
  - 이 켤레 이 사원수는 $(d_p, -\mathbf{v}_p)$의 값을 가짐

$$\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p) \Rightarrow \hat{p}^* = (d_p, -\mathbf{v}_p)$$

- 사원수의 크기는 벡터의 크기와 같은 방식으로 구한다.

$$\begin{aligned}
|\hat{q}| &= \sqrt{d_q d_q + a_q a_q + b_q b_q + c_q c_q} \\
&= \sqrt{d_q^2 + a_q^2 + b_q^2 + c_q^2} \\
&= \sqrt{d_q^2 + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} \\
&= \sqrt{d_q^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\
&= \sqrt{\hat{q}\hat{q}^*}
\end{aligned}$$

켤레 사원수 2/2

- 사원수의 항등원은 $\hat{i}$는 $(1, 0, 0, 0)$
- 사원수 $\hat{q}$의 역원 $\hat{q}^{-1}$은 $\hat{q}^*/|\hat{q}|$

$$\hat{q}\hat{i} = \hat{i}\hat{q} = \hat{q}$$

$$\hat{q}\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = \hat{q}\hat{q}^*/|q| = \hat{i}$$

- 켤레 사원수의 크기는 서로 동일하다.

$$|\hat{q}| = |\hat{q}^*|$$

- 다음과 같은 연산 규칙도 중요

$$(\hat{q} + \hat{r})^* = \hat{q}^* + \hat{r}^*$$

$$(\hat{q}\hat{r})^* = \hat{r}^*\hat{q}^*$$

사원수 연산 법칙 정리

$$\hat{p} + \hat{q} = \hat{q} + \hat{p}$$

$$(\hat{p} + \hat{q}) + \hat{r} = \hat{p} + (\hat{q} + \hat{r})$$

$$\lambda\hat{p} = \hat{p}\lambda$$

$$-\lambda\hat{p} = \lambda(-\hat{p})$$

$$\hat{p}\hat{q} \neq \hat{q}\hat{p}$$

$$\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p) \implies \hat{p}^* = (d_p, -\mathbf{v}_p)$$

$$|\hat{q}| = \sqrt{\hat{q}\hat{q}^*}$$

$$\hat{q}\hat{i} = \hat{q} \implies \hat{i} = (1, 0, 0, 0)$$

$$\hat{q}\hat{p} = \hat{i} \implies \hat{p} = \hat{q}^{-1} = \hat{q}^*/|\hat{q}|$$

$$\hat{q}\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = \hat{q}\hat{q}^*/|q| = \hat{i}$$

$$|\hat{q}| = |\hat{q}^*|$$

$$(\hat{q} + \hat{r})^* = \hat{q}^* + \hat{r}^*$$

$$(\hat{q}\hat{r})^* = \hat{r}^*\hat{q}^*$$

사원수와 회전: 곱셈

- 행렬로 표현했던 회전은 사원수를 이용하여 표현 가능
- 어떤 좌표 $\mathbf{p}(x, y, z)$는 사원수 표현으로는 $\hat{p} = (0, (x, y, z)) = (0, \mathbf{p})$
- 이 좌표에 다음과 같은 사원수 $\hat{q}$를 곱하면 어떻게 되는지 보자.

$$\hat{p} = (0, \mathbf{p})$$

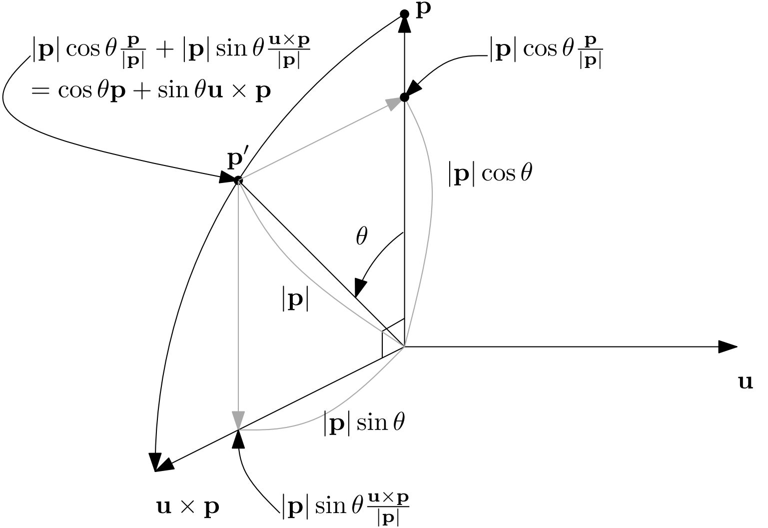
$$\hat{q} = (\cos\theta, \sin\theta\mathbf{u}), |\mathbf{u}| = 1, |\hat{q}| = 1$$

- 벡터 $\mathbf{u}$는 단위벡터 ($\mathbf{u}$가 어떤 방향이나 축을 표현)

$$\hat{p}' = (d_{p'}, \mathbf{p}') = \hat{q}\hat{p} = (-\sin\theta\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u} \times \mathbf{p})$$

사원수와 회전: 사원수의 벡터가 수직인 경우 1/2

- $\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$가 서로 직교하는 경우



사원수와 회전: 사원수의 벡터가 수직인 경우 2/2

- 어떤 단위 벡터 $\mathbf{u}$와 임의의 벡터 $\mathbf{p}$는 서로 직교하다고 가정
- 두 벡터를 외적한 $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$는 $\mathbf{p}$를 $\mathbf{u}$ 축을 중심으로 90도 회전한 것
- $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$는 직교 좌표계의 세 축 위
- 다음과 같은 세 벡터가 직교 좌표축
  - $\mathbf{u}, \quad \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$
- $\mathbf{p}$를 $\mathbf{u}$를 중심축으로 θ만큼 회전시킨 점 $\mathbf{p}'$
  - 이 점은 $\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$축 방향으로의 길이 α와 $\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$축 방향으로의 길이 β를 안다면 $\alpha\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} + \beta\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$로 표현 가능
  - $\alpha = |\mathbf{p}| \cos\theta$
  - $\beta = |\mathbf{p}| \sin\theta$
- 회전된 좌표 $\mathbf{p}'$는 $\cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u} \times \mathbf{p}$
- 두 사원수의 곱으로 얻은 사원수의 벡터 부분과 동일
- 스칼라 부분은 $\mathbf{u} \perp \mathbf{p}$의 경우라면 0

사원수와 회전: 일반적 경우 1/7

- $\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$가 서로 직교하지 않는 일반적 경우
- 스칼라 부분 $-\sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$이 0이 아님
- 스칼라 값이 0이 될 수 있도록 사원수 곱하기를 두 번 수행
- 하나의 사원수 $\hat{q}$를 곱하는 것이 아니라 그 역원 $\hat{q}^{-1}$도 같이 곱함

$$\hat{p}' = \hat{q}\hat{p}\hat{p}^* = (\cos\theta, \sin\theta\mathbf{u})(0, \mathbf{p})(\cos\theta, -\sin\theta\mathbf{u})$$

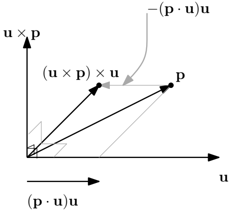
$$\hat{q}\hat{p}\hat{p}^* = (-\sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}, \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p})(\cos\theta, -\sin\theta\mathbf{u})$$

사원수 곱셈 연산법에 따라 계산하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = & \quad (s, \mathbf{v}) \\
s = & \quad -\sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} + \sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} + \sin^2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{u} \\
\mathbf{v} = & \quad \cos^2\theta\mathbf{p} \\
& \quad +\sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p} \\
& \quad +(\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u} \\
& \quad -\sin\theta\cos\theta\mathbf{p}\times\mathbf{u} \\
& \quad -\sin^2\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p}\times\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{u}\times\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$는 서로 수직이므로, 이 둘의 내적 $(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}$이 0이다. 따라서 스칼라 부분인 s가 0.

사원수와 회전: 일반적 경우 3/7



- $\mathbf{u}\times\mathbf{p}\times\mathbf{u}$는 $\mathbf{p}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u}$
- $\mathbf{u}\times\mathbf{p}\times\mathbf{u}$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{u}\times\mathbf{p}$에 동시에 수직인 직교축
- 길이는 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$의 내적을 통해 알 수 있고, 이를 $\mathbf{u}$ 축의 음의 방향으로 떨어트리면 됨
- $\mathbf{u}\times\mathbf{p}\times\mathbf{u}=\mathbf{p}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathbf{p} + 2\sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p} + (2\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

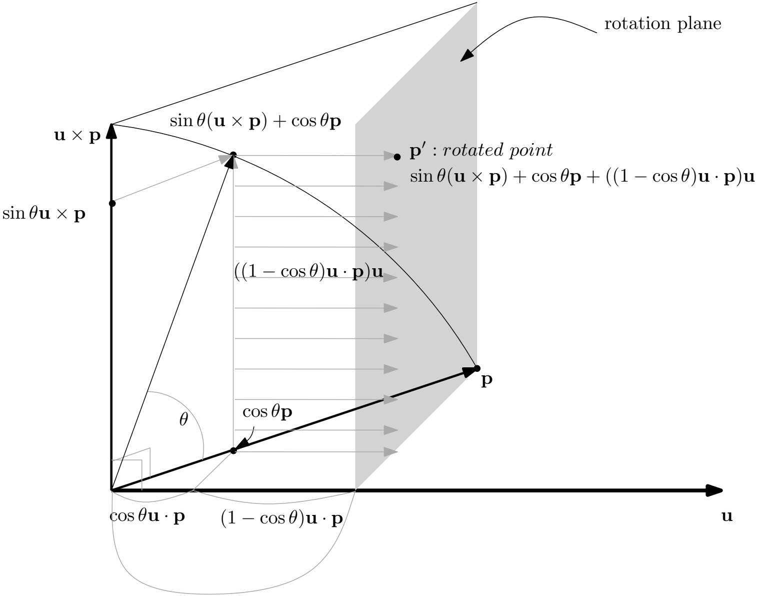
이 항등식을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos 2\theta\mathbf{p} + \sin 2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p}) + (2\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

- $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$이므로 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $2\sin^2\theta$는 $\sin^2\theta + \sin^2\theta = \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$
- $1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$이므로 다음 성립
  - $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos 2\theta\mathbf{p} + \sin 2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p}) + ((1-\cos 2\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

사원수와 회전: 일반적 경우 5/7



사원수와 회전: 일반적 경우 6/7

- 점 $\mathbf{p}$가 축 $\mathbf{u}$를 기준으로 회전
- 회전 과정에 지나는 곡선이 놓인 회색 평면 = 회전 평면
- $\mathbf{p}$와 $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$가 만드는 평면의 원점을 기준을 θ 만큼 회전하여 얻는 점
  - 이 점은 $\mathbf{p}$ 축으로의 길이는 $|\mathbf{p}| \cos\theta$
  - 이 점의 $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$축 방향으로의 길이는 $|\mathbf{p}| \sin\theta$
  - $\sin\theta(\mathbf{u} \times \mathbf{p}) + \cos\theta\mathbf{p}$
  - 이 점을 회전 평면 위로 옮기면 원하는 좌표
- 회전 평면으로 옮기는 데에 필요한 길이는 $(1 - \cos\theta)\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$
- 이 길이만큼 $\mathbf{u}$ 축으로 옮겨 놓는 벡터는 $((1 - \cos\theta)\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}$

회전의 결과 좌표는

$$\mathbf{p}' = \sin\theta(\mathbf{u} \times \mathbf{p}) + \cos\theta\mathbf{p} + ((1 - \cos\theta)\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}$$

사원수와 회전: 일반적 경우 7/7

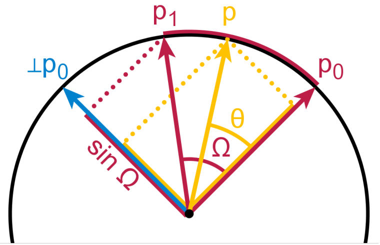
$$\mathbf{p}' = \sin\theta(\mathbf{u} \times \mathbf{p}) + \cos\theta\mathbf{p} + ((1 - \cos\theta)\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}$$

어떤 점 $\mathbf{p}$를 $\mathbf{u}$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하여 $\mathbf{p}'$를 얻고 싶을 때

- $\hat{p} = (0, \mathbf{p})$
- $\hat{q} = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{u})$
- $\hat{p}' = (0, \mathbf{p}') = \hat{q}\hat{p}\hat{q}^*$

사원수의 보간

- 사원수가 회전을 의미한다면, 그래픽스에서 두 사원수를 보간하는 일은 빈번
- 보간: $t = 0$ 에서 $\hat{q}_0$ 이고, $t = 1$ 에서 $\hat{q}_1$ 인 사원수 $\hat{q}_t$ 구하기
- 사원수는 행렬에 비해 보간이 쉽다는 장점

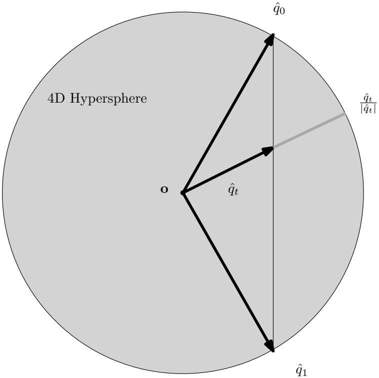


$$\hat{q}_0 = (s_0, u_0, v_0, w_0)$$

$$\hat{q}_1 = (s_1, u_1, v_1, w_1)$$

사원수의 보간: 단순한 선형보간

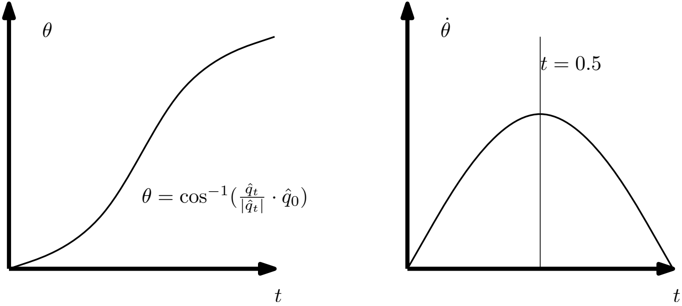
- 간단한 선형보간
  - $\hat{q}_t = (ts_1 + (1-t)s_0, tu_1 + (1-t)u_0, tv_1 + (1-t)v_0, tw_1 + (1-t)w_0)$
  - 즉, $\hat{q}_t = t\hat{q}_1 + (1-t)\hat{q}_0$
- 매우 간단하고 빠르다는 장점
- 보간이 적용되는 동안 사원수의 길이가 길이가 변하는 단점



사원수의 보간: 간단한 개선 방법

- 사원수가 항상 초구면의 표면에 있도록 그 길이를 조정
- $\hat{q}_t/|\hat{q}_t|$로 정규화
- 길이는 유지되지만 회전속도는 일정하지 않음
  - 극단적인 상황: $\hat{q}_0$와 $\hat{q}_1$이 서로 반대 방향
    - 선형 보간하여 얻는 사원수는 $t = 0.5$가 될 때까지는 초기의 회전각
    - $t = 0.5$ 시점을 지나면 바로 다음 회전각으로 전환

사원수의 단순한 선형보간으로 얻어지는 각도의 변화와 각속도의 변화

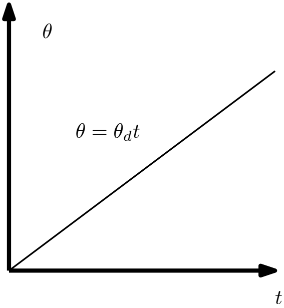


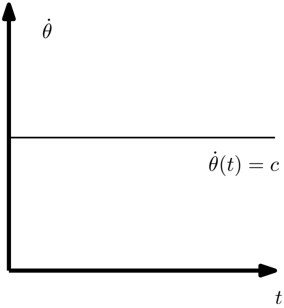
(a) 각도의 변화 (b) 각속도의 변화

사원수의 보간: 구면보간(球面補間) 혹은 Slerp

- 사원수의 보간은 각도 θ가 선형으로 보간되어야 함

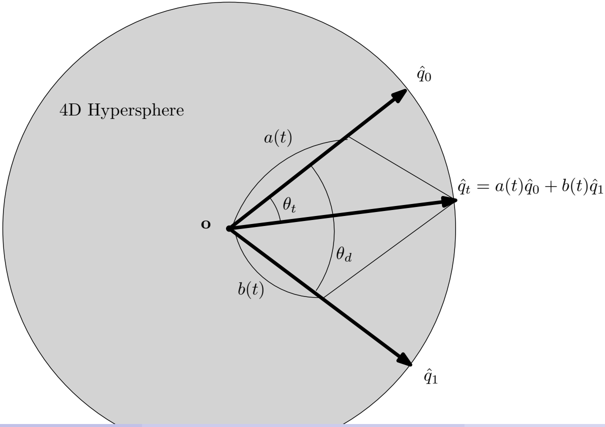
구면 보간을 통해 얻어야 하는 사원수 보간의 각도의 변화와 각속도의 변화





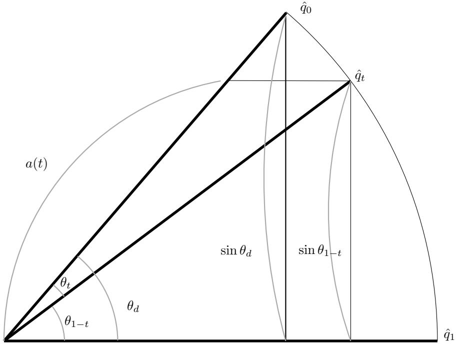
구면보간(球面補間): 등각속도 구면보간의 개념

- 구면보간
  - 시작과 끝 회전을 표현하는 사원수 $\hat{q}_0$와 $\hat{q}_1$에 적절한 가중치 $a(t)$와 $b(t)$ 적용
  - 가중치가 적용된 두 사원수를 합성
  - 현재 시간 t에 제한조건을 만족하는 $a(t)$와 $b(t)$를 찾는 작업



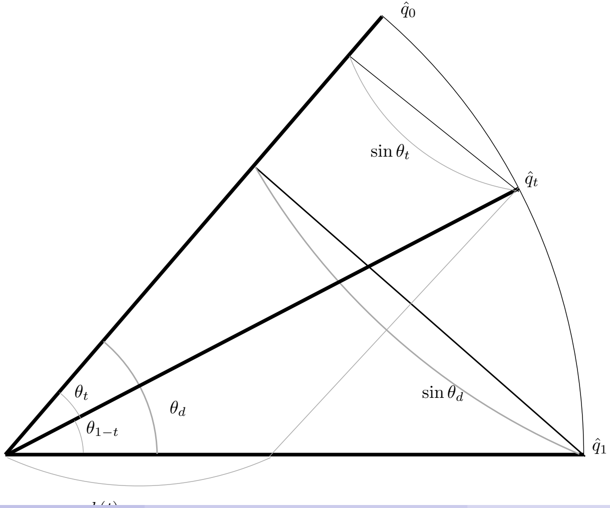
구면보간(球面補間): $a(t)$ 구하기

- $\hat{q}_0$ 에서 $\hat{q}_1$ 까지의 회전각 전체가 θ_d
- 시간 t 에서 보간된 사원수 $\hat{q}_t$ 와 $\hat{q}_0$ 가 이루는 각이 θ_t
- θ_d 에서 θ_t 를 뺀 각도를 θ_{1-t}
- $a(t)$ 와 $|\hat{q}_0|$ 의 비(比)는 결국 $|\hat{q}_t| \sin\theta_{1-t}$ 와 $|\hat{q}_0| \sin\theta_d$ 의 비
- $a(t) = \frac{\sin\theta_{1-t}}{\sin\theta_d}$



구면보간(球面補間): $b(t)$ 구하기

- $b(t)$ 와 $|\hat{q}_1$ 의 비는 $|\hat{q}_t|\sin\theta_t$ 의 값과 $|\hat{q}_1|\sin\theta_d$ 가 이루는 비
- $b(t) = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_d}$



구면보간(球面補間) 계산법

- $a(t)$ 와 $b(t)$ 를 구하고 나면, 보간된 사원수 $\hat{q}_t$
- $\hat{q}_t = a(t)\hat{q}_0 + b(t)\hat{q}_1$
- 사원수가 동일한 각속도로 부드럽게 보간된다. 이러한 보간 방법은 구면보간
- "slerp"이라는 이름으로 종종 부름
- 이때 사원수의 크기는 언제나 1

$$\begin{aligned} \theta_d &= \cos^{-1}(\hat{q}_0 \cdot \hat{q}_1) \\ s &= \sin\theta_d = \sqrt{1 - (\hat{q}_0 \cdot \hat{q}_1)^2} \\ \hat{q}_t &= \frac{\sin\theta_{1-t}}{s}\hat{q}_0 + \frac{\sin\theta_t}{s}\hat{q}_1 \end{aligned}$$