게임 수학 강의 노트 05 - 변환

강영민

동명대학교

2015년 2학기

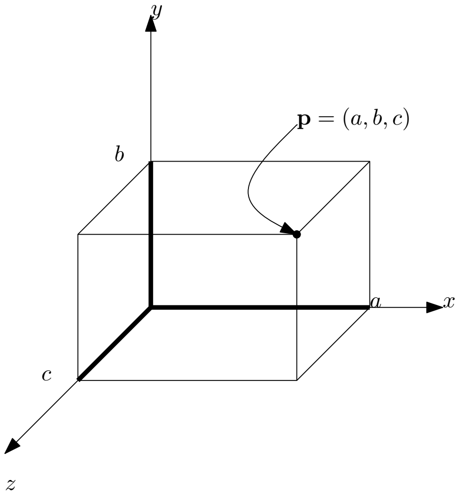
변환이란

수학적 의미에서 변환(transformation)

- 어떤 집합 S를 다른 어떤 집합 S로 대응시키는 함수
- 공간과 점, 그리고 벡터의 문제로 이해할 때, 변환이란 공간 상의 벡터나 점을 다른 벡터나 점으로 바꾸는 연산
- 변환 행렬
  - 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 $\mathbb{R}^n$에 속한다고 할 때, 이 벡터에 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 곱하면 $\mathbf{a}$와 같은 차원의 벡터 $\mathbf{b}$를 얻는다.
  - $\mathbf{b} = \mathbf{Aa}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n})$.
  - 어떤 벡터를 동일한 차원의 다른 벡터로 옮기는 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 변환행렬(transform matrix)라고 한다.

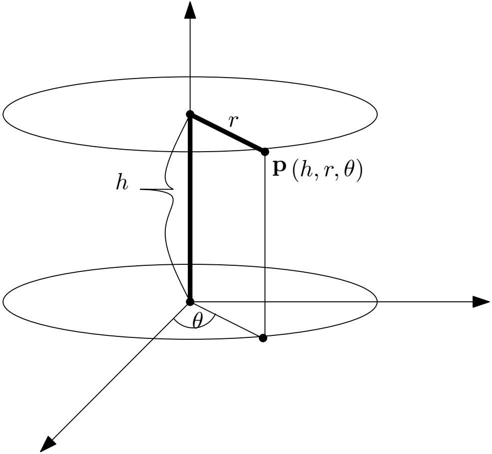
좌표계 - 직교 좌표계

- 일반적으로 가장 익숙한 좌표계
- 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)



좌표계 - 원기둥 좌표계

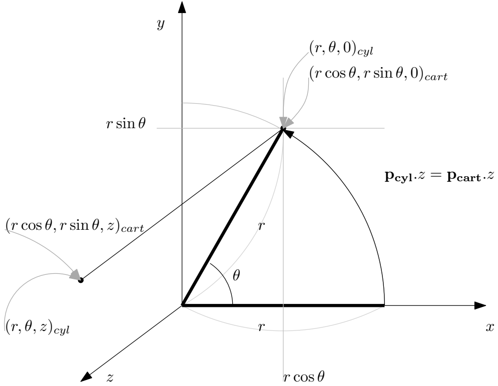
- $\mathbf{p}$는 이러한 높이 h와 반지름 r을 가진 원기둥의 윗쪽 원주에 놓임.
- 원주에서 특정한 위치는 각도 θ로 표현
- 원기둥 좌표: (r, θ, h)



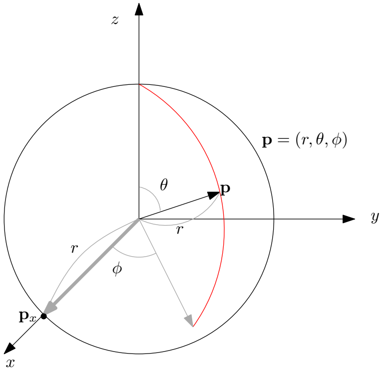
원기둥 좌표를 직교 좌표로 옮기기

원기둥 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cyl}$, 직교 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cart}$ 으로 표현하면

$$(r, \theta, h)_{cyl} = (r\cos\theta, r\sin\theta, h)_{cart}$$



- $\mathbf{p}$를 지나며 중심이 원점인 구면의 반지름을 r
- 반지름 r인 점 가운데 x 축 위에 있는 점을 $\mathbf{p}_x$
- $\mathbf{p}_x$을 xy 평면 위에서 $\mathbf{p}$와 같은 경도선에 놓는 각도가 ϕ
- 이를 들어 올려 점 $\mathbf{p}$를 지나도록 하는 데에 필요한 각도를 θ
- 구면 좌표 (r, θ, ϕ)



구면 좌표와 직교 좌표

구면 좌표는 일반적으로 다음과 같은 제한을 갖는다.

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

직교 좌표계의 좌표 (x, y, z)를 구면 좌표계로 옮기기

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

구면 좌표계의 좌표를 직교 좌표로 옮기기

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

무슨 좌표계를 사용할 것인가

- 공간에 존재하는 점을 다룰 때에는 어떠한 좌표계를 사용해도 무방
- 컴퓨터 그래픽스 분야에서 가장 많이 사용되는 좌표계는 직교 좌표계
- 우리는 직교 좌표계에서 변환에 대해 다룰 예정
- 직교 좌표계를 기본적인 좌표계로 삼고 변환과 관련된 행렬 연산을 살필 것

어파인(affine) 변환

게임을 구현하기 위한 3차원 그래픽스에서 흔히 사용되는 변환

- 이동변환(translation): 주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮김
- 회전변환(rotation): 2차원은 기준점, 3차원은 기준축을 중심으로 돌림
- 크기변경(scaling): 각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

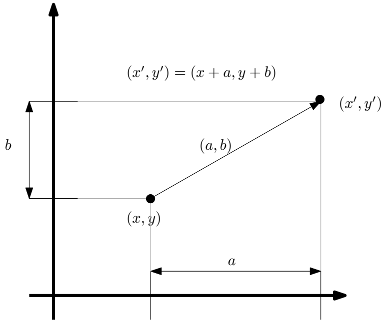
이러한 변환은 어파인 변환(affine transformation)의 일종

- 서로 연결되어 있음을 의미하는 라틴어 'affinis'에서 유래
- 직선 위의 점들을 직선을 유지한 상태로 변환하는 변환
- 직선 위에서의 점들 사이의 거리 비가 변환된 직선 위에서 그대로 유지
- 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지
- 실시간 컴퓨터 그래픽스에서는 여러 가지 효율성의 이유로 어파인 변환을 사용

이동 변환(translation)

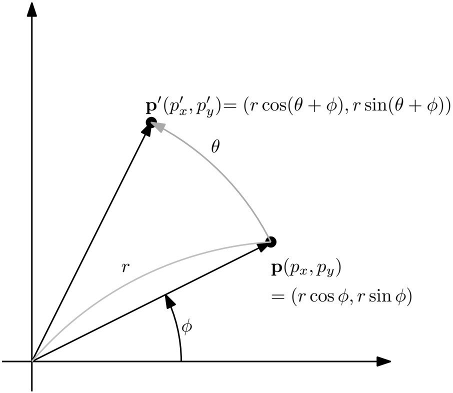
- 2차원: 좌표 (x, y)를 x 축 방향으로 a, y 축 방향으로 b 만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

- 모든 차원에 대해 어떤 벡터 $\mathbf{a}$를 변위 벡터 $\mathbf{d}$를 이용하여 $\mathbf{x}'$로 옮기는 이동 변환을 다음과 같이 벡터 더하기로 정의할 수 있음
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{d} \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$

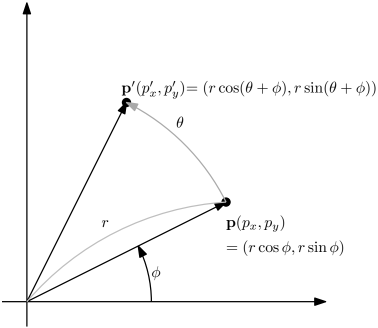


2차원 회전 변환(rotation) - 문제

- 2차원 회전의 중심: 피벗(pivot)
- 기본적인 회전: 피벗이 원점인 경우
  - $\mathbf{p}$를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전하여 놓이는 지점 $\mathbf{p}'$를 구하는 문제
  - 원래 좌표 (p_x, p_y)를 θ 만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)를 얻는 문제



2차원 회전 변환(rotation) - 좌표값에 대한 이해



- 원점에서 (p_x, p_y)로 선분: 선분 길이 r과 x축과 이루는 각도 ϕ
- $(p_x, p_y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
- 이 좌표를 θ만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)
  - $(p'_x, p'_y) = (r\cos(\theta+\phi), r\sin(\theta+\phi))$

2차원 회전 변환(rotation) - 회전결과

- ϕ를 계산하지 않고 답을 얻어야 함
- 참조할 공식
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 회전하여 얻는 좌표는 다음과 같이 표현
  - $p'_x = (r \cos\phi) \cos\theta - (r \sin\phi) \sin\theta$
  - $p'_y = (r \cos\phi) \sin\theta + (r \sin\phi) \cos\theta$
- 원래의 좌표 (p_x, p_y)를 이용하여 표현
  - $p'_x = p_x \cos\theta - p_y \sin\theta$
  - $p'_y = p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$

2차원 회전 변환(rotation) - 행렬표현

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점 $\mathbf{p}$를 원점 기준으로 θ만큼 회전시켜 $\mathbf{p}'$를 얻는 변환은 회전변환 행렬 $\mathbf{R}(\theta)$을 이용하여 $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3차원 회전

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점 $\mathbf{p}$를 원점 기준으로 θ만큼 회전시켜 $\mathbf{p}'$를 얻는 변환은 회전변환 행렬 $\mathbf{R}(\theta)$을 이용하여 $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$