게임 수학 강의 노트 04 - 행렬

강영민

동명대학교

2015년 2학기

- 행렬의 역사
  - 1차 방정식의 풀이에 아주 오래 전부터 사용
  - 그 특성이 정확히 파악되지 않고 1800년대까지는 배열(array)이라는 이름으로 알려짐
  - 기원전 10세기에서 기원전 2세기 사이에 여러 세대에 걸쳐 쓰여진 중국의 구장산술(九章算術)에 연립 방정식을 풀기 위해 소개
  - 판별식의 개념 등장
  - 1545년에야 이탈리아 수학자 지롤라모 카르다노(Girolamo Cardano)가 그의 저서 "위대한 기술(Ars Magna)"를 통해 유럽에 전함
  - 오랜 기간 동안 많은 수학자들이 이 행렬을 다루며 다양한 성질을 발견
  - 행렬은 공간을 나루는 데에 필요한 유용한 도구
  - 공간 내의 점들을 이떤 위치에서 다른 위치로 옮겨 놓는 다양한 변환이 행렬을 이용하여 표현됨

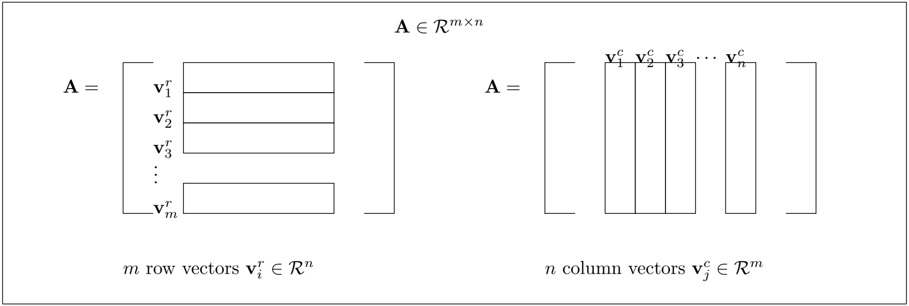
행렬이란 무엇인가

- 행렬은 2차원으로 배열된 수
- 가로 줄을 행(row), 세로 줄을 열(column)
- m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 행렬은 $\mathbf{A}$는 다음의 모양
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $m \times n$ 행렬이라고 하며 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$로 표현
- 각 행은 n 개의 원소를 가진 행벡터(row vector)
- 각 열은 m 개의 원소를 가진 열벡터(column vector)

행벡터와 열벡터

$\mathbf{A}$를 행벡터 $\mathbf{v}_i^r$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^r \\ \mathbf{v}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^r \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$를 열벡터 $\mathbf{v}_j^c$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^c & \mathbf{v}_2^c & \cdots & \mathbf{v}_n^c \end{bmatrix}$



정사각 행렬 - square matrix

- 정방행렬, 혹은 정사각형 행렬은 행과 열의 수가 동일한 행렬.
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 인 행렬
  - 정방행렬은 물리 문제에서 운동을 다루거나 그래픽스에서 변환을 다룰 때에 빈번히 나타남
- 다음 행렬 $\mathbf{A}$는 3×3의 정사각 행렬이다.
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

전치 행렬 - transpose

- 어떤 행렬 $\mathbf{A}$ 의 전치행렬은 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$
  - 따라서, $m \times n$ 행렬의 전치는 $n \times m$ 행렬
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- 전치행렬의 성질
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
  - $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- 그래픽스(graphics) 분야에서 매우 유용한 사용 방법은 회전 변환 행렬의 역행렬을 구할 때
- 3차원 공간의 회전 변환은 정규직교(orthonormal) 특성
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치임이 알려져 있음

대각 행렬 - diagonal matrix

- 대각성분은 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 i 행 j 열 성분을 a_{ij}라고 표현할 때, $i = j$인 성분
- 대각행렬은 대각성분을 제외한 다른 모든 성분의 값이 0인 행렬이다
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$
- 대각행렬을 다른 행렬과 곱했을 때의 성질
  - 어떤 3×3 대각행렬을 $\mathbf{D}$, 1,2,3 행 대각성분은 d_1, d_2, d_3
  - 다른 어떤 3×3 행렬 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{D}$의 곱
    - $\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} \\ d_2 a_{21} & d_2 b_{22} & d_2 b_{23} \\ d_3 a_{31} & d_3 b_{32} & d_3 b_{33} \end{bmatrix}$
    -
    - $\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 b_{22} & d_3 b_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 b_{32} & d_3 b_{33} \end{bmatrix}$

대각 행렬과 벡터의 곱 (1/2)

대각행렬 $\mathbf{D}$와 열벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$이 $(v_1, v_2, v_3)^\mathrm{T}$의 곱

$$\mathbf{Dv} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 \\ d_2 v_2 \\ d_3 v_3 \end{bmatrix}$$

대각 행렬과 벡터의 곱 (2/2)

행벡터 $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$와 대각행렬의 곱

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} d_1 v_1 & d_2 v_2 & d_3 v_3 \end{array}\right]$$

행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬의 덧셈과 뺄셈은 동일한 크기의 행렬 사이에 정의됨

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

행렬과 덧셈과 뺄셈은 동일한 행과 열에 있는 성분을 서로 더하고, 빼서 원래의 자리에 기록

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

행렬의 곱셈

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times x}$
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times x}$

- $\mathbf{A}$ 의 앞에 $\mathbf{B}$를 곱할 경우
  - $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{x\times m}$ 이어야 함
  - 그 결과는 $\mathbf{BA} = \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{x\times n}$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times x}$
- $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times x}$
  - $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$
  - $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

행렬 $\mathbf{A}$ 의 i 번째 행 벡터를 $\mathbf{A}_{i,*}$ 라고 하고, j 번째 열 벡터를 $\mathbf{B}_{*,j}$ 라고 하면, 위의 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$c_{ij} = \mathbf{A}_{i,*}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_{*,j} \tag{1}$$

행렬과 스칼라의 곱

행렬에 스칼라를 곱하는 연산은 해당 스칼라 값을 행렬의 모든 원소에 곱하면 된다.

$$k\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow b_{ij} = ka_{ij}$$

행렬 덧셈과 뺄셈의 연산 법칙

행렬은 다음과 같은 연산 법칙을 가진다.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + 0 = 0 + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$$

이때, 0은 $\mathbf{A}$와 같은 차원의 행렬로 모든 원소가 0인 행렬이다.

행렬 스칼라 곱의 연산 법칙

$$(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$0\mathbf{A} = 0$$

행렬 곱셈의 연산 법칙

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

$$k\mathbf{AB} = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}k\mathbf{B}$$

$\mathbf{I}$는 항등행렬

행렬식 1/2

- 행렬식은 정방행렬에서 정의된다.
- 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 행렬식은 $det\mathbf{A}$, $det(\mathbf{A})$, 또는 $|\mathbf{A}|$로 표현
- 행렬식을 계산하기 위해 필요한 개념
  - 소행렬식(minor)
  - 여인자(cofactor)
- 소행렬식
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: 이 행렬은 $m \times n$개의 소행렬식(minor) M_{ij}를 가짐
  - 각 M_{ij}는 $\mathbf{A}$ 행렬의 i 행 벡터 전체와 j 열 벡터 전체를 제거하고 얻어지는 행렬($\in \mathbb{R}^{m-1\times n-1}$)의 행렬식
- 여인자
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 여인자는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정
  - 다음과 같이 정의되는 $m \times n$개의 여인자 C_{ij}가 존재
  - $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

행렬식 2/2

- 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 의 i 행, j 열 여인자 C_{ij} 를 이용한 행렬식 계산

$$\begin{aligned} det\mathbf{A} &= |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} A_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}C_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{mj}C_{mj} \\ & &= \sum_{i=1}^{m} A_{i1}C_{i1} = \sum_{i=1}^{m} A_{i2}C_{i2} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{in}C_{in} \end{aligned} \tag{2}$$

- $\mathbf{A}$ 의 임의의 행 벡터 $\mathbf{A}_{i,*}$ 와 $\mathbf{C}$ 의 동일 위치 행 벡터 $\mathbf{C}_{i,*}$ 의 내적
- $\mathbf{A}$ 의 임의의 열 벡터 $\mathbf{A}_{*,j}$ 와 $\mathbf{C}$ 의 동일 위치 열 벡터 $\mathbf{C}_{*,j}$ 의 내적

$$det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \mathbf{A}_{i,*}\mathbf{C}_{i,*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{*,j}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{*,j} \tag{3}$$

예제

예제

다음 행렬의 행렬식을 구하라. $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

정답

여인자 M_{ij} 를 구한다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} det\,[A_{22}] & det\,[A_{21}] \\ det\,[A_{12}] & det\,[A_{11}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

여인자의 정의에 따라, 여인자로 구성된 행렬 $\mathbf{C}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}A_{22} & (-1)^{1+2}A_{21} \\ (-1)^{2+1}A_{12} & (-1)^{2+2}A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 의 임의의 행 벡터를 선택할 수 있으므로 우선 1행을 가지고 오자. 그리고 여인자 행렬 $\mathbf{C}$ 의 1행을 가지고 와서, 두 행 벡터의 내적을 구하면 다음과 같다.

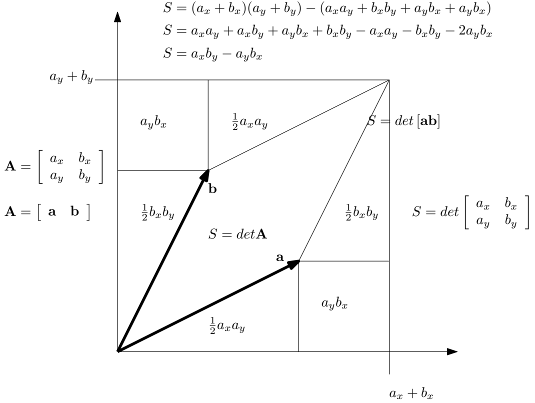
$$det\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1,*}\mathbf{C}_{1,*}^{\mathrm{T}} = A_{11}A_{22} + A_{12}(-A_{21})$$

행렬식의 기하적 의미

두 열 벡터 $\mathbf{a} = (a_x a_y)^{\mathrm{T}}$ 와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)^{\mathrm{T}}$ 를 열로 하는 행렬 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$$

이 두 벡터를 두 개의 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 행렬 $\mathbf{A}$ 의 행렬식

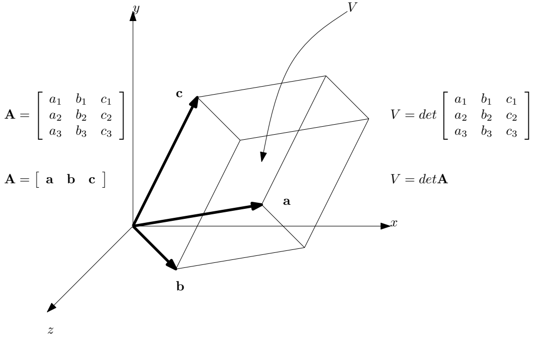


3×3 행렬의 행렬식 의미

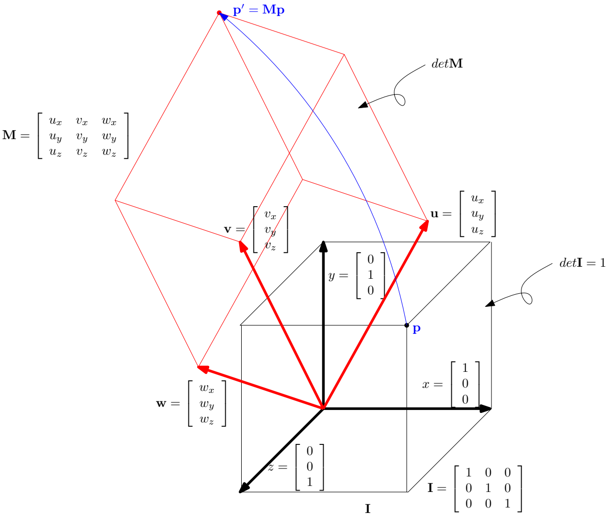
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$는 세 개의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 포함

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

이 세 개의 벡터들이 만드는 평행육면체의 크기가 세 개의 벡터들로 구성된 행렬의 행렬식



행렬과 행렬식의 기하적 의미



행렬식의 특성

몇 가지 기억해 둘 행렬식의 특성은 다음과 같다.

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

역행렬

- 역행렬은 정방행렬에만 존재
- $\mathbf{A}$의 역행렬이 존재한다면, 이 역행렬을 $\mathbf{A}^{-1}$로 표현
- 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$은 다음과 같은 조건을 만족
  - $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
  - $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

- 역행렬이 존재하는 행렬을 가역행렬(invertible matrix)
- 역행렬이 존재하지 않는 행렬은 특이행렬(singular matrix)

- 의사 역행렬(pseudo-inverse)
  - 행렬 $\mathbf{A}$가 정방행렬이 아니고 $\mathbb{R}^{m\times n}$에 속한다고 하자. 다른 어떤 행렬 $\mathbf{B}$가 $\mathbb{R}^{n\times m}$에 속하면, 두 행렬의 곱 $\mathbf{AB}$는 $\mathbb{R}^{m\times m}$에 속하는 정방행렬이 된다. 만약 $\mathbf{AB} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$이라면, $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$의 의사 역행렬(pseudo-inverse)라고 한다.

역행렬의 계산

- 역행렬의 계산은 수반행렬(adjoint matrix)를 이용하여 쉽게 정의
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 수반행렬: 여인자 C_{ij}를 성분으로 하는 행렬 $\mathbf{C}$의 전치(transpose)

$$adj\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

- 수반행렬을 행렬의 행렬식으로 나누면 역행렬이 된다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

식은 간단하지만, 여인자를 구하는 재귀호출이 매우 많은 계산을 요구