게임 수학 강의 노트 04 - 행렬

강영민

동명대학교

2015년 2학기

- 행렬의 역사
  - 1차 방정식의 풀이에 아주 오래 전부터 사용
  - 그 특성이 정확히 파악되지 않고 1800년대까지는 배열(array)이라는 이름으로 알려짐
  - 기원전 10세기에서 기원전 2세기 사이에 여러 세대에 걸쳐 쓰여진 중국의 구장산술(九章算術)에 연립 방정식을 풀기 위해 소개
  - 판별식의 개념 등장
  - 1545년에야 이탈리아 수학자 지롤라모 카르다노(Girolamo Cardano)가 그의 저서 "위대한 기술(Ars Magna)"를 통해 유럽에 전함
  - 오랜 기간 동안 많은 수학자들이 이 행렬을 다루며 다양한 성질을 발견
  - 행렬은 공간을 나누는 데에 필요한 유용한 도구
  - 공간 내의 점들을 이떤 위치에서 다른 위치로 옮겨 놓는 다양한 변환이 행렬을 이용하여 표현됨

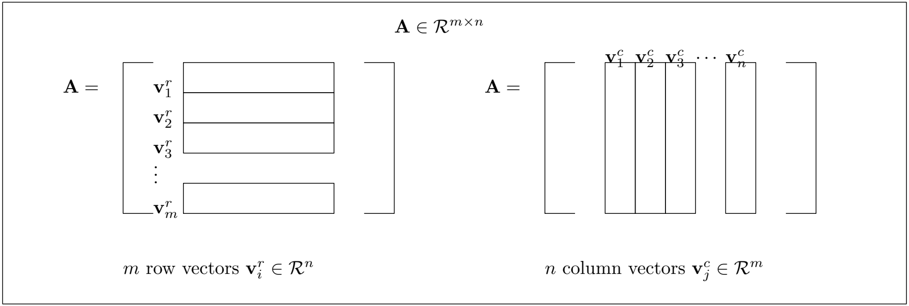
행렬이란 무엇인가

- 행렬은 2차원으로 배열된 수
- 가로 줄을 행(row), 세로 줄을 열(column)
- m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 행렬은 $\mathbf{A}$는 다음의 모양
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $m \times n$ 행렬이라고 하며 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$로 표현
- 각 행은 n 개의 원소를 가진 행벡터(row vector)
- 각 열은 m 개의 원소를 가진 열벡터(column vector)

행벡터와 열벡터

$\mathbf{A}$를 행벡터 $\mathbf{v}_i^r$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^r \\ \mathbf{v}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^r \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$를 열벡터 $\mathbf{v}_j^c$로 표현하면 다음과 같다. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^c & \mathbf{v}_2^c & \cdots & \mathbf{v}_n^c \end{bmatrix}$



정사각 행렬 - square matrix

- 정방행렬, 혹은 정사각형 행렬은 행과 열의 수가 동일한 행렬.
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 인 행렬
  - 정방행렬은 물리 문제에서 운동을 다루거나 그래픽스에서 변환을 다룰 때에 빈번히 나타남
- 다음 행렬 $\mathbf{A}$는 3×3의 정사각 행렬이다.
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

전치 행렬 - transpose

- 어떤 행렬 $\mathbf{A}$ 의 전치행렬은 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$
  - 따라서, $m \times n$ 행렬의 전치는 $n \times m$ 행렬
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- 전치행렬의 성질
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
  - $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- 그래픽스(graphics) 분야에서 매우 유용한 사용 방법은 회전 변환 행렬의 역행렬을 구할 때
- 3차원 공간의 회전 변환은 정규직교(orthonormal) 특성
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치임이 알려져 있음

대각 행렬 - diagonal matrix

- 대각성분은 어떤 행렬 $\mathbf{A}$의 i 행 j 열 성분을 a_{ij}라고 표현할 때, $i = j$인 성분
- 대각행렬은 대각성분을 제외한 다른 모든 성분의 값이 0인 행렬이다
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$
- 대각행렬을 다른 행렬과 곱했을 때의 성질
  - 어떤 3×3 대각행렬을 $\mathbf{D}$, 1,2,3 행 대각성분은 d_1, d_2, d_3
  - 다른 어떤 3×3 행렬 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{D}$의 곱
    - $\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} \\ d_2a_{21} & d_2b_{22} & d_2b_{23} \\ d_3a_{31} & d_3b_{32} & d_3b_{33} \end{bmatrix}$
    -
    - $\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13} \\ d_1a_{21} & d_2b_{22} & d_3b_{23} \\ d_1a_{31} & d_2b_{32} & d_3b_{33} \end{bmatrix}$

대각 행렬과 벡터의 곱 (1/2)

대각행렬 $\mathbf{D}$와 열벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$이 $(v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$의 곱

$$\mathbf{Dv} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 \\ d_2 v_2 \\ d_3 v_3 \end{bmatrix}$$

대각 행렬과 벡터의 곱 (2/2)

행벡터 $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$와 대각행렬의 곱

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 & d_2 v_2 & d_3 v_3 \end{bmatrix}$$

행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬의 덧셈과 뺄셈은 동일한 크기의 행렬 사이에 정의됨

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

행렬과 덧셈과 뺄셈은 동일한 행과 열에 있는 성분을 서로 더하고, 빼서 원래의 자리에 기록

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} \Rightarrow d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

행렬의 곱셈

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times x}$
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times x}$

- $\mathbf{A}$ 의 앞에 $\mathbf{B}$를 곱할 경우
  - $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{x \times m}$ 이어야 함
  - 그 결과는 $\mathbf{BA} = \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{x \times n}$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times x}$
- $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times x}$
  - $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$
  - $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

행렬 $\mathbf{A}$ 의 i 번째 행 벡터를 $\mathbf{A}_{i,*}$ 라고 하고, j 번째 열 벡터를 $\mathbf{B}_{*,j}$ 라고 하면, 위의 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$c_{ij} = \mathbf{A}_{i,*}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_{*,j} \quad (1)$$

행렬과 스칼라의 곱

행렬에 스칼라를 곱하는 연산은 해당 스칼라 값을 행렬의 모든 원소에 곱하면 된다.

$$k\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow b_{ij} = ka_{ij}$$

행렬 덧셈과 뺄셈의 연산 법칙

행렬은 다음과 같은 연산 법칙을 가진다.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + 0 = 0 + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$$

이때, 0은 $\mathbf{A}$와 같은 차원의 행렬로 모든 원소가 0인 행렬이다.

행렬 스칼라 곱의 연산 법칙

$$(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$0\mathbf{A} = 0$$

행렬 곱셈의 연산 법칙

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$
$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$
$$k\mathbf{AB} = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}k\mathbf{B}$$

$\mathbf{I}$는 항등행렬