게임 수학 강의 노트 05 - 변환

강영민

동명대학교

2016년 2학기

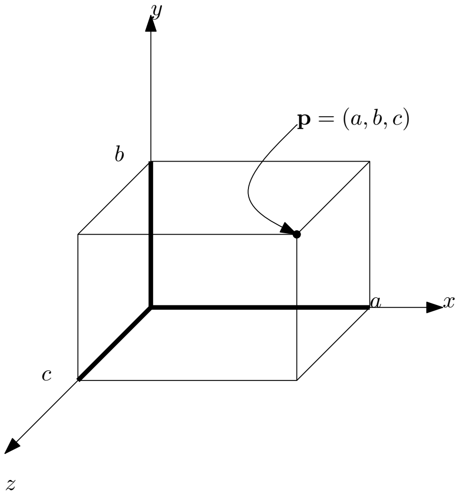
변환이란

수학적 의미에서 변환(transformation)

- 어떤 집합 S를 다른 어떤 집합 S로 대응시키는 함수
- 공간과 점, 그리고 벡터의 문제로 이해할 때, 변환이란 공간 상의 벡터나 점을 다른 벡터나 점으로 바꾸는 연산
- 변환 행렬
  - 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 $\mathbb{R}^n$에 속한다고 할 때, 이 벡터에 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 곱하면 $\mathbf{a}$와 같은 차원의 벡터 $\mathbf{b}$를 얻는다.
  - $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n})$.
  - 어떤 벡터를 동일한 차원의 다른 벡터로 옮기는 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 변환행렬(transform matrix)라고 한다.

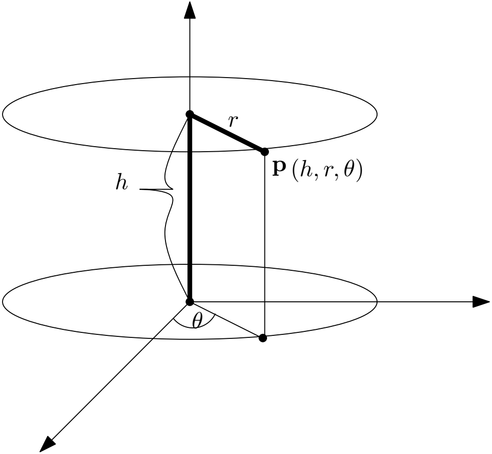
좌표계 - 직교 좌표계

- 일반적으로 가장 익숙한 좌표계
- 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)



좌표계 - 원기둥 좌표계

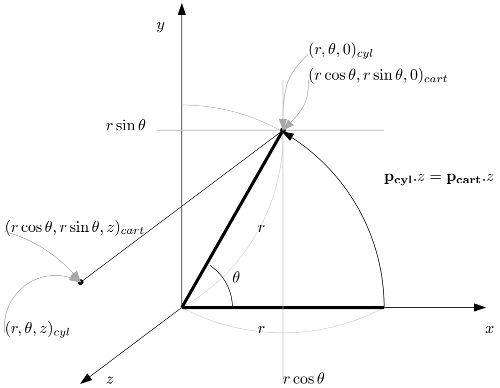
- $\mathbf{p}$는 이러한 높이 h와 반지름 r을 가진 원기둥의 윗쪽 원주에 놓임.
- 원주에서 특정한 위치는 각도 θ로 표현
- 원기둥 좌표: (r, θ, h)



원기둥 좌표를 직교 좌표로 옮기기

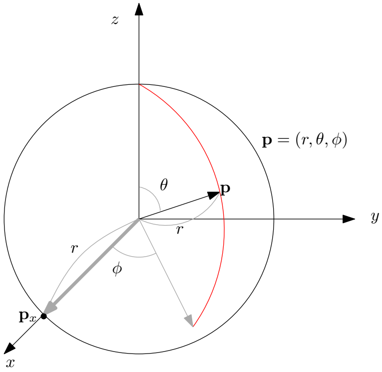
원기둥 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cyl}$, 직교 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cart}$으로 표현하면

$$(r, \theta, h)_{cyl} = (r\cos\theta, r\sin\theta, h)_{cart}$$



좌표계 - 구면 좌표계

- $\mathbf{p}$를 지나며 중심이 원점인 구면의 반지름을 r
- 반지름 r인 점 가운데 x 축 위에 있는 점을 $\mathbf{p}_x$
- $\mathbf{p}_x$을 xy 평면 위에서 $\mathbf{p}$와 같은 경도선에 놓는 각도가 ϕ
- 이를 들어 올려 점 $\mathbf{p}$를 지나도록 하는 데에 필요한 각도를 θ
- 구면 좌표 (r, θ, ϕ)



구면 좌표와 직교 좌표

구면 좌표는 일반적으로 다음과 같은 제한을 갖는다.

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

직교 좌표계의 좌표 (x, y, z)를 구면 좌표계로 옮기기

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

구면 좌표계의 좌표를 직교 좌표로 옮기기

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

무슨 좌표계를 사용할 것인가

- 공간에 존재하는 점을 다룰 때에는 어떠한 좌표계를 사용해도 무방
- 컴퓨터 그래픽스 분야에서 가장 많이 사용되는 좌표계는 직교 좌표계
- 우리는 직교 좌표계에서 변환에 대해 다룰 예정
- 직교 좌표계를 기본적인 좌표계로 삼고 변환과 관련된 행렬 연산을 살필 것

어파인(affine) 변환

게임을 구현하기 위한 3차원 그래픽스에서 흔히 사용되는 변환

- 이동변환(translation): 주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮김
- 회전변환(rotation): 2차원은 기준점, 3차원은 기준축을 중심으로 돌림
- 크기변경(scaling): 각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

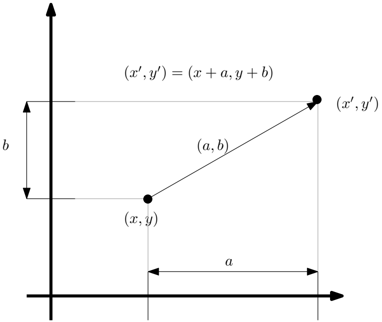
이러한 변환은 어파인 변환(affine transformation)의 일종

- 서로 연결되어 있음을 의미하는 라틴어 'affinis'에서 유래
- 직선 위의 점들을 직선을 유지한 상태로 변환하는 변환
- 직선 위에서의 점들 사이의 거리 비가 변환된 직선 위에서 그대로 유지
- 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지
- 실시간 컴퓨터 그래픽스에서는 여러 가지 효율성의 이유로 어파인 변환을 사용

이동 변환(translation)

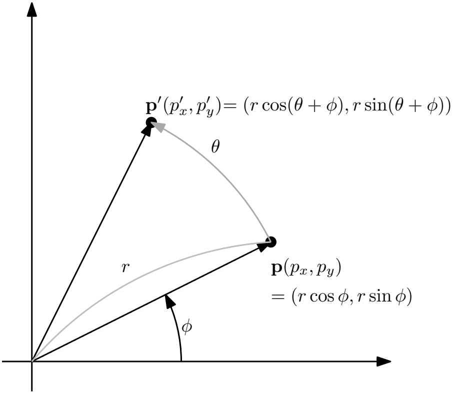
- 2차원: 좌표 (x, y)를 x 축 방향으로 a, y 축 방향으로 b 만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

- 모든 차원에 대해 어떤 벡터 $\mathbf{a}$를 변위 벡터 $\mathbf{d}$를 이용하여 $\mathbf{x}'$로 옮기는 이동 변환을 다음과 같이 벡터 더하기로 정의할 수 있음
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{d} \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$

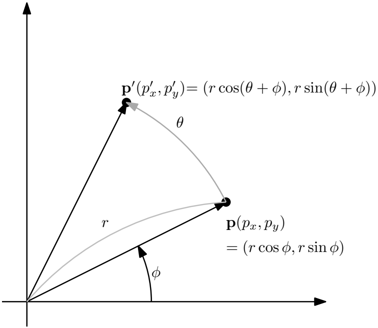


2차원 회전 변환(rotation) - 문제

- 2차원 회전의 중심: 피벗(pivot)
- 기본적인 회전: 피벗이 원점인 경우
  - $\mathbf{p}$를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전하여 놓이는 지점 $\mathbf{p}'$를 구하는 문제
  - 원래 좌표 (p_x, p_y)를 θ 만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)를 얻는 문제



2차원 회전 변환(rotation) - 좌표값에 대한 이해



- 원점에서 (p_x, p_y)로 선분: 선분 길이 r과 x축과 이루는 각도 ϕ
- $(p_x, p_y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
- 이 좌표를 θ만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)
  - $(p'_x, p'_y) = (r\cos(\theta+\phi), r\sin(\theta+\phi))$

2차원 회전 변환(rotation) - 회전결과

- ϕ를 계산하지 않고 답을 얻어야 함
- 참조할 공식
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 회전하여 얻는 좌표는 다음과 같이 표현
  - $p'_x = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$
  - $p'_y = (r\cos\phi)\sin\theta + (r\sin\phi)\cos\theta$
- 원래의 좌표 (p_x, p_y)를 이용하여 표현
  - $p'_x = p_x\cos\theta - p_y\sin\theta$
  - $p'_y = p_x\sin\theta + p_y\cos\theta$

2차원 회전 변환(rotation) - 행렬표현

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점 $\mathbf{p}$를 원점 기준으로 θ만큼 회전시켜 $\mathbf{p}'$를 얻는 변환은 회전변환 행렬 $\mathbf{R}(\theta)$을 이용하여 $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3차원 회전 - z 축 회전

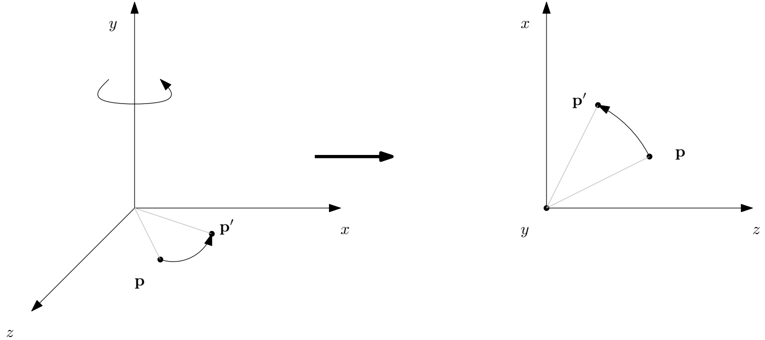
- 2차원 회전을 그대로 3차원에 적용
  - 3차원 좌표 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$을 z 기준으로 회전
- 이 변환은 2차원 변환에 z 성분만 추가
  - z 축 성분은 그대로 유지된다. $(p'_z = p_z)$
  - p_x, p_y의 값은 2차원 회전과 동일하게 변환된다.

$$\begin{aligned}
p'_x &= \cos\theta \cdot p_x - \sin\theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\
p'_y &= \sin\theta \cdot p_x + \cos\theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\
p'_z &= 0 \cdot p_x + 0 \cdot p_y + 1 \cdot p_z
\end{aligned}$$

이것은 다음과 같은 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

3차원 회전 - y 축 회전 (1/2)



- z 축은 2차원 회전의 x축에 대응
- x 축은 2차원 회전의 y축에 대응

$$\begin{array}{rcrrr} p'_z & = & \cos\theta \cdot p_z & -\sin\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y \\ p'_x & = & \sin\theta \cdot p_z & +\cos\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y \\ p'_y & = & 0 \cdot p_z & +0 \cdot p_x & +1 \cdot p_y \end{array}$$

3차원 회전 - y 축 회전 (1/2)

순서를 재배열하면 다음과 같은 식을 얻는다.

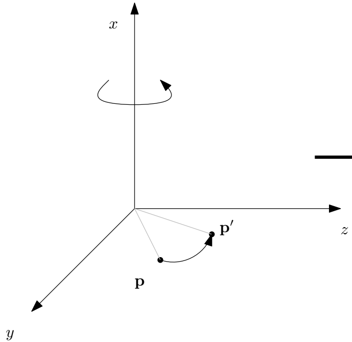
$$\begin{array}{rcrrr} p'_x & = & \cos\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & +\sin\theta \cdot p_z \\ p'_y & = & 0 \cdot p_x & +1 \cdot p_y & 0 \cdot p_z \\ p'_z & = & -\sin\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & +\cos\theta \cdot p_z \end{array}$$

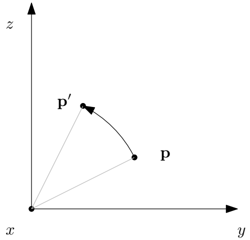
이것도 역시 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

3차원 회전 - x 축 회전 (1/2)

- 2차원 회전에서 x, y의 역할에 y와 z 축이 각각 대응





$$
\begin{array}{rcrrr}
p'_y & = & \cos\theta \cdot p_y & -\sin\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\
p'_z & = & \sin\theta \cdot p_y & +\cos\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\
p'_x & = & 0 \cdot p_y & +0 \cdot p_z & +1 \cdot p_x
\end{array}
$$

3차원 회전 - x 축 회전 (2/2)

행렬과 벡터의 곱으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

회전 행렬의 역행렬

- 회전행렬은 특별한 특징을 지님 (2차원 회전행렬을 보자)
  - 첫 열 벡터는 길이는 $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$이므로 1
  - 두 번째 열의 길이 역시 $\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$로 1
  - 즉 두 벡터 모두 단위 벡터 (정규)
  - 이 두 벡터를 서로 내적하면 $\cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta$로 0
  - 두 벡터가 서로 수직 (직교)
- 모든 벡터는 단위 벡터이고 서로 직교 = 정규직교(orthonormal)
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치(transpose)와 같음
- 3차원 회전행렬들도 정규직교임을 쉽게 확인 가능

$$\mathbf{R}_x{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

$$\mathbf{R}_y{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

$$\mathbf{R}_z{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

임의의 축에 대한 회전

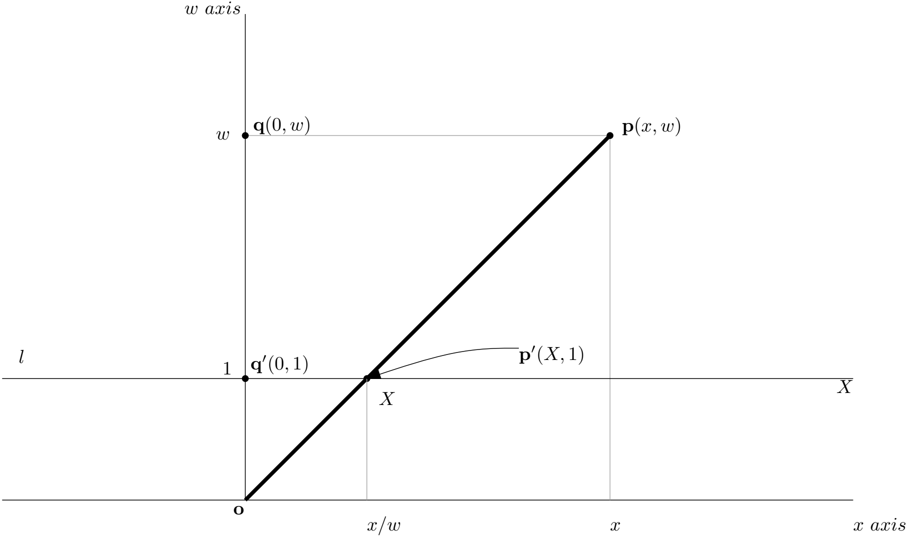
- 임의의 회전축을 기준으로 θ만큼 회전하는 변환은 다음과 같은 절차를 따라 구현할 수 있다.
  1. 회전축이 원점을 지나도록 이동변환 $\mathbf{T}$를 적용한다.
  2. 원점을 지나는 회전축이 xz 평면에 놓이도록 z축 회전 $\mathbf{R}_1$ 적용
  3. 이 회전축이 z축과 동일한 방향이 되도록 y축 회전 $\mathbf{R}_2$를 적용한다.
  4. z축을 기준으로 θ만큼 회전하도록 $\mathbf{R}_z(\theta)$를 적용한다.
  5. ${\mathbf{R}_2}^{-1}$, 즉 ${\mathbf{R}_2}^{\mathrm{T}}$를 적용한다.
  6. ${\mathbf{R}_1}^{-1}$, 즉 ${\mathbf{R}_1}^{\mathrm{T}}$를 적용한다.
  7. $\mathbf{T}^{-1}$, 즉 $-\mathbf{T}$를 적용한다.
- 벡터 더하기(이동변환)와 행렬 곱하기(회전)가 혼재
- 동차좌표계(homogeneous coordinate)을 이용
  - 이동 변환과 회전 변환 모두 4×4 행렬
  - 위의 절차를 모두 누적한 하나의 행렬로 표현 가능
- $\mathbf{R}_{pivot}(\theta) = -\mathbf{T}{\mathbf{R}_1}^{\mathrm{T}}{\mathbf{R}_2}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{T}$

동차좌표계(homogeneous coordinate)

- 사영기하학(射影幾何學, projective geometry)에서 사용되는 좌표계
- n 차원의 사영공간을 $n+1$의 좌표로 표현
- 그래픽 API나 라이브러리들은 동차좌표계를 표준적인 좌표계로 채용
  - 3차원 그래픽스에서 정의된 3차원 가상 공간 객체의 2차원 투영 이미지를 얻는 일과 유관
  - 3차원 공간의 어파인(affine) 변환들을 모두 4×4의 행렬로 표현
- 3차원 공간의 좌표를 표현하는 벡터 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$는 동차좌표계에서 $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$로 표현할 수 있음
- 보다 일반적인 형태는 마지막 숫자를 1이 아닌 다른 값게 하는 것
- 2차원: $[x, y, w]^{\mathrm{T}}$, 3차원: $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$

동차좌표계의 시각적 이해 (1/2)

동차좌표계 이해를 위해 Ammeraal이 사용한 그림



동차좌표계의 시각적 이해 (2/2)

- 두개의 축: x 축이고, 다른 하나는 w 축
  - 동차 좌표계에서 마지막 원소 w를 제외한 모든 성분은 이 x 축 값
  - 마지막 원소는 이 w 축 값
- x축 위에 있지 않는 점 $\mathbf{p}$는 중심 사영(central projection) $\mathbf{p}'$를 가짐
  - $w = 1$의 직선 l과 원점 $\mathbf{o}$에서 $\mathbf{p}$를 연결한 직선의 교차점
  - 이때 원점은 사영중심(center of projection)
- w 축과 x축을 모두 포함한 차원의 공간을 이보다 한 차원 낮은 x축 공간으로 떨어뜨리는 것
- 선분 $\overline{\mathbf{op}}$를 지나는 직선 위의 모든 점들이 이 $\mathbf{p}'$로 사영
- (x, w)에 해당하는 $\mathbf{p}'(X, 1)$ 구하기
  - 닮은 삼각형 $\mathbf{opq}$와 $\mathbf{op}'\mathbf{q}'$
  - 등비 관계를 이용하여 구한다
  - $X = \frac{X}{1} = \frac{|\mathbf{p}'\mathbf{q}'|}{|\mathbf{oq}'|}$
- 이 식은 다음과 같이 바뀐다.
- $X = \frac{X}{1} = \frac{|\mathbf{oq}'|}{|\mathbf{p}'\mathbf{q}'|} = \frac{|\mathbf{oq}|}{|\mathbf{pq}|} = \frac{x}{w}$

동차좌표계와 데카르트 좌표계의 관계

w 좌표의 의미

사영기하에서 **op**를 지나는 직선 위의 모든 점들은 (x, w) 형태의 좌표로 표현할 수 있고, 이 모든 점들은 $w = 1$인 평면으로 중심사영을 수행했을 때, w 좌표는 무의미해지면서 (x/w)의 좌표로 바뀌게 된다. 즉, 3차원 공간의 좌표를 표현하기 위해 동차좌표계를 사용한다면 $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$의 형태가 되며, 이것은 위의 그림에서 w 축을 포함한 공간이 된다. 이를 3차원 데카르트 좌표로 바꾸는 것은 중심사영이 이루어지는 $w = 1$ 평면으로 옮겨 놓는 것이고 이때의 좌표는 $[x/w, y/w, z/w]^{\mathrm{T}}$가 되는 것이다. 그리고 3차원 공간의 측면에서 보면, **op**를 지나는 직선 위의 모든 점들이 동일한 점으로 간주되는 것이다.

동차 좌표계 사용의 이점(利點)

- 3차원 좌표 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$를 동차좌표계 좌표로 바꾸는 간단한 방법은 $w = 1$ 평면에서의 좌표인 $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$
- 동차좌표계를 쓰면 좋은 점
  - 좌표와 벡터의 구분이 가능
  - $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$가 3차원 좌표라면 이 좌표로 표현되는 지점은 3차원 공간내 유일
  - 벡터로 해석된다면 그것은 수 많은 동등 벡터를 표현하게 되며, 공간 내의 특별한 지점을 가리키지 않음
  - 이 둘은 분명히 다르지만 단순한 좌표 표현 방식으로는 구분이 불가능
- 동차좌표계에서 좌표와 벡터의 구분
  - 좌표는 $w \neq 0$인 $[x, y, z, w]^{\mathrm{T}}$
  - 벡터는 $w = 0$인 $[x, y, z, 0]^{\mathrm{T}}$
  - $[x, y, z, 0]^{\mathrm{T}}$는 위치를 가진 좌표 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$가 아니라 위치가 없는 벡터 $[x, y, z]^{\mathrm{T}}$
- 또다른 잇점
  - 이동변환와 회전변환을 모두 같은 차원의 행렬로 표현

동차 좌표계에서 이동 변환

동차좌표계에서의 이동

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

행렬 표현

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

이동 변환 행렬의 역행렬

이제 이동변환을 행렬로 표현할 수 있게 되었다. 변위 벡터 $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$ 만큼의 이동을 수행하는 변환행렬을 $\mathbf{T_d}$라고 하면 이동 변환은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{p}, \quad \mathbf{T_d} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

이동변환 행렬 $\mathbf{T_d}$의 역행렬은 어떻게 될까? 역행렬은 이 행렬이 일으킨 변환을 원래대로 되돌려 놓는 것이므로 $\mathbf{T_{-d}}$가 됨을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동차좌표계에서의 회전 행렬

- 3차원 공간에서 정의되었던 회전 변환을 $\mathbf{R}_{33}$
- $\mathbb{R}^{4\times4}$에 속하는 동차좌표계 회전 행렬은 $\mathbf{R}_{44}$
- 원소가 모두 0인 3차원 열벡터를 $\mathbf{O}_3^{col}$, 행벡터를 $\mathbf{O}_3^{row}$

$$\mathbf{R}_{44} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{44}^{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{44}^{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{44}^{z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

복합변환

좌표를 $\mathbf{R}_{44}$를 이용하여 회전하고, 이를 $\mathbf{T_d}$ 만큼 이동하는 변환

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{R}_{44}\mathbf{p}$$

두 변환을 모두 수행하는 하나의 행렬 구할 수 있음

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}
\end{aligned}$$

- 행렬의 역행렬은?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

복합변환

좌표를 $\mathbf{R}_{44}$를 이용하여 회전하고, 이를 $\mathbf{T_d}$ 만큼 이동하는 변환

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T_d}\mathbf{R}_{44}\mathbf{p}$$

두 변환을 모두 수행하는 하나의 행렬 구할 수 있음

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}\end{aligned}$$

- 행렬의 역행렬은?

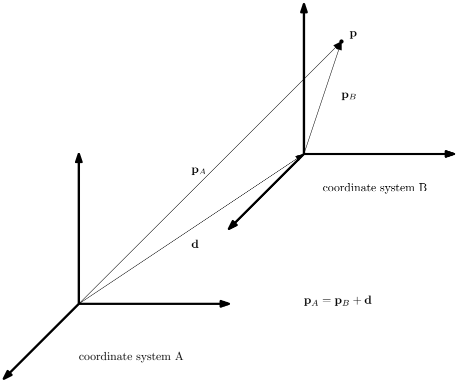
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{O}_3^{col} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

좌표계의 변환

- 어떤 점이 좌표계 A에 의해 $\mathbf{p}_A$라 표현된다고 가정
- 다른 좌표계 B의 입장에서 보면 다른 좌표 $\mathbf{p}_B$
- 이렇게 좌표계가 달라질 때 바뀐 좌표계에 따라 새로운 좌표를 계산하는 일은 그래픽스에서 매우 빈번히 나타나는 작업
  - 가상 공간 내의 모든 객체의 위치를 하나의 기준으로 정의하는 데에 필요한 전역좌표계(global coordinate system)과 개별 객체 내에 정의된 지역좌표계(local coordinate system)

좌표계의 이동

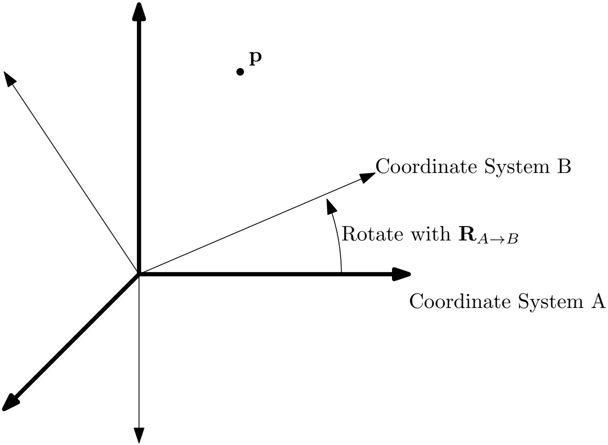
$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B + \mathbf{d}$



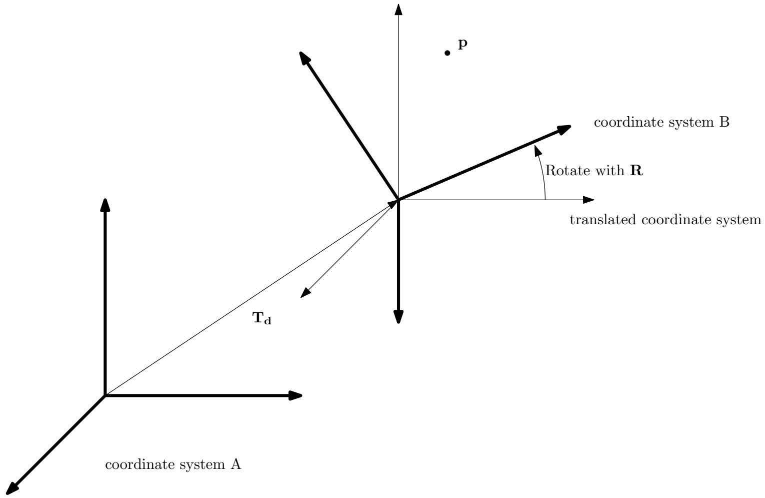
$$\mathbf{T}_\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_A = \mathbf{T}_\mathbf{d}\mathbf{p}_B, \quad \mathbf{p}_B = \mathbf{T}_\mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_A$$

좌표계의 회전

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_A &= \mathbf{R}_{A\to B}\mathbf{p}_B \\
\mathbf{p}_B &= \mathbf{R}_{A\to B}^{-1}\mathbf{p}_A &= \mathbf{R}_{A\to B}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_A
\end{aligned}
$$



회전과 이동이 함께 이뤄진 좌표계 변환 (1/2)



회전과 이동이 함께 이뤄진 좌표계 변환 (1/2)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & 0 \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\mathbf{d}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33} & \mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_B \\ \mathbf{p}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{33}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ \mathbf{O}_3^{row} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_A \end{aligned}$$