

물리기반 모델링 - Part 1

물리기반 모델링의 기초

동명대학교 게임공학과
강영민

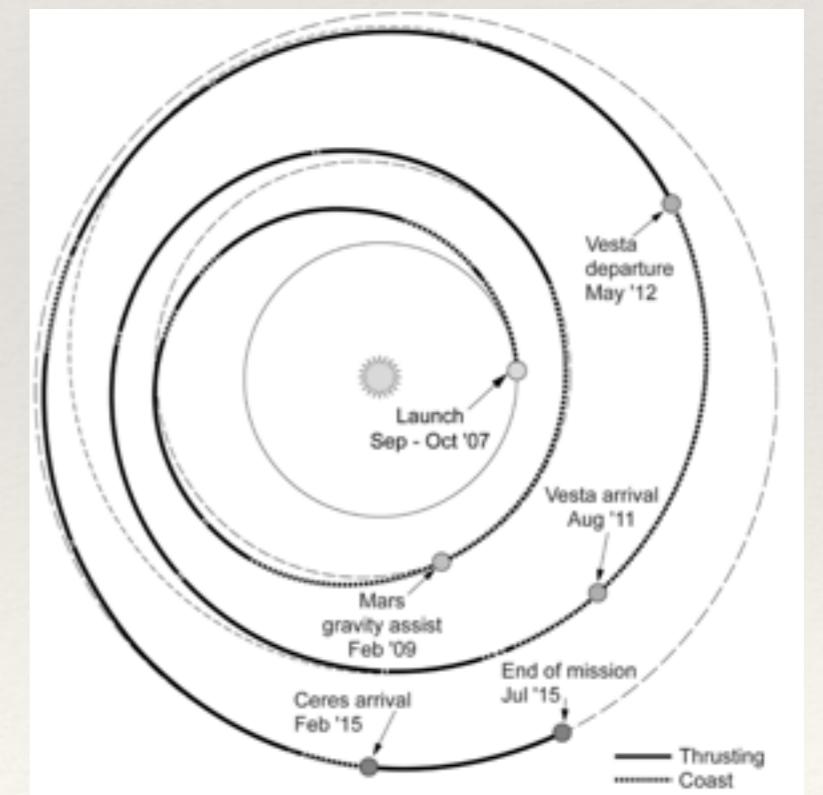
물리기반 모델링

1.1 질량, 힘, 시간

동명대학교 게임공학과
강영민

물리기반 모델링은 왜 하나?

- ❖ 애니메이션/시뮬레이션
 - ❖ 사실적인 움직임이 필요
- ❖ 애니메이션
 - ❖ 시간에 따른 상태의 변화
 - ❖ 상태 - 위치, 속도...
 - ❖ 물리의 중요한 연구 대상
- ❖ 사실적인 움직임
 - ❖ 물리에 의해 결정됨



운동에 대한 연구

- ❖ 뉴턴
 - ❖ 고전 물리에서 운동에 대한 이론을 정립
 - ❖ 프린키피아 (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)
- ❖ 뉴턴의 운동법칙
 - ❖ 1법칙: 일정한 운동을 하는 객체는 외부의 힘이 가해지기 전에는 그 운동을 유지하려고 한다. (관성)
 - ❖ 2법칙: $F=ma$.
 - ❖ 3법칙: 모든 작용에는 같은 크기의 반대방향으로 반작용이 있다.

질량

- ❖ 질량
 - ❖ 힘에 의한 가속에 저항하는 속성
 - ❖ 누적된 밀도 (kg/m^3)
 - ❖ 질량 = 밀도의 적분

$$m = \int \rho dV$$

질량 중심

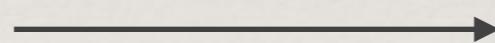
$$x_c = \frac{\int x_0 dm}{m}$$

$$y_c = \frac{\int y_0 dm}{m}$$

$$z_c = \frac{\int z_0 dm}{m}$$

❖ 이론

❖ 계산



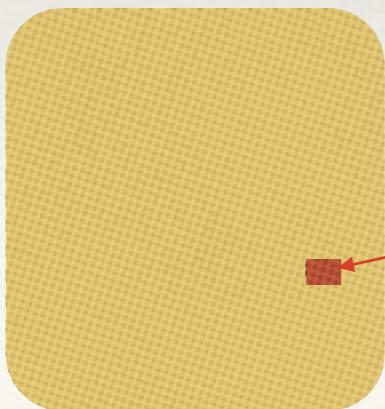
$$c_g = \frac{\sum (c_{g_i} m_i)}{m}$$

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

$$z_c = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

V



dm at (x_0, y_0, z_0)

뉴턴의 운동 제2법칙

❖ 힘 = 질량 x 가속

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

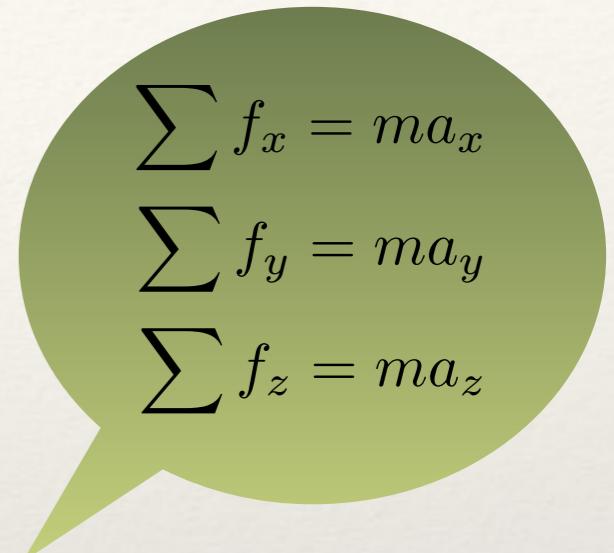
❖ 총 힘의 합 \mathbf{f}_{net}

❖ 가해진 모든 힘의 합

❖ 가속은 힘의 총합에 의해 결정된다

$$\mathbf{f}_{net} = \sum \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}_{net}}{m}$$



선운동량과 미분

- ❖ 선운동량: \mathbf{G}
 - ❖ 질량 \times 속도
 - ❖ $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$
- ❖ 선운동량을 시간에 대해 미분하면

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

- ❖ 결과는 힘

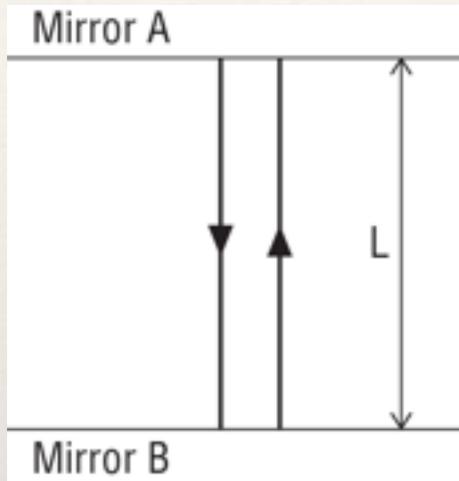
$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum \mathbf{f}$$

시간

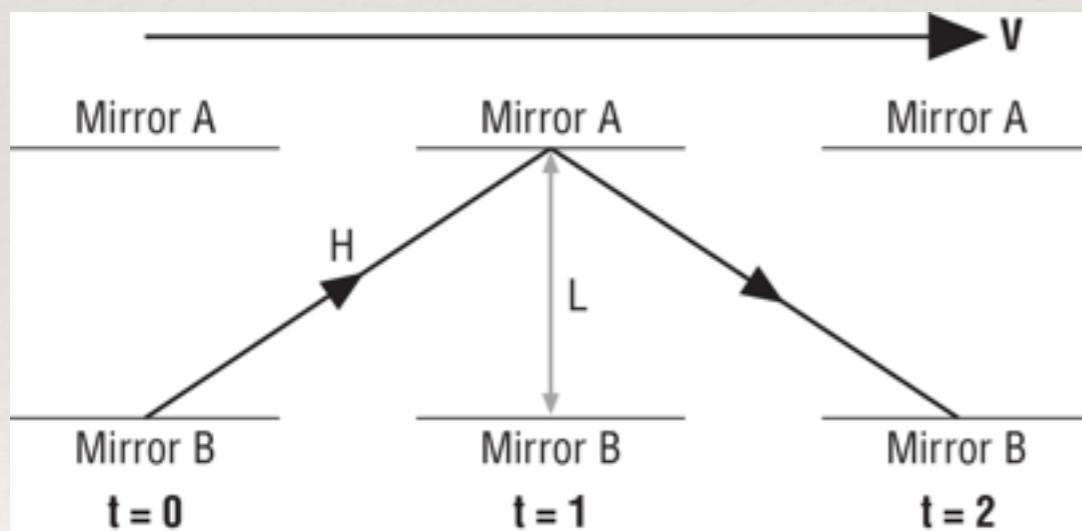
- ❖ 고전 물리
 - ❖ 시간은 불변
- ❖ 현대 물리
 - ❖ 시간은 가변적
 - ❖ 빛의 속도는 상수: c
 - ❖ $c = 299,792,458 \text{ m/s}$

상대론적 시간

수업 시간에 사용하지는 않을 것이지만 재미로 다뤄보는 상대론적 시간



$$c = 2L/\Delta t$$



속도 v 로 이동하는 우주선에서 빛의 이동

우주선에서

$$c = 2L/\Delta t_s$$

지구에서



빛의 속도 c 가 상수라면
두 공간의 시간은 서로 달라야!

$$c = 2H/\Delta t_e$$

시간 확장

- ❖ 간단한 기하

$$H^2 = L^2 + \left(\frac{v\Delta t_e}{2} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c\Delta t_e}{2} \right)^2 = L^2 + \left(\frac{v\Delta t_e}{2} \right)^2$$

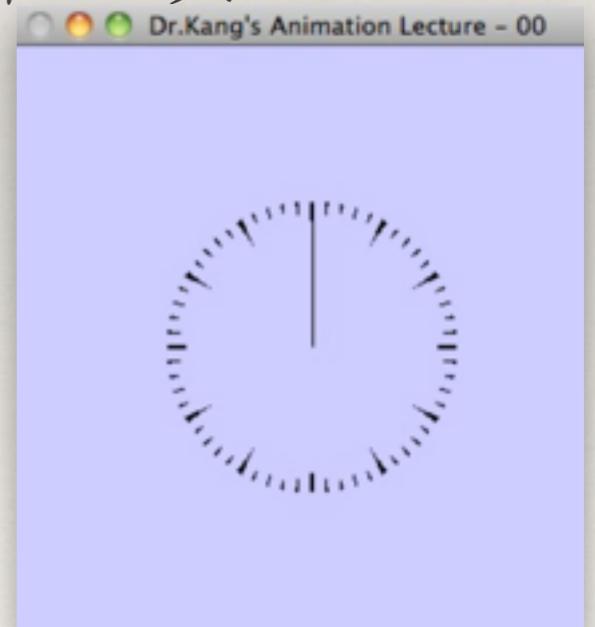
- ❖ 시간 확장의 계산

$$\begin{aligned} 4L^2 &= c^2 \Delta t_e^2 - v^2 \Delta t_e^2 \\ 4L^2 &= (c^2 - v^2) \Delta t_e^2 \\ \frac{4L^2}{c^2} &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t_e^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{2L}{c} &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_e \\ \Delta t &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_e \end{aligned}$$

$$\Delta t_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t$$

시간과 애니메이션

- ❖ 애니메이션
 - ❖ 시간에 따른 변화
 - ❖ 컴퓨터 애니메이션
 - ❖ 시간에 대해 적절한 물리적 상태를 계산하는 것
 - ❖ 시간을 측정해야만 애니메이션이 가능
 - ❖ 시간 측정 프로그램이 필요



Stop Watch (header)

```
#ifndef _STOPWATCH_YMKANG_H
#define _STOPWATCH_YMKANG_H

#ifdef WIN32 // Windows system specific
#include <windows.h>
#else // Unix based system specific
#include <sys/time.h>
#endif

class StopWatch {
#ifdef WIN32
    LARGE_INTEGER frequency;           // ticks per second
    LARGE_INTEGER startCount;         //
    LARGE_INTEGER endCount;           //
#else
    timeval startCount;              //
    timeval endCount;                //
#endif
    double startTimeInMicroSec;
    double endTimeInMicroSec;
public:
    StopWatch();
    void start();                    // start StopWatch and record time to "startCount"
    void stop();                     // stop StopWatch and record time to "endCount"
    double getElapsedTime();         // return the elapsed time at the last stop since the last start (microsec)
};

#endif
```

Stop Watch (implementation)

```
/*
 *  StopWatch.cpp
 *  Young-Min Kang
 *  Tongmyong University
 *
 */

#include "StopWatch.h"

StopWatch::StopWatch() {
#ifdef WIN32
    QueryPerformanceFrequency(&frequency);
    startCount.QuadPart = 0;
    endCount.QuadPart = 0;
#else
    startCount.tv_sec = startCount.tv_usec = 0;
    endCount.tv_sec = endCount.tv_usec = 0;
#endif
    startTimeInMicroSec = endTimeInMicroSec = 0.0;
}

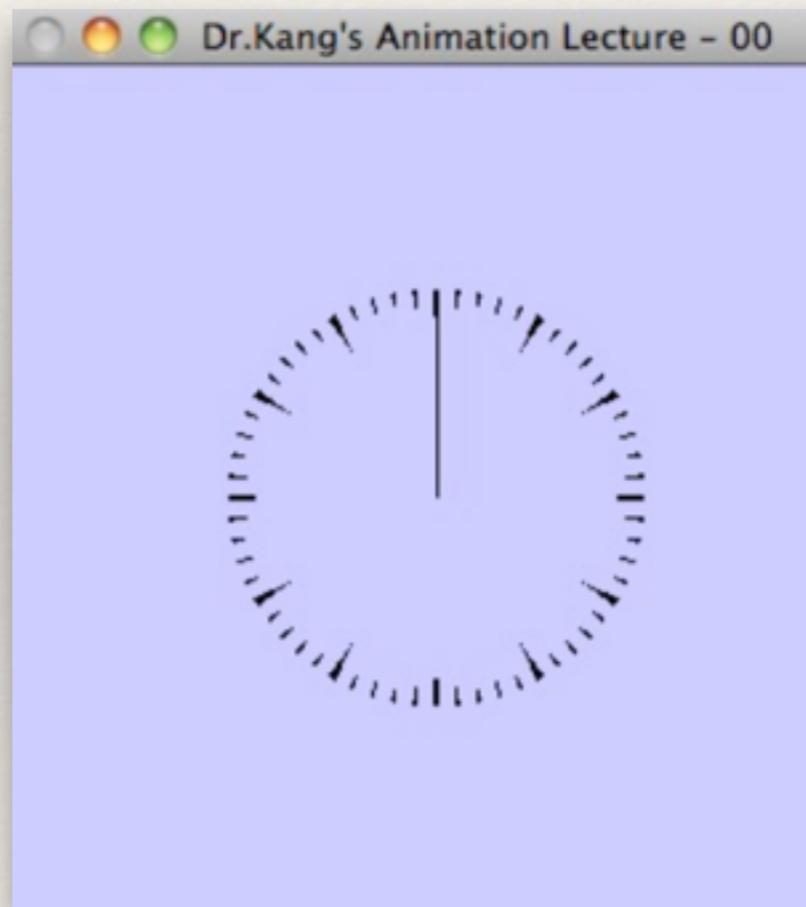
void StopWatch::start() {
#ifdef WIN32
    QueryPerformanceCounter(&startCount);
#else
    gettimeofday(&startCount, NULL);
#endif
}

void StopWatch::stop() {
#ifdef WIN32
    QueryPerformanceCounter(&endCount);
#else
    gettimeofday(&endCount, NULL);
#endif
}

double StopWatch::getElapsedTime(){
#ifdef WIN32
    startTimeInMicroSec = startCount.QuadPart * (1000000.0 / frequency.QuadPart);
    endTimeInMicroSec = endCount.QuadPart * (1000000.0 / frequency.QuadPart);
#else
    startTimeInMicroSec = (startCount.tv_sec * 1000000.0) + startCount.tv_usec;
    endTimeInMicroSec = (endCount.tv_sec * 1000000.0) + endCount.tv_usec;
#endif
    return endTimeInMicroSec - startTimeInMicroSec;
}
```

시간 측정 결과 가시화

- ❖ 자신의 시계를 구현해 보라.



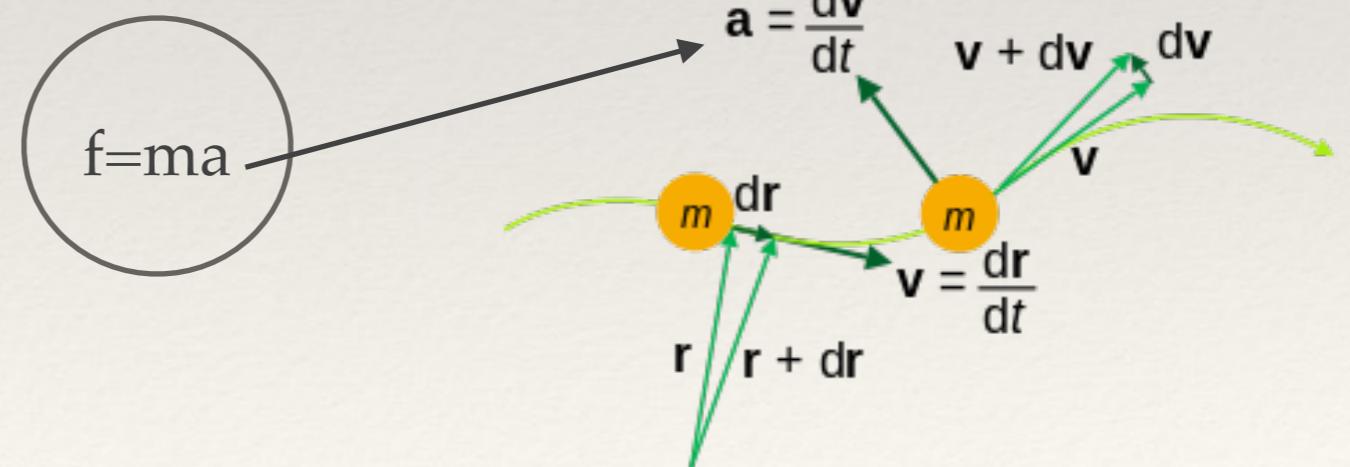
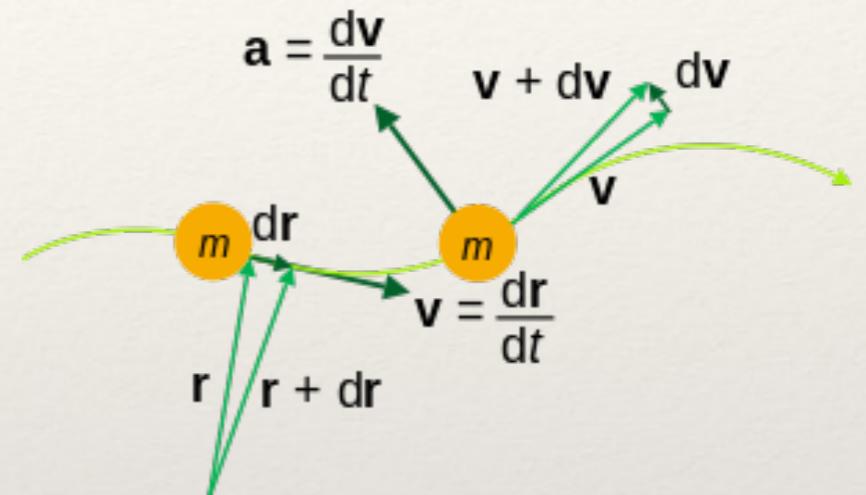
물리기반 모델링

1.2 운동학

동명대학교
강영민

운동학

- ❖ 운동학과 동역학
 - ❖ 운동학
 - ❖ 힘이 고려되지 않음
 - ❖ 위치, 속도, 가속이 시간의 함수로 다뤄짐
 - ❖ $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$
 - ❖ 동역학
 - ❖ 힘이 가장 중요한 역할
 - ❖ 현재 상태의 힘 $f(t)$ 을 계산
 - ❖ 가속 계산 $a(t) = f(t)/m$
 - ❖ 속도 갱신 $v(t+dt) += a(t)dt$
 - ❖ 위치 갱식 $x(t+dt) += v(t+dt)dt$



정역학, 운동학, 동역학, 역학

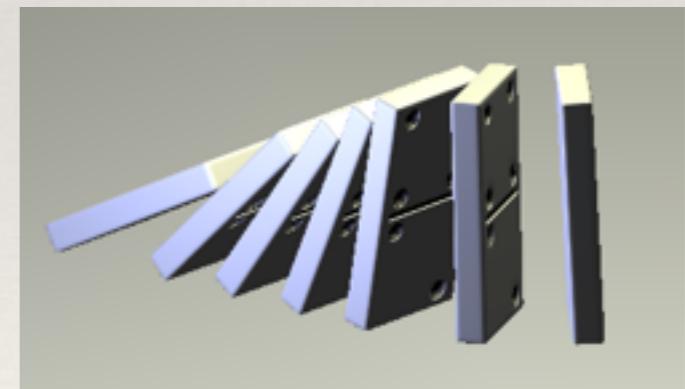
- ❖ 정역학(statics)
 - ❖ 평형 상태와 힘의 관계를 연구
- ❖ 동역학(kinetics)
 - ❖ 운동과 힘의 관계를 연구
- ❖ 운동학(kinematics)
 - ❖ 관찰된 동작을 이 동작을 유발하는 힘에 대한 고려 없이 연구

classical mechanics

- ❖ 역학(dynamics)
 - ❖ 정역학 + 동역학

입자와 강체

- ❖ 입자
 - ❖ 질량을 가진 아주 아주 작은 객체
 - ❖ 부피는 무시할 수 있음
 - ❖ 예: 로켓 탄도 분석
 - ❖ 로켓의 부피는 무시할 수 있음
 - ❖ 로켓도 입자로 간주할 수 있음
- ❖ 강체 (이상적인 고체)
 - ❖ 질량과 부피를 가진 객체
 - ❖ 어떤 경우에도 모양이 변하지 않음
 - ❖ 강체의 유효한 애니메이션 = 회전과 이동



속도

- ❖ 속도(velocity)
 - ❖ 벡터
 - ❖ 속력(speed): 속도의 크기
 - ❖ 속도 = (속력, 방향)
 - ❖ 속도의 방향
 - ❖ 이동하는 방향
 - ❖ 속도의 크기
 - ❖ 시간에 대해 이동하는 거리의 비

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

ratio of displacement to time interval

순간 속도

- ❖ 시간은 흐른 시간에 대한 이동의 비
 - ❖ 시간 간격을 줄이면...
 - ❖ 측정하는 순간에 대해 더 정확한 속도를 얻게 됨
 - ❖ 시간 간격이 0에 접근할 때 (= 위치를 시간에 대해 미분)
 - ❖ 이를 순간 속도라고 함

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

변위(displacement)

- ❖ 속도의 적분

$$\int \mathbf{v} dt = \int d\mathbf{s}$$

- ❖ t_1 에서 t_2 시간 간격 동안의 적분

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} d\mathbf{s}$$

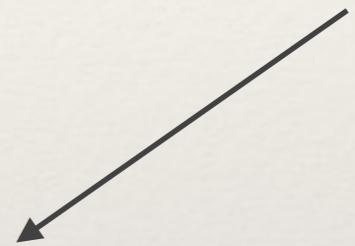
- ❖ 해당 시간 동안 이루어지는 이동량

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \mathbf{s}(t_2) - \mathbf{s}(t_1) = \Delta \mathbf{s}$$

- ❖ 만약 속도를 안다면,

- ❖ 미래에 이 입자가 어디에 있을지를 알 수 있음

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$



$$\mathbf{v} dt = d\mathbf{s}$$

가속

- ❖ 평균 가속

- ❖ 주어진 시간 간격에 대해 변화한 속도의 비

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$$

- ❖ 순간 가속도

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t = d\mathbf{v} / dt$$

- ❖ 가속도의 적분

$$\mathbf{a} dt = d\mathbf{v}$$

- ❖ 속도의 변화

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a} dt = \int_{\mathbf{v}(t_1)}^{\mathbf{v}(t_2)} d\mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$$

등가속 운동

- ❖ 운동학의 단순한 문제
 - ❖ 등가속운동의 예: 중력
 - ❖ 중력 가속도
 - ❖ 크기: 9.81 m/s^2
 - ❖ 방향: 아래쪽 $(0, -1, 0)$
- ❖ 가속도가 상수이므로 쉽게 적분할 수 있다.
 - ❖ 이 적분을 통해
 - ❖ 매 순간 속도의 변화를 알 수 있으며,
 - ❖ 매 순간 속도를 계산할 수 있다.

중력 가속 문제

- ❖ 중력 가속도: g
 - ❖ 속도의 변화와 가속의 적분 사의 관계

$$\int_{\mathbf{v}(t_1)}^{\mathbf{v}(t_2)} d\mathbf{v} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{g} dt$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{g}(t_2 - t_1)$$

- ❖ t_1 에서의 상태를 안다면
- ❖ 쉽게 t_2 에서의 상태를 알 수 있다.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{g}t_2 - \mathbf{g}t_1 + \mathbf{v}_1$$

- ❖ $t_1=0^\circ$ 이고 $t_2=t$ 라면...

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{g}t$$

변위에 대한 함수로의 속도

- ❖ 또 다른 미분 방정식

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \mathbf{a}$$

$\mathbf{v} d\mathbf{v} = \mathbf{a} ds$

- ❖ 적분...

$$\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} \mathbf{a} d\mathbf{s}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 |_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} = \mathbf{a} \mathbf{s} |_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} = \mathbf{g} \mathbf{s} |_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2}$$

- ❖ 속도와 변위 사이의 관계

$$\frac{1}{2} (\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2) = \mathbf{g}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)$$

$$\mathbf{v}_2^2 = 2\mathbf{g}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) + \mathbf{v}_1^2$$

위치

- ❖ 속도와 변위

$$\mathbf{v}dt = d\mathbf{s}$$

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{g}t)dt = d\mathbf{s}$$

- ❖ 적분

$$\int_0^t (\mathbf{v}_1 + \mathbf{g}t)dt = \int_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} d\mathbf{s}$$

$$v_1 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$$

- ❖ 시간 t에서의 위치

$$\mathbf{s}_2 = v_1 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{s}_1$$

운동학 시뮬레이션

```
#include "KinematicsSimulator.h"

CKinematicSimulator::CKinematicSimulator() : CSimulator() {}

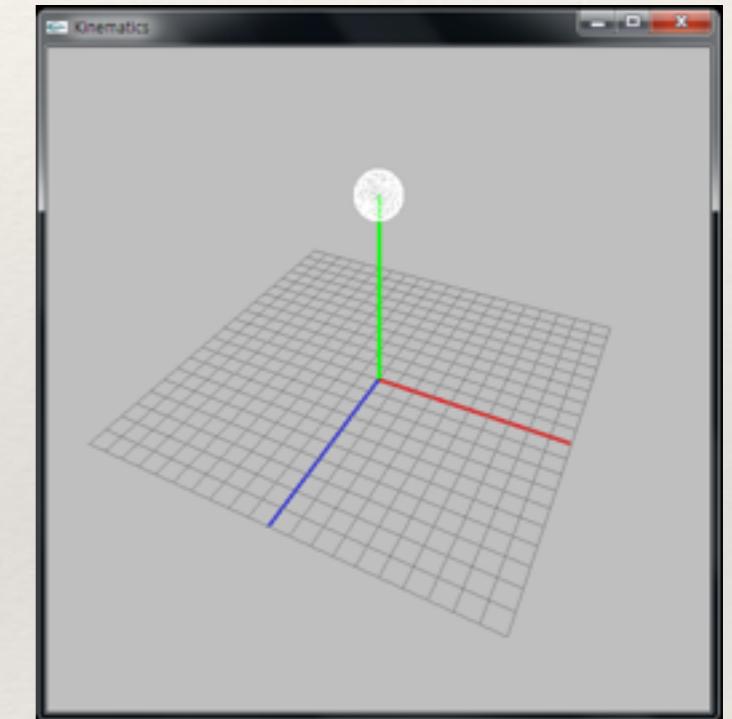
void CKinematicSimulator::init() {
    initialLoc.set(0,1,0);
    initialVel.set(0,3,0);
    gravity.set(0.0, -9.8, 0.0);
    currentLoc = initialLoc;
    particle.setPosition(currentLoc[0], currentLoc[1], currentLoc[2]);
    particle.setRadius(0.1);
}

void CKinematicSimulator::doBeforeSimulation(double dt, double currentTime) {}

void CKinematicSimulator::doSimulation(double dt, double currentTime) {
    currentLoc = initialLoc
        + currentTime*initialVel
        + (0.5 * currentTime * currentTime) * gravity ;
    particle.setPosition(currentLoc[0], currentLoc[1], currentLoc[2]);
    particle.drawWithGL();
}

void CKinematicSimulator::doAfterSimulation(double dt, double currentTime) {}

}
```



운동학을 통한 입자 폭발 효과

❖ KinematicSimulator.cpp

```
#include "KinematicsSimulator.h"

CKinematicSimulator::CKinematicSimulator() : CSimulator() {}
void CKinematicSimulator::init() {

    for(int i=0;i<NUMPARTS;i++)particle[i].randomInit();
}

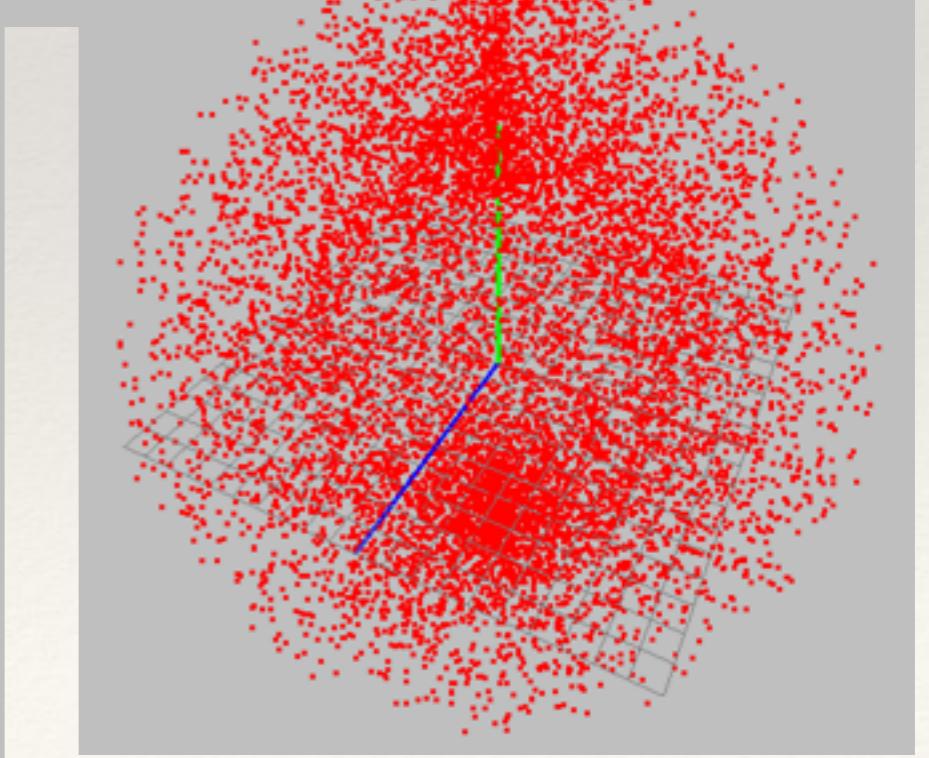
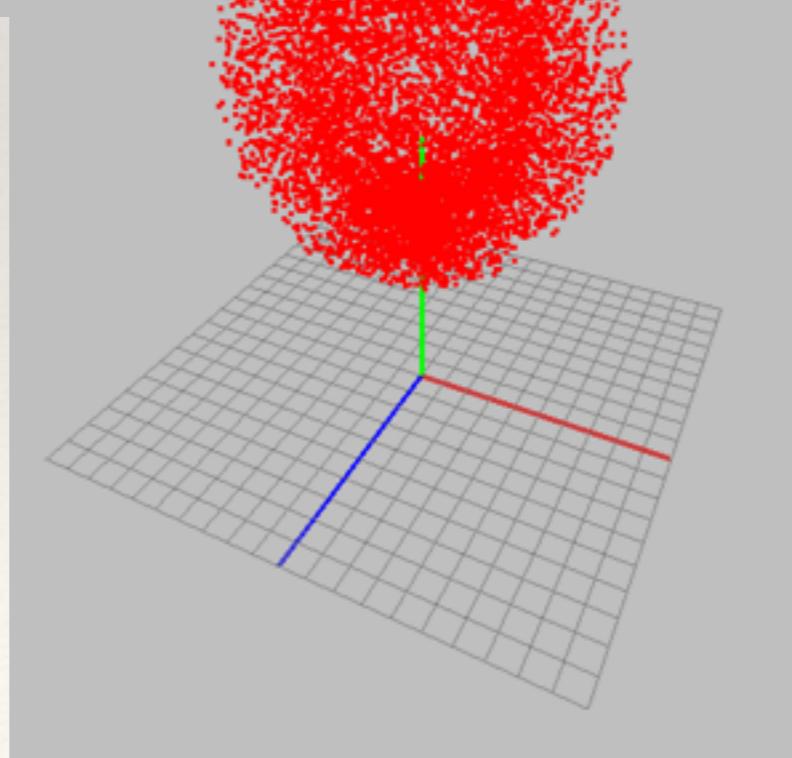
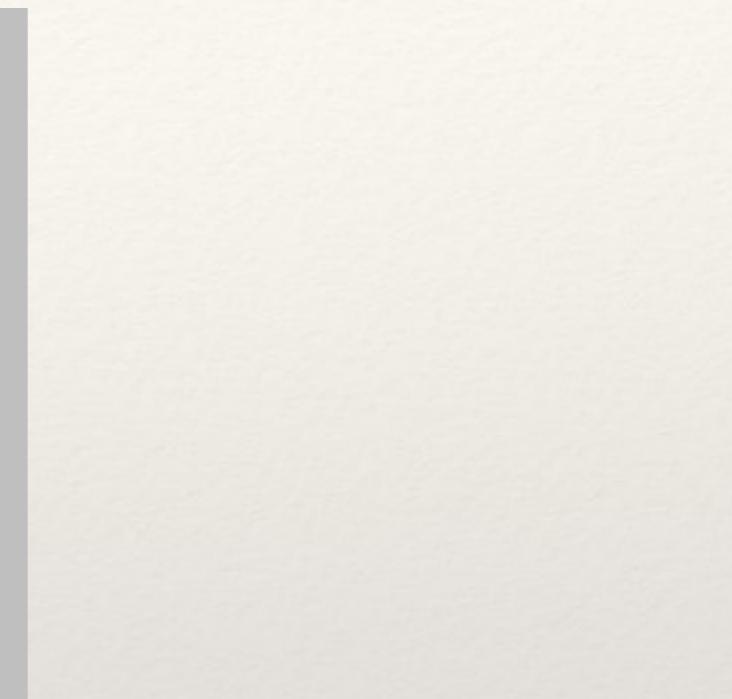
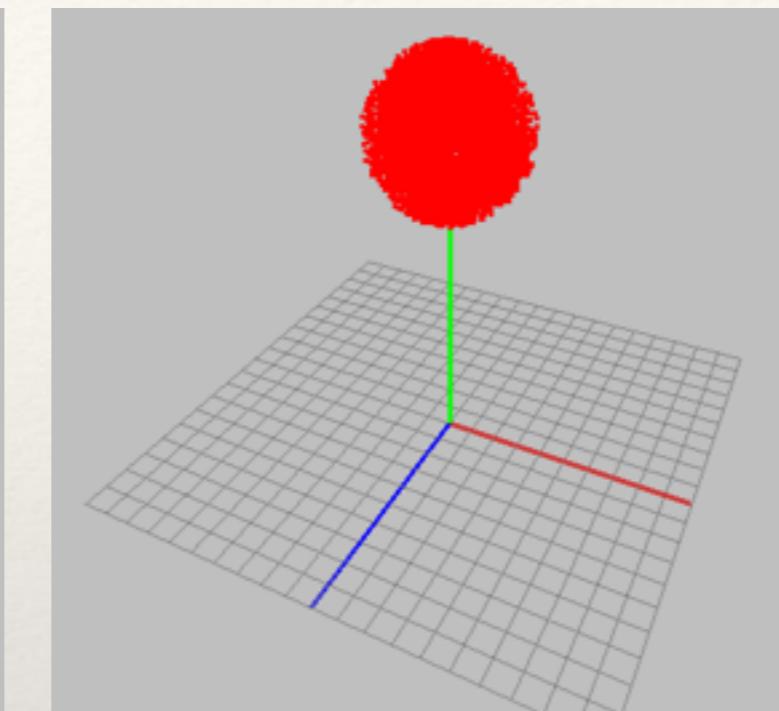
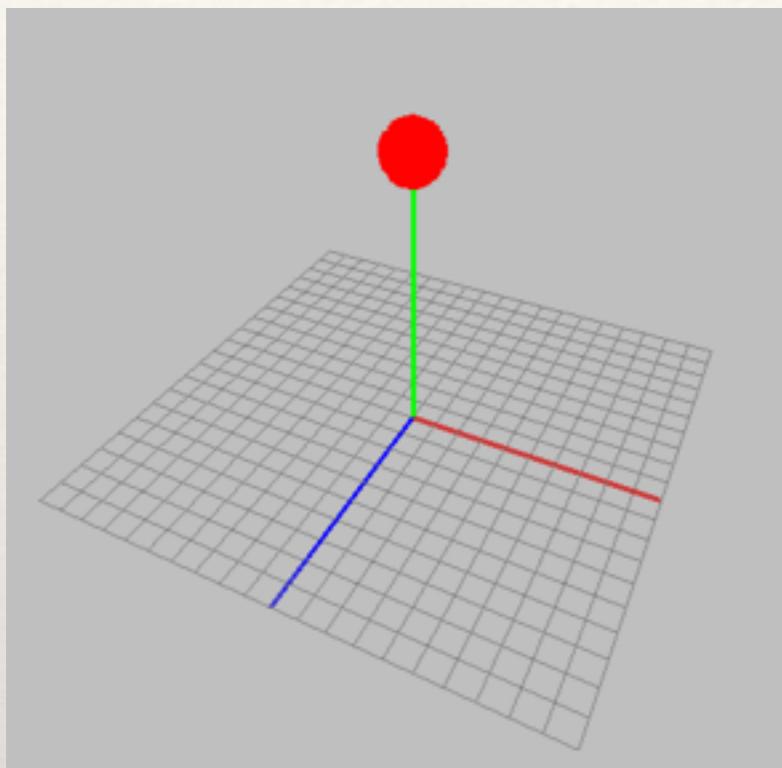
void CKinematicSimulator::doBeforeSimulation(double dt, double currentTime) { }
void CKinematicSimulator::doSimulation(double dt, double currentTime) {
    for(int i=0;i<NUMPARTS;i++){
        particle[i].simulate(dt, currentTime);
        particle[i].drawWithGL(POINT_DRAW);
    }
}
void CKinematicSimulator::doAfterSimulation(double dt, double currentTime) { }
```

운동학을 이용한 입자 폭발 효과

❖ Particle.cpp

```
void CParticle::randomInit() {
    double speed = rand()%10000 / 10000.0 + 1.0;
    double theta = 2.0*3.141592 * (rand()%10000 / 10000.0);
    double phi = 2.0*3.141592 * (rand()%10000 / 10000.0);
    double vx,vy,vz; // spherical coord to cartesian coord
    vy = speed*cos(phi)+2.0;
    vx = speed*cos(theta)*sin(phi);
    vz = speed*sin(theta)*sin(phi);
    initialLoc.set(0,1,0);
    initialVel.set(vx, vy, vz);
    gravity.set(0.0, -9.8, 0.0);
    radius = 0.01;
    currentLoc = initialLoc;
}
void CParticle::simulate(double dt, double et) {
    currentLoc = initialLoc + et*initialVel + (0.5 * et * et) * gravity ;
    setPosition(currentLoc[0], currentLoc[1], currentLoc[2]);
}
```

결과



물리기반모델링

1.3 역학과 수치적분

동명대학교
강영민

역학

- ❖ 역학
 - ❖ 힘에 기반하여 운동을 이해
 - ❖ 중요한 공식 (뉴턴의 제2법칙)
 - ❖ $f = ma$
 - ❖ 강체는.... 회전힘 = 회전질량*회전가속

$$\tau = I\dot{\omega}$$

운동방정식의 적분

- ❖ 뉴턴의 운동 제2법칙

- ❖ $f = ma$

- ❖ 다시 말하면...

$$f = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

- ❖ $d\mathbf{v} = ?$

$$\frac{fdt}{m} = d\mathbf{v}$$



$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathbf{f} dt}{m} = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$

힘이 (이 시간 동안) 상수일 경우

$$\frac{\mathbf{f}}{m}(t_2 - t_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

$$\frac{\mathbf{f}}{m}\Delta t = \Delta \mathbf{v}$$

초기 조건 문제

- ❖ 초기 조건
 - ❖ $x(t), v(t)$
 - ❖ 시간 t 에서의 위치와 속도
- ❖ 문제
 - ❖ 조금의 시간 dt 가 흐른 뒤를 예측
 - ❖ 예측의 대상 위치 $x(t+dt)$ 와 속도 $v(t+dt)$ 를 구하기
- ❖ $x(t+dt), v(t+dt)$ 를 초기 조건으로 예측을 반복

속도의 갱신

❖ 속도의 초기 조건

$$\diamond v_1 = v(t)$$

❖ 찾아야 하는 속도

$$\diamond v_2 = v(t+dt)$$

❖ 다음 프레임($t+dt$)에서의 속도

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t$$

❖ 혹은

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \Delta t$$

$$\frac{f}{m}(t_2 - t_1) = v_2 - v_1$$

$$\frac{f}{m} \Delta t = \Delta v$$

위치의 갱신

- ❖ 속도와 위치

$$\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$$

$$\mathbf{v}dt = d\mathbf{s}$$

- ❖ 수치 적분

$$\mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t = \Delta\mathbf{s}$$

- ❖ 시간 t 에서 가해지는 힘 혹은 가속도를 알 수 있다면
 - ❖ 시간 $t+dt$ 에서의 위치와 속도를 추정할 수 있다.

실시간 시뮬레이션

- ❖ 힘을 계산한다: f
- ❖ 가속도를 계산한다: $a = f/m$
- ❖ 정해진 시간 간격이 흐른 뒤의 속도를 계산한다.
 - ❖ 오일러 적분

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}\Delta t$$

- ❖ 시간 간격이 흐른 뒤의 위치도 계산한다.
 - ❖ 오일러 적분

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t$$

시뮬레이션 코드 - main.cpp

```
void keyboardFunction(unsigned char key, int x, int y) {
    if (key == 27) exit(0);
    switch (key) {
        case 's':
            if(!myWatch.bRunning()) { Simulator->start(); myWatch.start(); }
            else { myWatch.stop(); Simulator->stop(); }
            break;
        case 'p':
            myWatch.pause(); Simulator->pause();
            break;
        case 'r':
            myWatch.resume(); Simulator->resume();
        default:
            break;
    }
}

void displayFunction(void) {
    ...
    // check DT (in microsecond) from StopWatch and store it to "deltaTime" (in seconds)
    deltaTime = myWatch.checkAndComputeDT() / 1000000.0;
    currentTime = myWatch.getTotalElapsedTime() / 1000000.0;
    Simulator->actions(deltaTime, currentTime);
    glutSwapBuffers();
}
```

시뮬레이션 코드 - Simulator.cpp

```
#include "Simulator.h"
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
// Constructor
CSimulator::CSimulator(): bRunning(false) { }
CSimulator::~CSimulator() { }

void CSimulator::actions(double dt, double currentTime) {
    if(bRunning) {
        doBeforeSimulation(dt, currentTime);
        doSimulation(dt, currentTime);
        doAfterSimulation(dt, currentTime);
    }
    visualize();
}
// Control Event Handlers
void CSimulator::start() {
    this->init();
    bRunning = true;
}
void CSimulator::stop() {
    bRunning = false;
    this->clean();
}
void CSimulator::pause() {}
void CSimulator::resume() {}
```

시뮬레이션 코드 - DynamicSimulator.cpp

```
#include "DynamicSimulator.h"

CDynamicSimulator::CDynamicSimulator() : CSimulator() {}

void CDynamicSimulator::init() {
    for(int i=0;i<NUMPARTS;i++)particle[i].randomInit();
}

void CDynamicSimulator::clean() {}

void CDynamicSimulator::doBeforeSimulation(double dt, double currentTime) {}

void CDynamicSimulator::doSimulation(double dt, double currentTime) {
    for(int i=0;i<NUMPARTS;i++)
        particle[i].simulate(dt, currentTime);
}

void CDynamicSimulator::doAfterSimulation(double dt, double currentTime) {}

void CDynamicSimulator::visualize(void) {
    for(int i=0;i<NUMPARTS;i++) {
        particle[i].drawWithGL(POINT_DRAW);
    }
}
```

시뮬레이션 코드 - Particle.cpp

```
void CParticle::simulate(double dt, double et) {
    // Update velocity: Euler Integration of acceleration
vel = vel + dt*gravity;
    // Update position: Euler Integration of velocity
loc = loc + dt*vel;

    // collision handling
    if(loc[1]<0) {
        loc.set(loc[0], -0.9*loc[1], loc[2]);
        if(vel[1]<0) vel.set(vel[0], -0.9*vel[1], vel[2]);
    }
    setPosition(loc[0], loc[1], loc[2]);
}
```

물리기반 모델링

1.5회전 운동

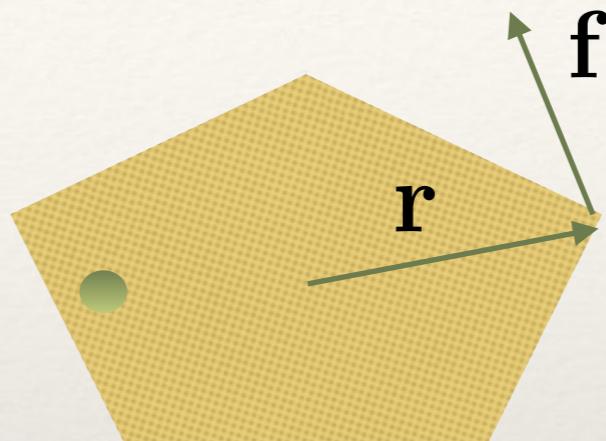
동명대학교
게임공학과

회전 운동

❖ 토크: τ

❖ 회전 운동에서 힘의 역할

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

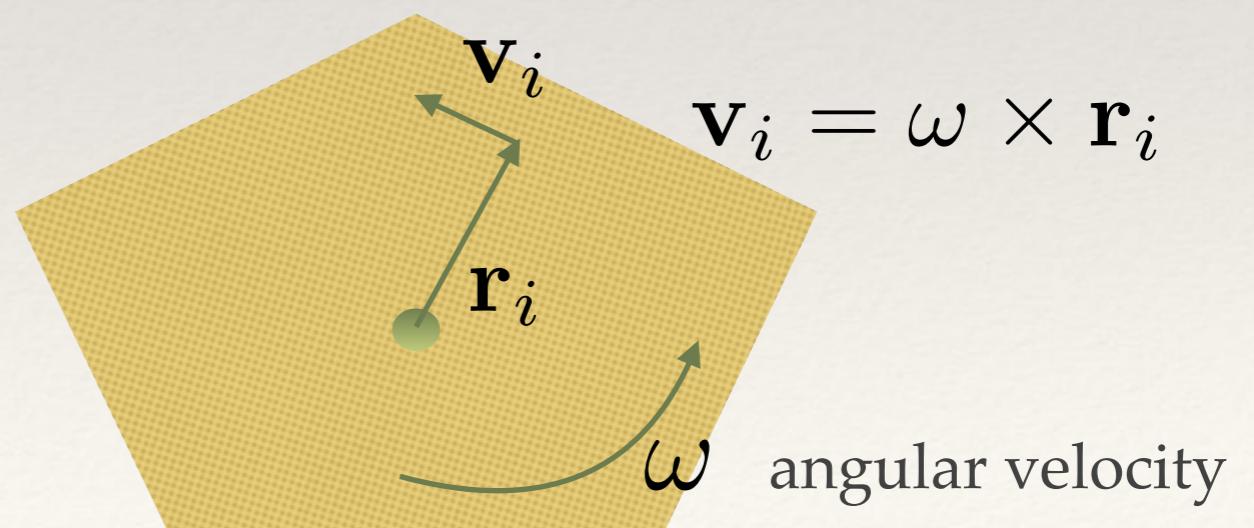


❖ 회전 운동량

❖ 모든 입자의 운동량 모멘트의 합

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)$$

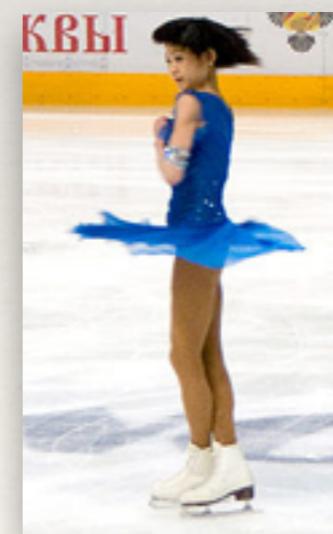
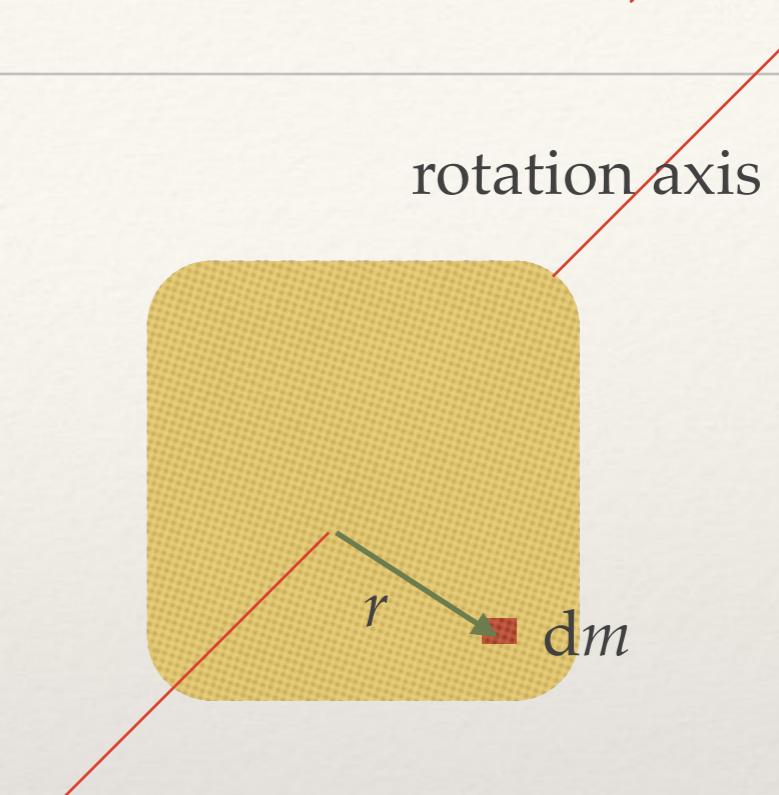


angular velocity

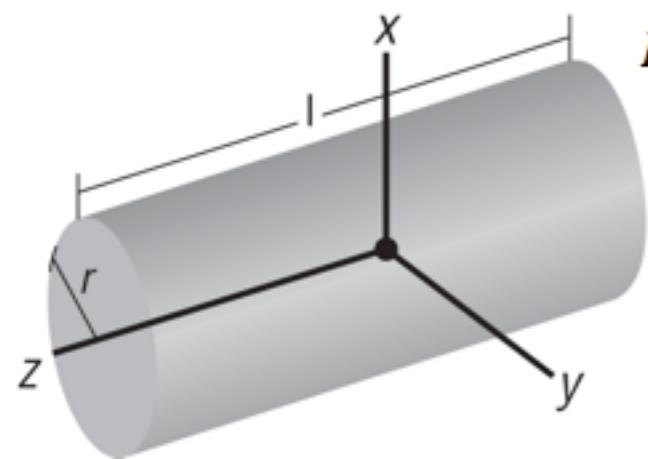
관성 모멘트(회전 질량)

- ❖ 회전 질량
- ❖ 회전축에 따라 달라짐
- ❖ 축을 중심으로 하는 회전 가속에 저항하는 특성

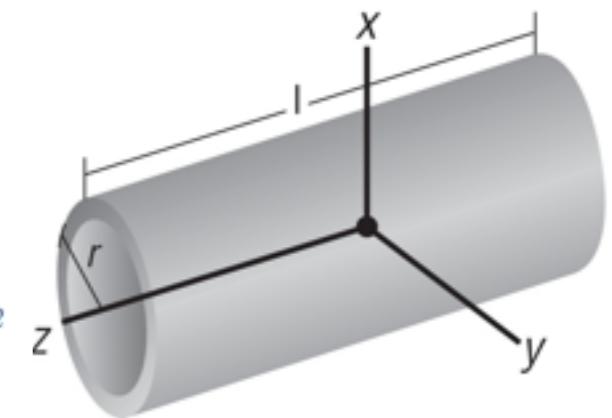
$$I = \int_m r^2 dm$$



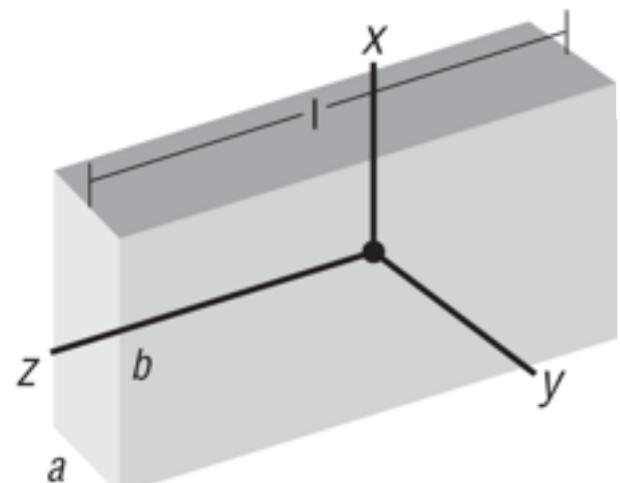
회전 질량의 예 (3개의 축에 대해)



$$I_{xx} = I_{yy} = (1/4) mr^2 + (1/12) ml^2; I_{zz} = (1/2) mr^2$$

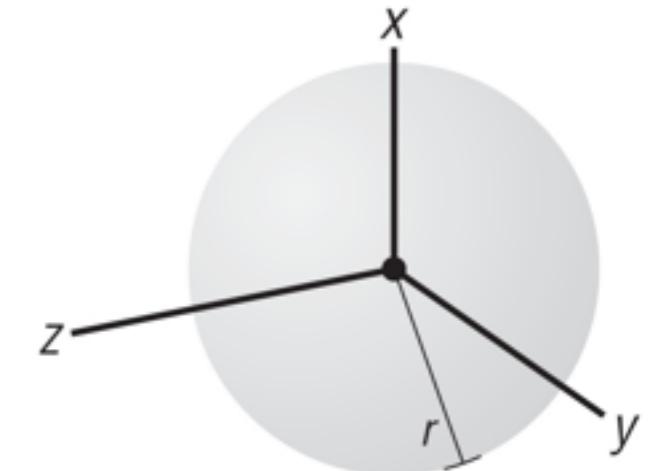


$$I_{xx} = I_{yy} = (1/4) mr^2 + (1/12) ml^2; I_{zz} = (1/2) mr^2$$



$$I_{xx} = I_{yy} = (1/4) mr^2 + (1/12) ml^2; I_{zz} = (1/2) mr^2$$

sphere $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/5) mr^2$



$$\text{spherical shell } I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/3) mr^2$$

회전 운동량 = 회전질량 × 회전속도

❖ 선운동량: \mathbf{G}

❖ $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$

❖ 회전운동량

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i(\omega \times \mathbf{r}_i)$$



$$\mathbf{H} = \int \omega \mathbf{r}^2 dm$$

$$= \omega \int \mathbf{r}^2 dm$$

$$= \omega \mathbf{I} = \mathbf{I}\omega$$

회전 질량
(관성 모멘트)

회전 속도(각속도)

회전 운동량의 미분

- ❖ $d\mathbf{G}/dt = \text{힘}$
- ❖ $d\mathbf{H}/dt = \text{토크(torque)}$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d\mathbf{I}\omega}{dt} = \mathbf{I} \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{I}\alpha$$

$$\rightarrow \sum \tau = \mathbf{I}\alpha \rightarrow \alpha = \mathbf{I}^{-1} \sum \tau$$

텐서(tensor)

- ❖ 텐서
 - ❖ 크기와 방향을 가진 수학적 표현
 - ❖ 방향에 따라 그 크기가 동일하지 않을 수 있음
 - ❖ 다른 방향에 대해 다른 크기를 갖는 물체의 특성을 표현할 때 사용
- ❖ 등방성(isotropic) 특성과 이방성(anisotropic) 특성
 - ❖ 등방성: 모든 방향으로 동일한 특성
 - ❖ 이방성: 방향에 따라 달라지는 특성
- ❖ 관성 모멘트
 - ❖ 관성 텐서(3차원)
 - ❖ 아홉 개의 요소가 모든 방향으로의 특성을 표현할 수 있음
 - ❖ 회전 축에 따라 달라지는 강체의 특성을 표현

물리기반 모델링

1.6 강체 - 2차원

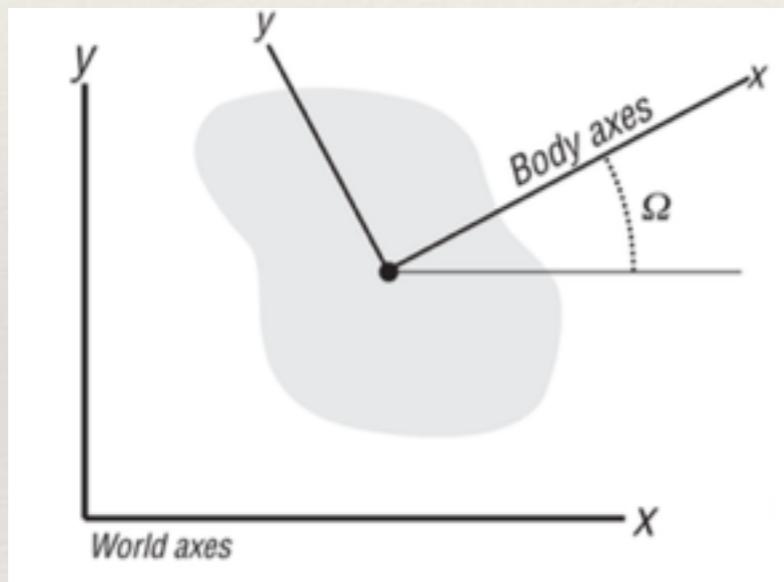
동명대학교
강영민

강체의 운동

- ❖ 입자와 강체의 차이
 - ❖ 입자: 회전이 없음
 - ❖ 강체: 회전
- ❖ 강체의 운동
 - ❖ 질량 중심의 선운동 (입자와 동일)
 - ❖ 회전 운동
 - ❖ 토크 τ (선운동에서 힘 f 와 같은 작용)
 - ❖ 각 속도 ω (속도 v 와 같은 역할)
 - ❖ 각 가속도 $\dot{\omega}$ (가속도 a 와 같은 역할)

지역 좌표계

- ❖ 회전
 - ❖ 지역 좌표계의 원점을 중심으로 회전



- ❖ 2차원 강체의 회전
 - ❖ z 축 회전
- ❖ 회전은 원래의 상태에서 회전된 각을 표현하는 하나의 실수 Ω 로 표현 가능

각 속도와 각 가속도

- ❖ 선속도 = 시간에 대한 위치의 변화 비
- ❖ 각 속도 = 시간에 대한 회전 각의 변화 비

$$\diamond \quad \gg \quad \omega = \frac{d\Omega}{dt}$$

- ❖ 각 가속도

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

회전에 의한 선 속도

- ❖ 각도 Ω 만큼의 회전
 - ❖ 지역 좌표 중심에서 r 만큼 떨어진 위치는 원호 c 를 따라 이동
- ❖ 간단한 관찰 $c = r\Omega$

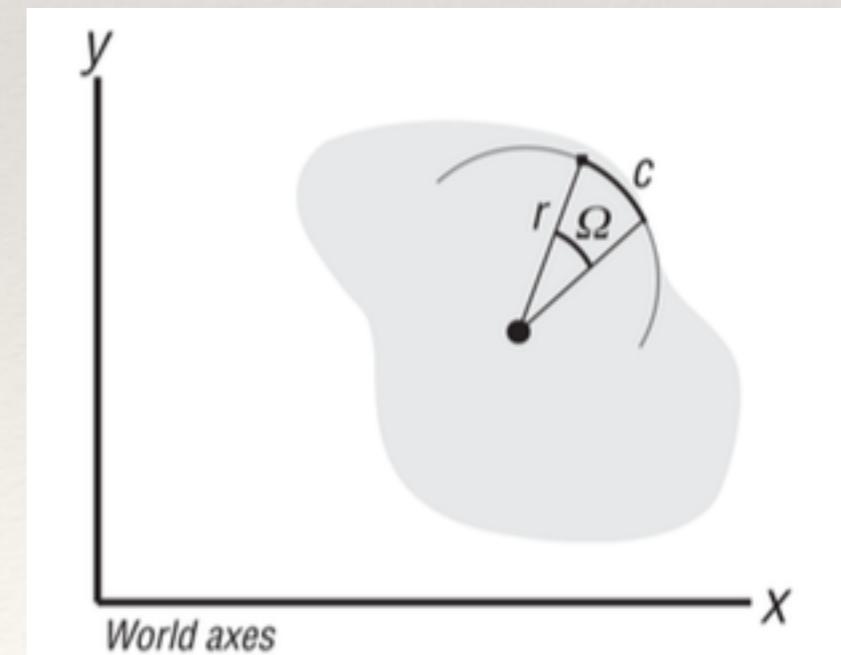
- ❖ 미분하면.... $dc/dt = rd\Omega/dt = r\omega$

$$v = r\omega$$

- ❖ 가속

- ❖ $a = dv/dt$

$$a = r\dot{\omega}$$



2차원 강체 시뮬레이션

- ❖ 상태 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \Omega, \omega)$

- ❖ 관성

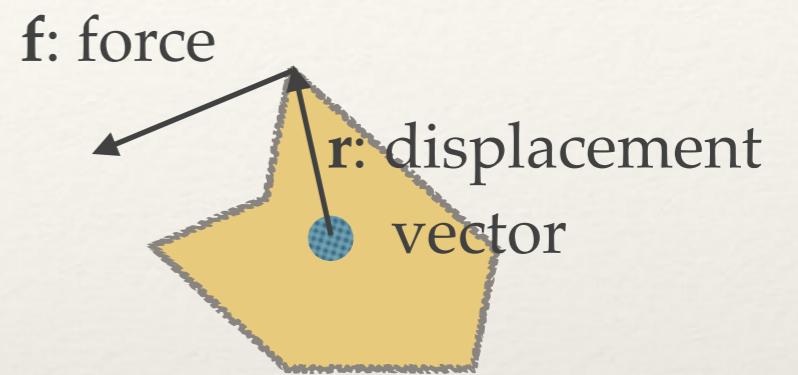
- ❖ 질량 m : 선 운동에 대한 저항

- ❖ 관정 모멘트 I : 회전 운동에 대한 저항

- ❖ 시뮬레이션

- ❖ 힘과 토크를 계산 \mathbf{f}, τ

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$



2차원에서는....

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, 0)$$

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, 0)$$

$$\tau = (0, 0, \tau_z)$$

적분

- ❖ 선운동

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{f}}{m} dt$$

$$\mathbf{x}(t + dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t + dt)dt$$

- ❖ 회전운동

$$\omega(t + dt) = \omega(t) + I^{-1} \tau dt$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t + dt) = \boldsymbol{\Omega}(t) + \boldsymbol{\omega}(t + dt)dt$$

- ❖ 2D

- ❖ I: 스칼라 ... $I^{-1} = \frac{1}{I}$

구현

❖ Dynamic Simulator

```
void CDynamicSimulator::doSimulation(double dt, double currentTime) {
    hover.simulate(dt);
}

void CDynamicSimulator::visualize(void) {
    hover.draw();
}

void CDynamicSimulator::control(unsigned char key) {
    int engineNumber = (int)(key-'1');
    hover.switchEngine(engineNumber, hover.isEngineOn(engineNumber)?false:true);
}

CVec3d CDynamicSimulator::getCameraPosition(void) {
    CVec3d loc;
    loc = hover.getLocation();
    return loc;
}
```

Hovercraft.h

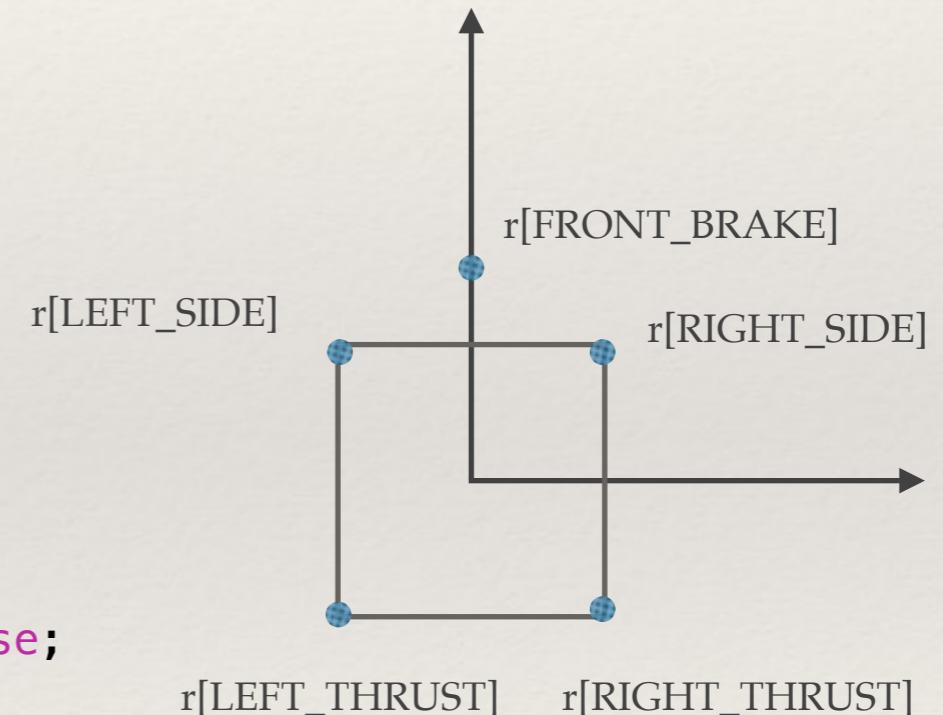
```
enum ENGINE_NUMBER {
    LEFT_THRUST,
    RIGHT_THRUST,
    RIGHT_SIDE,
    FRONT_BRAKE,
    LEFT_SIDE,
    NUMBER_OF_ENGINES
};

class CHovercraft {
    double mass;
    double inertia;
    CVec3d loc;
    CVec3d vel;
    CVec3d force;
    double angle;
    double aVel;
    double torque;

    CVec3d r[NUMBER_OF_ENGINES];
    CVec3d fLocal[NUMBER_OF_ENGINES];
    bool on[NUMBER_OF_ENGINES];
    CVec3d localVectorToWorldVector(const CVec3d &lv);
public:
    ...
    void draw(void);
    void switchEngine(int engineNumber, bool switch_state);
    bool isEngineOn(int engineNumber);
    void simulate(double dt);
    void setLocation(CVec3d location);
    CVec3d getLocation(void);
};
```

Hovercraft.cpp - 생성자

```
CHovercraft::CHovercraft() :  
mass(1.0), inertia(1.0), angle(0.0), aVel(0.0), torque(0.0) {  
    loc.set(0.0, 0.0, 0.0);  
    vel.set(0.0, 0.0, 0.0);  
    force.set(0.0, 0.0, 0.0);  
  
    r[LEFT_THRUST].set(-1.0, -1.0, 0.0);  
    r[RIGHT_THRUST].set(1.0, -1.0, 0.0);  
    r[LEFT_SIDE].set(-1.0, 1.0, 0.0);  
    r[RIGHT_SIDE].set(1.0, 1.0, 0.0);  
    r[FRONT_BRAKE].set(0.0, 1.5, 0.0);  
  
    fLocal[LEFT_THRUST].set( 0.0, 1.0, 0.0);  
    fLocal[RIGHT_THRUST].set(0.0, 1.0, 0.0);  
    fLocal[LEFT_SIDE].set( 1.0, 0.0, 0.0);  
    fLocal[RIGHT_SIDE].set( -1.0, 0.0, 0.0);  
    fLocal[FRONT_BRAKE].set( 0.0,-1.0, 0.0);  
  
    for (int i=0; i<NUMBER_OF_ENGINES; i++) on[i] = false;  
}  
  
CHovercraft::~CHovercraft() {
```

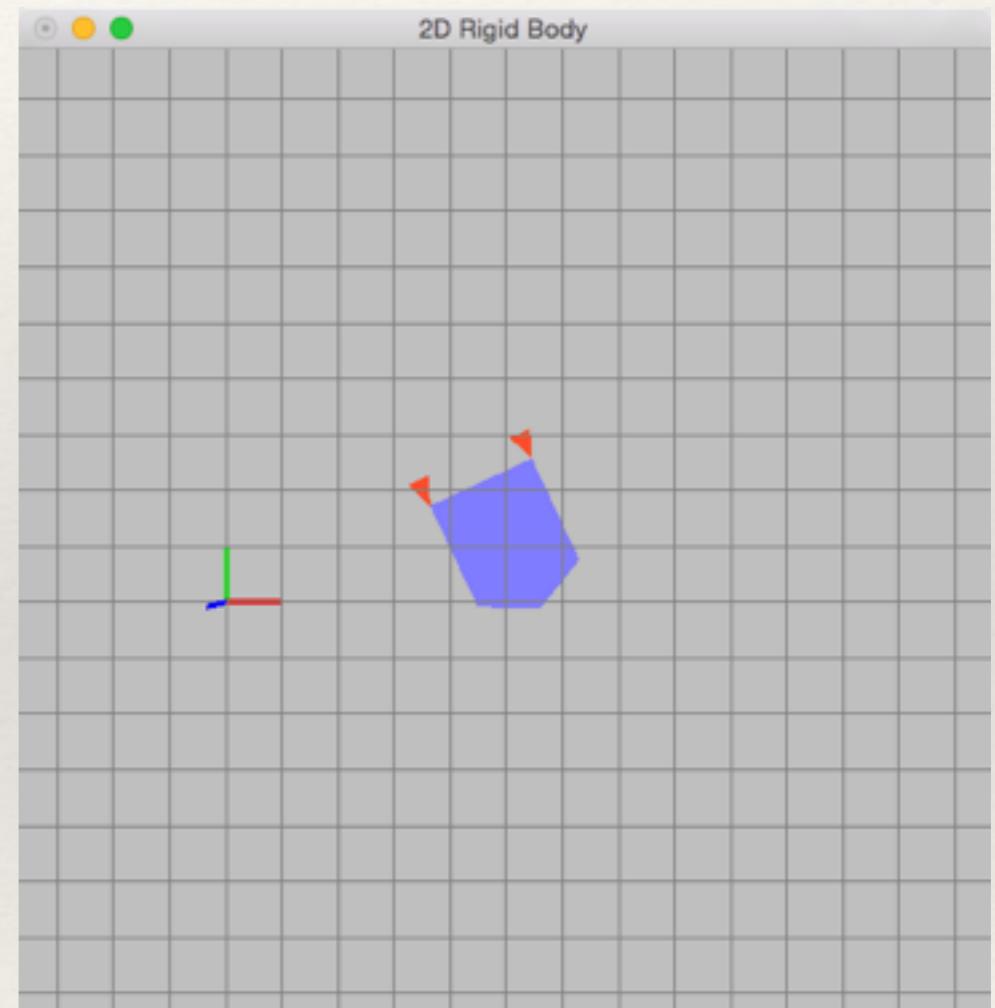


Hovercraft.cpp - 시뮬레이션 부분

```
void CHovercraft::simulate(double dt) {
    force.set(0.0, 0.0, 0.0);
    torque = 0.0;

    // rigid body
    CVec3d fWorld;
    CVec3d torqueVec;
    for (int i=0; i<NUMBER_OF_ENGINES; i++) {
        if(on[i]) {
            fWorld = localVectorToWorldVector(fLocal[i]);
            force = force + fWorld;
            torqueVec = r[i]*fLocal[i];
            torque += torqueVec[2];
        }
    }
    // drag force
    double kd = 0.5;
    force = force -kd*vel;
    torque += -kd*aVel;

    // numerical integration
    vel = vel + (dt/mass)*force;
    loc = loc + dt * vel;
    aVel = aVel + (dt/inertia)*torque;
    angle = angle + dt * aVel;
}
```



애니메이션 결과

- ❖ https://www.youtube.com/watch?v=xbu_-VP7Ed0
- ❖ <http://goo.gl/s8TTAi>

