

그래픽스 강의노트 07 - OpenGL 변환

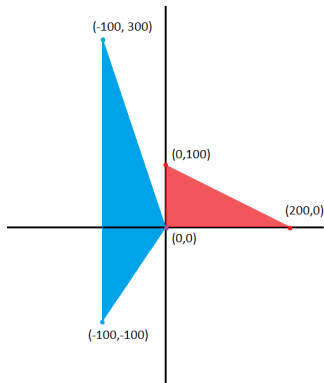
강영민

동명대학교

2021년 2학기

OpenGL의 변환

- 변환을 자유자재로 할 수 있다고 가정: $T(\mathbf{p}, \vec{d})$, 크기를 변경 $S(\mathbf{p}, s)$
- 필요한 것은 반지름 1의 원 그리기 `draw()`만 있으면 어떤 위치에 어떤 크기로든 원을 그릴 수 있음
 - $T(S(\text{draw}(), s), \vec{d})$
- 어파인(affine) 변환 - 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지



대표적인 어파인 변환

이동(translate)	주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮겨 놓는다.
회전(rotate)	2차원에서는 기준점, 3차원에서는 기준축을 중심으로 주어진 각도만큼 돌아간다.
크기변경(scale)	각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

동차좌표계

- 동차 좌표(homogeneous coordinate)은 n 차원의 사영공간을 $n + 1$ 차원의 좌표로 나타내는 좌표계
- 1827년 아우구스트 페르디난드 뫼비우스(August Ferdinand Möbius)가 그의 저작 “Der barycentrische Calül”에서 처음으로 소개
- 사영기하학에서 사용되는 좌표계
- 무한의 위치에 있는 점을 유한 좌표로 표현하는 데에 적합

그래픽스에서 동차좌표계를 사용하는 이유

- 3차원 데카르트 좌표를 사용할 경우 이동은 벡터의 덧셈으로 표현되고, 회전은 3×3 행렬의 곱으로 표현
- 이동과 회전이 누적되면 벡터 덧셈과 행렬 곱셈이 연속적 적용됨
- 동차좌표(homogeneous coordinate)을 사용하면 이동과 회전 모두 4×4 행렬의 곱으로 표현 가능
- 누적된 이동, 회전 변환을 하나의 행렬로 표현 가능

변환 행렬

- 동차 좌표계에서 어파인 변환은 행렬로 표현
- OpenGL 역시 변환을 행렬로 표현
- OpenGL은 정점 데이터를 그래픽 카드로 보내는데, 각각의 정점들은 필요한 변환 행렬에 곱해져서 최종적인 화면 좌표 생성
- 곱해지는 행렬은 두 종류: 모델뷰(ModelView) 행렬, 투영(Projection) 행렬
- 하나의 정점이 화면 좌표로 바뀌는 과정
 - 지역좌표계 내의 좌표를 $coord_{local}$ 이라고 하고, 모델뷰 행렬은 $ModelViewMatrix$, 투영행렬을 $ProjMatrix$ 라고 하면, 화면 좌표 $coord_{screen}$ 은 다음과 같이 구한다.
 - $coord_{screen} = ProjMatrix \times ModelViewMatrix \times coord_{local}$

OpenGL에서 변환은 어떻게 이루어지나

- OpenGL의 변환: *ModelViewMatrix*, *ProjMatrix* 행렬을 변경하는 것
- 모델 뷰 행렬, 투영 행렬 중 어느 것을 바꿀 것인지는 행렬 모드로 결정
- 행렬모드: GL_MODELVIEW와 GL_PROJECTION
 - 당분간 GL_TEXTURE는 고려하지 않음
- 투영 행렬을 변경 = 카메라의 속성을 변경: glOrtho나 gluPerspective
- 모델뷰 행렬을 변경하는 함수
 - 카메라 위치 변경: gluLookAt
 - 객체의 위치, 방향, 크기 변경 - 표 참고

glTranslate3f(dx, dy, dz)	(dx,dy,dz) 만큼 좌표 이동
glRotatef(angle, axisX, axisY, axisZ)	축(axisX, axisY, axisZ)를 기준으로 angle만큼 회전
glScalef(scaleX, scaleY, scaleZ)	(scaleX, scaleY, scaleZ)를 성분별로 좌표에 곱함

- 이상의 변환들은 좌표를 변경하지 않고 행렬을 변경하는 역할을 수행
- 현재의 행렬이 M 이라고 하고, glTranslate의 이동을 표현하는 행렬이 T
- glTranslate 함수가 불렸을 때, M 을 MT 로 변경

현재 변환 행렬

- 현재 변환 행렬(current transform matrix)은 줄여서 CTM이라 부름
- 모든 정점은 CTM에 곱해진다
- 따라서 변환 함수는 이 CTM을 변경하는 것
- CTM을 변경하는 함수로 다음과 같은 것들이 있다

함수	CTM의 변경
LoadIdentity	$CTM := I$
LoadMatrix(M)	$CTM := M$
T: Translate*	$CTM := CTM * T$
R: Rotate*	$CTM := CTM * R$
S: Scale*	$CTM := CTM * S$

현재 변환 행렬

- 현재 변환 행렬(current transform matrix)은 줄여서 CTM이라 부름
- 모든 정점은 CTM에 곱해진다
- 따라서 변환 함수는 이 CTM을 변경하는 것
- CTM을 변경하는 함수로 다음과 같은 것들이 있다

함수	CTM의 변경
LoadIdentity	$CTM := I$
LoadMatrix(M)	$CTM := M$
T: Translate*	$CTM := CTM * T$
R: Rotate*	$CTM := CTM * R$
S: Scale*	$CTM := CTM * S$

변환의 적용에 따른 CTM의 변화

- 다음 코드와 같이 변환이 적용될 경우
- CTM은 이 코드에 주석 처리된 부분에 나타난 것과 같이 변경

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW)
glLoadIdentity()           // CTM:=I
glTranslatef(1,2,1)        // CTM:=IT  T는 glTranslate가 표현하는 행렬
glRotatef(45, 1,0,0)       // CTM:=ITR  R은 glRotate가 표현하는 행렬
glScalef(2.0, 1.0, 1.0)   // CTM:=ITRS S는 glScale이 표현하는
    행렬
drawObjects()
```

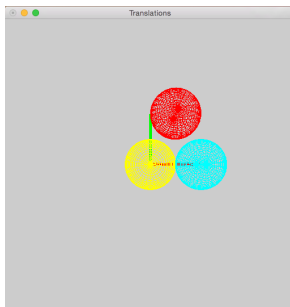
코드 구현 내용

drawObjects 내에서 그려지는 모든 기하 객체의 좌표에 대해 크기변환 (S)을 적용한 뒤, 이 값을 x 축 기준으로 45도 회전하게 되며, 이후 (1,2,1) 만큼의 이동을 한다. 다시말해 우리가 호출한 변환의 역순으로 변환이 객체에 적용된다.

구(sphere) 그리기에 변환 적용 예제

```
def draw() :  
    glutWireSphere(0.5, 30, 30) // 반지름 0.5의 구를 원점을 중심으로 그림  
  
def display() :  
    [[여기에 카메라 설정(gluLookAt 등), 버퍼 클리어(glClear) 코드]]  
    drawAxes() // 축을 그림  
    glColor3f(1, 1, 0)  
    draw() // 아무런 변환 없이 원점에 구를 그림  
    glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) //(1,0,0) 벡터만큼 이동을 함  
    glColor3f(0, 1, 1)  
    draw() //적용된 변환을 이용하여 구를 그림  
    glTranslatef(-0.5, 1.0, 0.0) /(-0.5,1,0) 벡터만큼 이동을 함  
    glColor3f(1, 0, 0)  
    draw() //적용된 변환을 이용하여 옮겨진 구를 그림  
    glutSwapBuffers()
```

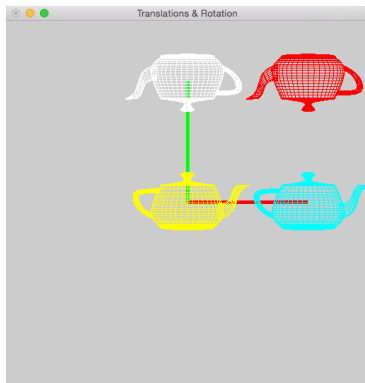
구(sphere) 그리기에 변환 적용 예제 실행 결과



- 노란 색, 하늘 색, 붉은 색 공이 차례로 그려진다.
- 노란 색 공에는 변환이 적용되지 않았으므로 원점에
- 하늘 색 공에는 $(1,1,0)$ 만큼의 이동
- 붉은 색 공에 $(-0.5, 1, 0)$ 적용 + 하늘 색에 적용된 $(1,1,0)$ 이동이 추가

복합변환의 이해

- 실제 객체에 적용되는 변환은 호출 순서의 역으로 적용
- CTM을 활용한 변환 적용 기법을 사용하기 때문
- 이러한 방식으로 이해하면 적용된 변환을 상상하기가 어려움
- 다음 그림과 같이 네 개의 주전자를 배치하고 싶을 때에 OpenGL로 구현하려면 어떻게 해야할 지를 고민해 보자.



CTM 모델로 원하는 변환 구현해 보기

- 노란색 주전자는 아무런 변환도 적용되지 않은 상태. 바로 그림

```
glLoadIdentity()  
draw(yellow)           // CTM = I
```

- 하늘색 주전자는 x 축으로 1만큼 이동하여 그려야 하므로 `glTranslate*` 함수를 부른 뒤 주전자를 그린다. 이 이동 변환을 T_1 이라고 하자.

```
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) // T1  
draw(cyan)
```

- 붉은 주전자는 z 축을 기준으로 180도 회전한 뒤에 (1,1,0)만큼 이동
- 현재의 CTM이 T_1 이므로 (0,1,0)만큼의 이동 T_2 를 추가 적용하면 (1,1,0) 이동이 되며, 여기에 회전 R 을 적용

```
glTranslate(0.0, 1.0, 0.0) // T2  
glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0) // R  
draw(red)
```

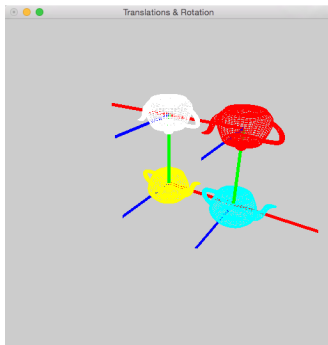
CTM 모델로 원하는 변환 구현해 보기

- 붉은 색 주전자는 $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{R}$ 의 변환
- 흰색 주전자를 그리는 방법은 까다롭다
- 이 주전자는 180도 회전 시킨 주전자를 (0,1,0) 만큼 이동한 것
- 현재의 변환 $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{R}$ 에 어떤 변환을 추가적으로 호출하면 이것이 가능할지 생각해야 함
- 회전이 호출된 상태라 까다롭다.
- 새롭게 적용할 변환이 \mathbf{X} 라고 하고, (0,1,0) 만큼 이동하는 변환을 \mathbf{T} 라고 하면 다음과 같은 관계 성립
 - $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{R}$
 - $\mathbf{X} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}\mathbf{R}$
- 위의 계산을 수행하면 \mathbf{X} 는 (1,0,0) 만큼의 이동으로 나타나게 된다. 따라서 다음과 같이 적용하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

```
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) // X  
draw(white)
```

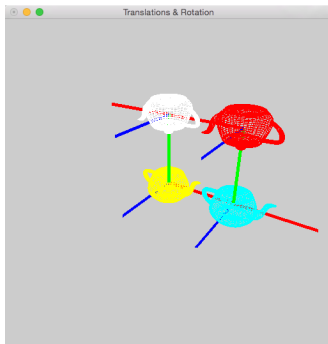
지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 1/6

- 앞 슬라이드의 방식은 너무 번거롭다.
- 쉬운 방법: 물체의 변환이 아니라 좌표계의 변환으로 이해
- 각각의 주전자가 가진 지역 좌표계를 함께 그리기
- 노란색 주전자는 변환 적용 없어 전역 좌표계와 일치



```
glLoadIdentity()  
draw(yellow)
```

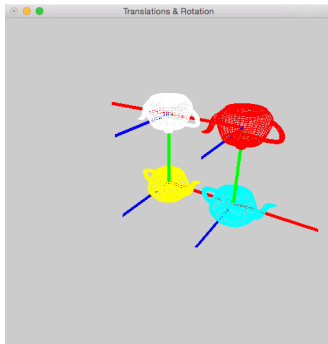
지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 2/6



하늘색 주전자는 노란색 주전자의 좌표계에서 보았을 때 x 축으로 1만큼 이동하여 있다. 따라서 다음과 같이 적용한다.

```
glTranslatef(1.0,0.0,0.0)  
draw(cyan)
```

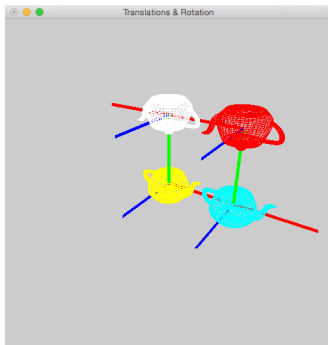

지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 3/6



붉은 색 주전자는 하늘색 주전자에서 y 축으로 1만큼 올라간 뒤에, 이동된 좌표계에서 z 축을 기준으로 180도 회전

```
glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0)
draw(red)
```

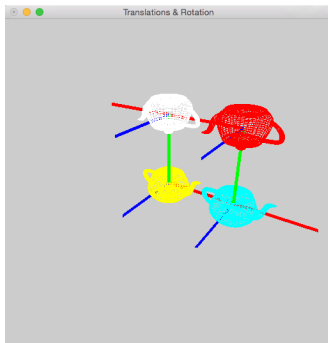
지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 4/6



붉은 주전자의 변환은 순서를 바꾸어 하늘색 주전자에서 z 축 회전을 먼저 적용한 뒤에 y 축 기준으로 -1만큼 이동하는 것과도 같다. 따라서 다음과 같이 적용해도 동일한 결과

```
glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0)
glTranslatef(0.0, -1.0, 0.0)
draw(red)
```

지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 5/6



마지막으로 흰색 주전자는 붉은 색 주전자에서 x 축으로 1만큼 이동한 것

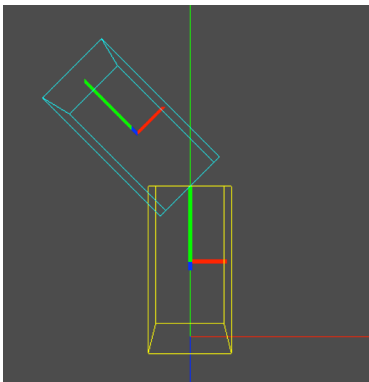
```
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0)  
draw(white)
```

지역 좌표계 변환을 중심으로 생각하기 6/6

```
def display() :  
    [[카메라 설정과 버퍼 지우기 등의 코드]]  
  
    drawLocalAxes()  
    glColor4f(1, 1, 0, 0.25)  
    draw()  
  
    glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0)  
    drawLocalAxes()  
    glColor4f(0, 1, 1, 0.25)  
    draw()  
  
    glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0)  
    glTranslatef(0.0, -1.0, 0.0)  
    drawLocalAxes()  
    glColor4f(1, 0, 0, 0.25)  
    draw()  
  
    glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0)  
    drawLocalAxes()  
    glColor4f(1, 1, 1, 0.25)  
    draw()  
  
    glFlush()
```

크기 변경이 포함된 경우

- 크기 변경이 포함될 경우에는 문제가 발생
 - 지역좌표계 변환을 통한 이해는 강체(rigid) 변환에 대해서만 적용
- 다음의 그림과 같은 장면을 그린다고 가정
 - 각 변 길이 1인 정육면체를 높이 2, 너비 1, 깊이 1로 만들 경우
 - `glScalef(1.0, 2.0, 1.0)`



크기 변경이 포함된 경우

- 육면체가 xz 평면위에 놓으려면 y 축 방향으로 0.5 이동
 - 이미 지역좌표계가 glScale에 의해 변환되었기 때문에 0.5만 들어올려도 전역좌표계에서는 1만큼 올라가게 된다.
- 노란색 육면체는 다음과 같이 그림

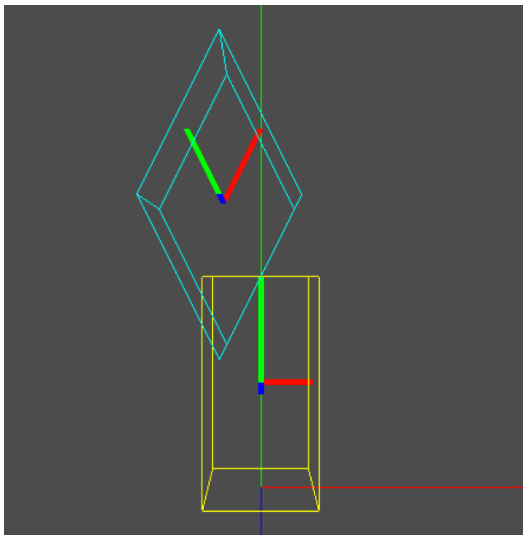
```
glScalef(1.0, 2.0, 1.0) // S
glTranslatef(0.0, 0.5, 0.0) // T1
draw(yellow)
```

- 문제는 하늘색 육면체
- 이 육면체는 노란색 육면체를 0.5만큼 들어올린 뒤에 z 축 기준으로 회전을 시키고, 이렇게 변환된 공간에서 다시 y 축 기준으로 0.5만큼 이동시키면 됨
- 코드로는 다음과 같은 변환 적용으로 구현이 가능할 것처럼 보임

```
glTranslatef(0.0, 0.5, 0.0) // T2
glRotatef(45, 0.0, 0.0, 1.0) // R
glTranslatef(0.0, 0.5, 0.0) // T3
draw(cyan)
```

크기 변경이 포함된 경우

결과는...



크기 변경이 포함된 경우

- 실제로 하늘색 육면체에 적용된 변환
- $ST_1T_2RT_3$
- 가장 마지막에 적용되는 **S**는 전역 좌표계를 기준으로 크기변경
- 하늘색 육면체의 방향(orientation)을 고려하지 않고 크기 변경
- 해결하는 방법은 행렬 스택 연산인 `glPushMatrix()`와 `glPopMatrix()`를 활용하여 크기변경 변환은 적용된 객체 이외에서 영향을 미치지 않도록 제한

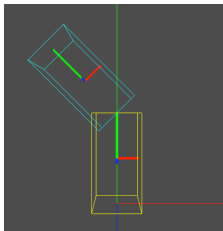
함수명	역할
<code>glPushMatrix</code>	현재의 CTM을 스택에 저장한다.
<code>glPopMatrix</code>	행렬 스택을 pop하여 CTM을 갱신한다.

- `glPushMatrix`를 수행한 뒤에 `glPopMatrix`를 수행하면 직전의 `glPushMatrix` 수행 당시의 CTM으로 복원

크기 변경이 포함된 경우

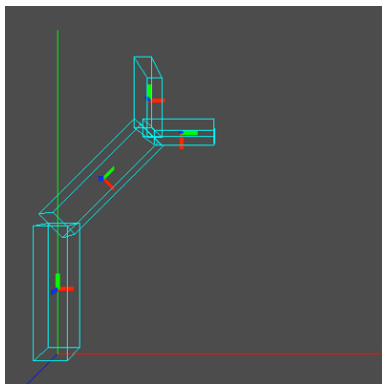
```
glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glPushMatrix()
glScalef(1.0, 2.0, 1.0)
draw(yellow)
glPopMatrix()

glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glRotatef(45, 0.0, 0.0, 0.0)
glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glPushMatrix()
glScalef(1.0, 2.0, 1.0)
draw(cyan)
glPopMatrix()
```



계층적 구조

- 컴퓨터 그래픽스로 표현하는 객체: 구조를 가짐
- 많은 경우 이 구조는 인간이나 로봇과 같은 구조체에서 볼 수 있는 바와 같이 계층적(hierarchical)



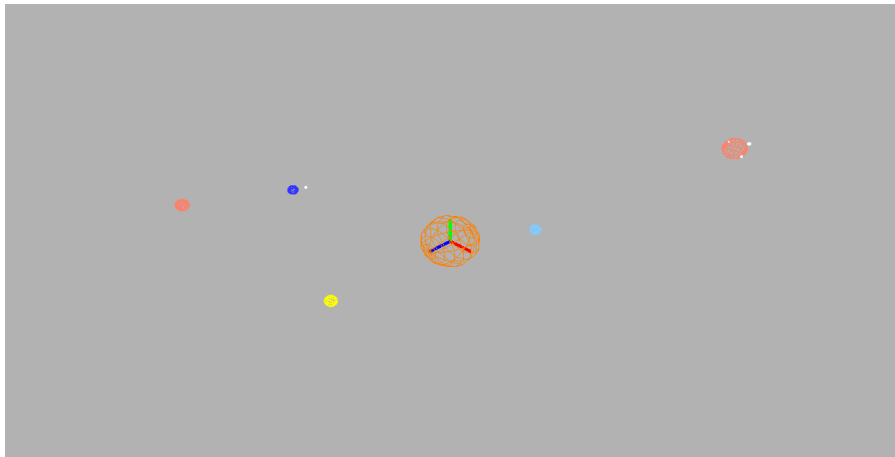
계층적 모델링(hierarchical modeling) 1/2

- 계층적 모델링은 앞서 살펴본 `glPushMatrix`와 `glPopMatrix`를 활용하여 구현
- 팔 구성 요소는 길이가 4이며, 손을 구성하는 요소는 길이가 2라고 가정
- 팔 구성요소를 그리는 함수를 `drawArm()`이라 하자.
- 손을 그리는 함수는 `drawHand()`
- 루트(root) 객체인 가장 아래쪽 육면체는 팔 요소의 길이 4를 고려하여 그 반에 해당하는 2만큼 위로 올림
 - `glTranslatef(0.0, 2.0, 0.0)`
 - `drawArm()`
- 다음으로 45° 로 누워 있는 팔은 부모 노드의 변환을 반영해야 하므로 앞서 적용된 변환을 유지한 상태로 팔의 길이의 반만큼 올라간 뒤, 45° 도 회전하고, 나머지 반을 더 올라가서 끝을 맞춤
 - `glTranslatef(0.0, 2.0, 0.0)`
 - `glRotatef(-45, 0.0, 0.0, 1.0)`
 - `glTranslatef(0.0, 2.0, 0.0)`
 - `drawArm()`

계층적 모델링(hierarchical modeling) 2/2

- 손의 중심을 팔의 끝에 두기 위해 팔의 길이 반에 해당하는 2만큼 이동시킨뒤 45° 회전하고, 손의 끝점을 관절부에 맞추기 위해 손의 길이 2의 반인 1만큼 이동하여 그림
- 두 번째 손을 그리려면 이 변환은 무효화되어야 함
- glPushMatrix를 이용하여 현재의 변환을 기록했다가 다시 복원
 - glPushMatrix()
 - glTranslatef(0.0, 2.0, 0.0)
 - glRotatef(-45, 0.0, 0.0, 1.0)
 - glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
 - glPopMatrix()
- 다음으로 마지막 손 요소를 그림
 - glTranslatef(0.0, 2.0, 0.0)
 - glRotatef(45, 0.0, 0.0, 1.0)
 - glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)

가상의 태양계 그리기



궤도 그려 넣기

- 각 천체들이 움직이는 공전궤도를 표현하고 싶다면
- 공전 궤도를 표현할 drawCircle(radius) 함수를 다음과 같이 구현

```
def drawCircle(radius) :  
    glColor3f(1.0, 1.0, 1.0)  
    glBegin(GL_LINE_LOOP)  
    for i in range(50) :  
        glVertex3f(  
            radius*cos(6.28*float(i)/50.0) ,  
            0.0 ,  
            radius*sin(6.28*float(i)/50.0))  
  
    glEnd()
```

- 이제 이 drawCircle 함수를 어디에서 부를 것인지를 결정

궤도 그려 넣기

