

게임 수학 – 강의 7

행렬식

동명대학교 게임공학과
강영민

행렬식

- 정사각 행렬에서 정의됨

- 행렬식의 표현

- 행렬 A 의 행렬식 = $\det A$ 혹은 $|A|$

- 행렬식을 계산하기 위해 필요한 개념

- 소행렬식^{minor}

- 여인자^{cofactor}

- 소행렬식

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: 이 행렬은 $m \times n$ 개의 소행렬식(minor) M_{ij} 를 가짐
 - 각 M_{ij} 는 A 행렬의 i 행 벡터 전체와 j 열 벡터 전체를 제거하고 얻어지는 행렬($\in \mathbb{R}^{m-1 \times n-1}$)의 행렬식

- 여인자

- 행렬 A 의 여인자는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정
 - 다음과 같이 정의되는 $m \times n$ 개의 여인자 C_{ij} 가 존재
 - $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

행렬식 계산

- 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 i 행, j 열 여인자 C_{ij} 를 이용한 행렬식 계산

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^n A_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^n A_{2j}C_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^n A_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n A_{i1}C_{i1} = \sum_{i=1}^n A_{i2}C_{i2} = \cdots = \sum_{i=1}^n A_{in}C_{in} \end{aligned}$$

- \mathbf{A} 의 임의의 행 벡터 $\mathbf{A}_{i,*}$ 와 \mathbf{C} 의 동일 위치 행 벡터 $\mathbf{C}_{i,*}$ 의 내적
- \mathbf{A} 의 임의의 열 벡터 $\mathbf{A}_{*,j}$ 와 \mathbf{C} 의 동일 위치 열 벡터 $\mathbf{C}_{*,j}$ 의 내적

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \mathbf{A}_{i,*} \mathbf{C}_{i,*}^T = \mathbf{A}_{*,j}^T \mathbf{C}_{*,j}$$

여인자를 구하면
행렬식을 구할 수 있다

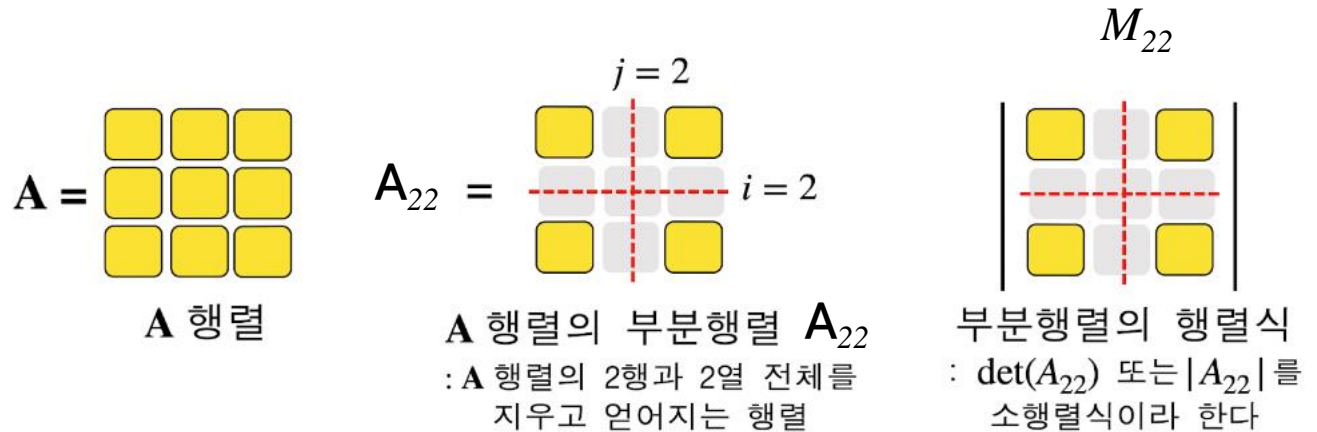
소행렬식 구하기

- 부분행렬

- A의 부분행렬 A_{ij} 는 행렬 A의 i 행과 j 열을 제거하고 얻는 행렬
- A의 i 행과 j 열 성분을 의미하는 A_{ij} 와 혼동하지 않을 것

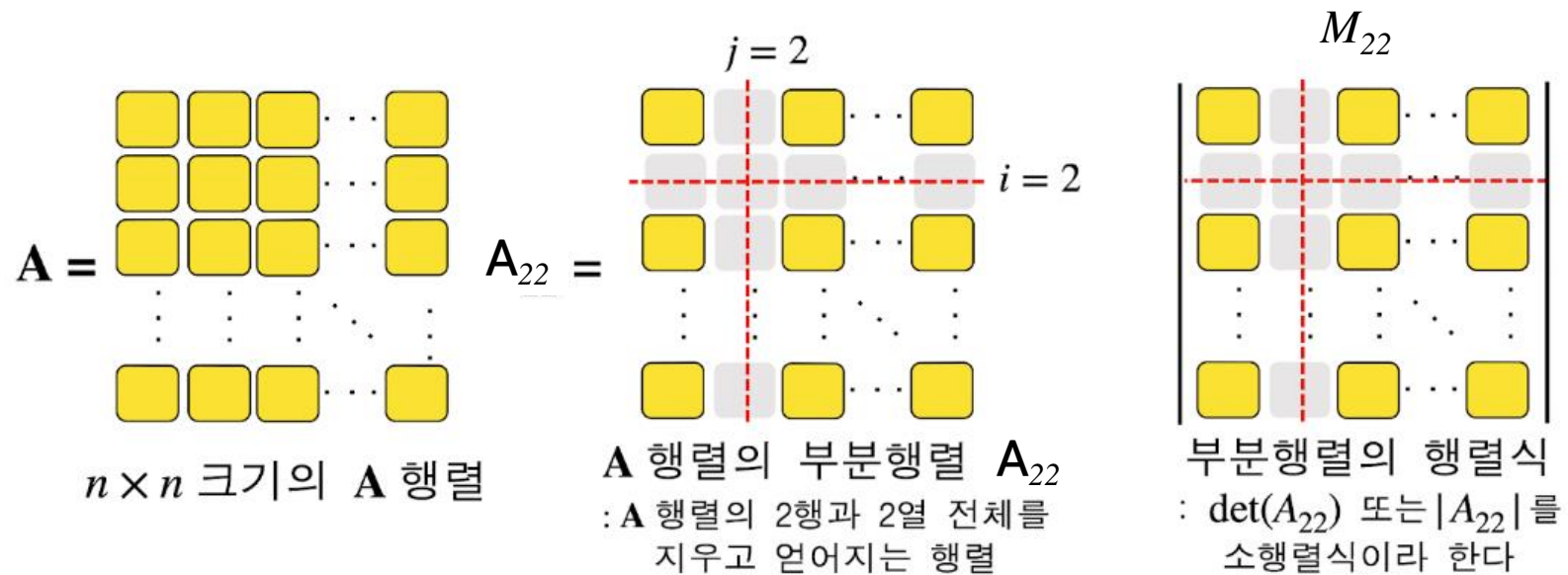
- 소행렬식

- M_{ij} : A_{ij} 의 행렬식



소행렬식의 일반화

- $n \times n$ 행렬



여인수

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}) \iff C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

여인수^{cofactor}는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정되며 그 값이 그림과 같이 소행렬식과 같거나 위치에 따라 부호만 달라질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

2 × 2 크기 행렬에 대한
여인수 부호

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

3 × 3 크기 행렬에 대한
여인수 부호

...

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

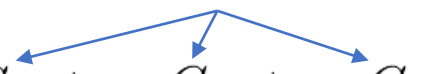
$(-1)^{i+j}$ 에 따라 결정되는 여인수의 부호

행렬식의 계산 – 여인수 전개

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j}$$


행렬이 3차 정사각 행렬일 때:

2x2 부분행렬로 구함


$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

행렬이 4차 정사각 행렬일 때:


3x3 부분행렬로 구함


$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

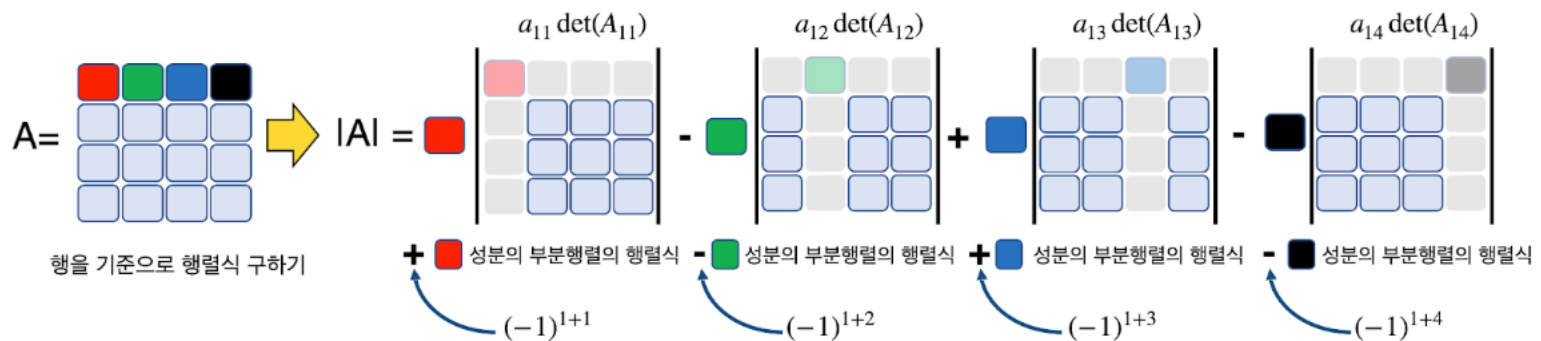
재귀 호출을 통해 구현 가능
: 2x2 행렬의 행렬식은?

행렬이 n차 정사각 행렬일 때:

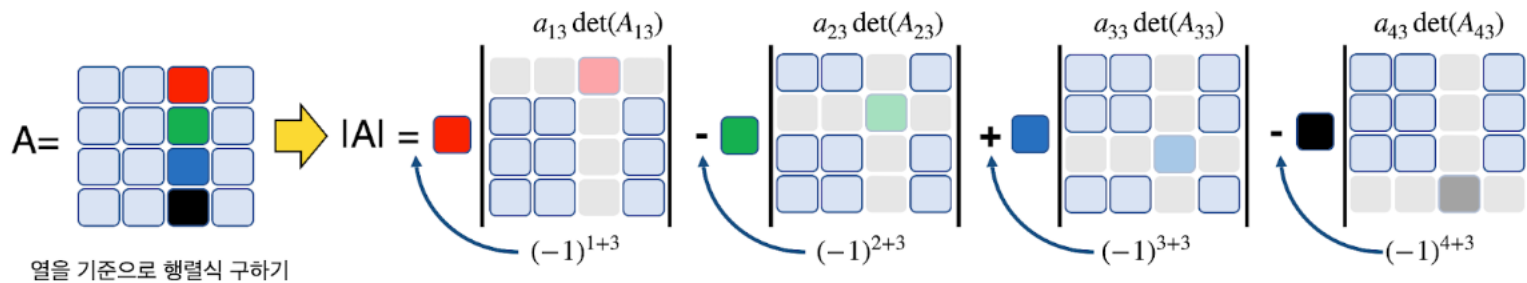
(n-1)x(n-1) 부분행렬로 구함


$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

행렬식의 계산 – 여인수 전개



임의의 행이나 열을 선택하여 여인수 전개 적용



2x2 예제

- 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- 소행렬식의 행렬

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \det[d] & \det[c] \\ \det[b] & \det[a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$



- 여인자의 행렬

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}d & (-1)^{1+2}c \\ (-1)^{2+1}b & (-1)^{2+2}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

- 행렬식

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

3x3 예제

행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

행렬식

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 - 8) - 1 \cdot (4 - 10) + 0 \cdot (-16 - (-10)) \\ &= -12 \end{aligned}$$

행렬식 계산 효율

- 다음 행렬의 행렬식을 구하는 빠른 방법은?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 30 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- 0이 가장 많은 행이나 열을 찾는다

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 30 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

해당 행이나 열을 기준으로 여인수 전개

$$\det \mathbf{A} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 30 & 15 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

삼각행렬의 행렬식

- 잘 살펴 보자

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

정리 6.1 - 삼각행렬의 행렬식

어떤 행렬 \mathbf{A} 가 $n \times n$ 크기의 상삼각행렬, 하삼각행렬, 또는 대각행렬일 경우 이 행렬의 행렬식 $\det(\mathbf{A})$ 은 다음과 같이 주대각성분의 곱이다.

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

행렬식 계산 구현 – 재귀호출

- **Det(A):**

- Select a row or a column $\rightarrow v$
- Compute the vector of cofactors along $v \rightarrow c$
 - Computation of cofactors
 - Recursive call of **Det(A_{ij})**
- Compute the inner product of v and c and return the result

```
M = np.random.rand(4,4)
print(M)

M12 = np.delete(np.delete(M, 1, axis=0), 2, axis=1)
print(M12)
```

submatrix 구하기 예시

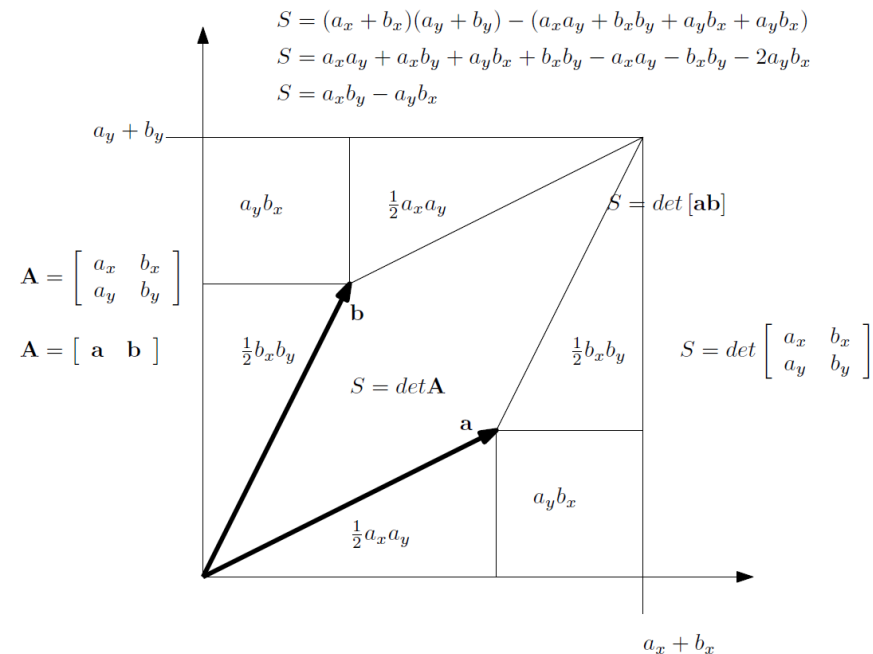
```
[[0.09173146 0.31002178 0.00114925 0.56483156]
 [0.6702642  0.10518936 0.04424309 0.99360292]
 [0.7855713  0.83524755 0.4896947  0.92187119]
 [0.69052721 0.19332984 0.19512489 0.84153646]]
[[0.09173146 0.31002178 0.56483156]
 [0.7855713  0.83524755 0.92187119]
 [0.69052721 0.19332984 0.84153646]]
```

행렬식의 기하적 의미

두 열 벡터 $\mathbf{a} = (a_x a_y)^T$ 와 $\mathbf{b} = (b_x b_y)^T$ 를 열로 하는 행렬 \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$$

이 두 벡터를 두 개의 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 행렬 \mathbf{A} 의 행렬식

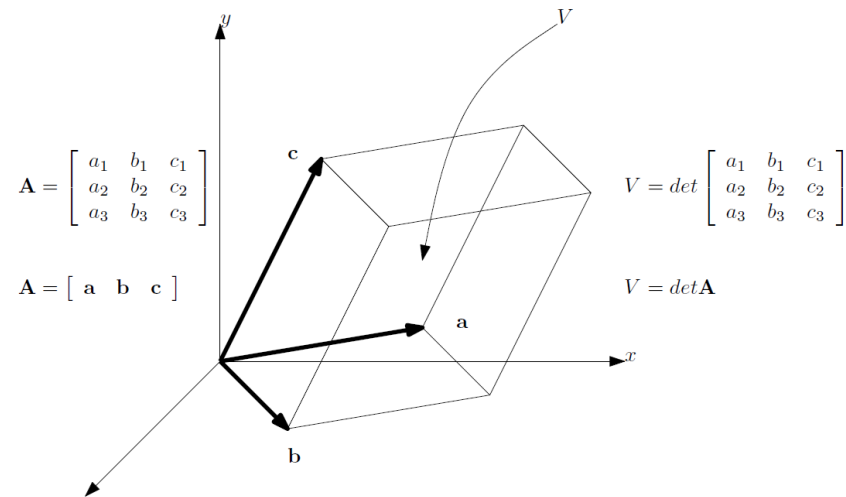


행렬식의 기하적 의미

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 는 세 개의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 를 포함

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}]$$

이 세 개의 벡터들이 만드는 평행육면체의 크기가 세 개의 벡터들로 구성된 행렬의 행렬식



행렬과 행렬식의 기하적 의미

