

# 게임 수학 – 강의 8

## 행렬과 변환

동명대학교 게임공학과  
강영민

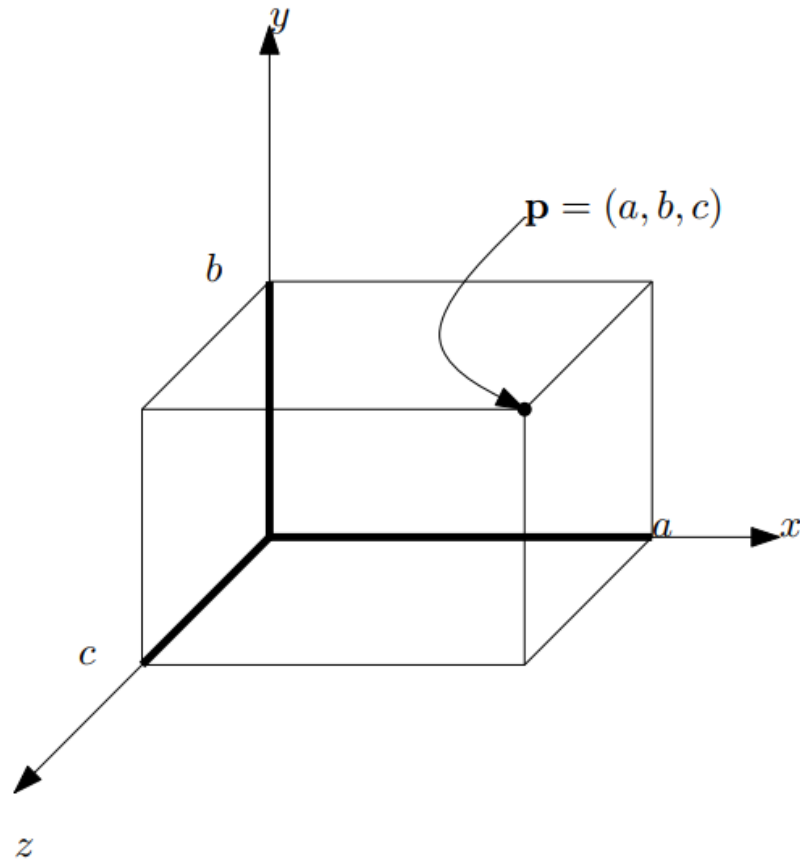
# 변환

수학적 의미에서 변환(transformation)

- 어떤 집합  $S$ 를 다른 어떤 집합  $S$ 로 대응시키는 함수
- 공간과 점, 그리고 벡터의 문제로 이해할 때, 변환이란 공간 상의 벡터나 점을 다른 벡터나 점으로 바꾸는 연산
- 변환 행렬
  - 어떤 벡터  $\mathbf{a}$ 가  $\mathbb{R}^n$ 에 속한다고 할 때, 이 벡터에 행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 을 곱하면  $\mathbf{a}$ 와 같은 차원의 벡터  $\mathbf{b}$ 를 얻는다.
  - $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ).
  - 어떤 벡터를 동일한 차원의 다른 벡터로 옮기는 행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 을 변환행렬(transform matrix)라고 한다.

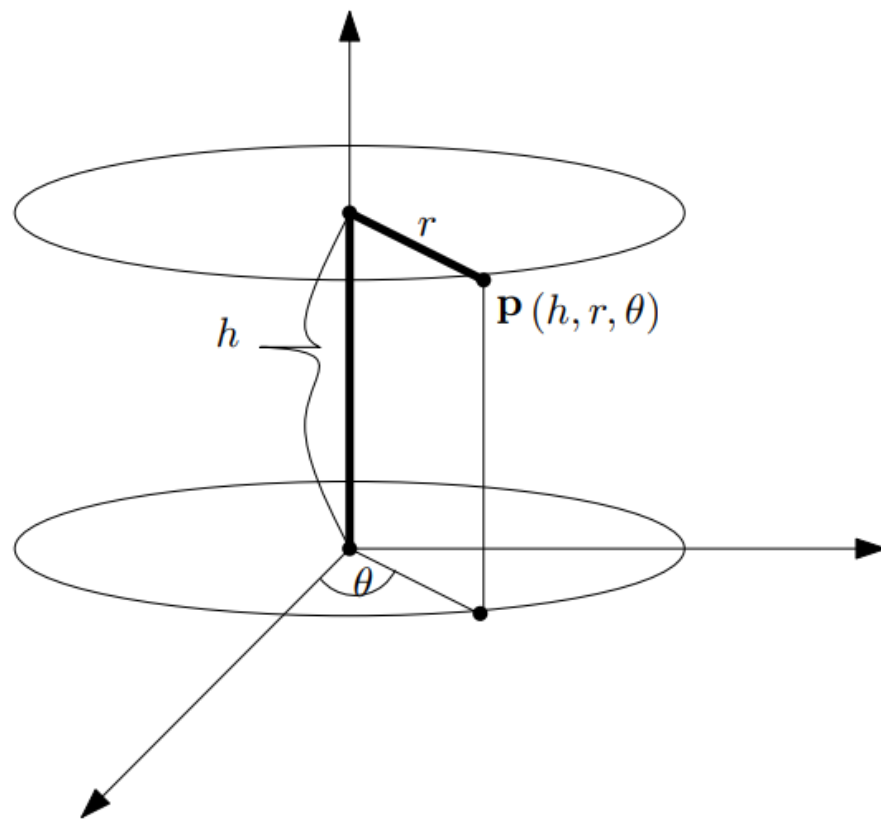
# 좌표계 - 직교 좌표계

- 일반적으로 가장 익숙한 좌표계
- 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)



# 좌표계 - 원기둥 좌표계

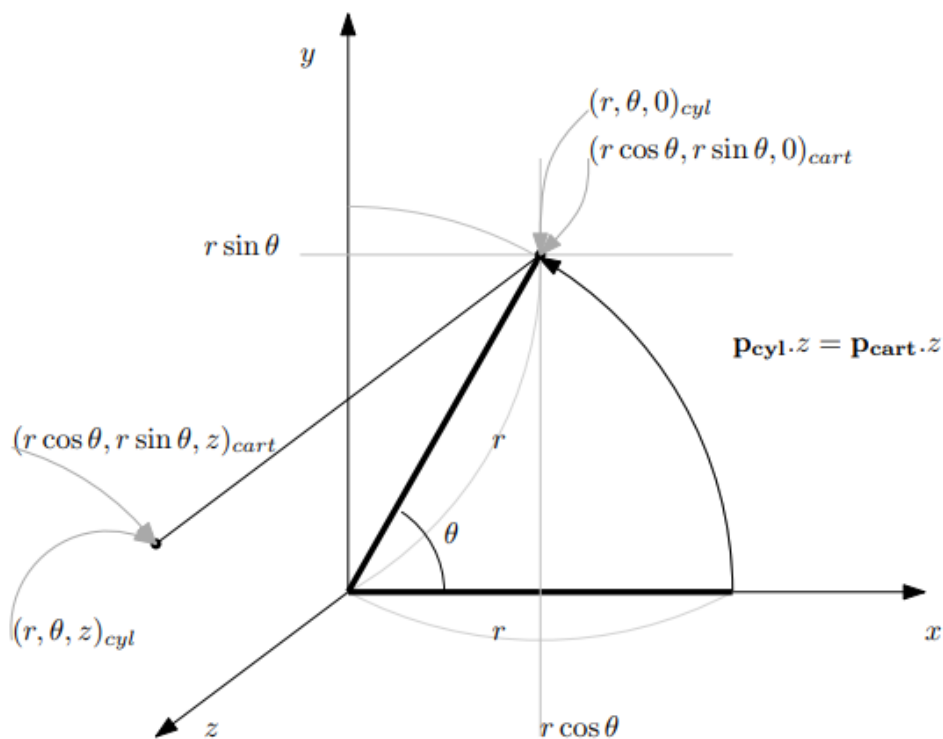
- $\mathbf{p}$ 는 이러한 높이  $h$ 와 반지름  $r$ 을 가진 원기둥의 윗쪽 원주에 놓임
- 원주에서 특정한 위치는 각도  $\theta$ 로 표현
- 원기둥 좌표:  $(r, \theta, h)$



# 좌표계 변환 – 원기둥 좌표계 → 직교좌표계

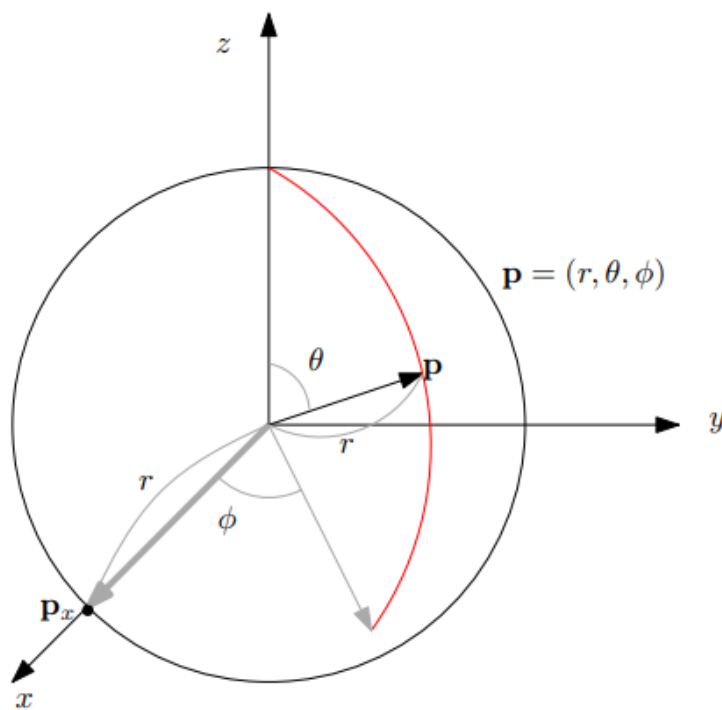
원기둥 좌표계의 좌표를  $\mathbf{p}_{cyl}$ , 직교 좌표계의 좌표를  $\mathbf{p}_{cart}$ 으로 표현하면

$$(r, \theta, h)_{cyl} = (r \cos \theta, r \sin \theta, h)_{cart}$$



# 좌표계 - 구면 좌표계

- $\mathbf{p}$ 를 지나며 중심이 원점인 구면의 반지름을  $r$
- 반지름  $r$ 인 점 가운데  $x$  축 위에 있는 점을  $\mathbf{p}_x$
- $\mathbf{p}_x$ 을  $xy$  평면 위에서  $\mathbf{p}$ 와 같은 경도선에 놓는 각도가  $\phi$
- 이를 들어 올려 점  $\mathbf{p}$ 를 지나도록 하는 데에 필요한 각도를  $\theta$
- 구면 좌표  $(r, \theta, \phi)$



# 좌표계 변환: 구면 좌표계 $\rightarrow$ 직교 좌표계

구면 좌표는 일반적으로 다음과 같은 제한을 갖는다.

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

직교 좌표계의 좌표  $(x, y, z)$ 를 구면 좌표계로 옮기기

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

구면 좌표계의 좌표를 직교 좌표로 옮기기

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

# 어떤 좌표계를 사용해야 하나

- 공간에 존재하는 점을 다룰 때에는 어떠한 좌표계를 사용해도 무방
- 컴퓨터 그래픽스 분야에서 가장 많이 사용되는 좌표계는 직교 좌표계
- 우리는 직교 좌표계에서 변환에 대해 다룰 예정
- 직교 좌표계를 기본적인 좌표계로 삼고 변환과 관련된 행렬 연산을 살필 것



# 어파인(affine) 변환

게임을 구현하기 위한 3차원 그래픽스에서 흔히 사용되는 변환

- 이동변환(translation): 주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮김
- 회전변환(rotation): 2차원은 기준점, 3차원은 기준축을 중심으로 돌림
- 크기변경(scaling): 각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

이러한 변환은 어파인 변환(affine transformation)의 일종

- 서로 연결되어 있음을 의미하는 라틴어 'affinis'에서 유래
- 직선 위의 점들을 직선을 유지한 상태로 변환하는 변환
- 직선 위에서의 점들 사이의 거리 비가 변환된 직선 위에서 그대로 유지
- 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지
- 실시간 컴퓨터 그래픽스에서는 여러 가지 효율성의 이유로 어파인 변환을 사용

# 동차 좌표계

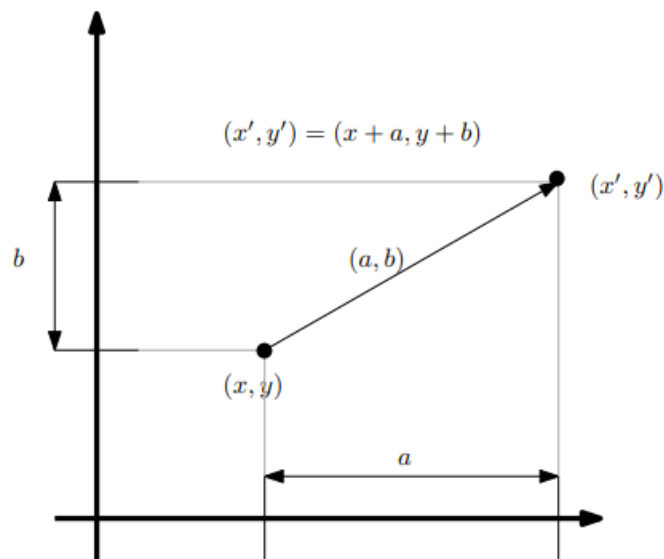
- 동차 좌표(homogeneous coordinate)은  $n$  차원의 사영공간을  $n + 1$  차원의 좌표로 나타내는 좌표계
- 1827년 아우구스트 페르디난드 뫼비우스(August Ferdinand Möbius)가 그의 저작 “Der barycentrische Calcul”에서 처음으로 소개
- 사영기하학에서 사용되는 좌표계
- 무한의 위치에 있는 점을 유한 좌표로 표현하는 데에 적합

## 그래픽스에서 동차좌표계를 사용하는 이유

- 3차원 데카르트 좌표를 사용할 경우 이동은 벡터의 덧셈으로 표현되고, 회전은  $3 \times 3$  행렬의 곱으로 표현
- 이동과 회전이 누적되면 벡터 덧셈과 행렬 곱셈이 연속적 적용됨
- 동차좌표(homogeneous coordinate)을 사용하면 이동과 회전 모두  $4 \times 4$  행렬의 곱으로 표현 가능
- 누적된 이동, 회전 변환을 하나의 행렬로 표현 가능

# 이동 변환

- 2차원: 좌표  $(x, y)$ 를  $x$  축 방향으로  $a$ ,  $y$  축 방향으로  $b$  만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$
- 모든 차원에 대해 어떤 벡터  $\mathbf{a}$ 를 변위 벡터  $\mathbf{d}$ 를 이용하여  $\mathbf{x}'$ 로 옮기는 이동 변환을 다음과 같이 벡터 더하기로 정의할 수 있음
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{d} \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$



# 이동 변환: 동차 좌표계 표현

- 2차원: 좌표  $(x, y)$ 를  $x$  축 방향으로  $a$ ,  $y$  축 방향으로  $b$  만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\ y' &= y + b \\ w &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x' &= 1x + 0y + a \\ y' &= 0x + 1y + b \\ w' &= 0x + 0y + 1\end{aligned}$$



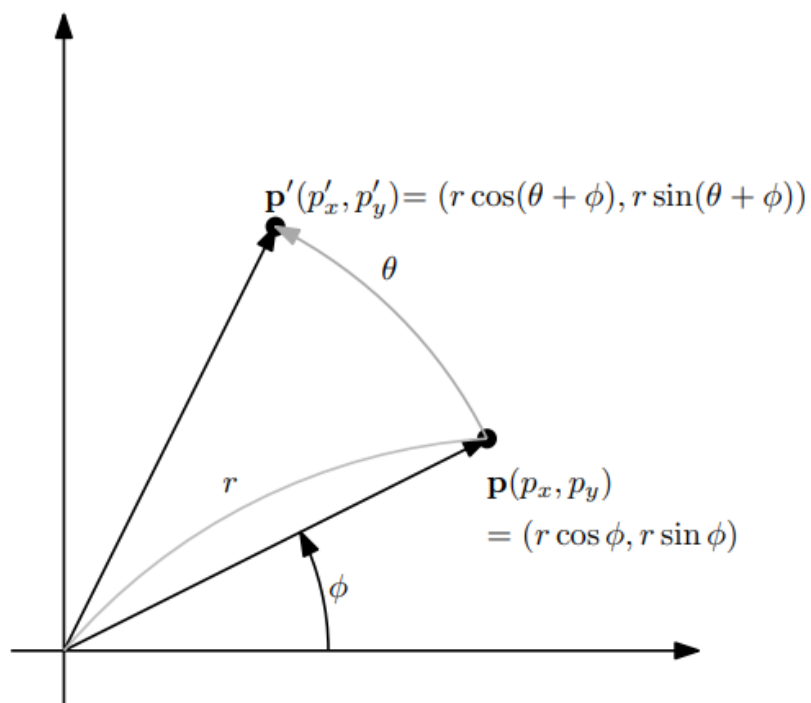
이동 변환 행렬



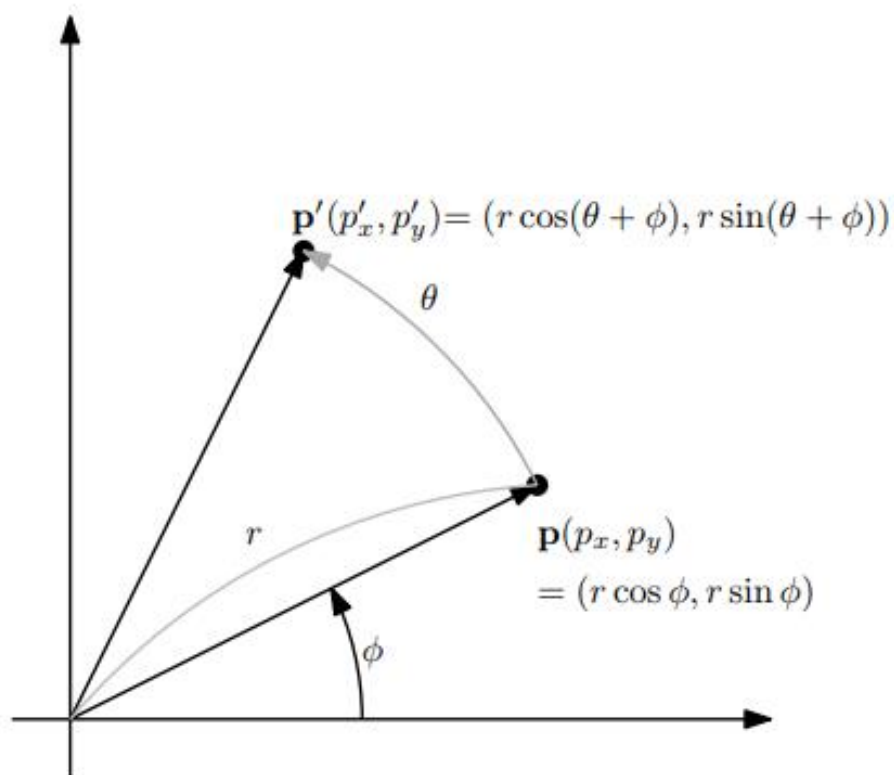
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 2차원 회전 문제

- 2차원 회전의 중심: 피벗(pivot)
- 기본적인 회전: 피벗이 원점인 경우
  - $\mathbf{p}$ 를 원점을 중심으로  $\theta$  만큼 회전하여 놓이는 지점  $\mathbf{p}'$ 를 구하는 문제
  - 원래 좌표  $(p_x, p_y)$ 를  $\theta$  만큼 회전하여 얻는  $(p'_x, p'_y)$ 를 얻는 문제



# 변경된 좌표의 이해



- 원점에서  $(p_x, p_y)$ 로 선분: 선분 길이  $r$ 과  $x$ 축과 이루는 각도  $\phi$
- $(p_x, p_y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$
- 이 좌표를  $\theta$ 만큼 회전하여 얻는  $(p'_x, p'_y)$ 
  - $(p'_x, p'_y) = (r \cos(\theta + \phi), r \sin(\theta + \phi))$

# 변환 결과 좌표의 계산

- $\phi$ 를 계산하지 않고 답을 얻어야 함
- 참조할 공식
  - $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 회전하여 얻는 좌표는 다음과 같이 표현
  - $p'_x = (r \cos \phi) \cos \theta - (r \sin \phi) \sin \theta$
  - $p'_y = (r \cos \phi) \sin \theta + (r \sin \phi) \cos \theta$
- 원래의 좌표  $(p_x, p_y)$ 를 이용하여 표현
  - $p'_x = p_x \cos \theta - p_y \sin \theta$
  - $p'_y = p_x \sin \theta + p_y \cos \theta$

# 2차원 회전변환의 행렬 표현

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점  $\mathbf{p}$ 를 원점 기준으로  $\theta$ 만큼 회전시켜  $\mathbf{p}'$ 를 얻는 변환은 회전변환 행렬  $\mathbf{R}(\theta)$ 을 이용하여  $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$ 로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



# 2차원 회전변환의 동차좌표계 표현

$$\begin{aligned}x' &= \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' &= \sin\theta x + \cos\theta y \\ w &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x' &= \cos\theta x - \sin\theta y + 0 \\ y' &= \sin\theta x + \cos\theta y + 0 \\ w' &= 0x + 0y + 1\end{aligned}$$

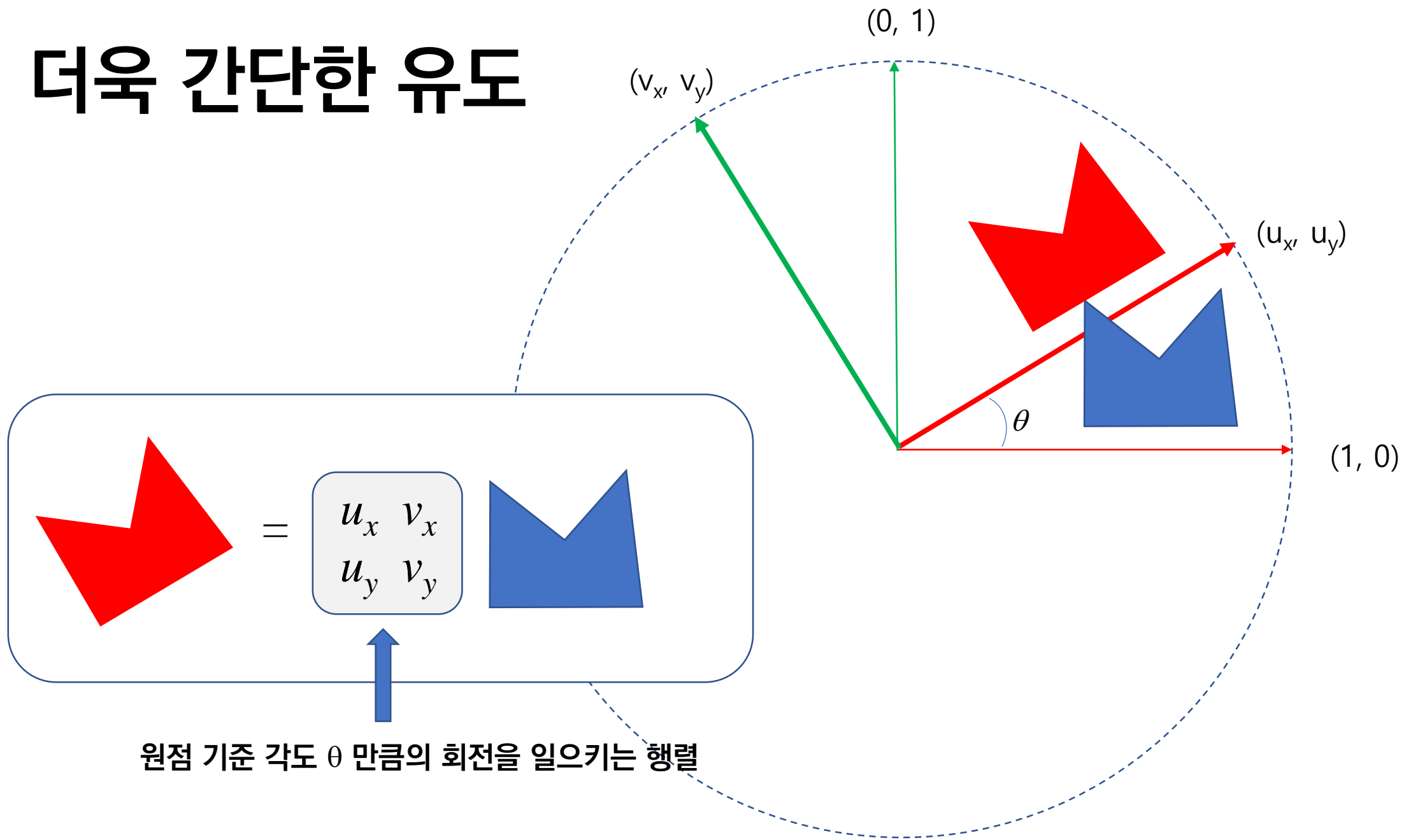


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

회전 변환 행렬



# 더욱 간단한 유도

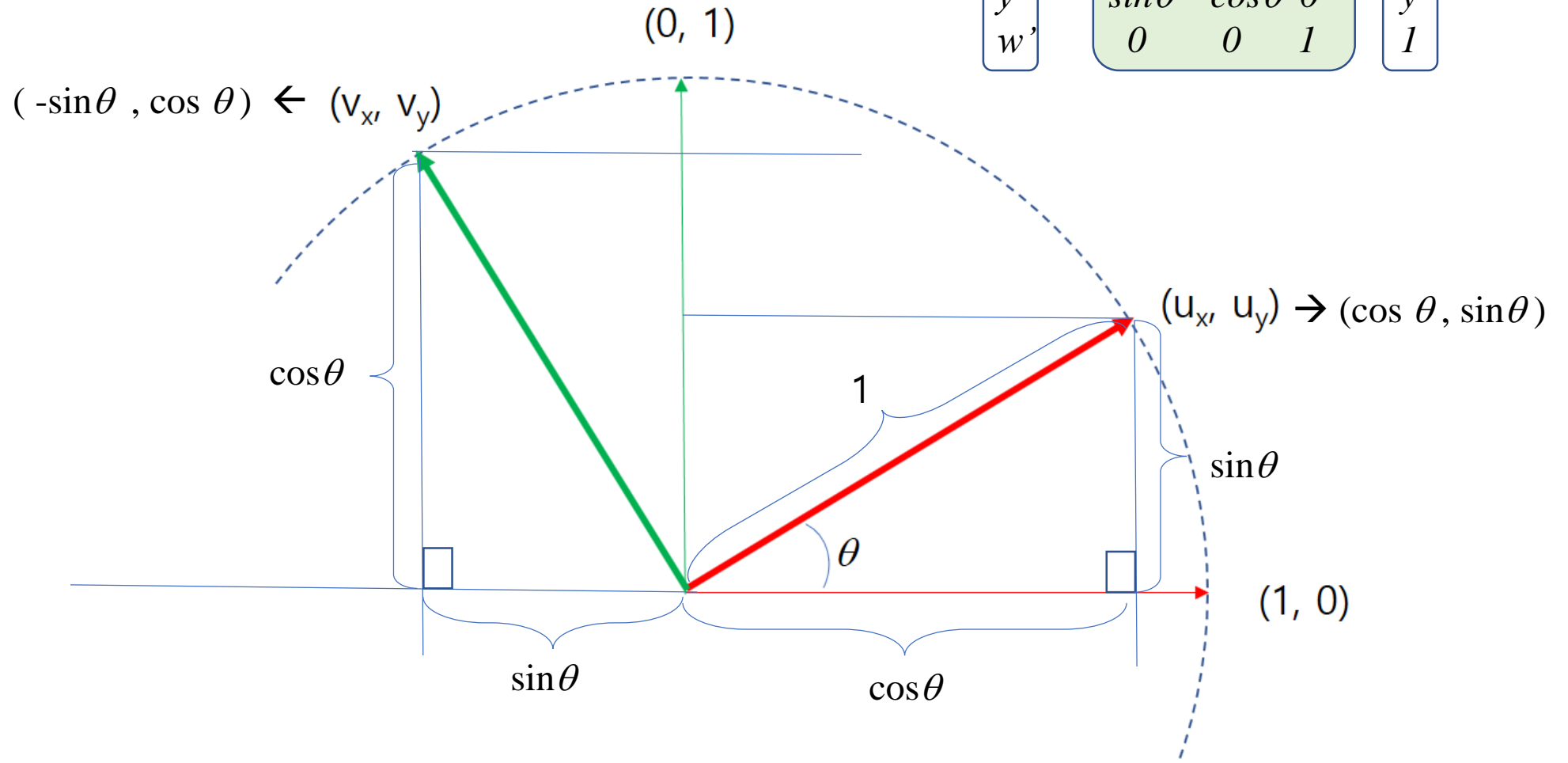


# 더욱 간단한 유도

회전 변환 행렬



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# 3차원 회전 행렬 - z축 회전

- 2차원 회전을 그대로 3차원에 적용
  - 3차원 좌표  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 을  $z$  기준으로 회전
- 이 변환은 2차원 변환에  $z$  성분만 추가
  - $z$  축 성분은 그대로 유지된다. ( $p'_z = p_z$ )
  - $p_x, p_y$ 의 값은 2차원 회전과 동일하게 변환된다.

$$\begin{aligned} p'_x &= \cos \theta \cdot p_x - \sin \theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\ p'_y &= \sin \theta \cdot p_x + \cos \theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\ p'_z &= 0 \cdot p_x + 0 \cdot p_y + 1 \cdot p_z \end{aligned}$$

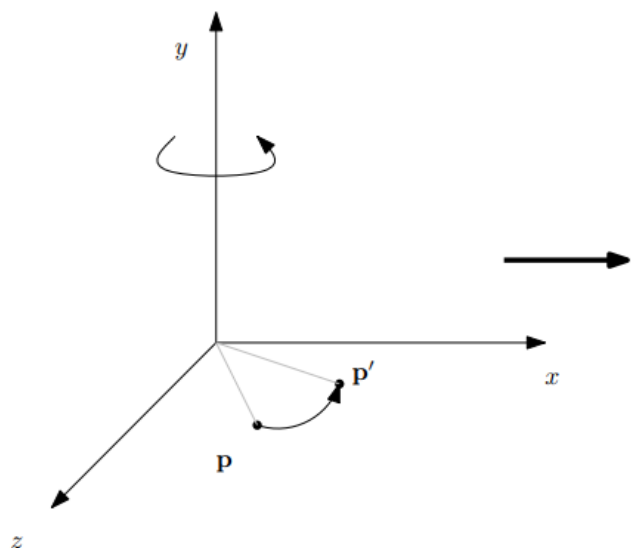
이것은 다음과 같은 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

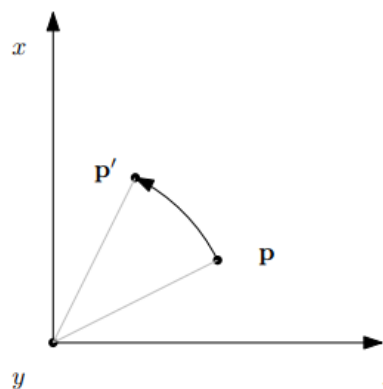
동차좌표계 표현

# 3차원 회전 행렬 - y축 회전



- $z$  축은 2차원 회전의  $x$  축에 대응
- $x$  축은 2차원 회전의  $y$  축에 대응

$$\begin{aligned} p'_z &= \cos \theta \cdot p_z - \sin \theta \cdot p_x + 0 \cdot p_y \\ p'_x &= \sin \theta \cdot p_z + \cos \theta \cdot p_x + 0 \cdot p_y \\ p'_y &= 0 \cdot p_z + 0 \cdot p_x + 1 \cdot p_y \end{aligned}$$



순서를 재배열하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} p'_x &= \cos \theta \cdot p_x + 0 \cdot p_y + \sin \theta \cdot p_z \\ p'_y &= 0 \cdot p_x + 1 \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\ p'_z &= -\sin \theta \cdot p_x + 0 \cdot p_y + \cos \theta \cdot p_z \end{aligned}$$

이것도 역시 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

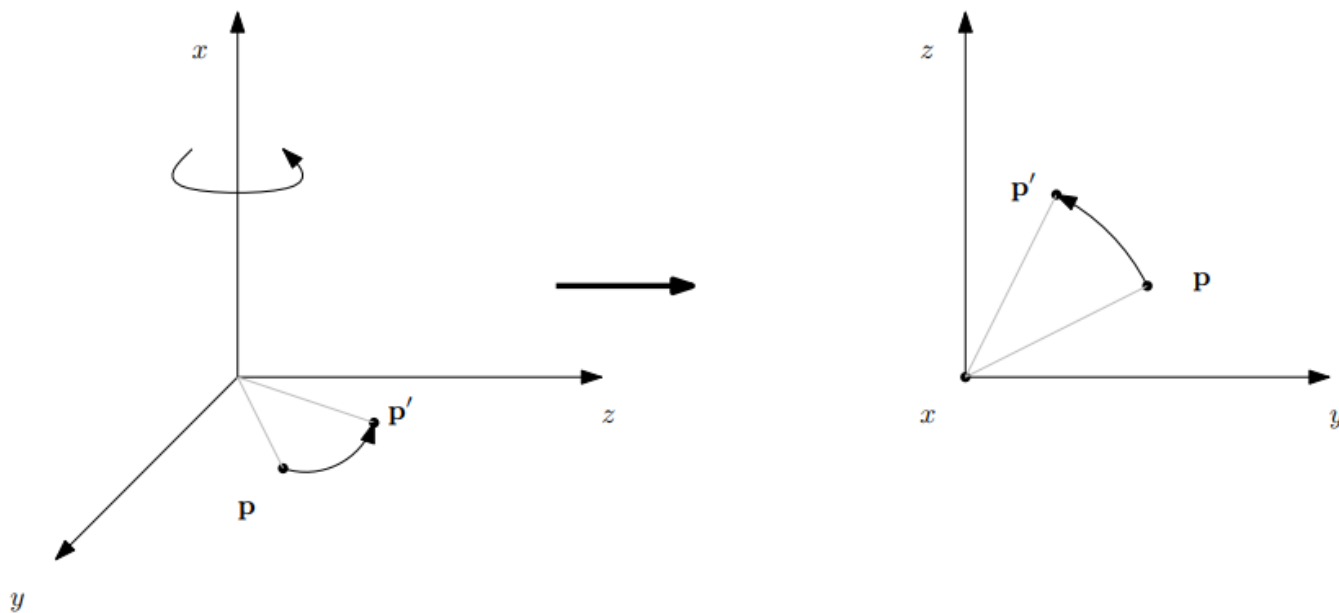
$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동차좌표계 표현

# 3차원 회전 행렬 - x축 회전

- 2차원 회전에서  $x, y$ 의 역할에  $y$ 와  $z$  축이 각각 대응



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p'_y &= \cos \theta \cdot p_y - \sin \theta \cdot p_z + 0 \cdot p_x \\ p'_z &= \sin \theta \cdot p_y + \cos \theta \cdot p_z + 0 \cdot p_x \\ p'_x &= 0 \cdot p_y + 0 \cdot p_z + 1 \cdot p_x \end{aligned}$$

0	1	0	0
0	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
0	0	0	1

동차좌표계 표현

# 회전행렬의 역행렬

- 회전행렬은 특별한 특징을 지님 (2차원 회전행렬을 보자)
  - 첫 열 벡터는 길이는  $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ 이므로 1
  - 두 번째 열의 길이 역시  $\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$ 로 1
  - 즉 두 벡터 모두 단위 벡터 (정규)
  - 이 두 벡터를 서로 내적하면  $\cos \theta(-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta$ 로 0
  - 두 벡터가 서로 수직 (직교)
- 모든 벡터는 단위 벡터이고 서로 직교 = 정규직교(orthonormal)
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치(transpose)와 같음
- 3차원 회전행렬들도 정규직교임을 쉽게 확인 가능

$$\mathbf{R}_x^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x^T(\theta)$$

$$\mathbf{R}_y^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y^T(\theta)$$

$$\mathbf{R}_z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z^T(\theta)$$

# 수시평가 3

- 다음 선형 방정식을 풀라

$$1.2 x_1 + 2.1 x_2 + 3.3 x_3 + 2.6 x_4 + 3.0 x_5 + 8.9 x_6 + 1.3 x_7 + 1.1 x_8 + 9.1 x_9 + 6.2 x_{10} = 255.9$$

$$2.1 x_1 + 1.1 x_2 + 4.3 x_3 + 2.6 x_4 + 1.2 x_5 + 1.1 x_6 + 1.5 x_7 + 2.1 x_8 + 9.4 x_9 + 0.2 x_{10} = 154.1$$

$$1.2 x_1 + 2.1 x_2 + 3.3 x_3 + 2.6 x_4 + 3.0 x_5 + 1.1 x_6 + 1.5 x_7 + 2.1 x_8 + 9.4 x_9 + 0.2 x_{10} = 161.2$$

$$1.2 x_1 + 1.1 x_2 + 4.3 x_3 + 2.6 x_4 + 1.2 x_5 + 1.1 x_6 + 0.3 x_7 + 1.1 x_8 + 9.1 x_9 + 6.2 x_{10} = 194.1$$

$$1.2 x_1 + 0.1 x_2 + 0.3 x_3 + 0.6 x_4 + 1.0 x_5 + 0.9 x_6 + 0.3 x_7 + 0.1 x_8 + 0.1 x_9 + 0.2 x_{10} = 20.9$$

$$1.2 x_1 + 1.1 x_2 + 1.3 x_3 + 1.6 x_4 + 1.0 x_5 + 1.9 x_6 + 1.3 x_7 + 1.1 x_8 + 1.1 x_9 + 1.2 x_{10} = 69.9$$

$$2.2 x_1 + 2.2 x_2 + 3.3 x_3 + 4.4 x_4 + 5.5 x_5 + 6.6 x_6 + 1.1 x_7 + 1.2 x_8 + 9.3 x_9 + 6.4 x_{10} = 266.2$$

$$1.2 x_1 + 2.1 x_2 + 3.3 x_3 + 4.4 x_4 + 5.5 x_5 + 6.6 x_6 + 1.1 x_7 + 1.1 x_8 + 9.1 x_9 + 6.2 x_{10} = 260.4$$

$$1.2 x_1 + 2.1 x_2 + 3.3 x_3 + 2.6 x_4 + 3.0 x_5 + 1.9 x_6 + 7.3 x_7 + 1.1 x_8 + 1.1 x_9 + 6.2 x_{10} = 193.9$$

$$1.2 x_1 + 2.1 x_2 + 3.3 x_3 + 4.6 x_4 + 3.0 x_5 + 1.9 x_6 + 9.3 x_7 + 1.1 x_8 + 1.1 x_9 + 6.2 x_{10} = 205.9$$