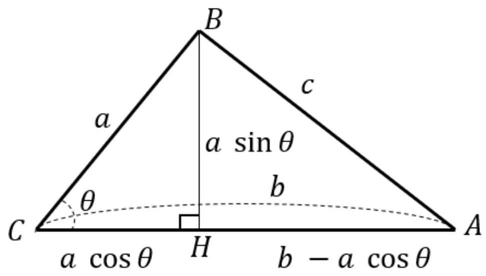
부록: 내적의 성질에 대한 간단한 증명

내적이 가지는 다음의 성질을 증명하는 것으로 내적의 속성을 깊이 이해해 보도록 하자.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \cos\theta$$

우선 다음과 같은 삼각형이 있을 경우에 대하여 아래의 코사인 법칙이 성립함을 증명해보도록 하자.

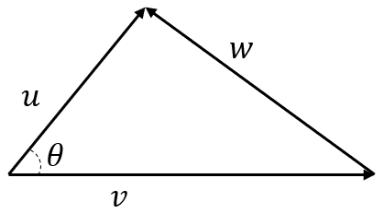
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



삼각형의 한 변의 길이는 일반적인 관례에 따라 a, b, c로 각각 표현하였으며, 각 변을 마주보는 꼭지점을 각각 A, B, C라고 하자. 그리고, 변 a와 밑변 b 사이의 각은 θ로 표기하였다. 여기에서는 θ가 90도 보다 작은 예각일 경우에 대한 증명인데, θ가 90도인 경우와 90도보다 큰 경우에 대한 증명도 아래 증명을 참고로 쉽게 유도할 수 있다.

우선, 꼭지점 B에서 변 b에 대한 수선의 발을 내려 이 수선과 밑변 b와 만나는 점을 H 라고 하자. $\overline{CH}$의 길이는 $a\cos\theta$이며 $\overline{BH}$의 길이는 $a\sin\theta$라는 사실을 바탕으로 $\overline{HA}$의 길이가 $b - a\cos\theta$라는 것을 유도할 수 있다. 이제 피타고라스의 정리를 바탕으로 다음과 같이 c^2을 전개하면 우리는 손쉽게 코사인 법칙을 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\sin C)^2 + (b - a\cos C)^2 \\ &= a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C \\ &= a^2\left(\sin^2 C + \cos^2 C\right) + b^2 - 2ab\cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$



이제, 그림과 같은 임의의 세 개의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$와 이 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 벡터의 사이각 θ를 함께 고려해 보도록 하자. 여기서 $\mathbf{w}$는 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$로 정의된다. 이것을 바탕으로 벡터 $\mathbf{w}$의 곱을 다음과 같이 전개해 보도록 하자.

$$\begin{aligned}\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

이 전개의 결과로 우리는 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{(수식 1)}$$

앞서 다룬 코사인 법칙과 이전 절에서 다룬 벡터의 내적과 길이의 관계를 이용하여 우리는 다음의 (수식 2)도 유도할 수 있을 것이다.

$$||\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta \quad \text{(수식 2)}$$

위의 (수식1)과 (수식2)를 결합하여 우리는 다음의 식이 성립하는 것을 확인할 수 있다.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta$$