부록: 가위곱 크기의 성질에 대한 증명

벡터의 내적이 두 벡터의 투영과 관련된 성질이라고 하면, 가위곱의 크기는 두 벡터가 이루는 평행사변형의 면적과 같다는 성질은 매우 흥미롭다. 이러한 성질은 다음과 같은 전개를 통해서 증명해 볼 것이다.

우선 삼차원 공간에서 벡터 $\mathbf{u}$의 성분을 (e, f, g)로, $\mathbf{v}$의 성분을 (p, q, r)이라고 표기하자. 아래 첨자 표기대신 다른 표기를 사용한 이유는 증명에 필요한 스칼라 값이 매우 많기 때문에 좀 더 간편한 표기로 바꾼 것이다. 이 두 벡터의 가위곱 벡터의 성분은 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (fr - gq, gp - er, eq - fp)$로 정의될 수 있는데, 이 가위곱 벡터의 크기를 구해보자. 벡터의 크기는 각 성분의 제곱값을 모두 더한 값의 제곱근을 취한 것과 같으므로 다음과 같은 (수식 1)을 얻을 수 있을 것이다.

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = \sqrt{(fr - gq)^2 + (gp - er)^2 + (eq - fp)^2} \quad \text{(수식 1)}$$

(수식 1)의 제곱근 내부의 식을 전개해보면 다음 수식을 얻을 수 있으며, 여기서 이 수식이 (수식 1)의 우변과 동일한 값이라는 것을 기억해두자.

$$\sqrt{f^2r^2 - 2frgq + g^2q^2 + g^2p^2 - 2gper + e^2r^2 + e^2q^2 - 2eqfp + f^2p^2}$$

이 값의 제곱을 취하게 되면 제곱근이 사라질 것이며, 따라서 $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2$은 다음과 같다.

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = f^2r^2 - 2frgq + g^2q^2 + g^2p^2 - 2gper + e^2r^2 + e^2q^2 - 2eqfp + f^2p^2 \quad \text{(수식 2)}$$

이제 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 벡터가 이루는 사이각을 θ라고 하고 두 벡터의 평행사변형의 면적을 아래와 같이 정의한 후 이 식을 전개시켜보도록 하자.

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \sin\theta$$

이 식의 전개를 위해서는 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \cos\theta$와 같은 내적의 성질을 이용하게 될 것이다. 이제 아래와 같은 방법으로 이 식을 전개시켜 보도록 하자.

$$\begin{aligned}
||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 \sin^2\theta \\
&= ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 \cos^2\theta \\
&= ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2
\end{aligned}$$

이제, 우리가 알고있는 $||\mathbf{u}||^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (e, f, g) \cdot (e, f, g)$, $||\mathbf{v}||^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (p, q, r) \cdot (p, q, r)$, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = ||(e, f, g) \cdot (p, q, r)||^2$이라는 성질을 마지막 수식에 적용하여 보자.

$= (e^2 + f^2 + g^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (ep + fq + gr)(ep + fq + gr)$
$= e^2p^2 + e^2q^2 + e^2r^2 + f^2p^2 + f^2q^2 + f^2r^2 + g^2p^2 + g^2q^2 + g^2r^2 - e^2p^2 - epfq - epgr - fqep - f^2q^2 - fqgr - grep - grfq - g^2r^2$
$= f^2r^2 - 2frgq + g^2q^2 + g^2p^2 - 2gper + e^2r^2 + e^2q^2 - 2eqfp + f^2p^2$ (수식 3)

이와 같은 다소 길게 느껴지는 전개를 통해서 **(수식 2)와 (수식 3)이 동치가 된다**는 것을 확인할 수 있으며, $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \sin\theta$도 쉽게 증명이 되었다.

벡터의 외적을 구하는 식은 행렬식을 구하는 것과 동일한 방법을 사용하는데, 이러한 **선형식의 풀이결과가 두 벡터가 이루는 평행사변형의 면적의 합과 같다**는 사실은 매우 흥미롭다.