게임 수학 – 강의 7
행렬식과 역행렬

동명대학교 게임공학과

강영민

행렬식

- 정사각 행렬에서 정의됨
- 행렬식의 표현
  - 행렬 A의 행렬식 = det A 혹은 |A|

- 행렬식을 계산하기 위해 필요한 개념
  - 소행렬식 minor
  - 여인자 cofactor

- 소행렬식
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: 이 행렬은 $m \times n$개의 소행렬식(minor) M_{ij}를 가짐
  - 각 M_{ij}는 $\mathbf{A}$ 행렬의 i 행 벡터 전체와 j 열 벡터 전체를 제거하고 얻어지는 행렬($\in \mathbb{R}^{m-1 \times n-1}$)의 행렬식
- 여인자
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 여인자는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정
  - 다음과 같이 정의되는 $m \times n$개의 여인자 C_{ij}가 존재
  - $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

행렬식 계산

- 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 i 행, j 열 여인자 C_{ij}를 이용한 행렬식 계산

$$
\begin{aligned}
det\mathbf{A} \quad = |\mathbf{A}| \quad &= \sum_{j=1}^{n} A_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}C_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{nj}C_{nj} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{i1}C_{i1} = \sum_{i=1}^{n} A_{i2}C_{i2} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} A_{in}C_{in}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{A}$의 임의의 행 벡터 $\mathbf{A}_{i,*}$와 $\mathbf{C}$의 동일 위치 행 벡터 $\mathbf{C}_{i,*}$의 내적
- $\mathbf{A}$의 임의의 열 벡터 $\mathbf{A}_{*,j}$와 $\mathbf{C}$의 동일 위치 열 벡터 $\mathbf{C}_{*,j}$의 내적

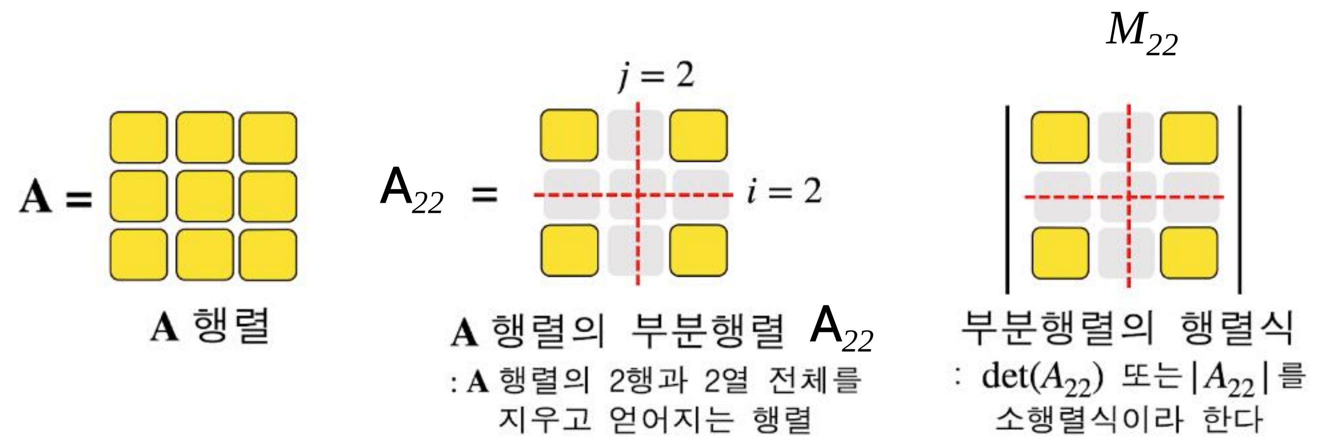
$$
det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \mathbf{A}_{i,*}\mathbf{C}_{i,*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{*,j}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{*,j}
$$

여인자를 구하면
행렬식을 구할 수 있다

소행렬식 구하기

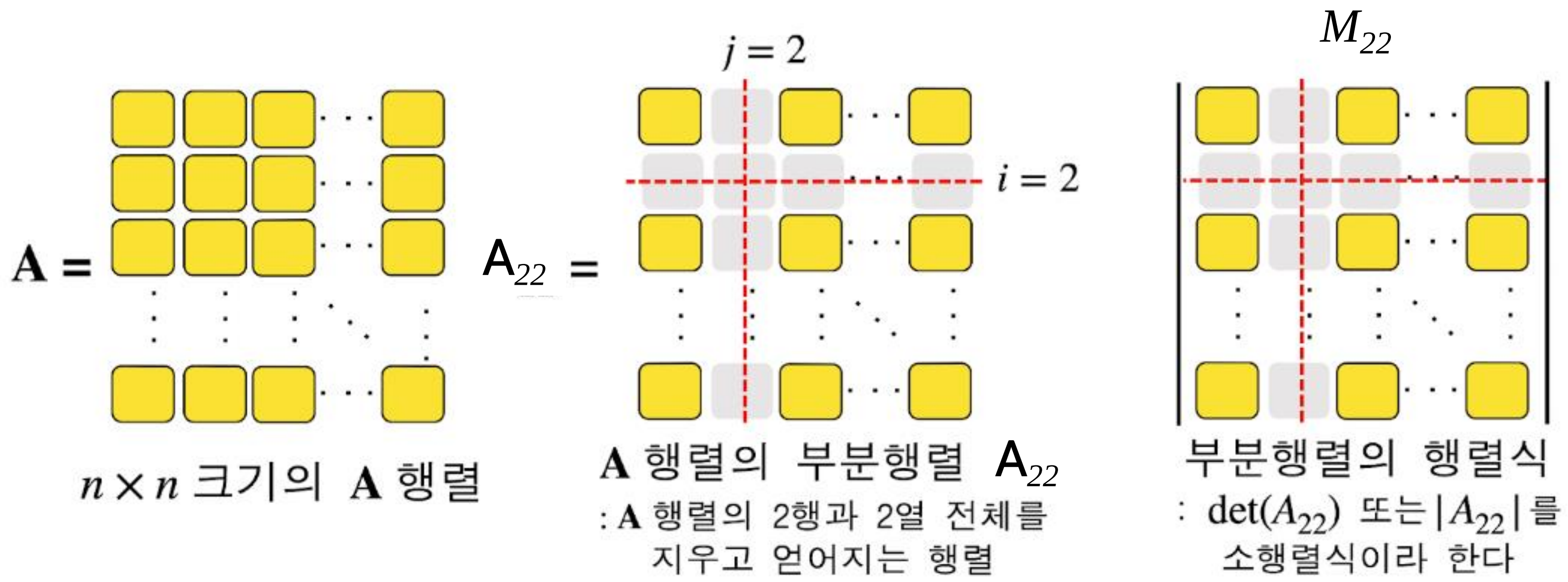
- 부분행렬
  - A의 부분행렬 A_{ij}는 행렬 A의 i행과 j열을 제거하고 얻는 행렬
    - A의 i행과 j열 성분을 의미하는 A_{ij} 와 혼동하지 않을 것

- 소행렬식
  - M_{ij} : A_{ij} 의 행렬식



소행렬식의 일반화

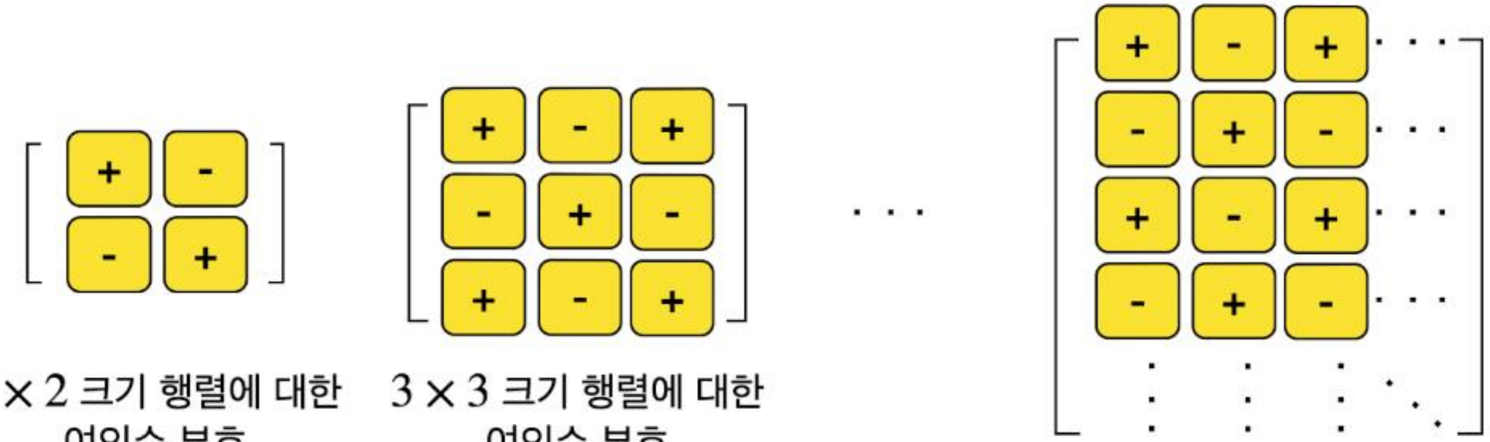
- n x n 행렬



여인수

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}) \Longleftrightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

여인수cofactor는 소행렬식이 구해지는 위치마다 결정되며 그 값이 그림과 같이 소행렬식과 같거나 **위치에 따라 부호만 달라질 수 있다.**



2×2 크기 행렬에 대한 여인수 부호

3×3 크기 행렬에 대한 여인수 부호

$(-1)^{i+j}$ 에 따라 결정되는 여인수의 부호

행렬식의 계산 – 여인수 전개

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1n} C_{1n}$$

행렬이 3차 정사각 행렬일 때:

2x2 부분행렬로 구함

$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

행렬이 4차 정사각 행렬일 때:

3x3 부분행렬로 구함

$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

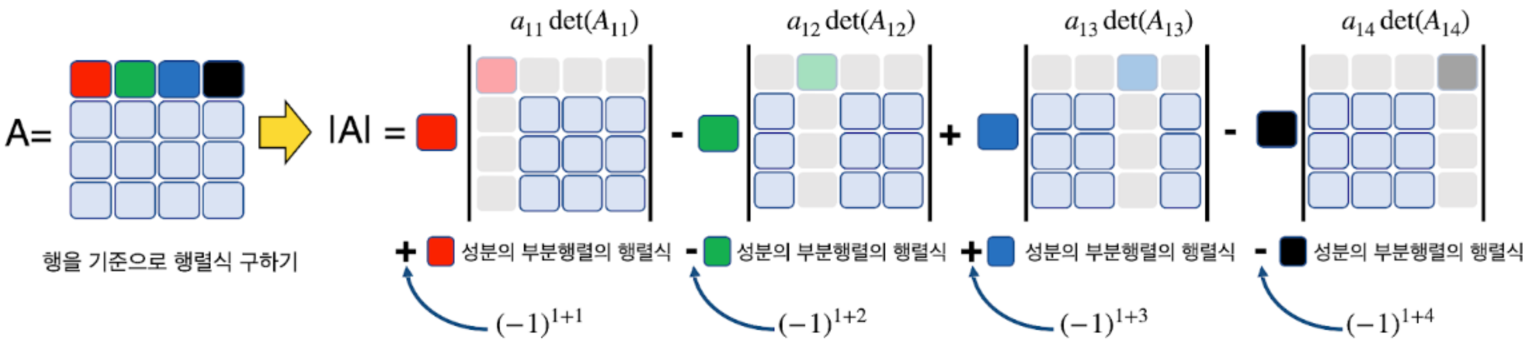
행렬이 n차 정사각 행렬일 때:

(n−1)x(n−1) 부분행렬로 구함

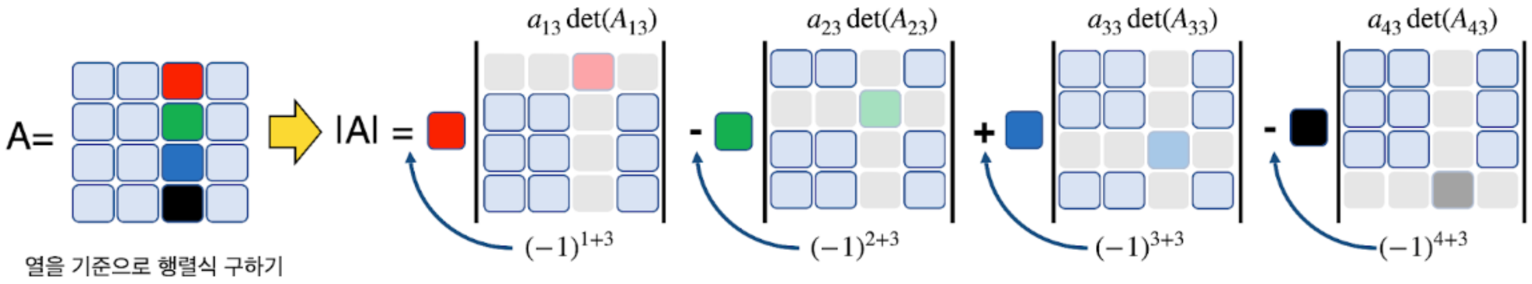
$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

재귀 호출을 통해 구현 가능
: 2x2 행렬의 행렬식은?

행렬식의 계산 – 여인수 전개



임의의 행이나 열을 선택하여 여인수 전개 적용



2x2 예제

- 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- 소행렬식의 행렬

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \det[d] & \det[c] \\ \det[b] & \det[a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

여인자의 행렬

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}d & (-1)^{1+2}c \\ (-1)^{2+1}b & (-1)^{2+2}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

행렬식

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

3x3 예제

행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

행렬식

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 - 8) - 1 \cdot (4 - 10) + 0 \cdot (-16 - (-10)) \\ &= -12 \end{aligned}$$

행렬식 계산 효율

- 다음 행렬의 행렬식을 구하는 빠른 방법은?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 30 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 0이 가장 많은 행이나 열을 찾는다

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{0} & 30 & 15 \\ 3 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

해당 행이나 열을 기준으로 여인수 전개

$$\det \mathbf{A} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 30 & 15 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

삼각행렬의 행렬식

- 잘 살펴 보자

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

정리 6.1 - 삼각행렬의 행렬식

어떤 행렬 $\mathbf{A}$가 $n \times n$ 크기의 상삼각행렬, 하삼각행렬, 또는 대각행렬일 경우 이 행렬의 행렬식 $\det(\mathbf{A})$은 다음과 같이 주대각성분의 곱이다.

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}}$$

행렬식 계산 구현 – 재귀호출

- Det(A):
  - Select a row or a column ➔ v
  - Compute the vector of cofactors along v ➔ c
    - Computation of cofactors
      - Recursive call of Det(Aij)
  - Compute the inner product of v and c and return the result

```
M = np.random.rand(4,4)

print(M)

M12 = np.delete(np.delete(M, 1, axis=0), 2, axis=1)

print(M12)
```

submatrix 구하기 예시

```
[[0.09173146 0.31002178 0.00114925 0.56483156]
 [0.6702642  0.10518936 0.04424309 0.99360292]
 [0.7855713  0.83524755 0.4896947  0.92187119]
 [0.69052721 0.19332984 0.19512489 0.84153646]]
[[0.09173146 0.31002178 0.56483156]
 [0.7855713  0.83524755 0.92187119]
 [0.69052721 0.19332984 0.84153646]]
```

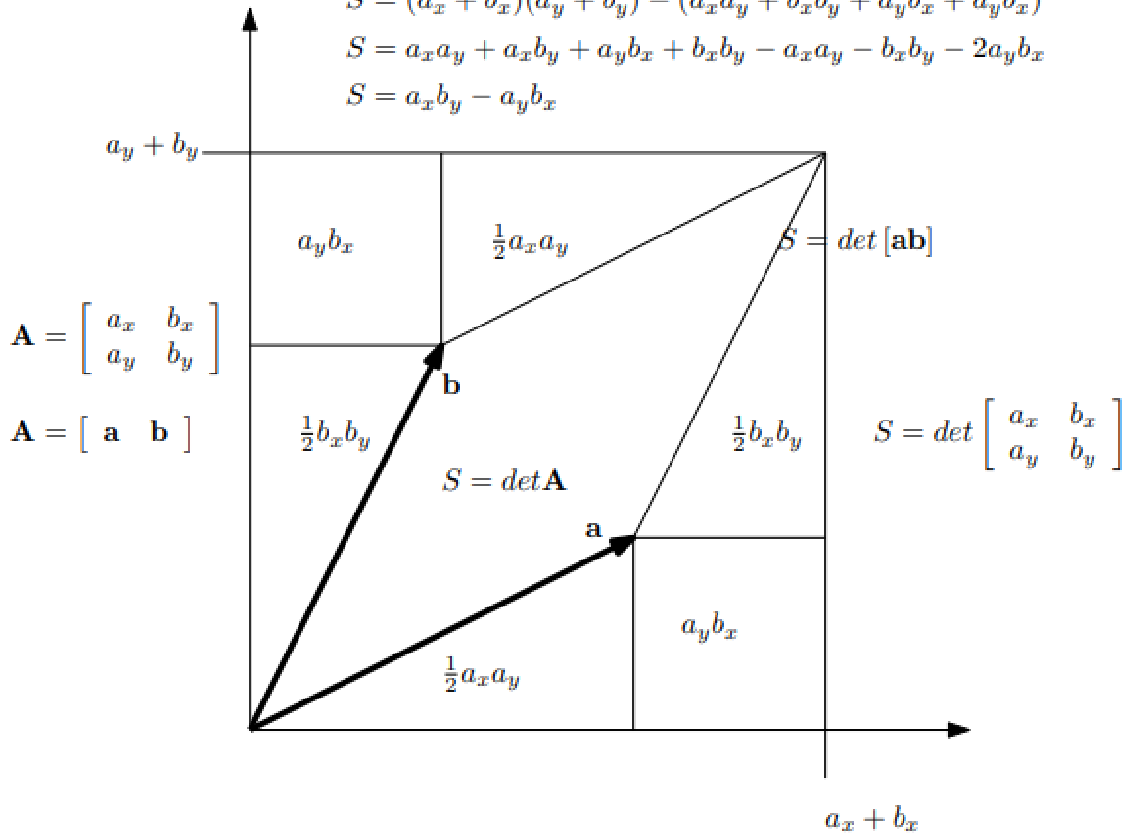
행렬식의 기하적 의미

두 열 벡터 $\mathbf{a} = (a_x a_y)^{\mathrm{T}}$와 $\mathbf{b} = (b_x, b_y)^{\mathrm{T}}$를 열로 하는 행렬 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$$

이 두 벡터를 두 개의 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 행렬 $\mathbf{A}$의 행렬식

$$S = (a_x + b_x)(a_y + b_y) - (a_x a_y + b_x b_y + a_y b_x + a_y b_x)$$
$$S = a_x a_y + a_x b_y + a_y b_x + b_x b_y - a_x a_y - b_x b_y - 2a_y b_x$$
$$S = a_x b_y - a_y b_x$$

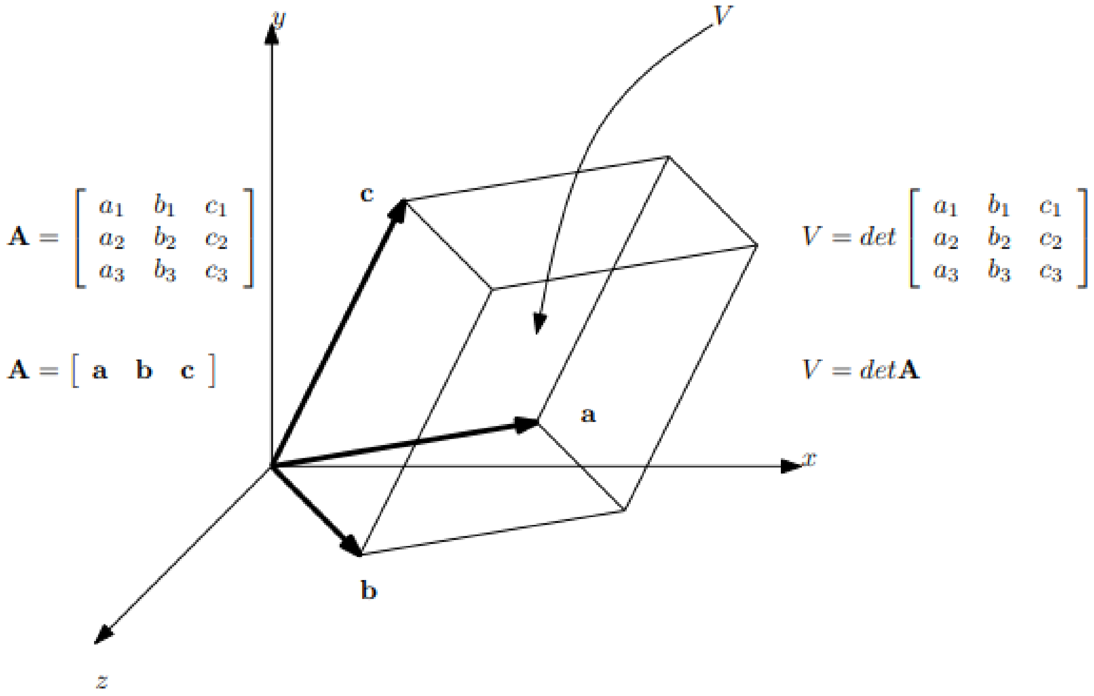


3x3 행렬의 기하적 이해

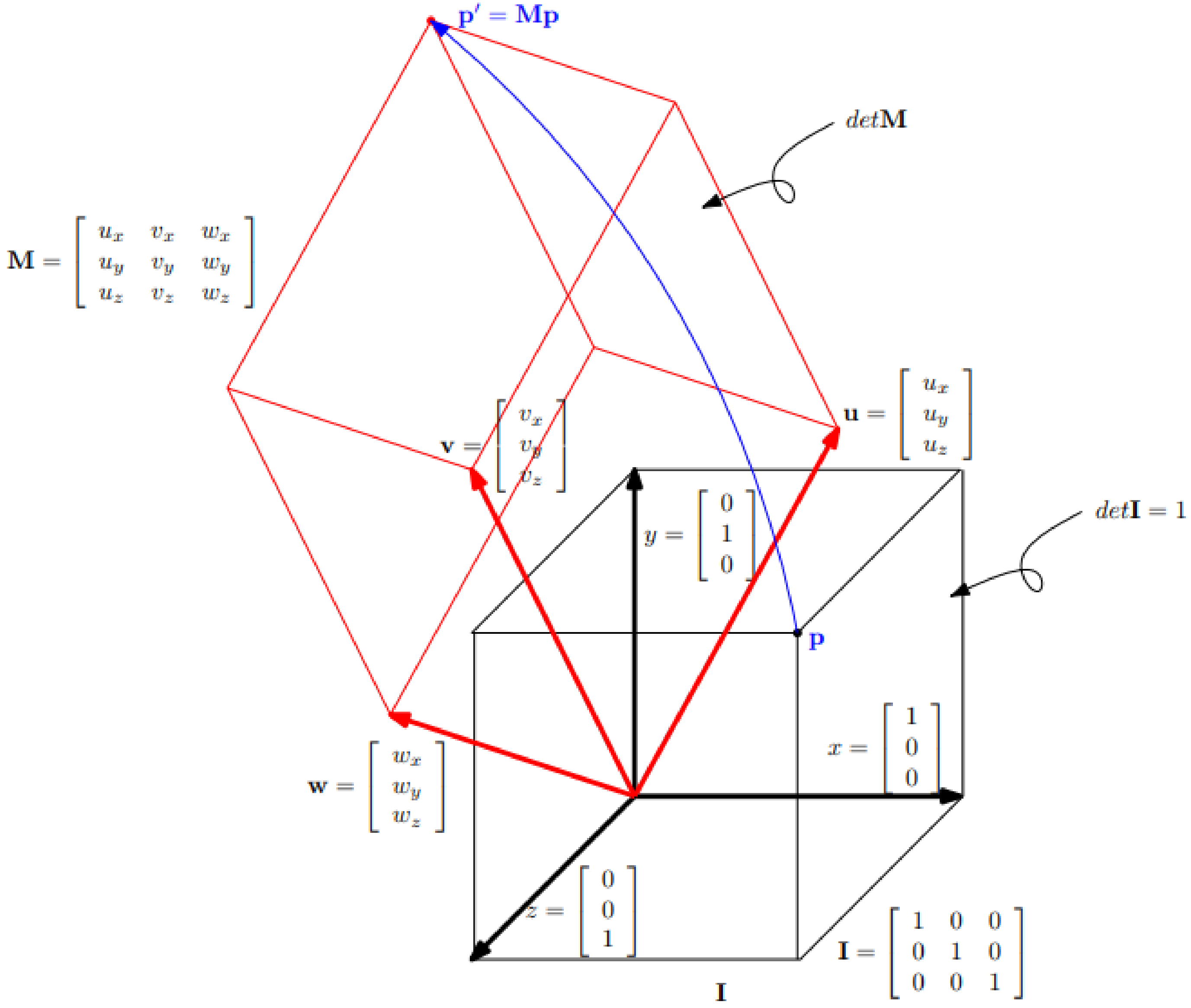
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$는 세 개의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 포함

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

이 세 개의 벡터들이 만드는 평행육면체의 크기가 세 개의 벡터들로 구성된 행렬의 행렬식



변환으로서의 3x3 행렬과 행렬식의 이해



행렬식의 특성

- 몇 가지 기억해 둘 행렬식의 특성

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow |k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

역행렬

- 역행렬은 정방행렬에만 존재
- $\mathbf{A}$의 역행렬이 존재한다면, 이 역행렬을 $\mathbf{A}^{-1}$로 표현
- 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$은 다음과 같은 조건을 만족
  - $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
  - $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

- 역행렬이 존재하는 행렬을 가역행렬(invertible matrix)
- 역행렬이 존재하지 않는 행렬은 특이행렬(singular matrix)

- 의사 역행렬(pseudo-inverse)
  - 행렬 $\mathbf{A}$가 정방행렬이 아니고 $\mathbb{R}^{m\times n}$에 속한다고 하자. 다른 어떤 행렬 $\mathbf{B}$가 $\mathbb{R}^{n\times m}$에 속하면, 두 행렬의 곱 $\mathbf{AB}$는 $\mathbb{R}^{m\times m}$에 속하는 정방행렬이 된다. 만약 $\mathbf{AB} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$이라면, $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$의 의사 역행렬(pseudo-inverse)라고 한다.

역행렬의 계산

- 역행렬의 계산은 수반행렬(adjoint matrix)를 이용하여 쉽게 정의
  - 행렬 $\mathbf{A}$의 수반행렬: 여인자 C_{ij}를 성분으로 하는 행렬 $\mathbf{C}$의 전치 (transpose)

$$adj\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

- 수반행렬을 행렬의 행렬식으로 나누면 역행렬이 된다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

식은 간단하지만, 여인자를 구하는 재귀호출이 매우 많은 계산을 요구