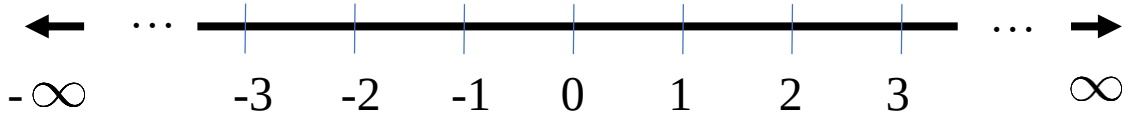
게임 수학 – 강의 9
복소수의 곱과 회전, 그리고 쿼터니언

동명대학교 게임공학과
강영민

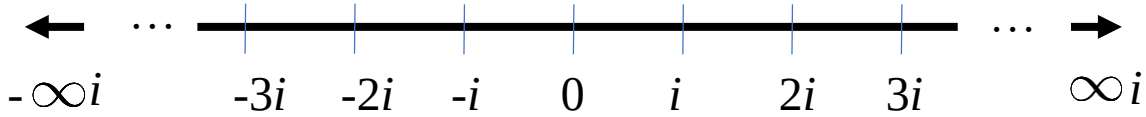
허수imaginary number

- 허수란?
  - 제곱해서 −1이 되는 수를 단위 i로 하는 수 체계
  - 실수 집합에서는 아무리 찾아도 제곱해서 음수가 되는 수는 찾을 수 없음
- 실수의 단위는 1, 허수의 단위는 i

- 실수는 수직선으로 표현 가능



- 허수도 수직선으로 표현 가능



복소수complex number

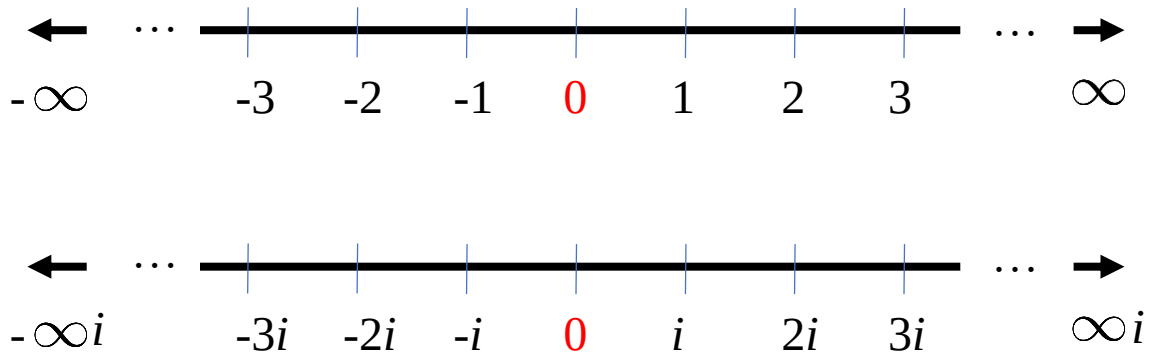
- 실수와 허수가 함께 만드는 수
  - 실수 + 허수

- 실수 + 실수 ➔ 실수 $\alpha + \beta = \gamma$
- 허수 + 허수 ➔ 허수 $\alpha i + \beta i = \gamma i$

- 실수와 허수의 덧셈 : $\alpha + \beta i = ?$
  - 실수 α와 허수의 크기 β는 서로 **연산이 되지 않음**
    - 더 줄일 수 없는 표현 : $\alpha + \beta i$ ← 복소수

복소수complex number는 어디에 있나?

- 실수와 허수 모두 수직선에 표시할 수 있음

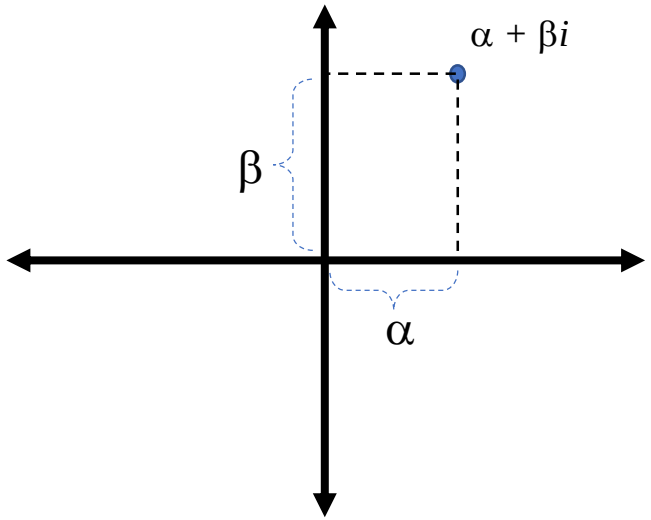


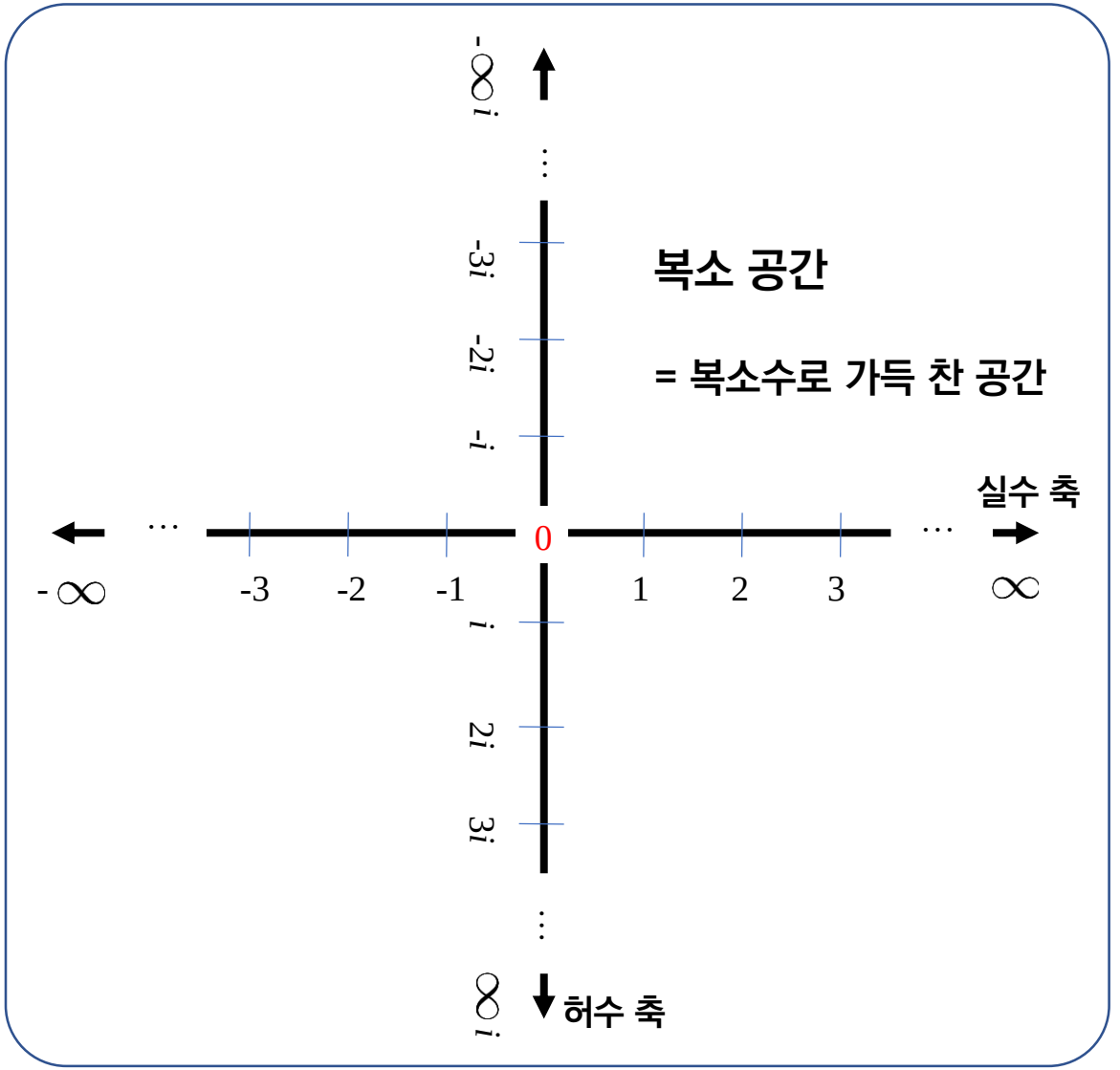
- 복소수는 어디에 있나?
  - 실수 수직선에도 없고, 허수 수직선에도 찍을 수 없음
  - 두 수직선의 밖에 있음
  - 두 수직선은 하나의 동일한 값을 가짐: 0

복소수complex number는 어디에 있나?

- 실수 수직선과 허수 수직선이 공유하는 값은 한 곳에
  - 실수는 가로축
  - 허수는 세로축
  - 실수와 허수도 아닌 어마어마하게 넓은 공간이 생성된다

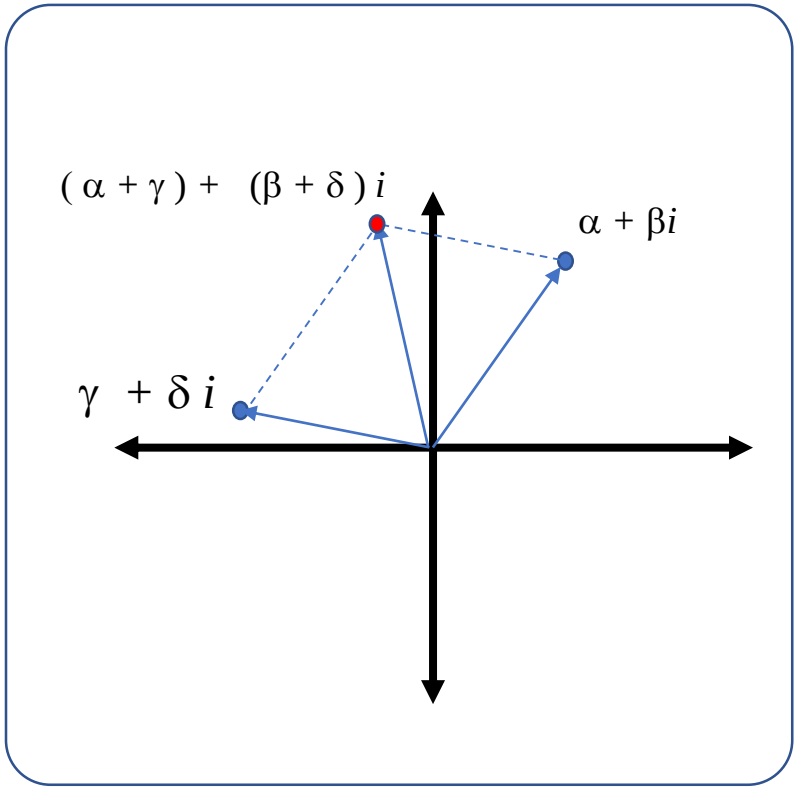
- (x, y) 좌표처럼 실수와 허수로 좌표 표현 가능
  - $(\alpha , \beta i)$
  - 이곳이 바로 $\alpha + \beta i$





복소수는 벡터와 비슷?

- 벡터처럼 덧셈과 뺄셈을 하면 각 축별로 이루어짐
  - 덧셈
    - 복소수 표현: $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i$
    - 벡터 표현 : $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$
  - 뺄셈
    - 복소수 표현: $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) i$
    - 벡터 표현 : $(\alpha, \beta) - (\gamma, \delta) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$



복소수의 곱셈은

- 복소수의 곱셈은?
  - 벡터는 스칼라 곱인 점곱과 벡터 곱인 가위곱이 존재
  - 복소수의 곱셈은
    - 실수와 허수는 곱셈이 가능 (허수를 실수배 하는 일)
    - 허수끼리 곱하면 음수
    - 두 복소수를 자연스럽게 곱할 수 있음
    - $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha(\gamma + \delta i) + \beta i(\gamma + \delta i)$

$$= \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2$$: 청색은 허수, 적색은 실수

$$= \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma) i$$

복소수의 곱셈이 무슨 의미가 있을까?

- 복소수의 곱이 기하적으로 의미를 가질까?
  - 복소수 곱을 벡터의 변환으로 이해해 보자

- $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$

- $(\alpha + \beta i)(x + y i) = \alpha x - \beta y + (\alpha y + \beta x)i$
  $= x' + y' i$

$$x' = \alpha x - \beta y$$
$$y' = \beta x + \alpha y$$

선형변환

$(\alpha + \beta i)$ 를 $(x + y i)$ 에 곱한다는 것은
복소공간의 점 (x, y) 에 행렬

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

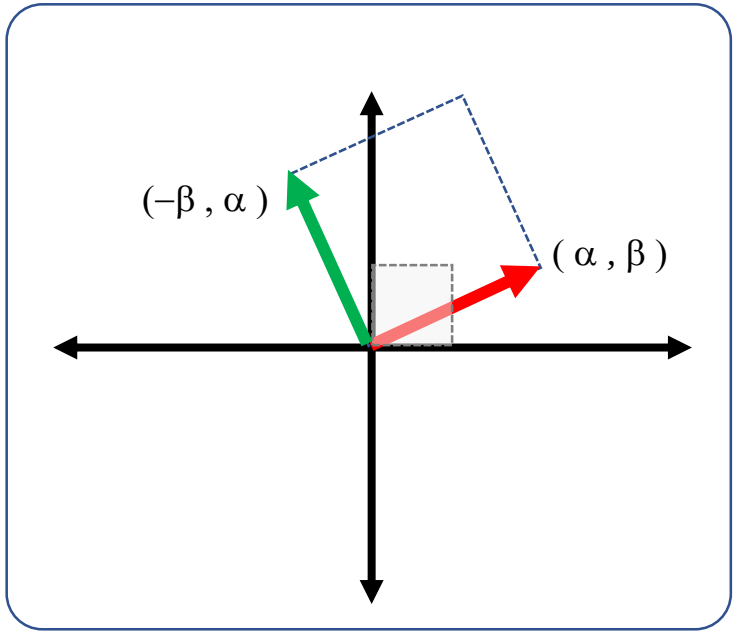
를 곱해서 변환하는 것과 같다

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

복소수의 곱셈은 어떤 변환을 하나

- 행렬을 그려보자

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta i)(x + y i)$$

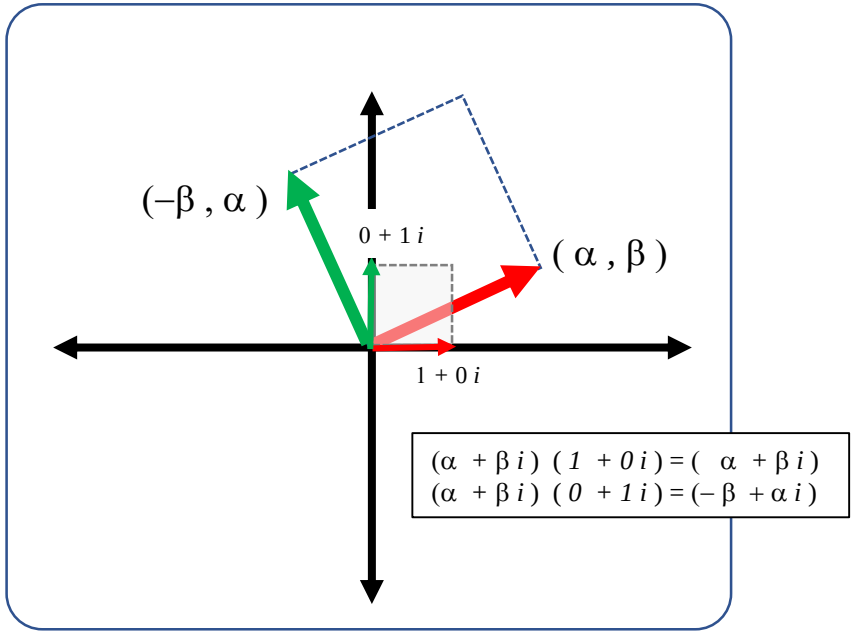


- 변환의 기하적 의미
  - 오른쪽 그림의 회색 사각형 = 축에 정렬된 단위 사각형
  - 이 단위 사각형이
    - 행렬의 1열 벡터를 표시하는 붉은 축과 2열 벡터인 녹색 축이 만드는 공간으로 옮겨짐
  - 이 붉은 색 축과 녹색 축은 언제나 직교 = 두 축의 내적은 언제나 0 $(-\alpha\beta + \alpha\beta)$
    - 공간이 크기만 커지거나 줄어들지 찌그러지지 않음
    - 축에 따라 크기가 바뀐 공간이 회전을 하게 됨

복소수의 곱셈은 어떤 변환을 하나

- 행렬을 그려보자

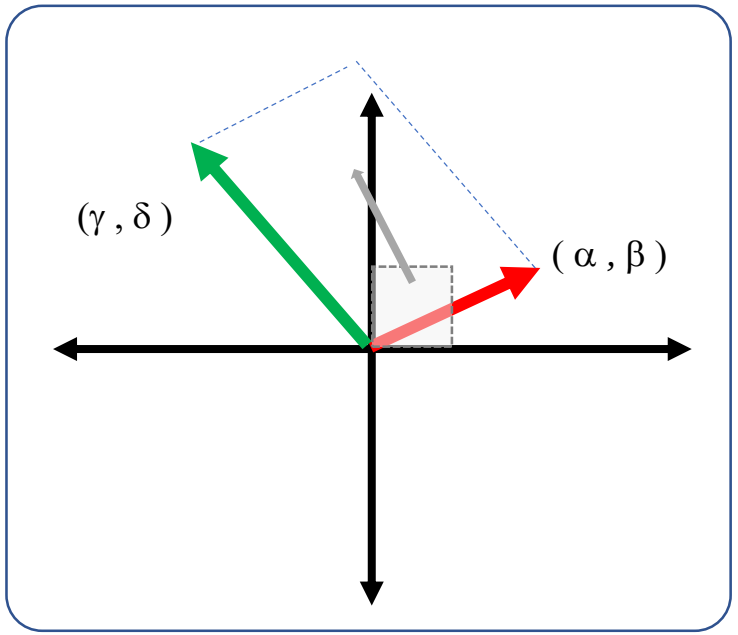
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta i)(x + y i)$$

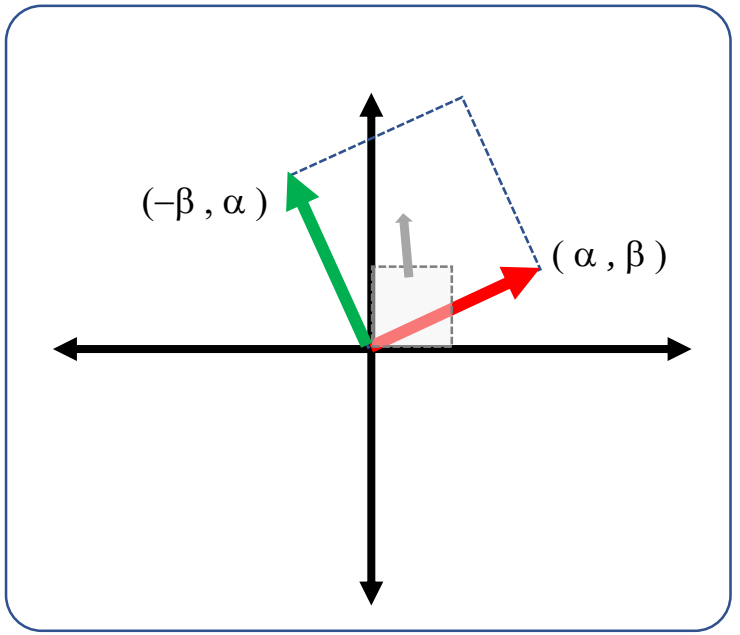


행렬곱셈과 복소수 곱셈의 비교

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \times$$

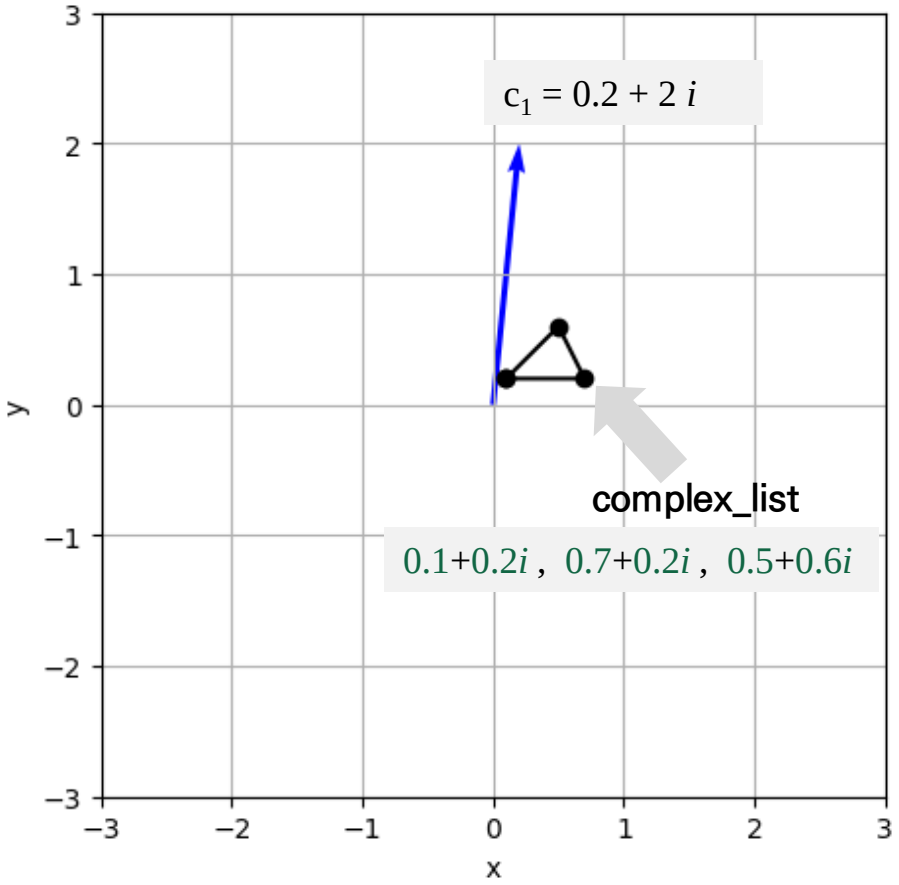
$$(\alpha + \beta i) \times$$



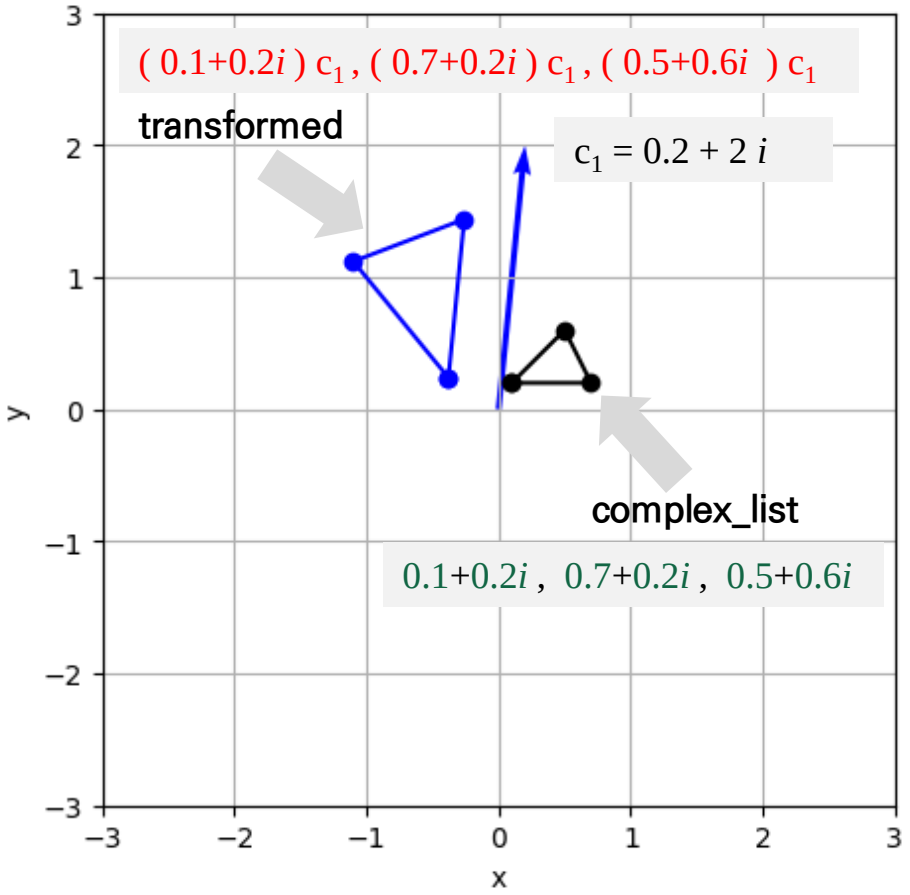


복소수를 곱하는 것은 복소평면 내의 변환이다.
행렬이 직교축을 임의의 축으로 옮겨 놓는다면,
복소수 곱하기는 회전과 스케일 둘만 적용되어
새로운 좌표축도 여전히 직교로 남게 변환된다.

```
axis = prepareAxis2D(x=[-3, 3], y=[-3, 3])
c1 = 0.2 + 2j
complex_list = [ 0.1+0.2j, 0.7+0.2j, 0.5+0.6j]

visComplex(axis, c1)
drawComplex(axis, complex_list)
```

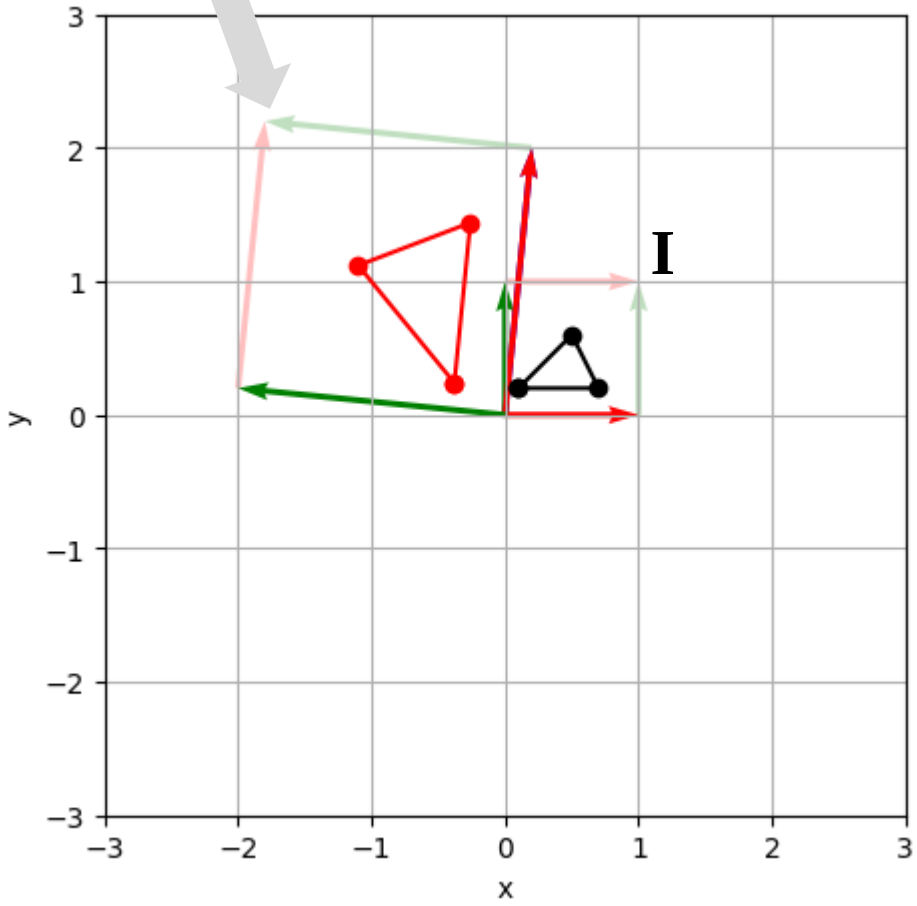



```
axis = prepareAxis2D(x=[-3, 3], y=[-3, 3])
c1 = 0.2 + 2j
complex_list = [ 0.1+0.2j, 0.7+0.2j, 0.5+0.6j]
transformed = [ c1 * c for c in complex_list ]

visComplex(axis, c1)
drawComplex(axis, complex_list)
drawComplex(axis, transformed, color='red')
```



```
axis = prepareAxis2D(x=[-3, 3], y=[-3, 3])

c1 = 0.2 + 2j
complex_list = [ 0.1+0.2j, 0.7+0.2j, 0.5+0.6j]
transformed = [ c1 * c for c in complex_list ]

visComplex(axis, c1, color='blue')

# original space
visMat22(axis, np.eye(2))
drawComplex(axis, complex_list)

# transformed space
M = np.array([[c1.real, -c1.imag ],
              [c1.imag,  c1.real ]])
visMat22(axis, M)
drawComplex(axis, transformed, color='red')
```

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \text{c1.real} & \text{-c1.imag} \\ \text{c1.imag} & \text{c1.real} \end{pmatrix}$$



복소수 곱하기로 표현하는 회전 변환

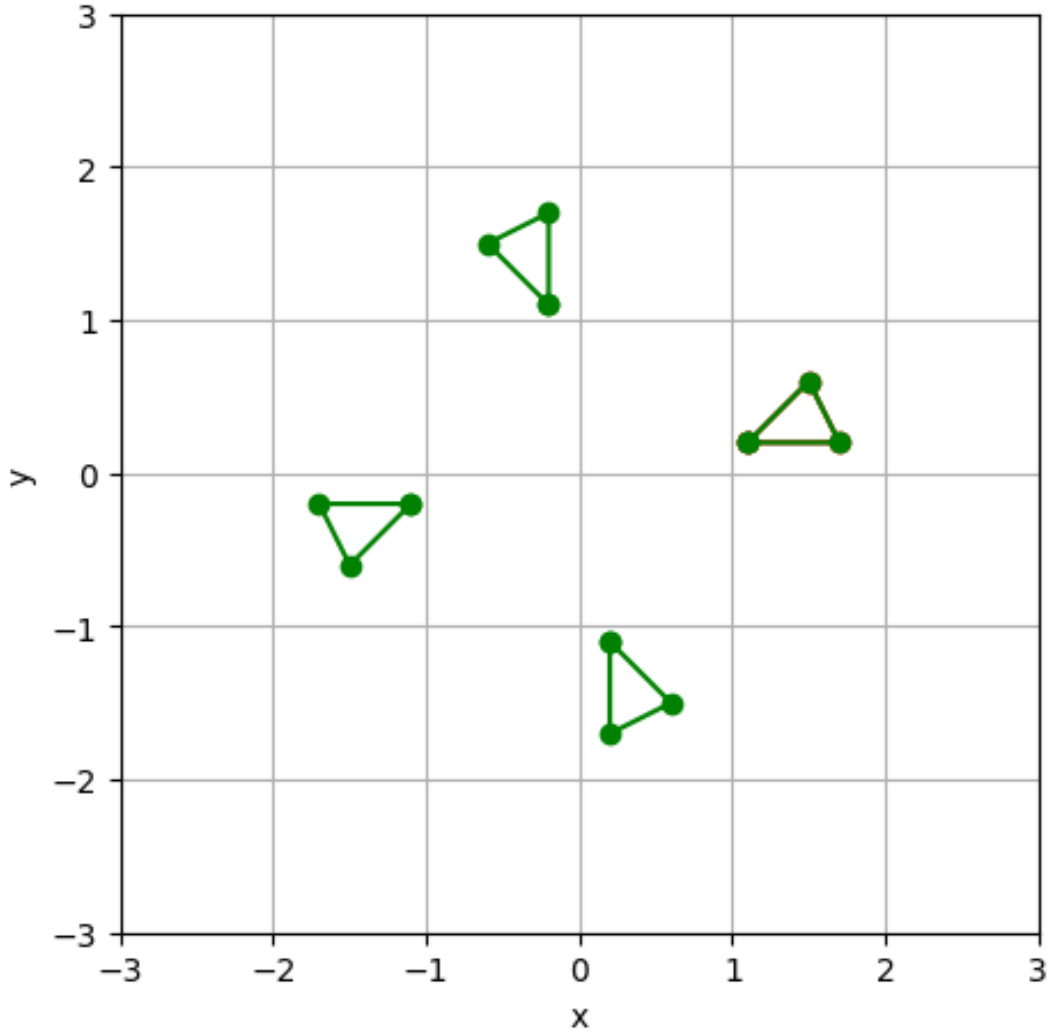
- 회전 행렬

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\cos\theta + \sin\theta\, i)\ (x + y\, i)$$

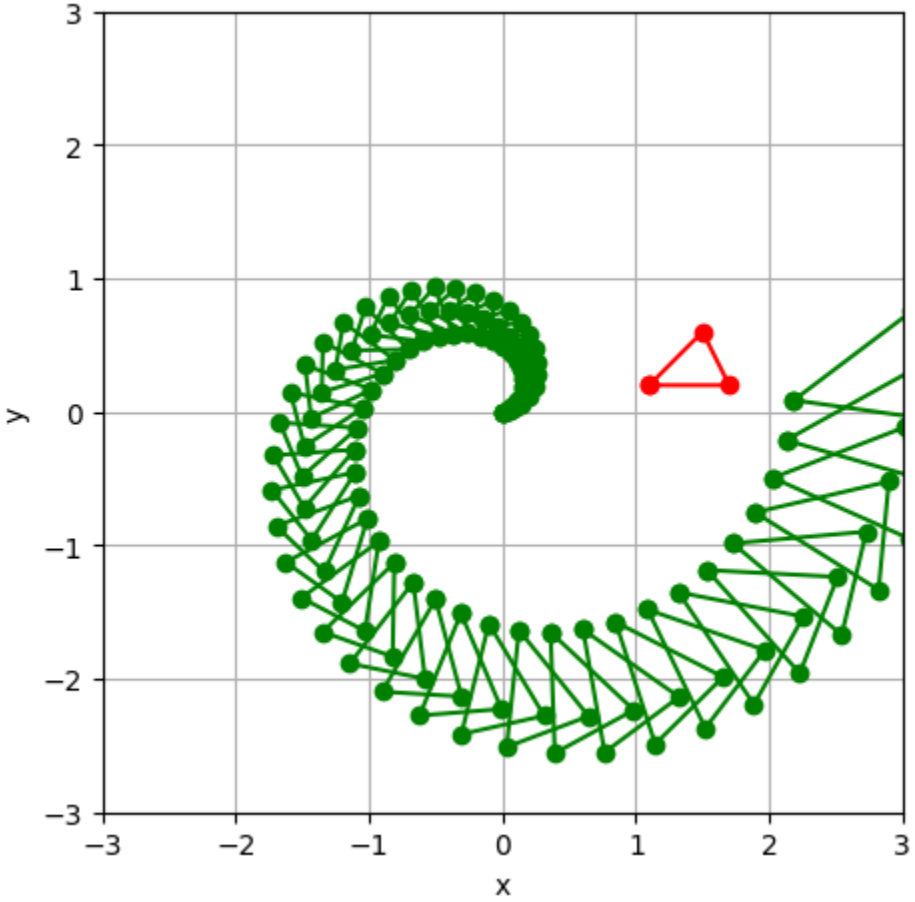
복소수를 이용한 기하객체의 회전

```
axis = prepareAxis2D(x=[-3, 3], y=[-3, 3])

points = [ 1.1+0.2j, 1.7+0.2j, 1.5+0.6j]
drawComplex(axis, points, color="red")

for degree in range(0, 360, 90):
    angle = 3.141592 * degree / 180.0
    c = math.cos(angle)
    s = math.sin(angle)
    r = complex(c, s)
    transformed = [ r * p for p in points ]
    drawComplex(axis, transformed, color='green')
```

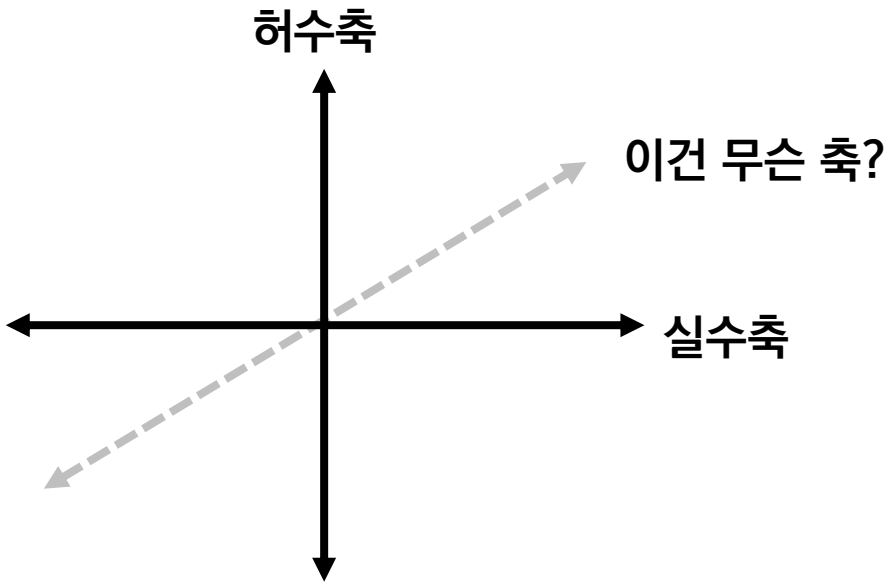


복소수의 크기를 이용한 기하객체의 크기변경+회전

```
axis = prepareAxis2D(x=[-3, 3], y=[-3, 3])

points = [ 1.1+0.2j, 1.7+0.2j, 1.5+0.6j]
drawComplex(axis, points, color="red")

for degree in range(0, 360, 8):
    angle = 3.141592 * degree / 180.0
    c = math.cos(angle)
    s = math.sin(angle)
    r = (degree/180) * complex(c, s)
    transformed = [ r * p for p in points ]
    drawComplex(axis, transformed, color='green')
```



3차원 공간에서는?



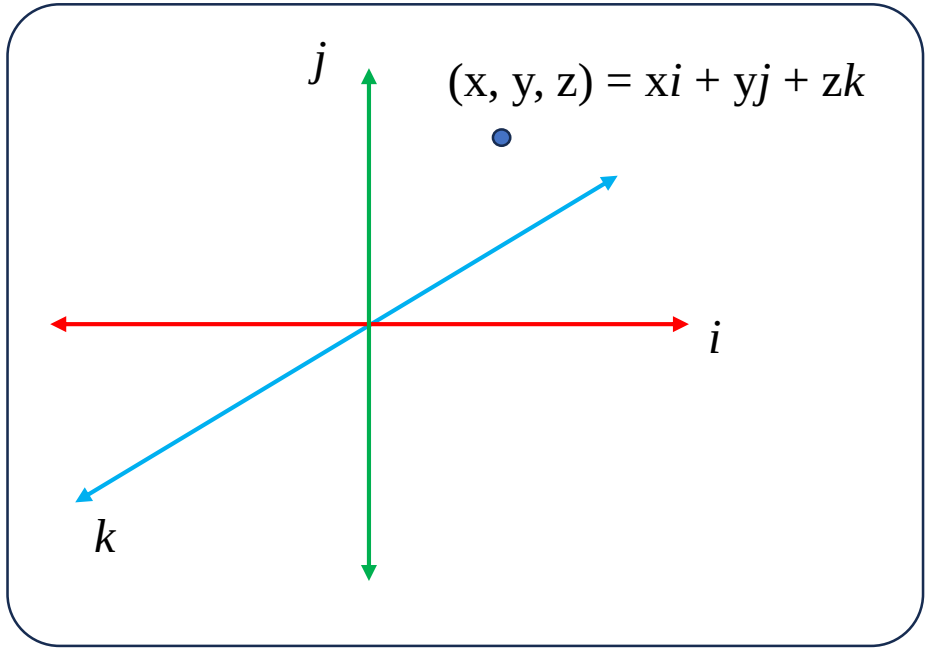
새로운 허수를 도입하자

- 2차원 복소 평면은
  - 두 개의 축 (실수, 허수)
    - 각각의 기저는 1과 i
    - 기저라는 것은 그 축의 모든 값이 이 기저를 늘이거나 줄인 값으로 표현할 수 있는 단위
  - 새로운 축이 필요하다면 i 말고 j라는 새로운 허수를 추가하면 어떨까?
- 모든 축을 허수로 다룬다면…
  - i, j, k 세 종류의 허수가 3차원 공간의 세 축의 기저가 되자

3차원 공간의 좌표

- 세 허수를 가진 복소수 표현
  - $(x, y, z) = xi + yj + zk$

- 실수는 사라진 것인가?
  - 3차원 공간 좌표를 표현하는 공간은 허수만 사용
  - 다른 용도로 실수축 사용
    - 벡터와 좌표의 구분 등
- 실수 + 허수 표현
  - 기저
    - $(1, (i, j, k))$: 1은 실수부의 기저, i, j, k는 허수축 각각의 기저



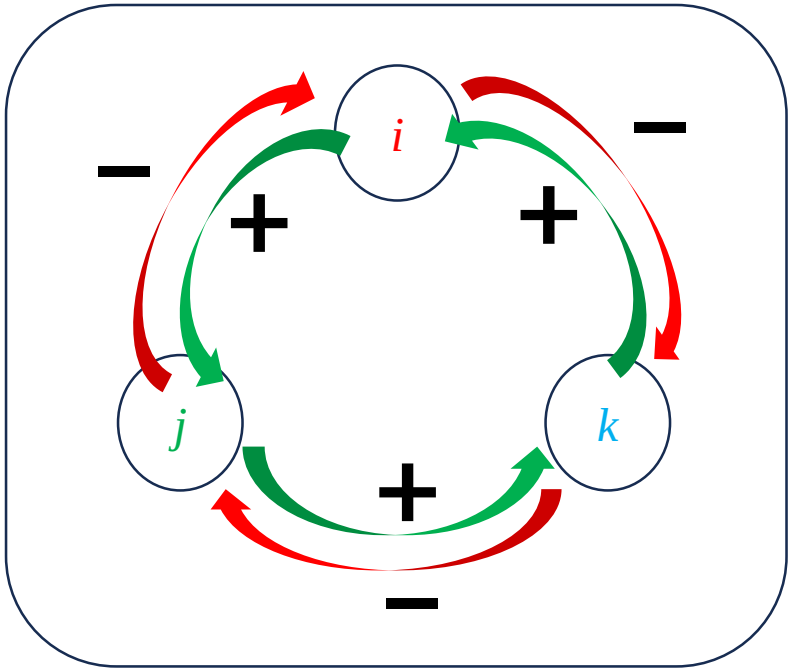
3차원 공간의 좌표를 곱할 수 있다?

- 복소수는 곱할 수 있다
  - 허수인 i, j, k의 제곱은 모두 −1
  - 실수와 허수의 곱은 허수 크기를 변경
  - 서로 다른 허수 사이의 곱은?
    - 다른 허수를 만든다

$$ij = k$$
$$jk = i$$
$$ki = j$$
$$ji = -k$$
$$kj = -i$$
$$ik = -j$$

$$(x_1, y_1, z_1)\ (x_2, y_2, z_2)$$
$$= (x_1 i + y_1 j + z_1 k)\ (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

이렇게 곱하면
무엇을 얻을까?



3차원 공간의 좌표를 곱할 수 있다?

$\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$
$\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$

이렇게 곱하면
무엇을 얻을까?

$$(x_1, y_1, z_1)\ (x_2, y_2, z_2) = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)\ (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

$$= x_1 i\,(x_2 i + y_2 j + z_2 k) + y_1 j\,(x_2 i + y_2 j + z_2 k) + z_1 k\ (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$
$$= x_1 i\, x_2 i + x_1 i\, y_2 j + x_1 i\, z_2 k + y_1 j\, x_2 i + y_1 j\, y_2 j + y_1 j\, z_2 k + z_1 k\, x_2 i + z_1 k\, y_2 j + z_1 k\, z_2 k$$
$$= -x_1 x_2 + x_1 y_2 k - x_1 z_2 j - y_1 x_2 k - y_1 y_2 + y_1 z_2 i + z_1 x_2 j - z_1 y_2 i - z_1 z_2$$
$$= -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + y_1 z_2 i - z_1 y_2 i + z_1 x_2 j - x_1 z_2 j + x_1 y_2 k - y_1 x_2 k$$
$$= -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) I + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k$$
$$= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

스칼라곱 벡터곱

그런데 이 결과는 3개의 숫자로
표현된 원래의 좌표 방식으로 표현이 불가능
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 만 i, j, k 축 성분으로 표현 가능하고
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 실수축이 필요 ➔ 네 개의 기저 필요

$(1, (i, j, k))$: $(-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))$

3차원 좌표를 곱하니 4개의 숫자가 필요

➔ 3차원 좌표는 4개의 숫자로 표현되는 수의 집합에서 실수 부분만 0인 부분집합

$\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\mathbf{u} = (0, x_1, y_1, z_1) = 0 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$\mathbf{v} = (0, x_2, y_2, z_2) = 0 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$

사원수(四元數)quaternion

사원수의 표현 방법: $(s, \mathbf{v})$

$s \in \mathbb{R}$

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

쿼터니언 연산: 덧셈과 뺄셈

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (s_p, \mathbf{v}_p) + (s_q, \mathbf{v}_q) = (s_p + s_q\,,\, \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q)$$

$\mathbf{p} = (s_p, \mathbf{v}_p)$
$\mathbf{q} = (s_q, \mathbf{v}_q)$

4차원 벡터로 이해하면 됨

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = (s_p, \mathbf{v}_p) - (s_q, \mathbf{v}_q) = (s_p - s_q\,,\, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q)$$

쿼터니언의 곱셈: 일반적 경우

$$\mathbf{p} = (s_p, \mathbf{v}_p)$$
$$\mathbf{q} = (s_q, \mathbf{v}_q)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\,\mathbf{q} &= (s_p + \mathbf{v}_p)(s_q + \mathbf{v}_q) \\ &= s_p s_q + s_p\mathbf{v}_q + s_q\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p\mathbf{v}_q \\ &= s_p s_q + s_p\mathbf{v}_q + s_q\mathbf{v}_p + (-\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q) \\ &= s_p s_q - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q + s_p\mathbf{v}_q + s_q\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\,\mathbf{q} &= (s_p, \mathbf{v}_p)(s_q, \mathbf{v}_q) \\ &= (s_p s_q - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q,\ s_p\mathbf{v}_q + s_q\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q)\end{aligned}$$

쿼터니언의 곱셈: 스칼라 원소가 0이면

$\mathbf{p} = (0, \mathbf{v}_p)$
$\mathbf{q} = (0, \mathbf{v}_q)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\,\mathbf{q} &= (0 + \mathbf{v}_p)\,(0 + \mathbf{v}_q) \\ &= \mathbf{v}_p\,\mathbf{v}_q \\ &= (-\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q) \\ &= -\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\,\mathbf{q} &= (0\,, \mathbf{v}_p)\,(0\,, \mathbf{v}_q) \\ &= (-\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q\,, \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q)\end{aligned}$$

사원수의 연산규칙

$$\hat{p} + \hat{q} = \hat{q} + \hat{p}$$

$$(\hat{p} + \hat{q}) + \hat{r} = \hat{p} + (\hat{q} + \hat{r})$$

$$\lambda\hat{p} = \hat{p}\lambda$$

$$-\lambda\hat{p} = \lambda(-\hat{p})$$

$$\hat{p}\hat{q} \neq \hat{q}\hat{p}$$

p q = $(s_p , \mathbf{v}_p)\,(s_q , \mathbf{v}_q)$

$= (s_p s_q - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q ,\ s_p\mathbf{v}_q + s_q \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_q)$

q p = $(s_q , \mathbf{v}_q)\,(s_p , \mathbf{v}_p)$

$= (s_p s_q - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q ,\ s_p\mathbf{v}_q + s_q \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q \times \mathbf{v}_p)$

켤레 사원수

- 켤레 사원수(공액 사원수, conjugate)
  - 어떤 사원수 $\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p)$의 켤레 사원수를 $\hat{p}^*$라고 표현
  - 이 켤레 이 사원수는 $(d_p, -\mathbf{v}_p)$의 값을 가짐

$$\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p) \Rightarrow \hat{p}^* = (d_p, -\mathbf{v}_p)$$

- 사원수의 크기는 벡터의 크기와 같은 방식으로 구한다.

$$\begin{aligned}
|\hat{q}| &= \sqrt{d_q d_q + a_q a_q + b_q b_q + c_q c_q} \\
&= \sqrt{d_q^2 + a_q^2 + b_q^2 + c_q^2} \\
&= \sqrt{d_q^2 + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} \\
&= \sqrt{d_q^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\
&= \sqrt{\hat{q}\hat{q}^*}
\end{aligned}$$

켤레 사원수

- 사원수의 항등원은 $\hat{i}$는 $(1,0,0,0)$
- 사원수 $\hat{q}$의 역원 $\hat{q}^{-1}$은 $\hat{q}^*/|\hat{q}|$

$$\hat{q}\hat{i} = \hat{i}\hat{q} = \hat{q}$$

$$\hat{q}\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = \hat{q}\hat{q}^*/|q| = \hat{i}$$

- 켤레 사원수의 크기는 서로 동일하다.

$$|\hat{q}| = |\hat{q}^*|$$

- 다음과 같은 연산 규칙도 중요

$$(\hat{q}+\hat{r})^* = \hat{q}^* + \hat{r}^*$$

$$(\hat{q}\hat{r})^* = \hat{r}^*\hat{q}^*$$

사원수 연산법칙 종합

$$\hat{p} + \hat{q} = \hat{q} + \hat{p}$$

$$(\hat{p} + \hat{q}) + \hat{r} = \hat{p} + (\hat{q} + \hat{r})$$

$$\lambda\hat{p} = \hat{p}\lambda$$

$$-\lambda\hat{p} = \lambda(-\hat{p})$$

$$\hat{p}\hat{q} \neq \hat{q}\hat{p}$$

$$\hat{p} = (d_p, \mathbf{v}_p) \implies \hat{p}^* = (d_p, -\mathbf{v}_p)$$

$$|\hat{q}| = \sqrt{\hat{q}\hat{q}^*}$$

$$\hat{q}\hat{i} = \hat{q} \implies \hat{i} = (1, 0, 0, 0)$$

$$\hat{q}\hat{p} = \hat{i} \implies \hat{p} = \hat{q}^{-1} = \hat{q}^*/|\hat{q}|$$

$$\hat{q}\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = \hat{q}\hat{q}^*/|q| = \hat{i}$$

$$|\hat{q}| = |\hat{q}^*|$$

$$(\hat{q} + \hat{r})^* = \hat{q}^* + \hat{r}^*$$

$$(\hat{q}\hat{r})^* = \hat{r}^*\hat{q}^*$$

사원수와 회전: 곱셈

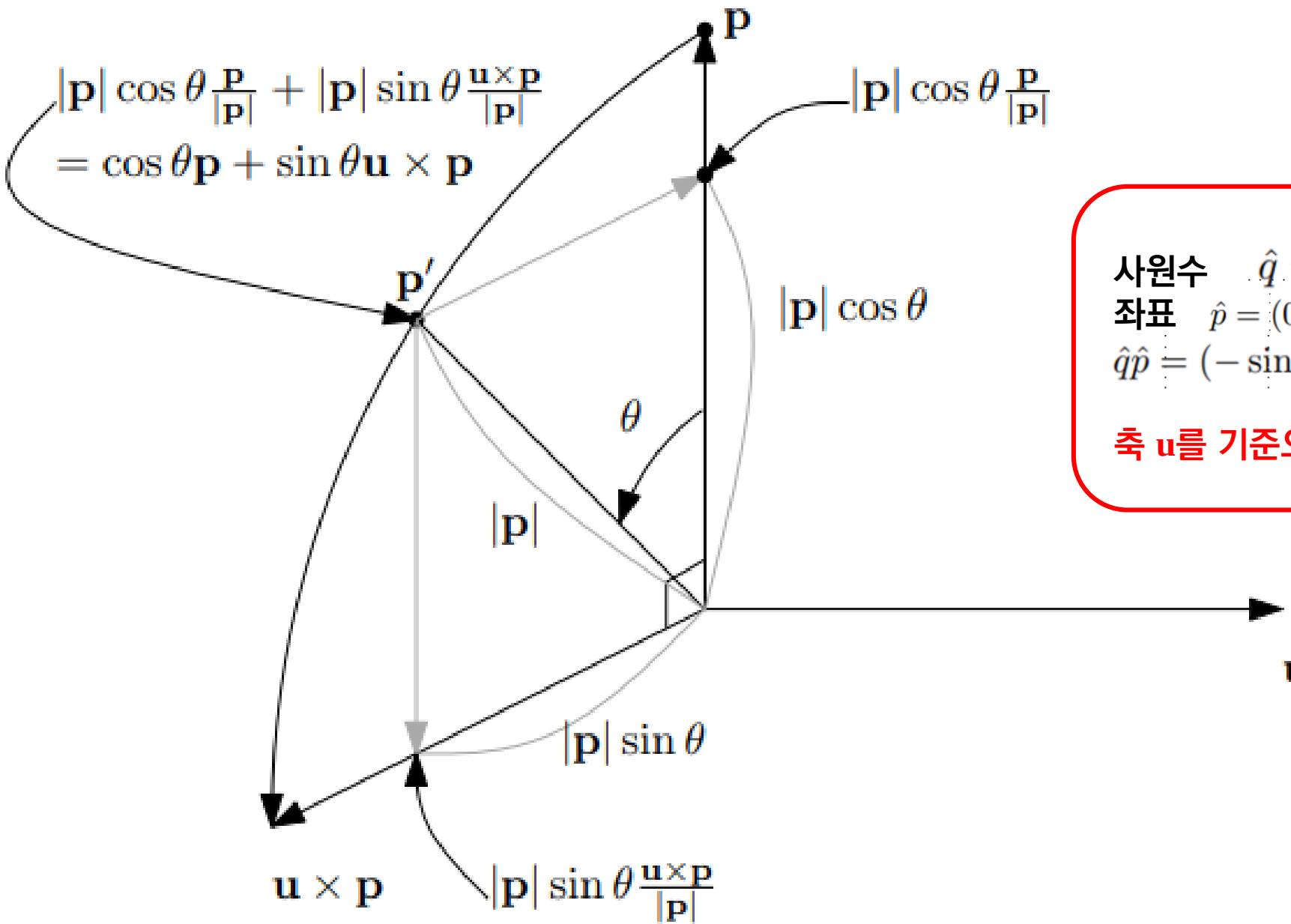
- 행렬로 표현했던 회전은 사원수를 이용하여 표현 가능
- 어떤 좌표 $\mathbf{p}(x, y, z)$는 사원수 표현으로는 $\hat{p} = (0, (x, y, z)) = (0, \mathbf{p})$
- 이 좌표에 다음과 같은 사원수 $\hat{q}$를 곱하면 어떻게 되는지 보자.

$$\hat{p} = (0, \mathbf{p})$$
$$\hat{q} = (\cos\theta, \sin\theta\mathbf{u}), |\mathbf{u}| = 1, |\hat{q}| = 1$$

- 벡터 $\mathbf{u}$는 단위벡터 ($\mathbf{u}$가 어떤 방향이나 축을 표현)

$$\hat{p}' = (d_{p'}, \mathbf{p}') = \hat{q}\hat{p} = (-\sin\theta\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u} \times \mathbf{p})$$

- **p**와 **u**가 서로 직교하는 경우



사원수 $\hat{q} = (\cos\theta, \sin\theta\mathbf{u})$ 를
좌표 $\hat{p} = (0, \mathbf{p})$ 에 곱해 얻는
$\hat{q}\hat{p} = (-\sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}, \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p})$ 는

축 **u**를 기준으로 θ만큼 회전된 위치

$\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$가 서로 직교하지 않는 일반적 경우

- 스칼라 부분 $-\sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$이 0이 아님
- 스칼라 값이 0이 될 수 있도록 사원수 곱하기를 두 번 수행
- 하나의 사원수 $\hat{q}$를 곱하는 것이 아니라 그 역원 $\hat{q}^{-1}$도 같이 곱함

$$\hat{p}' = \hat{q}\hat{p}\hat{p}^* = (\cos\theta, \sin\theta\mathbf{u})(0, \mathbf{p})(\cos\theta, -\sin\theta\mathbf{u})$$

$$\hat{q}\hat{p}\hat{p}^* = (-\sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}, \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p})(\cos\theta, -\sin\theta\mathbf{u})$$

사원수 곱셈 연산법에 따라 계산하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = & \quad (s, \mathbf{v}) \\
s = & \quad -\sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} + \sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} + \sin^2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{u} \\
\mathbf{v} = & \quad \cos^2\theta\mathbf{p} \\
& + \sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p} \\
& + (\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u} \\
& - \sin\theta\cos\theta\mathbf{p}\times\mathbf{u} \\
& - \sin^2\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p}\times\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{u}\times\mathbf{p}$와 $\mathbf{u}$는 서로 수직이므로, 이 둘의 내적 $(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}$이 0이다. 따라서 스칼라 부분인 s가 0.

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathbf{p} + 2\sin\theta\cos\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p} + (2\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

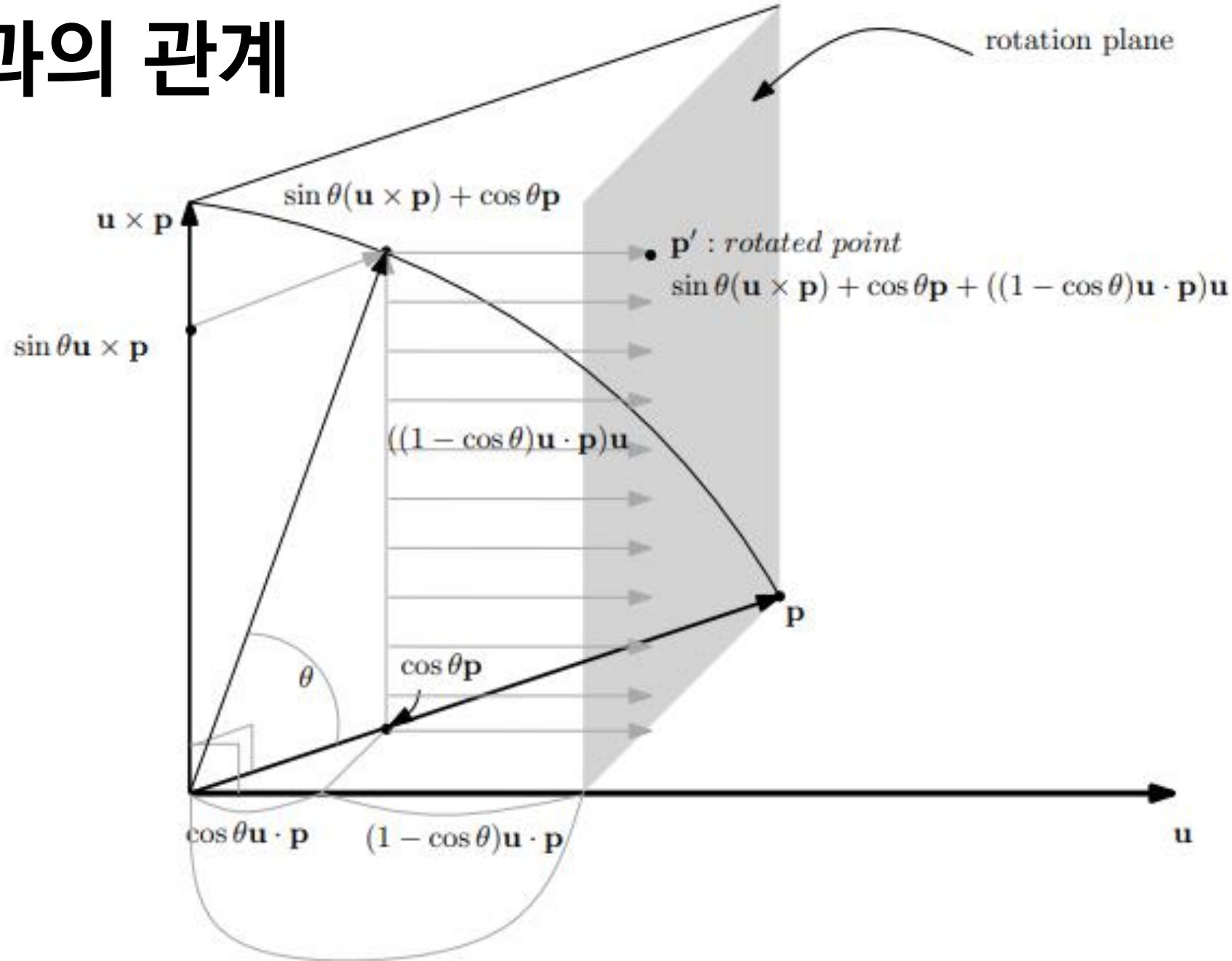
이 항등식을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos 2\theta\mathbf{p} + \sin 2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p}) + (2\sin^2\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

- $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$이므로 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $2\sin^2\theta$는 $\sin^2\theta + \sin^2\theta = \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$
- $1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$이므로 다음 성립
  - $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$$\hat{q}\hat{p}\hat{q}^* = (0, (\cos 2\theta\mathbf{p} + \sin 2\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p}) + ((1 - \cos 2\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u})$$

회전과의 관계


rotation plane
$\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p})+\cos\theta\mathbf{p}$
$\mathbf{u}\times\mathbf{p}$
$\mathbf{p}'$: *rotated point*
$\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{p})+\cos\theta\mathbf{p}+((1-\cos\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u}$
$\sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{p}$
$((1-\cos\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u}$
$\mathbf{p}$
$\cos\theta\mathbf{p}$
θ
$\cos\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$
$(1-\cos\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$
$\mathbf{u}$

쿼터니언을 이용한 회전

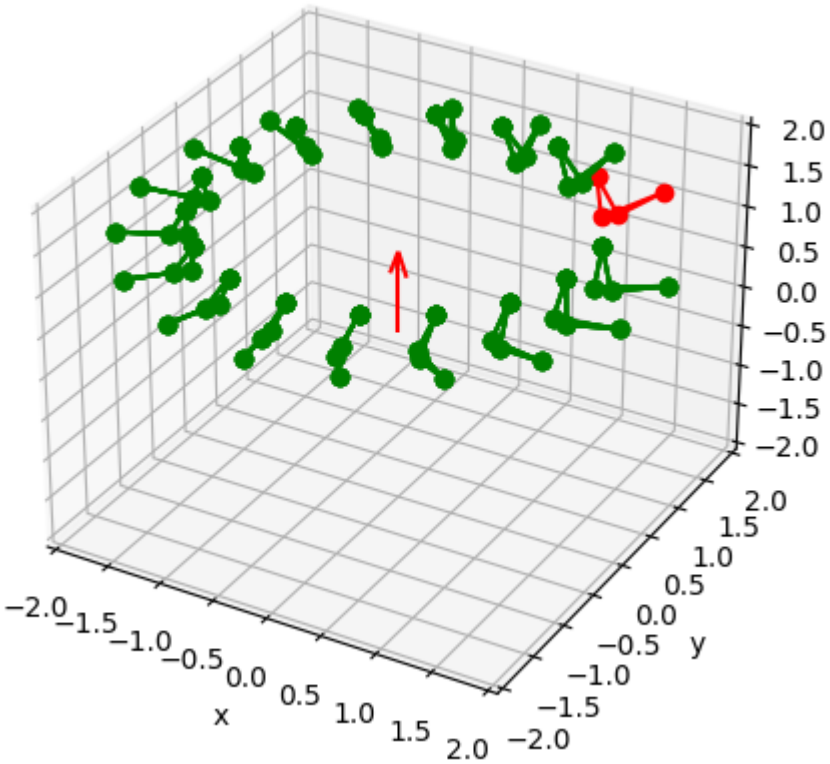
$$\mathbf{p}' = \sin\theta(\mathbf{u} \times \mathbf{p}) + \cos\theta\mathbf{p} + ((1 - \cos\theta)\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}$$

어떤 점 $\mathbf{p}$를 $\mathbf{u}$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하여 $\mathbf{p}'$를 얻고 싶을 때

- $\hat{p} = (0, \mathbf{p})$
- $\hat{q} = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{u})$
- $\hat{p}' = (0, \mathbf{p}') = \hat{q}\hat{p}\hat{q}^*$

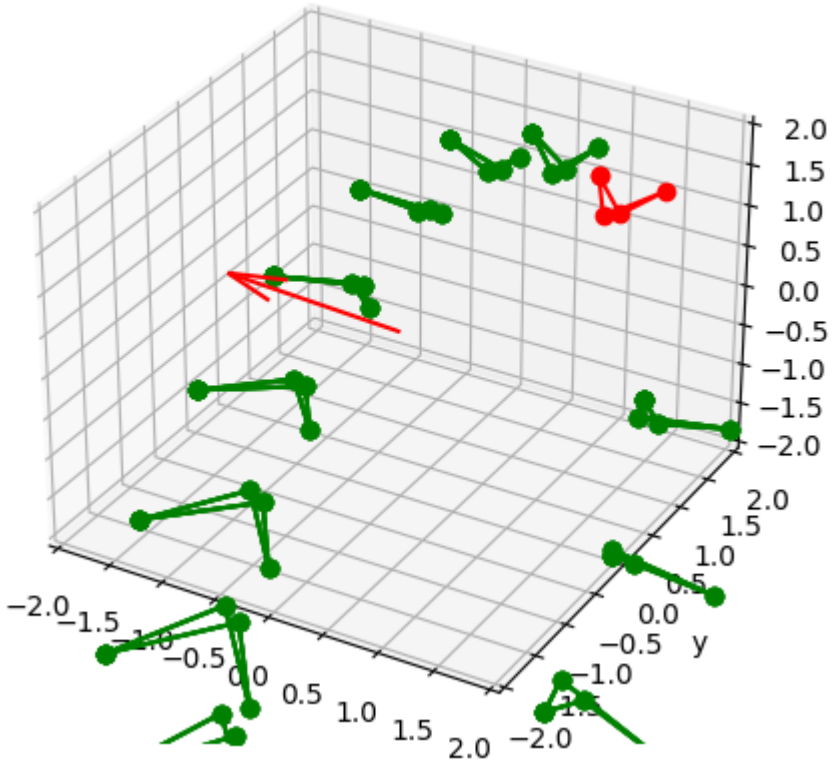
z 축 회전 u = (0, 0, 1)

```
ax = prepareAxis3D(x=[-2, 2], y=[-2, 2], z=[-2, 2])
q1 = np.quaternion(0, 1.1, 1.3, 1.5)
q2 = np.quaternion(0, 1.2, 1.2, 1.1)
q3 = np.quaternion(0, 1.5, 1.7, 1.2)
q4 = np.quaternion(0, 1.3, 1.3, 1.1)
points = [q1, q2, q3, q4]
drawQuaternion(ax, points, color='red')
u = np.array([0, 0, 1])
angleStep = 20
visVec3(ax, u)
for angle in range(angleStep,360-angleStep, angleStep):
    radian = 3.14159*angle/180.
    c = math.cos(radian/2)
    s = math.sin(radian/2)
    v = s*u
    q = np.quaternion(c, v[0], v[1], v[2])
    qc = np.quaternion(c, -v[0], -v[1], -v[2])


    rotated = [(q*p)*qc for p in points]
    for qPoint in rotated:
        drawQuaternion(ax, rotated, color='green')
```



회전축의 길이가 1이 아님: u = (−1, −1, 1)

```
ax = prepareAxis3D(x=[-2, 2], y=[-2, 2], z=[-2, 2])
q1 = np.quaternion(0, 1.1, 1.3, 1.5)
q2 = np.quaternion(0, 1.2, 1.2, 1.1)
q3 = np.quaternion(0, 1.5, 1.7, 1.2)
q4 = np.quaternion(0, 1.3, 1.3, 1.1)
points = [q1, q2, q3, q4]
drawQuaternion(ax, points, color='red')
u = np.array([-1, -1, 1])
angleStep = 20
visVec3(ax, u)
for angle in range(angleStep,360-angleStep, angleStep):
    radian = 3.14159*angle/180.
    c = math.cos(radian/2)
    s = math.sin(radian/2)
    v = s*u
    q = np.quaternion(c, v[0], v[1], v[2])
    qc = np.quaternion(c, -v[0], -v[1], -v[2])


    rotated = [(q*p)*qc for p in points]
    for qPoint in rotated:
        drawQuaternion(ax, rotated, color='green')
```



회전축의 길이가 1이 되게 정규화

```
ax = prepareAxis3D(x=[-2, 2], y=[-2, 2], z=[-2, 2])
q1 = np.quaternion(0, 1.1, 1.3, 1.5)
q2 = np.quaternion(0, 1.2, 1.2, 1.1)
q3 = np.quaternion(0, 1.5, 1.7, 1.2)
q4 = np.quaternion(0, 1.3, 1.3, 1.1)
points = [q1, q2, q3, q4]
drawQuaternion(ax, points, color='red')
u = np.array([-1, -1, 1])
u = normalized(u)
angleStep = 20
visVec3(ax, u)
for angle in range(angleStep,360-angleStep, angleStep):
    radian = 3.14159*angle/180.
    c = math.cos(radian/2)
    s = math.sin(radian/2)
    v = s*u
    q = np.quaternion(c, v[0], v[1], v[2])
    qc = np.quaternion(c, -v[0], -v[1], -v[2])


    rotated = [(q*p)*qc for p in points]
    for qPoint in rotated:
        drawQuaternion(ax, rotated, color='green')
```