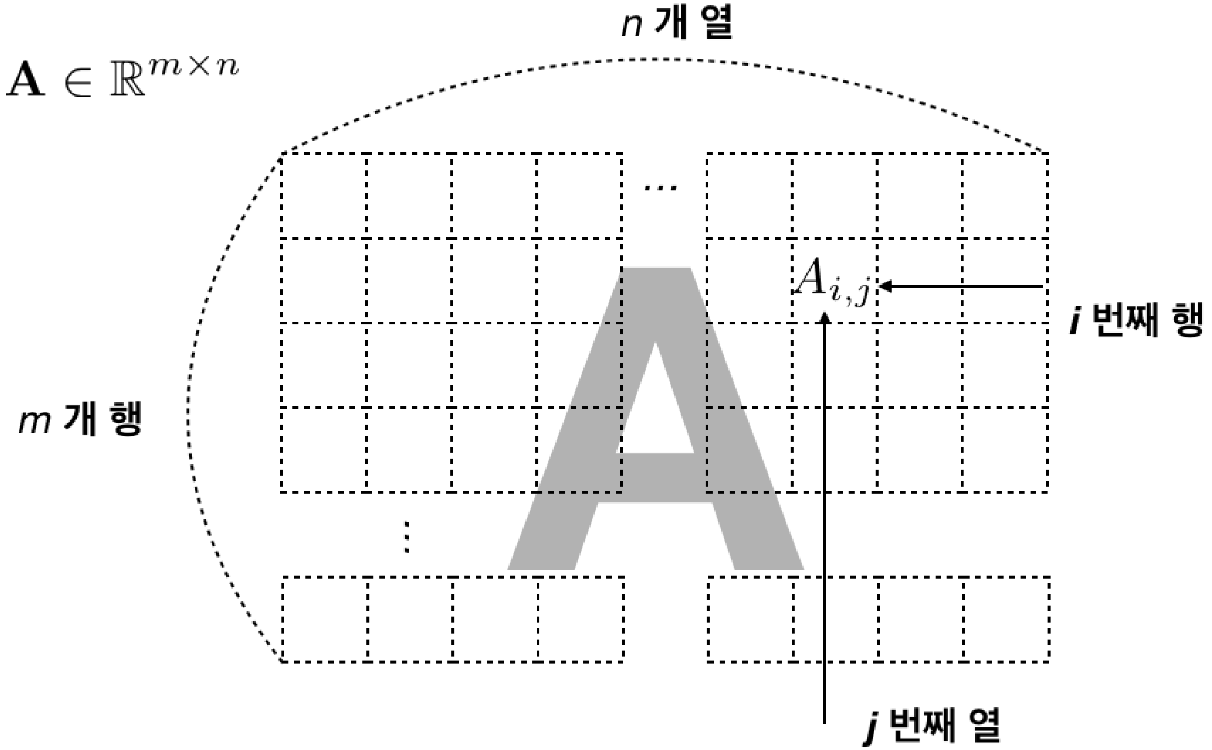
게임 수학 – 강의 6
행렬의 기본 연산 이해

동명대학교 게임공학과

강영민

행렬 데이터의 이해

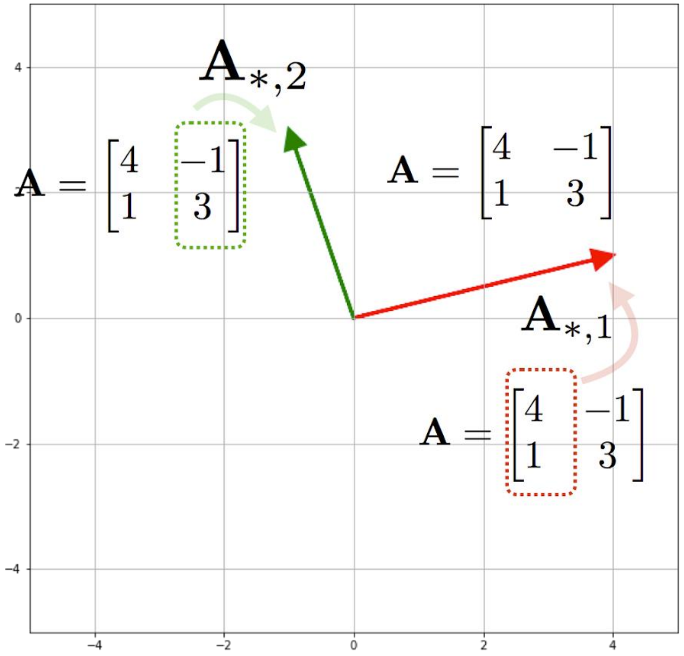
- 행렬은 2차원으로 배열된 숫자



$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

행렬의 가시화

- 가시화하기 쉬운 행렬
  - 2차원 공간에 그려질 수 있는 행렬
    - 2x2 행렬
    - 2개의 2차원 벡터가 존재
- 행렬의 가시화
  - 2차원 벡터들을 2차원 공간에 그림



행렬은
여러 벡터가 모여 있는 것으로
이해할 수 있다.

행렬의 모습을 가시화하는 것은
이들 벡터를 각각 그리면 된다.

왼쪽의 두 화살표가 바로
우리가 처음으로
행렬의 모양을 눈으로
확인할 수 있는 이미지이다.

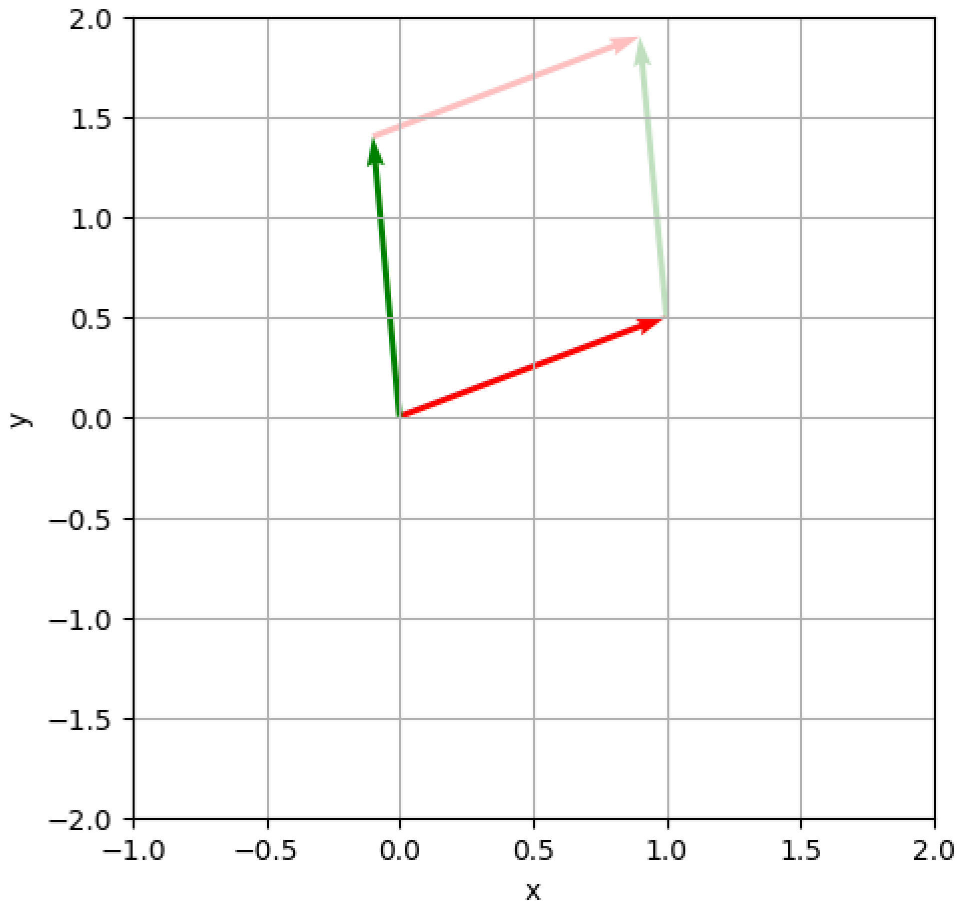
이런 행렬이 무슨 놀라운 일을 하는지는 나중에 알아보자

행렬의 가시화 (2x2)

```
def visMat22(M, x=[-1,1], y=[-1,1]) :
    # 2x2 행렬 시각화
    origin2d = np.zeros(2) # 원점 (0, 0)
    fig = plt.figure(figsize = (5, 5))# 그림의 크기가 가로 10인치, 세로 5인치
    ax1 = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.8, 0.8])
    ax1.set_xlim([x[0], x[1]]); ax1.set_ylim([y[0], y[1]])
    ax1.set_xlabel('x'); ax1.set_ylabel('y')
    ax1.grid(True)
    # 열벡터 가시화
    ax1.quiver(*origin2d, *M[:,0], color='r',
               angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
    ax1.quiver(*(origin2d+M[:,1].flatten()), *M[:,0], color='r', alpha=0.25,
               angles='xy', scale_units='xy', scale=1)

    ax1.quiver(*origin2d, *M[:,1], color='g',
               angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
    ax1.quiver(*(origin2d+M[:,0].flatten()), *M[:,1], color='g', alpha=0.25,
               angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
```

행렬의 가시화

```
mat = np.array([
                    [1, -0.1],
                    [0.5,  1.4],


                ])

visMat22(mat, x=[-1,2], y=[-2,2])
```

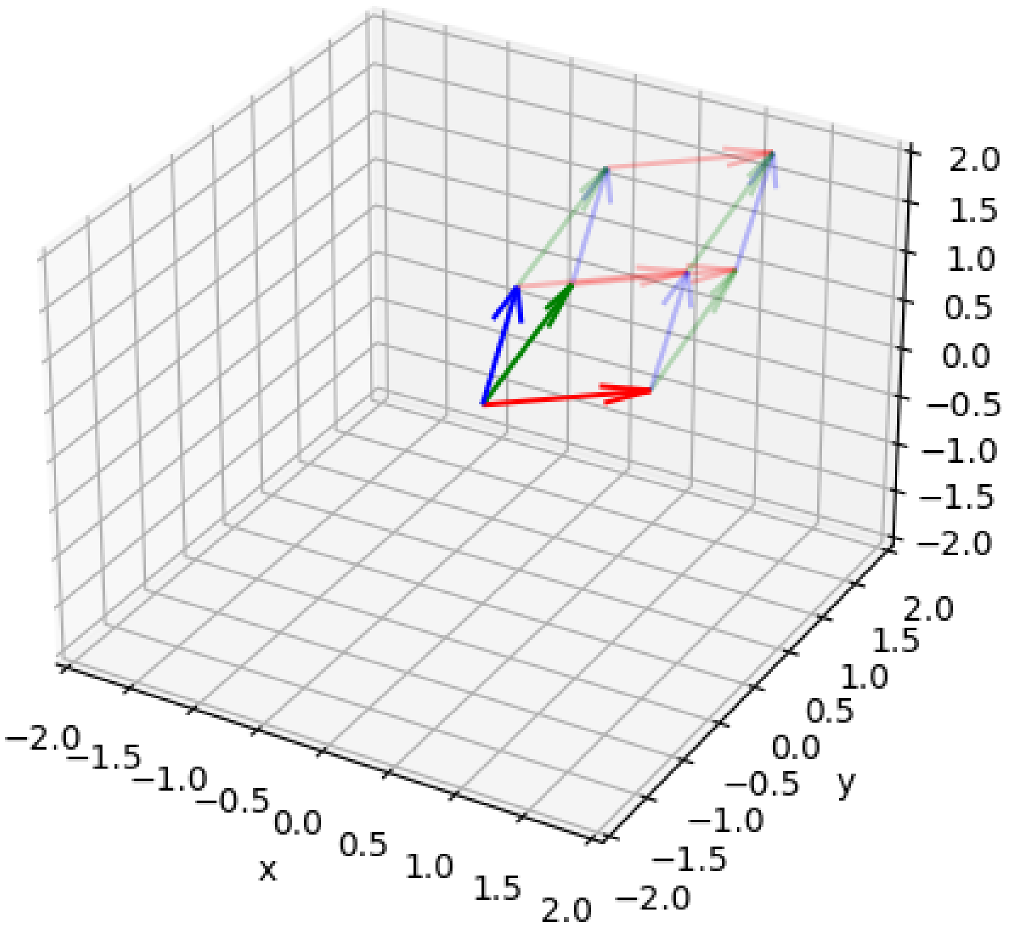


행렬의 가시화 (3x3)

```
def visMat33(M, x=[-1,1], y=[-1,1], z=[-1,1]) :
    # 3x3 행렬 시각화
    origin3d = np.zeros(3) # 원점 (0, 0, 0)
    fig = plt.figure(figsize = (5, 5))# 그림의 크기가 가로 10인치, 세로 5인치
    ax1 = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.8, 0.8], projection='3d')
    ax1.set_xlim([x[0], x[1]]); ax1.set_ylim([y[0], y[1]]); ax1.set_zlim([z[0], z[1]]);
    ax1.set_xlabel('x'); ax1.set_ylabel('y'); ax1.set_zlabel('z');
    ax1.grid(True)
    # 열벡터 가시화
    ax1.quiver(*origin3d, *M[:,0], color='r')
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,1].flatten()), *M[:,0], color='r', alpha=0.25)
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,2].flatten()), *M[:,0], color='r', alpha=0.25)

    ax1.quiver(*origin3d, *M[:,1], color='g')
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,0].flatten()), *M[:,1], color='g', alpha=0.25)
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,2].flatten()), *M[:,1], color='g', alpha=0.25)

    ax1.quiver(*origin3d, *M[:,2], color='b')
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,0].flatten()), *M[:,2], color='b', alpha=0.25)
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,1].flatten()), *M[:,2], color='b', alpha=0.25)

    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,1].flatten()+M[:,2].flatten()), *M[:,0], color='r', alpha=0.25)
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,0].flatten()+M[:,2].flatten()), *M[:,1], color='g', alpha=0.25)
    ax1.quiver(*(origin3d+M[:,0].flatten()+M[:,1].flatten()), *M[:,2], color='b', alpha=0.25)
```

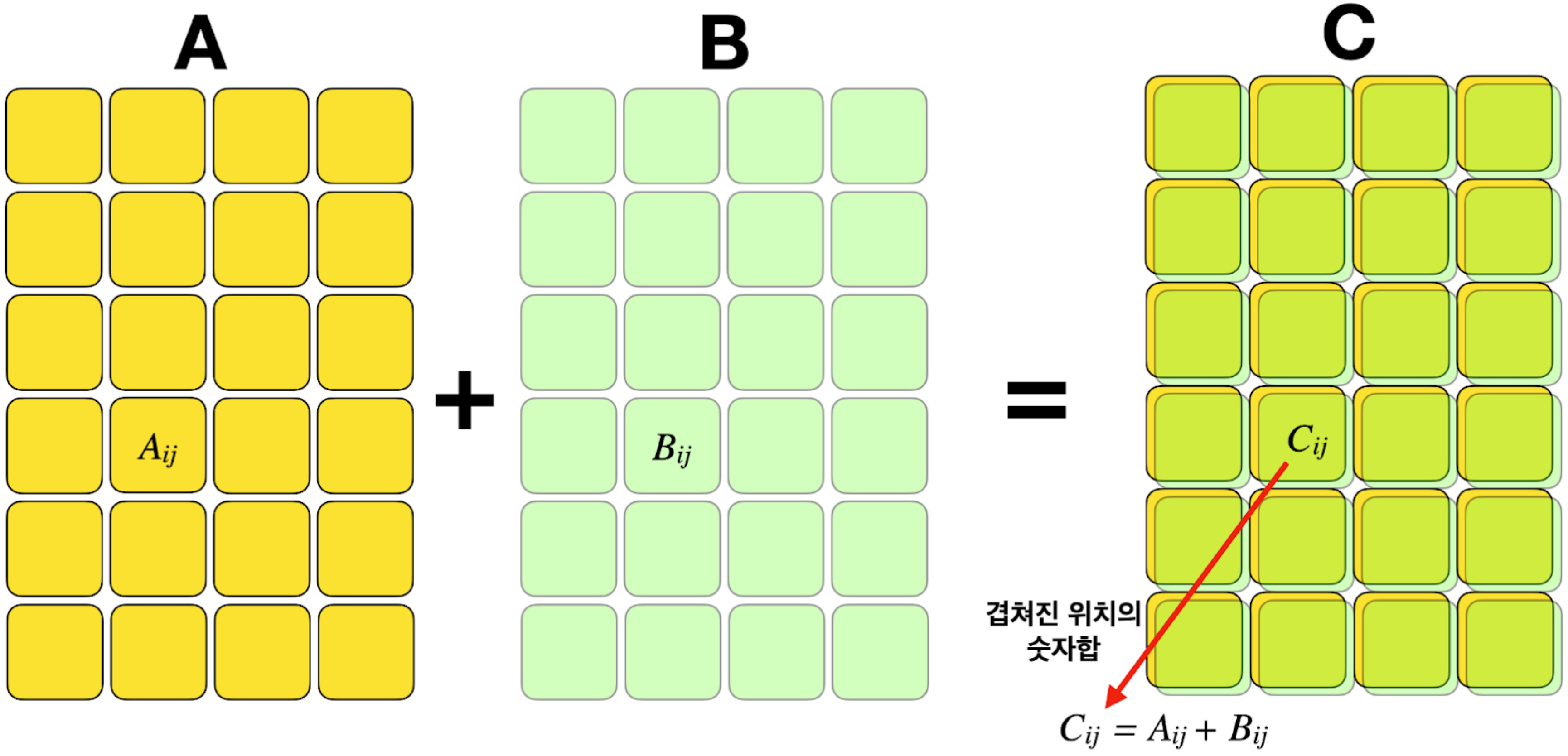
행렬의 가시화

```
mat = np.array([
                [1, -0.1, 0.2],
                [0.5,  1.4, 0.11],
                [0.2,  0.3, 1.2],
            ])

visMat33(mat, x=[-2,2], y=[-2,2], z=[-2,2])
```



행렬의 덧셈과 뺄셈

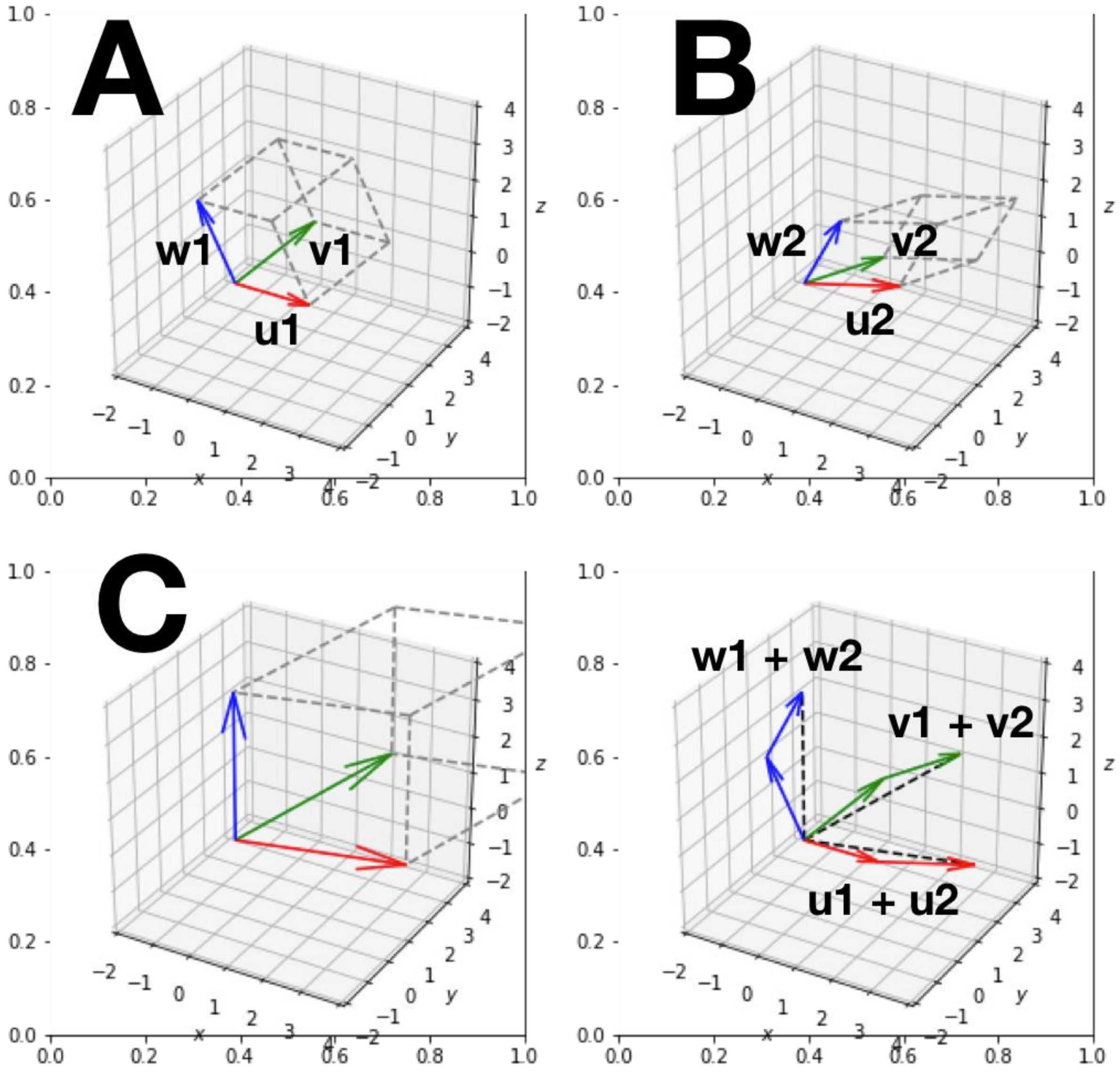
- 기하 객체의 충돌 문제 등에 활용
    - 충돌의 감지: 두 객체 상호간의 거리 문제



행렬의 덧셈과 뺄셈

- 행렬 덧셈의 이해

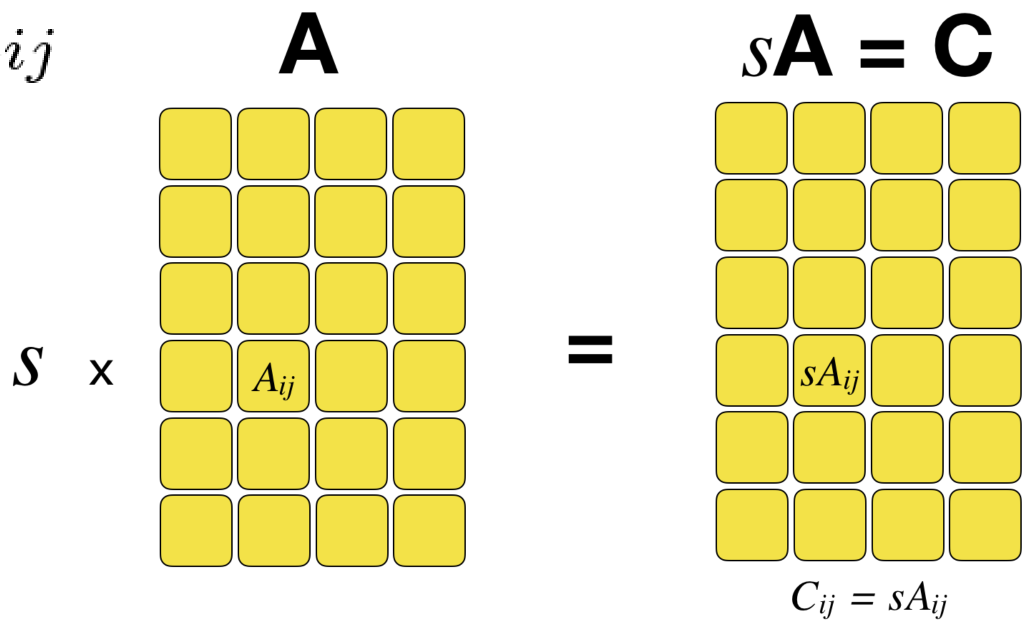
C = A + B



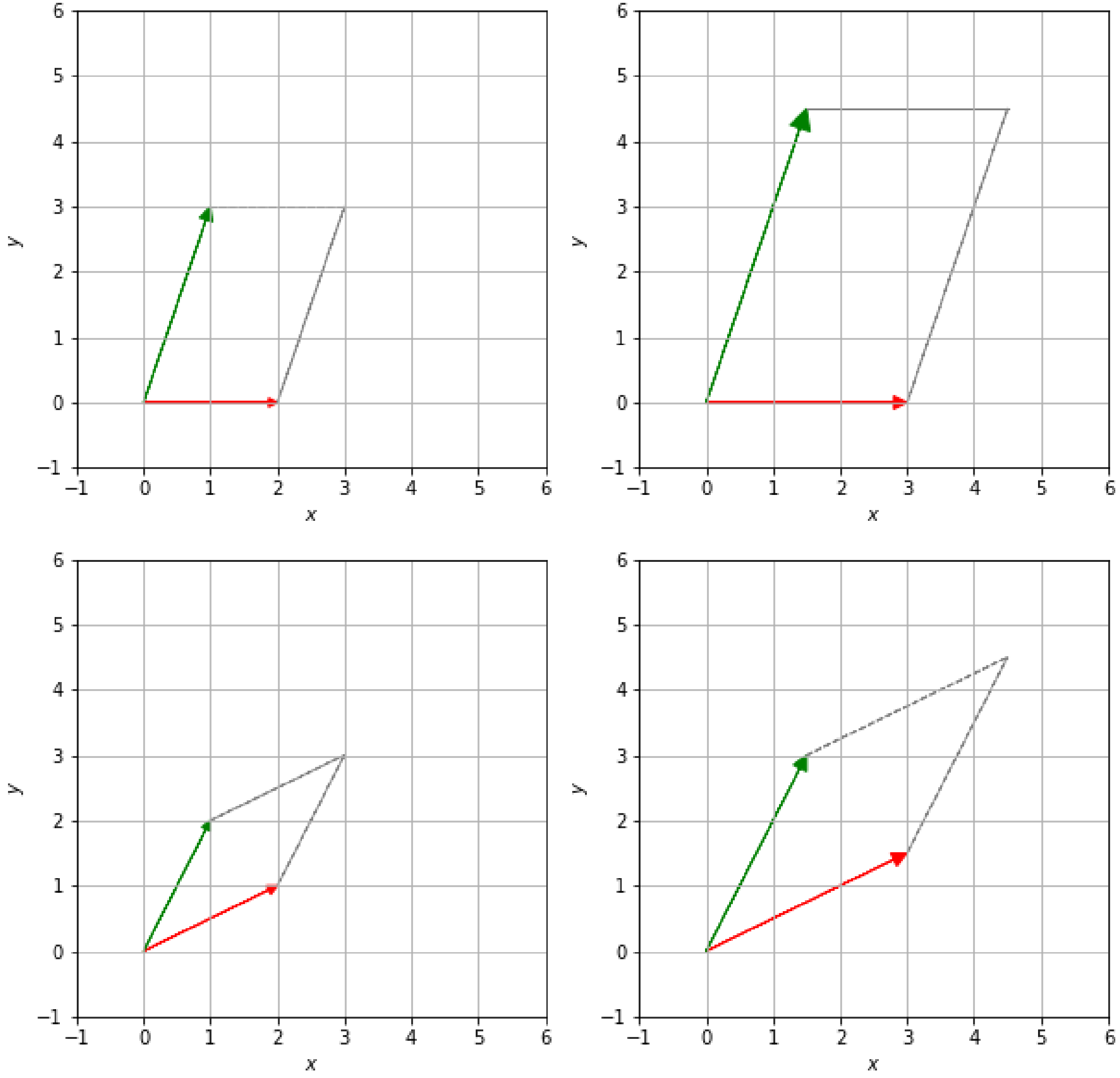
행렬의 스칼라 곱

- 각 성분을 스칼라倍 한다

$$s\mathbf{A} = \mathbf{C} \Rightarrow C_{ij} = sA_{ij}$$



스칼라 곱의 가시화



행렬의 곱

- 곱이 가능한 조건이 존재

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$$
$$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

이때 두 행렬의 곱 $\mathbf{C}$는 $\mathbb{R}^{l \times n}$ 집합에 속하며 각 원소는 다음과 같이 계산한다.

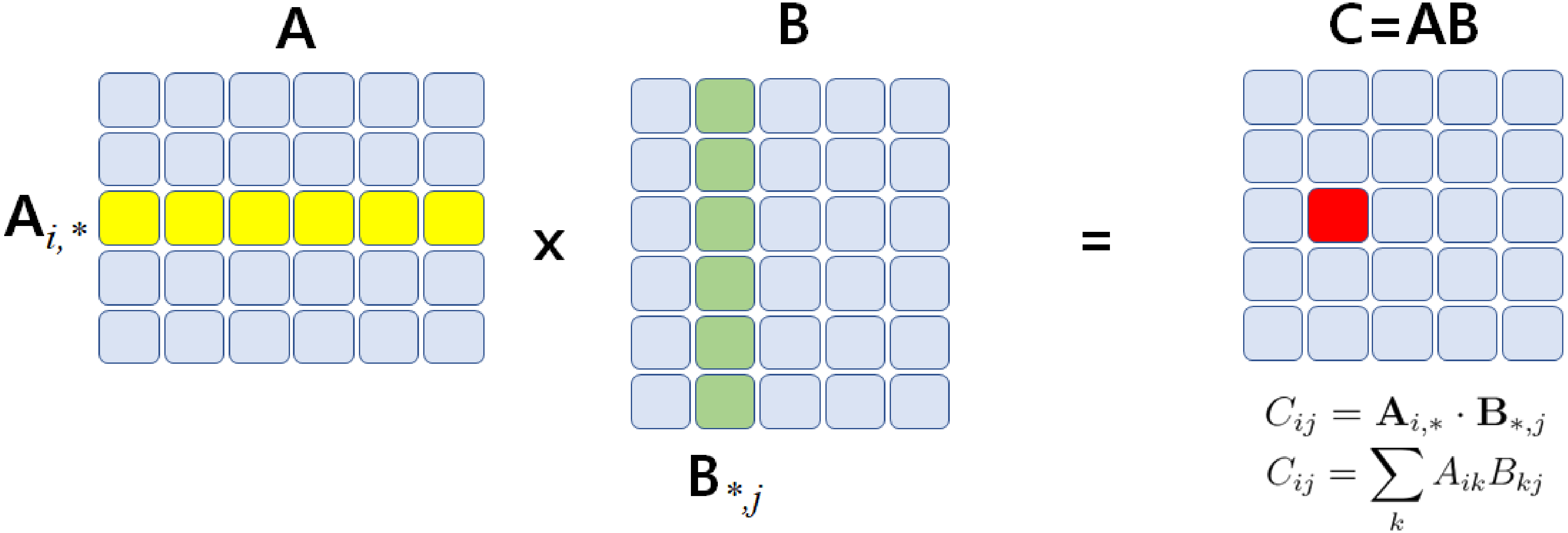
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + A_{i,3}B_{3,j} + \cdots + A_{i,m}B_{m,j}$$

행렬 곱의 시각적 표현

- 행렬곱은 두 행렬의 행벡터와 열벡터의 내적으로 구성

$$C_{i,j} = \mathbf{A}_{i,*}\mathbf{B}_{*,j} = \mathbf{A}_{i,*}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_{*,j}$$



$$C_{ij} = \mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,j}$$
$$C_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$$

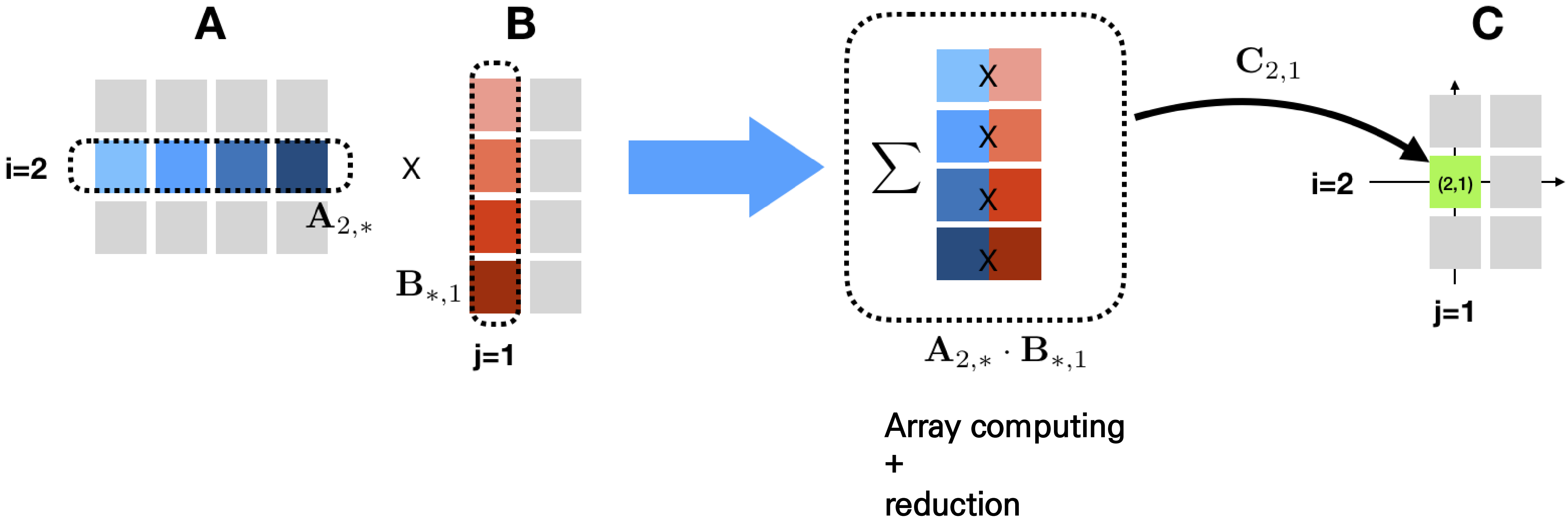
행렬 곱의 계산 – 비효율적인 버전

- 성분별로 계산

```
def mult(A, B): # 아주 단순한 - 그러나 비효율적인 행렬 곱하기
    C = np.zeros((A.shape[0], B.shape[1]), dtype=float)
    for i in range(A.shape[0]):
        for j in range(B.shape[1]):
            for k in range(A.shape[1]):
                C[i, j] += A[i, k] * B[k, j]
    return C
```

효율적인 행렬곱 – 배열 컴퓨팅 사용

- Numpy는 효율적인 배열 컴퓨팅 제공



주의: *는 아다마르 곱

- A, B가 넘파이 배열로 표현된 행렬일 때,
  - A * B 는 행렬의 곱을 계산하지 못 함

```
A = np.array([[2, 1],
              [0, 3],], dtype=float)
B = np.array([[-2, 1],
              [1, 2],], dtype=float)
C = mult(A, B)
print(C)
print(A*B)
```

```
[[-3.  4.]
 [ 3.  6.]]

[[-4.  1.]
 [ 0.  6.]]
```

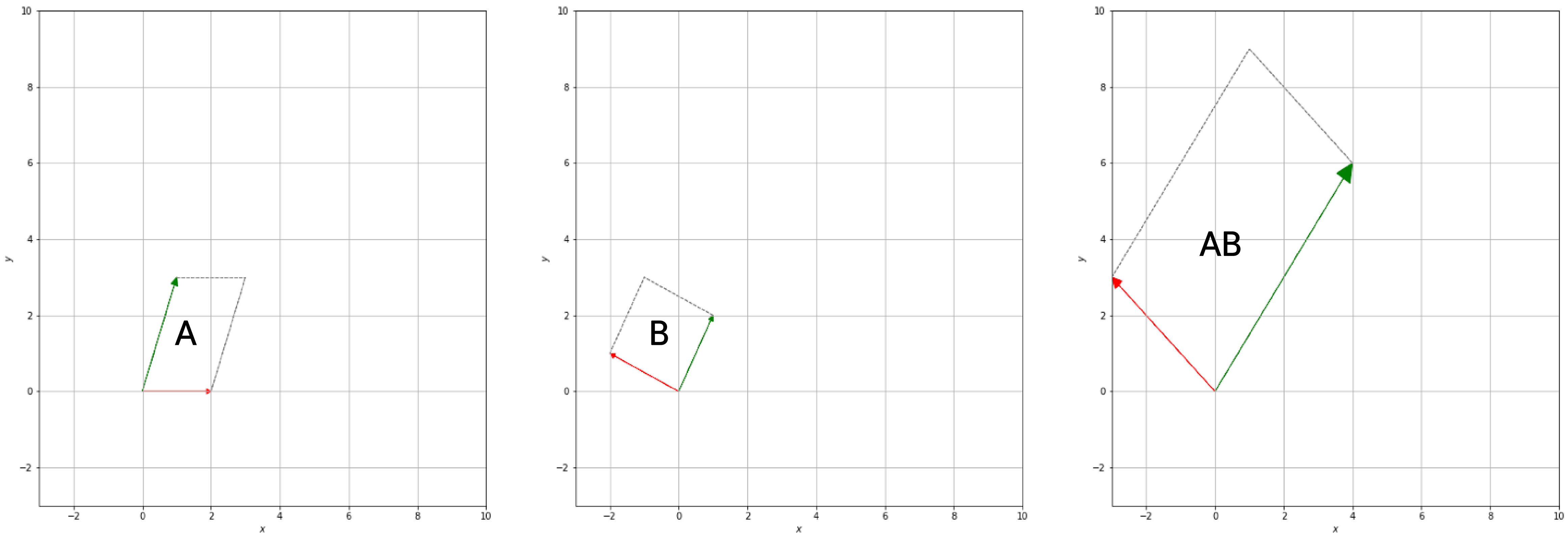
주의: *는 아다마르 곱

- 제대로 된 행렬 곱 계산

```
print(A.dot(B))
print(A @ B)
```

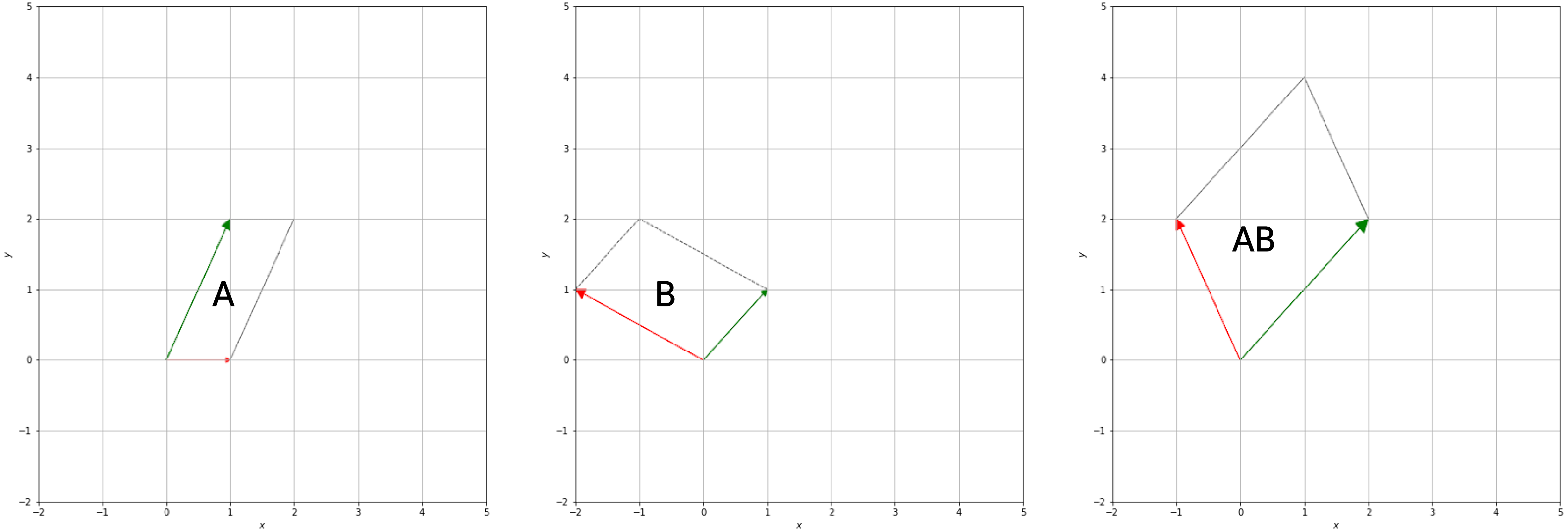
```
[[-3.  4.]
 [ 3.  6.]]

[[-3.  4.]
 [ 3.  6.]]
```

행렬곱의 시각적 확인



무슨 의미인지 파악하기 힘듦

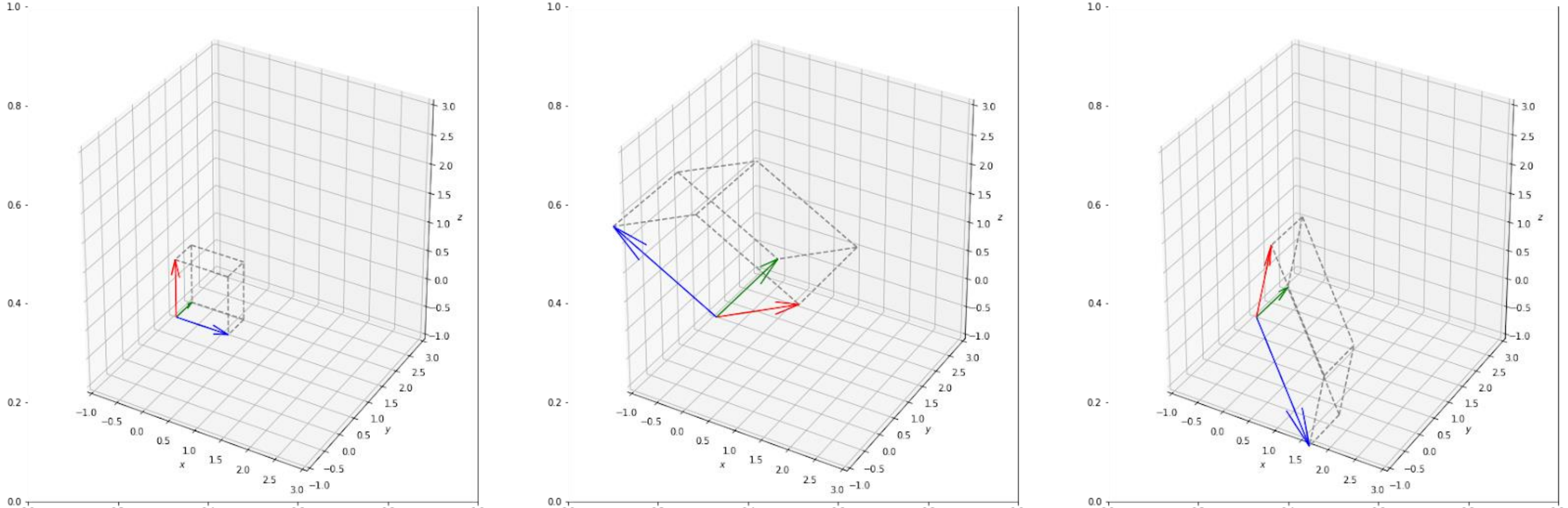
행렬곱의 시각적 확인 2 – 면적을 보자



면적을 살펴 보자: |A|=2 |B| = 3 |AB| = 6 ➔ 2*3 = 6

행렬 곱의 관찰 – 3X3 행렬의 부피 변화

- 부피 곱하기



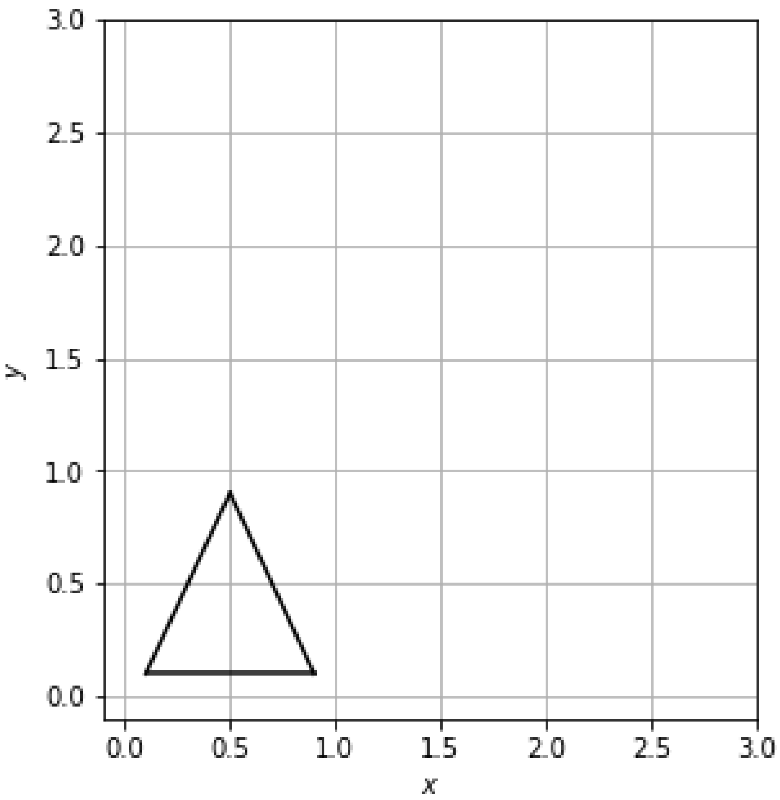
부피를 살펴 보자: |A|=0.5 ➔ |AB| 는 |B| 부피의 반 정도로 줄어든 것처럼 보임

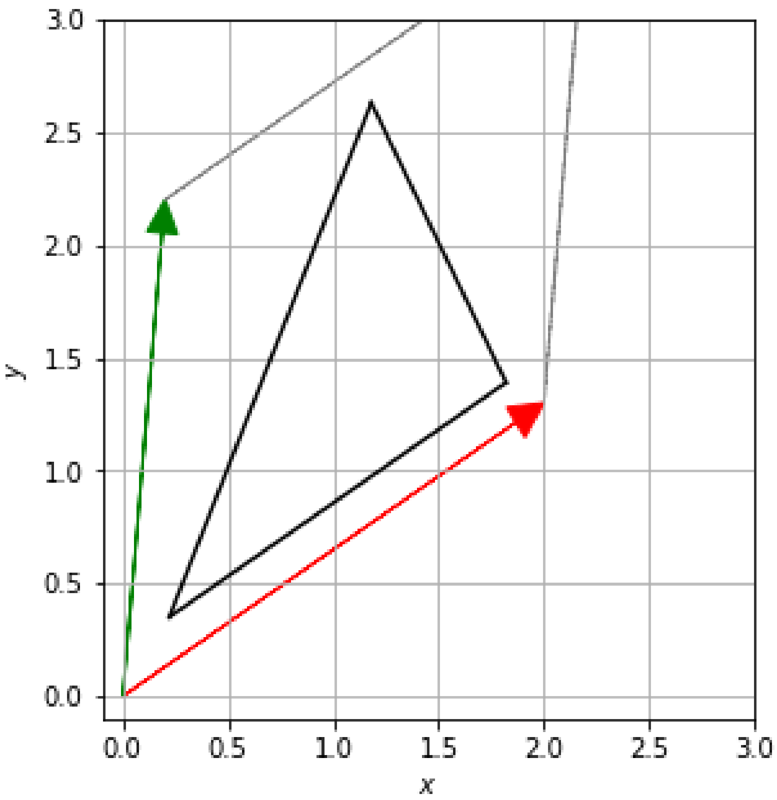
행렬의 크기: 면적, 부피

- 어떤 행렬 A의 부피나 면적 |A|
  - 행렬의 크기
- 정사각 행렬에서만 정의됨
  - 이 값을 행렬식이라고 함
    - det A 혹은 |A|로 표현

행렬의 크기는 어떤 일을 하나

- 행렬은 벡터에 곱해져 새로운 벡터를 생성하는 “변환”의 도구
  - 행렬식을 통해 변환의 결과를 예측할 수 있음





행렬의 크기는 어떤 일을 하나

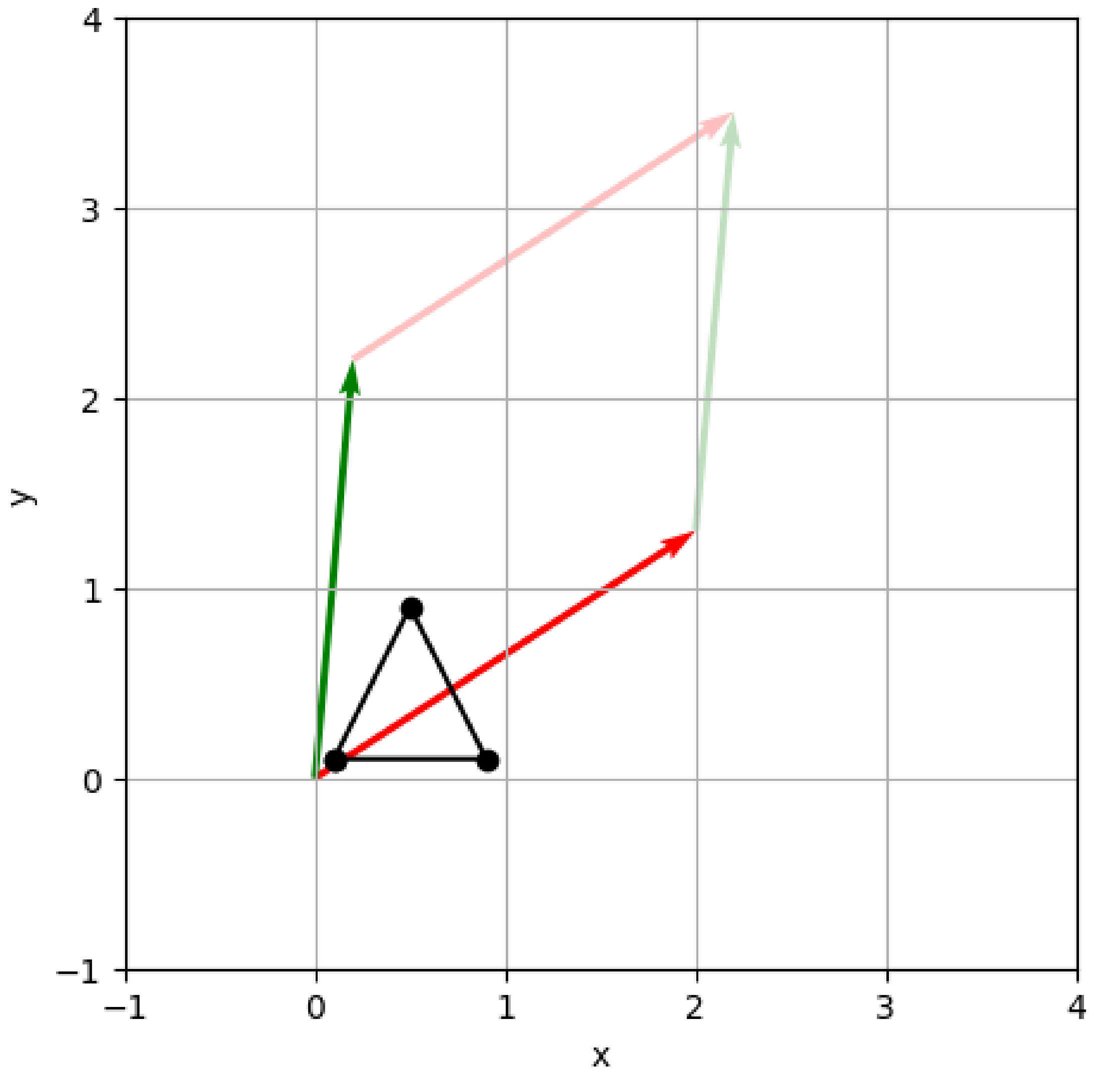
```
M = np.array([[2.0, 0.2],                     # 행렬 M을 정의한다.
              [1.3, 2.2]])
points = np.array([[0.1, 0.9, 0.5],           # 3개의 좌표로 행렬 구성
                   [0.1, 0.1, 0.9]])
p1 = points[:, 0]                             # 각각의 좌표 p1
p2 = points[:, 1]                             # 각각의 좌표 p2
p3 = points[:, 2]                             # 각각의 좌표 p3
```

점들로 루프 그리기

```python
def drawLineLoop(ax, pointsMat, color='black'):
    matShape = pointsMat.shape
    nPoints = matShape[1]
    xList = []
    yList = []
    for i in range(nPoints):
        xList.append(pointsMat[:, i][0])
        yList.append(pointsMat[:, i][1])

    xList.append(pointsMat[:, 0][0])
    yList.append(pointsMat[:, 0][1])

    plt.plot(xList, yList, marker = 'o', color=color)
```

점들과 행렬 그려보기

```
ax = visMat22(M, x=[-1,4], y=[-1, 4])

 # 3개의 열벡터가 표현하는 3개의 좌표
points = np.array([[0.1, 0.9, 0.5],
                   [0.1, 0.1, 0.9]])

drawLineLoop(ax, points)
```



점들과 행렬을 곱해서 가시화

```
ax = visMat22(M, x=[-1,4], y=[-1, 4])

 # 3개의 열벡터가 표현하는 3개의 좌표
points = np.array([[0.1, 0.9, 0.5],
                   [0.1, 0.1, 0.9]])
newPoints = M.dot(points)
drawLineLoop(ax, points)
drawLineLoop(ax, newPoints, color='red')
```