게임 수학 – 강의 3

동명대학교 게임공학과
강영민

벡터의 곱

- 세 종류의 곱
  - 아직 이해하기 힘든 부분은 그냥 넘어 가자
  - 스칼라 곱scalar product
    - 내적inner product, 점곱dot product

$$s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

  - 벡터곱vector product
    - 가위곱cross product, 외적outer product (이 수업에서는 외적이라 부르지 않음)

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

  - 텐서곱tensor product
    - 외적outer product (외적이라는 이름은 서로 다른 곱에 중복되어 사용)
    - 이 수업에서 외적은 텐서곱만을 의미

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$$

두 벡터의 스칼라 곱 – 내적 혹은 점곱

- 결과
  - 스칼라
  - 두 벡터의 크기에 비례하고 사잇각의 코사인에 비례

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \cos \theta$$ → 기하적 의미

- 계산법

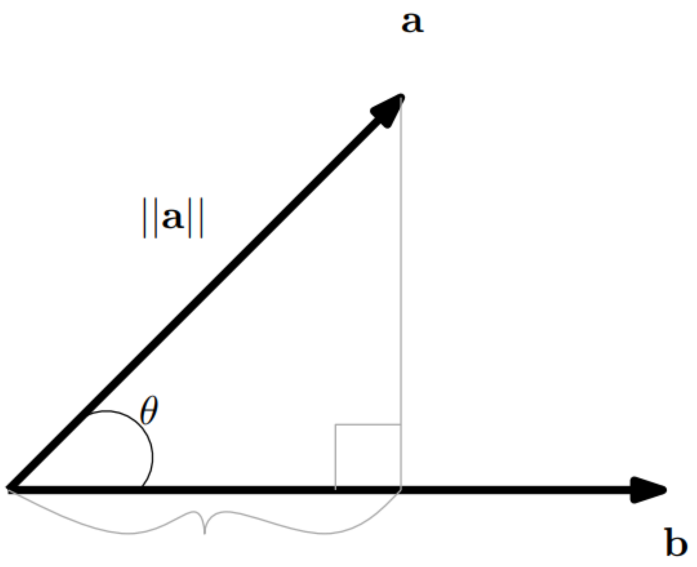
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$ → 의미를 파악하기는 어려움

내적, 혹은 스칼라 곱에 대하여

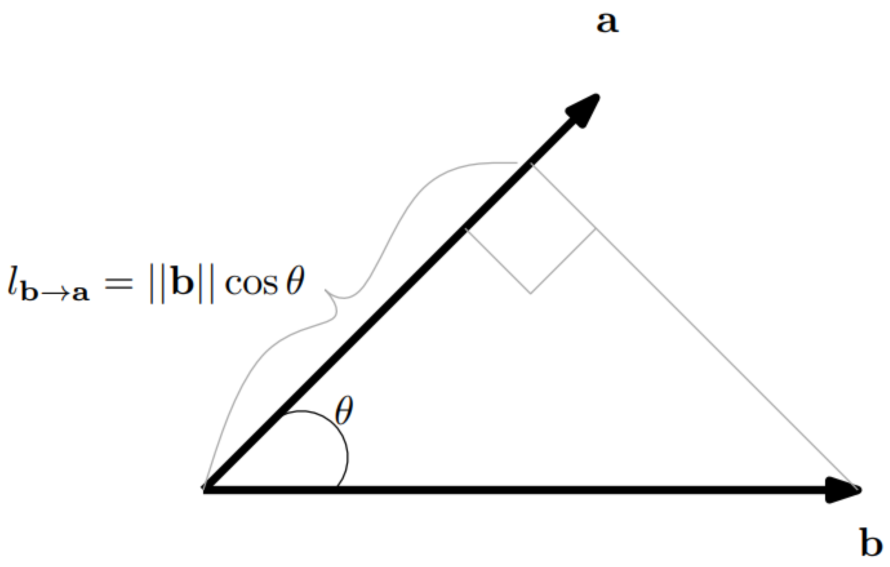
- 내적
  - 스칼라 곱(scalar product)라고도 부름
  - 두 개의 벡터를 피연산자(operand)로 하는 이항 연산(binary operator)로서 그 결과가 스칼라 값
  - 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$로 표현
  - 두 벡터가 이루는 사잇각이 θ라고 하며, 내적의 크기는 다음과 같다.
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos \theta$ → 기하적 의미
  - 실제 계산 방법
    - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ → 의미를 파악하기는 어려움

내적의 기하적 의미

- 점곱은 한 벡터를 다른 벡터 방향에 수직으로 내린 그림자의 길이를 그림자를 받는 벡터의 크기로 곱한 것



$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = ||\mathbf{a}||\cos\theta$$



$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||\cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

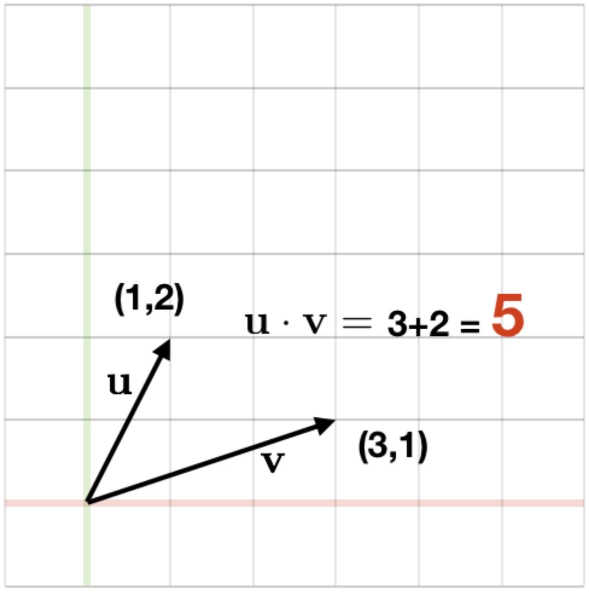
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||\cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

점곱은 불변량invariant인가?

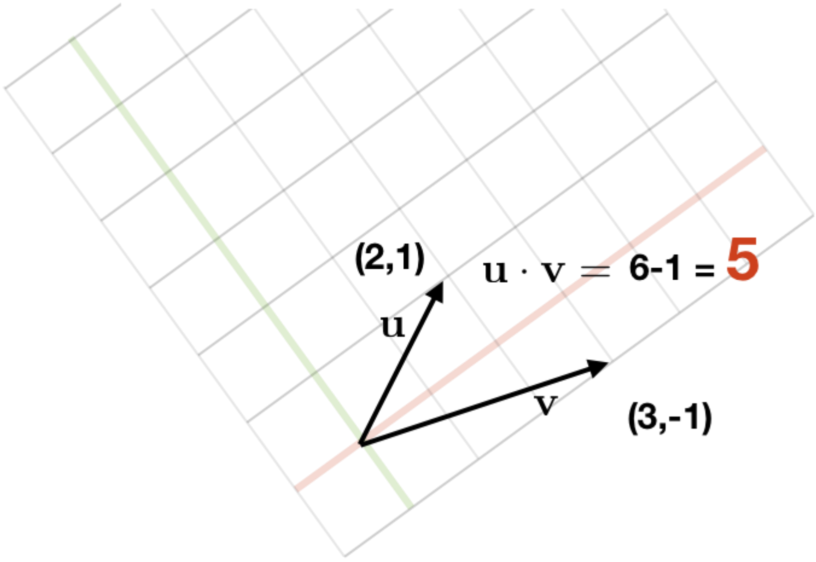
- 변경된 좌표계에서의 점곱 비교

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

어떤 좌표 공간에서 두 벡터의 점곱



변경된 좌표계에서 두 벡터의 점곱



점곱 계산 – coding

```
import numpy as np

u = np.array([7.5, -1.2])
v = np.array([3.0, 3.7])
```

벡터의 준비

```
dot_product = 0
for i in range(len(u)):      # 벡터 u의 원소 개수만큼 반복
    dot_product += u[i]*v[i] # 각 원소를 대응하는 벡터 v의 원소와 곱해 누적
print(dot_product)
```

```
18.06
```

직접 구현해 보기 – 가장 느림

```
print(u*v)             # 두 벡터의 아다마르 곱
print((u*v).sum())     # 아다마르 곱으로 얻은 벡터 원소의 합
```

```
[22.5  -4.44]
18.06
```

아다마르 곱을 계산한 뒤 reduction

```
dot_product = u.dot(v)
print(dot_product)
```

```
18.06
```

넘파이 배열의 dot 메소드 사용하기

```python
import numpy as np

u = np.array([7.5, -1.2, 3.2, 1.2, 1.1, 2.3, 3.2, 1.5])
v = np.array([3.0, 3.7, 3.2, 1.2, 1.1, 2.3, 3.2, 1.5])

def dot_with_for(u, v):
    dot_product = 0
    for i in range( len(u) ) :
        dot_product += u[i]*v[i]

    return dot_product

print(dot_with_for(u, v))

def dot_with_reduction(u, v):
    return (u*v).sum()

print(dot_with_reduction(u, v))

def dot_numpy(u, v):
    return u.dot(v)

print(dot_numpy(u, v))
```

```
48.730000000000004
48.730000000000004
48.730000000000004
```

```python
import time

iteration = 10000

s = time.time()
for i in range(iteration):
    dot_with_for(u, v)
eTime = time.time() - s
print(eTime)

s = time.time()
for i in range(iteration):
    dot_with_reduction(u, v)
eTime = time.time() - s
print(eTime)

s = time.time()
for i in range(iteration):
    dot_numpy(u, v)
eTime = time.time() - s
print(eTime)
```

```
0.023937463760375977
0.014963150024414062
0.005982875823974609
```

벡터 내적의 기본 성질

- 내적과 벡터 길이의 관계
  - 같은 벡터를 내적하면?
  - 이것은 2차 노름을 제곱한 것
    - 벡터 크기의 제곱

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 \Leftrightarrow ||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

- 이 벡터가 단위벡터라면?
  - 결과는 1

$$||\mathbf{u}|| = 1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$$

- 벡터의 정규화를 내적으로 표현하면?
  - 벡터 v를 정규화해서 단위 벡터 u를 얻기

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}$$

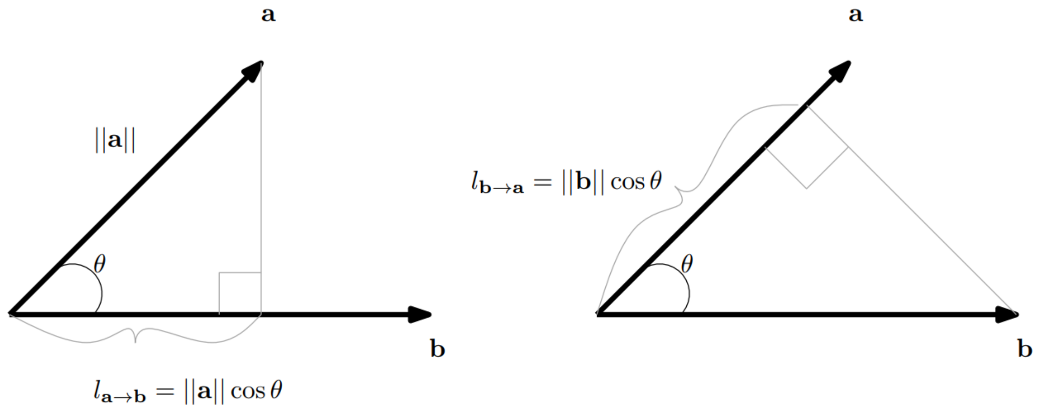
두 벡터가 이루는 사잇각과 내적의 관계

- 서로 수직하는 벡터 u와 v의 내적은?
  - 사잇각이 90도, 즉 $\pi/2$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos \frac{\pi}{2}$$

- 직교하는 두 벡터의 내적은 언제나 0

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$



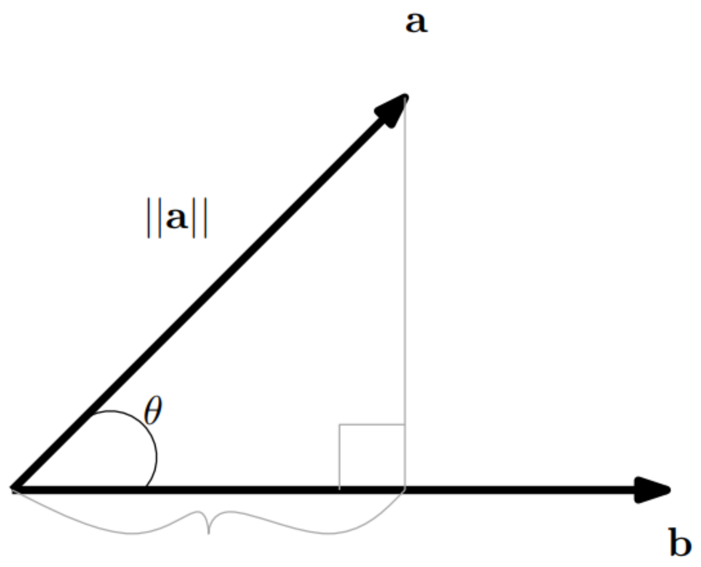
$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{b}||$
$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/||\mathbf{b}||$

$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{a}||$
$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/||\mathbf{a}||$

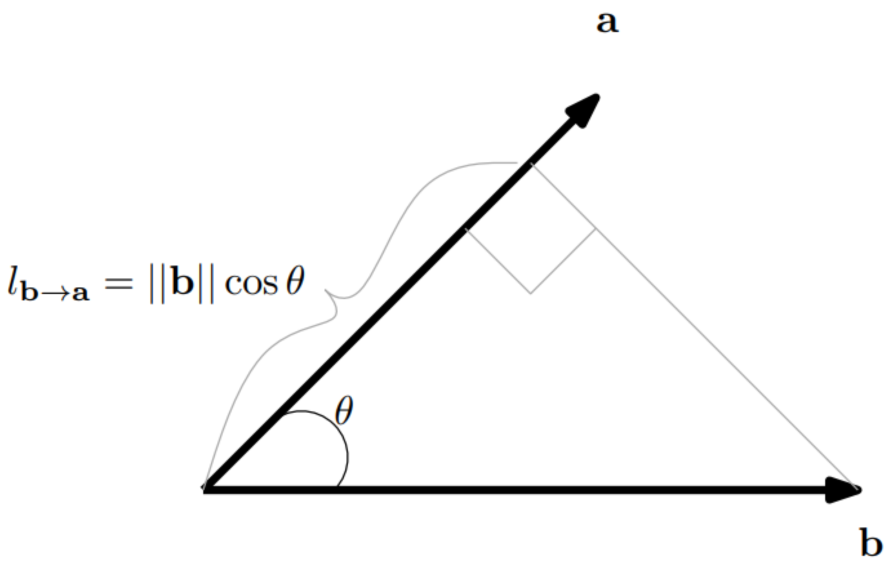
- 기하를 이용한 간단한 이해: 직교하는 두 벡터는 서로 그림자를 드리우지 않는다

내적의 기하적 의미

- 점곱은 한 벡터를 다른 벡터 방향에 수직으로 내린 그림자의 길이를 그림자를 받는 벡터의 크기로 곱한 것



$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = ||\mathbf{a}|| \cos\theta$

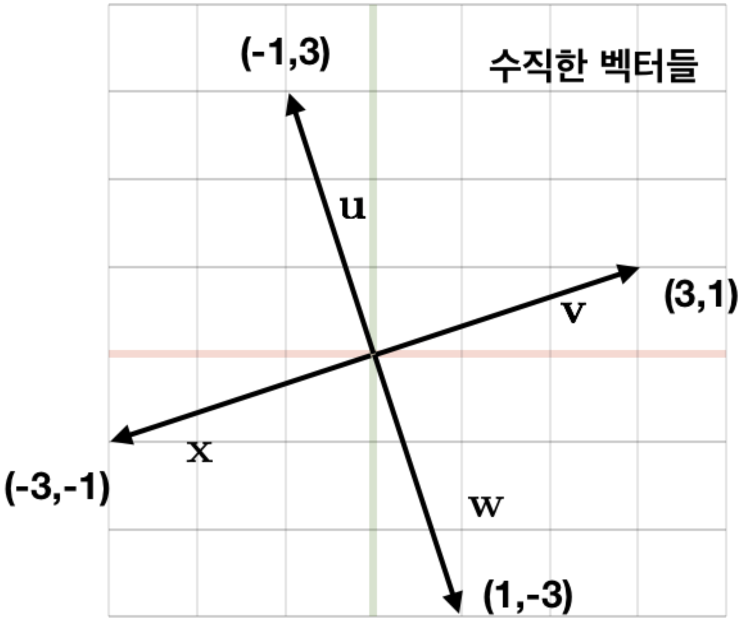


$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

직교하는 벡터들의 내적 예시

- 언제나 0이 된다



$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1 \times 3) + (3 \times 1) = 0$$
$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (3 \times 1) + (1 \times -3) = 0$$
$$\mathbf{w} \perp \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = (1 \times -3) + (-3 \times -1) = 0$$
$$\mathbf{x} \perp \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = (-3 \times -1) + (-1 \times 3) = 0$$

내적으로 사잇각 구하기

- 두 벡터 u와 v가 길이 1인 단위벡터인 경우
  - 두 벡터의 내적은 사잇각의 코사인

$$||\mathbf{u}|| = 1, ||\mathbf{v}|| = 1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos\theta$$

- 두 벡터의 길이가 1이 아닌 경우는 정규화하면 됨
  - 벡터의 내적으로 두 벡터의 사잇각을 구하고 싶다면, 두 벡터의 크기로 나눔

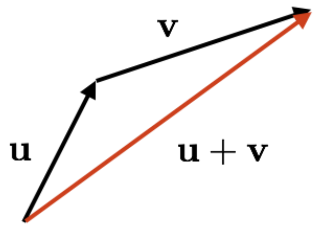
$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||} = \cos\theta$$

실용적인 쓸모가 있어 보임

중요한 두 부등식

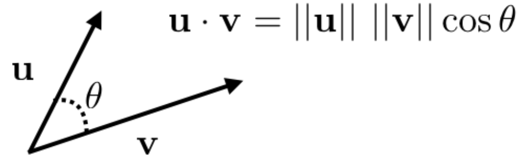
- 삼각 부등식과 코시-슈바르츠 부등식

벡터의 삼각 부등식



$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$$

벡터의 코시-슈바르츠 부등식



$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$$

- 다른 형태의 코시-슈바르츠 부등식

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

내적 u의 노름 제곱 v의 노름 제곱

내적의 활용

- **내적의 성질을 통해 알 수 있는 것**
  - 코사인 함수의 특성을 통해 간단히 얻어지는 사실
    - $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||$
    - $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$
    - $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^2$
  - 벡터를 이용하여 각도를 계산하거나 투영을 계산하는 데에 널리 사용
    - $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||\cos\theta$
    - $\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
    - $\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$
    - $\theta = \cos^{-1}\frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}}$

내적의 활용

- 내적의 성질 활용한 두 벡터의 사잇각 구하기

예제

어떤 두 벡터가 각각 (3,2)와 (4,1)이라고 하자. 두 벡터가 이루는 각도를 구하라.

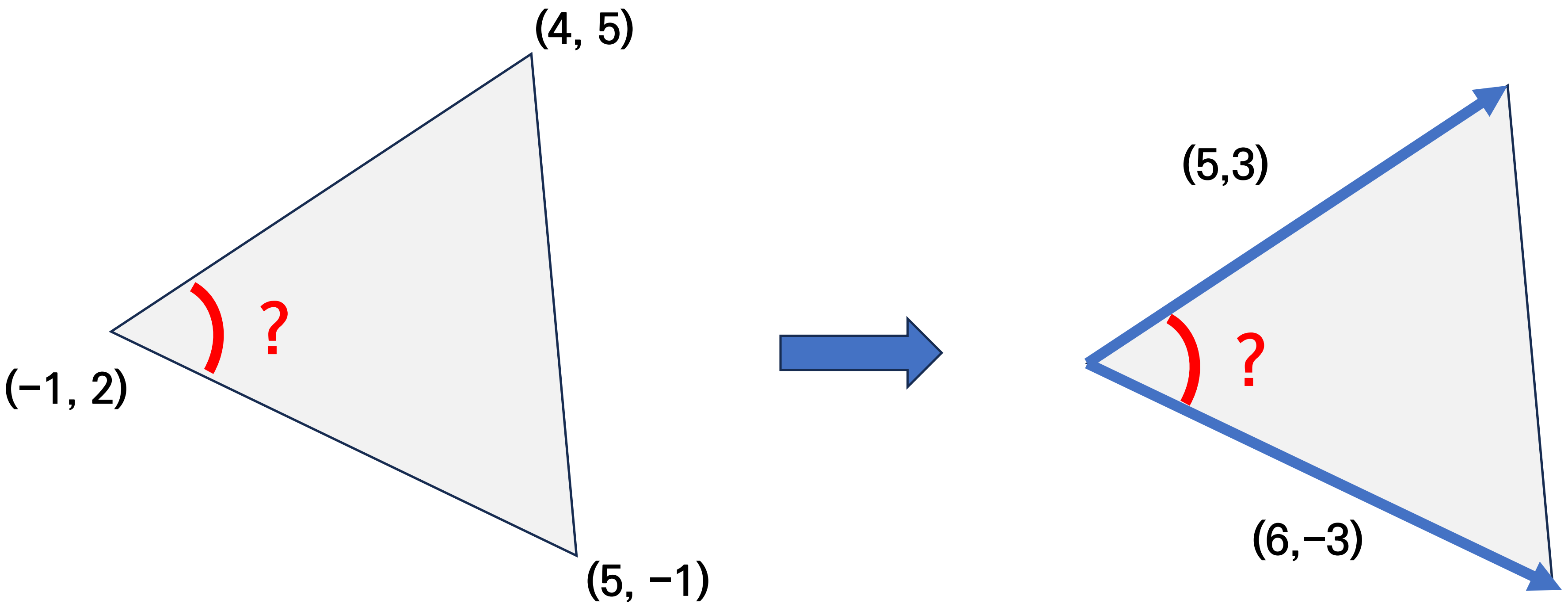
정답

두 벡터를 각각 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$로 표현하자. 두 벡터의 내적 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$는 $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$, 즉 14이다. 각각의 길이는 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$과 $||\mathbf{w}|| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$이다. 따라서 두 벡터의 사이각은 다음과 같다.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \cos^{-1} \frac{14}{\sqrt{221}} \simeq \cos^{-1} 0.94174191159484 \simeq 19.65°$$

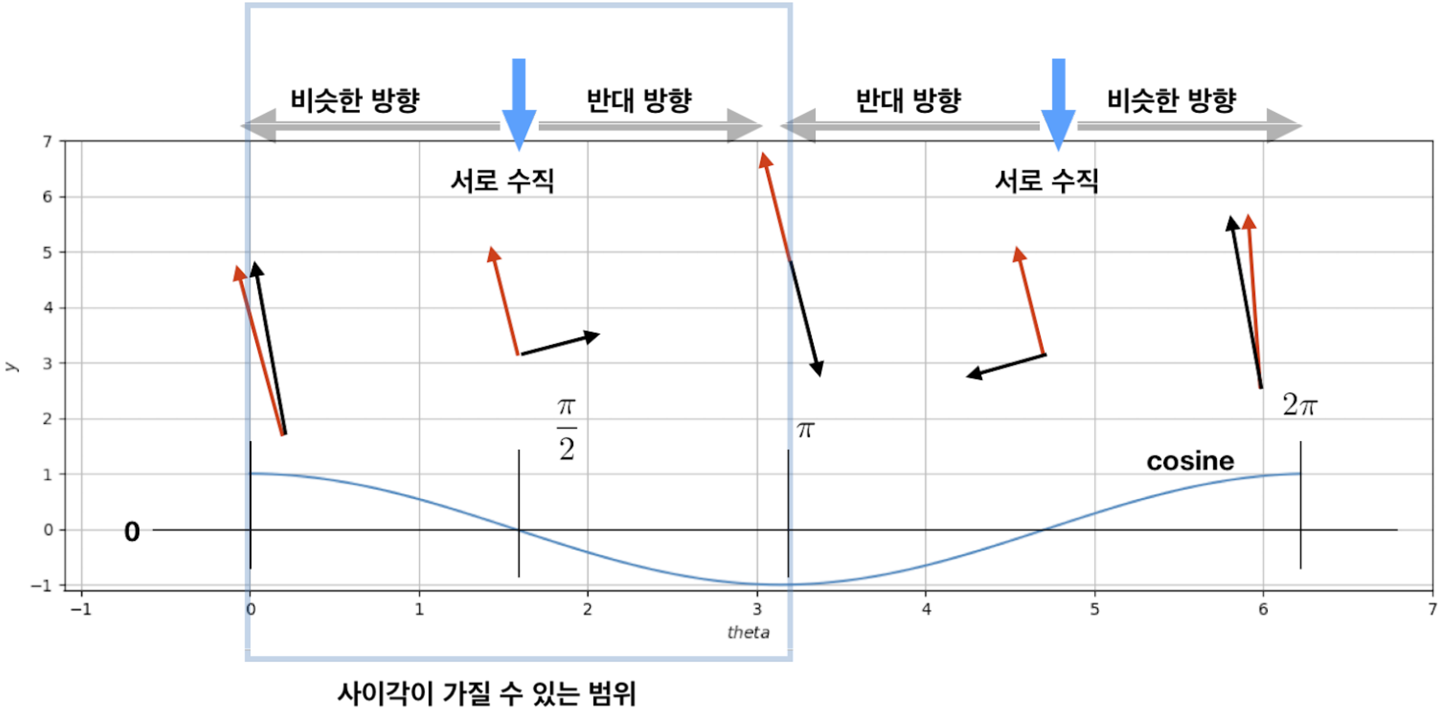
내적의 활용

- 내적의 성질 활용한 두 벡터의 사잇각 구하기



내적의 활용

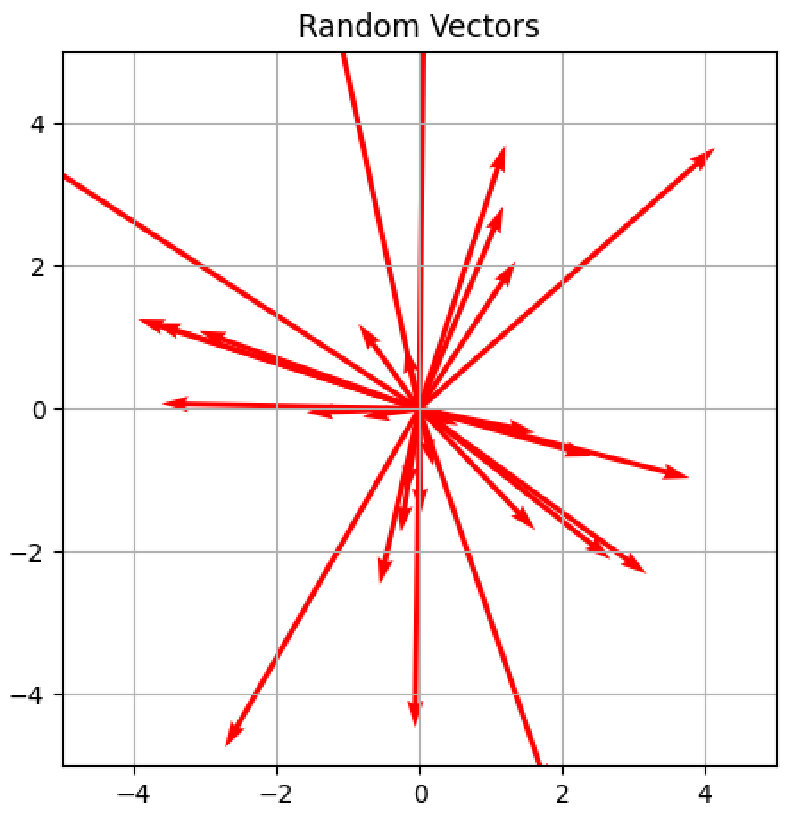
- 벡터의 유사도 판정 – 코사인 유사도cosine similarity
  - 두 벡터의 일치도를 두 벡터 사잇각의 코사인 값으로 정한다면?

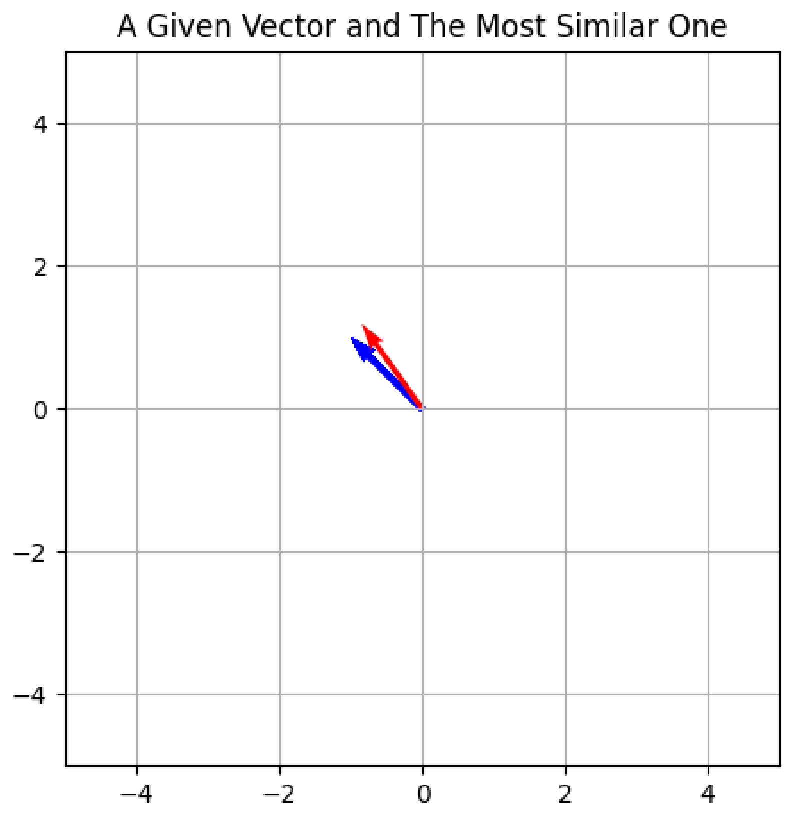


$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||} = \cos\theta$$

[실습] 벡터의 유사도 검사

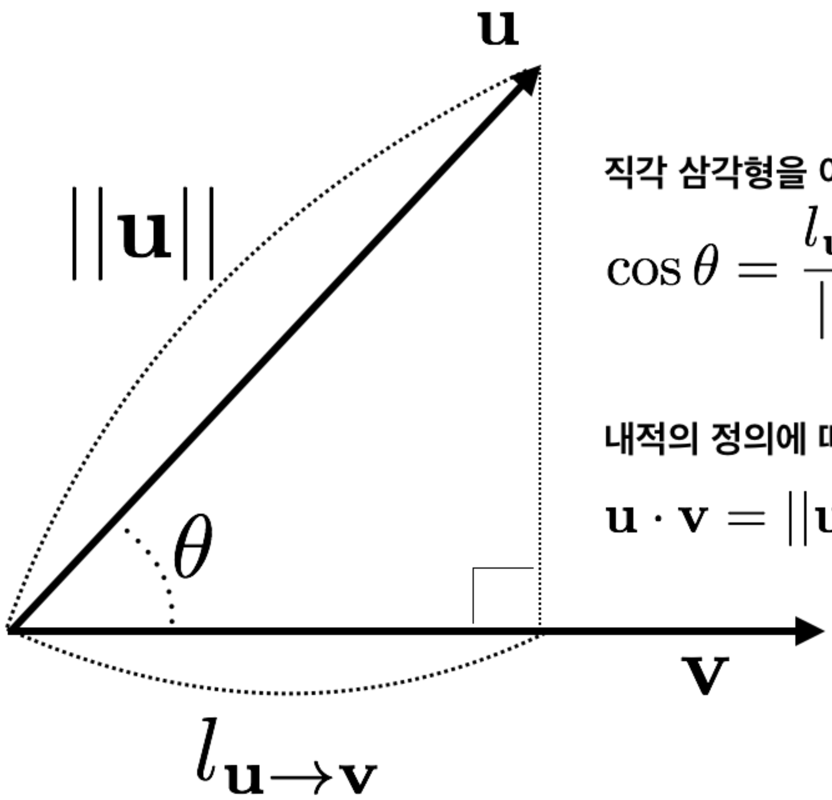
- 임의의 벡터에서 지정한 벡터와 가장 유사한 벡터 찾기





내적의 기하적 의미 – 투영

- 내적은 투영과 밀접한 관계



직각 삼각형을 이루는 변의 관계에서

$$\cos\theta = \frac{l_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}}}{||\mathbf{u}||} \quad \Longrightarrow \quad l_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = ||\mathbf{u}||\cos\theta$$

내적의 정의에 따라

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad l_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{v}}$$

[실습] 투영벡터의 계산

- 벡터 u와 v가 주어질 때,
  - 두 벡터가 서로에게 수직으로 떨어뜨리는 그림자 벡터를 구하자