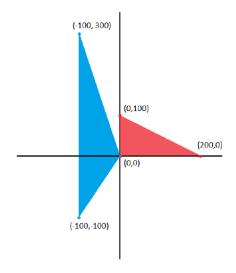
# 변환과 계층적 모델링

동명대학교 게임공학과 강영민

### 변환

- 여러 개의 원을 그리는 방법
  - 옵션 1: 서로 다른 그리기를 사용하는 방법
  - 옵션 2: 기본적인 원 그리기를 구현하고, 변환을 적용하는 방법
    - 변환: 좌표 집합을 다른 어떤 좌표 집합으로 변경하는 일
      - 변환을 자유자재로 할 수 있다고 가정:  $T(\mathbf{p},\vec{d}),$  크기를 변경  $S(\mathbf{p},s)$
      - 필요한 것은 반지름 1의 원 그리기 draw()만 있으면 어떤 위치에 어떤 크기로든 원을 그릴 수 있음
        - $T(S(\mathbf{draw}(), s), \vec{d})$
      - 어파인(affine) 변환 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지



# OpenGL의 변환

- Affine Transformation
- 대표적인 Affine Transformation

이동(translate)	주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮 겨 놓는다.
회전(rotate)	2차원에서는 기준점, 3차원에서는 기준축을 중심으로 주어진 각도만큼 돌아간다.
크기변경(scale)	각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값 이 커지거나 줄어든다.

#### 동차 좌표계

- 동차 좌표(homogeneous coordinate)은 n 차원의 사영공간을 n+1 차원의 좌표로 나타내는 좌표계
- 1827년 아우구스트 페르디난드 뫼비우스(August Ferdinand Möbius)가 그의 저작 "Der barycentrische Calül"에서 처음으로 소개
- 사영기하학에서 사용되는 좌표계
- 무한의 위치에 있는 점을 유한 좌표로 표현하는 데에 적합

#### 그래픽스에서 동차좌표계를 사용하는 이유

- 3차원 데카르트 좌표를 사용할 경우 이동은 벡터의 덧셈으로 표현되고, 회전은  $3 \times 3$  행렬의 곱으로 표현
- 이동과 회전이 누적되면 벡터 덧셈과 행렬 곱셈이 연속적 적용됨
- 동차좌표(homogeneous coordinate)을 사용하면 이동과 회전 모두  $4 \times 4$  행렬의 곱으로 표현 가능
- 누적된 이동, 회전 변환을 하나의 행렬로 표현 가능

#### 변환 행렬

- 동차 좌표계에서 어파인 변환은 행렬로 표현 💛 📥
- OpenGL 역시 변환을 행렬로 표현
- OpenGL은 정점 데이터를 그래픽 카드로 보내는데, 각각의 정점들은 필요한 변환 행렬에 곱해져서 최종적인 화면 좌표 생성
- 곱해지는 행렬은 두 종류: 모델뷰(ModelView) 행렬, 투영 (Projection) 행렬
- 하나의 정점이 화면 좌표로 바뀌는 과정
  - 지역좌표계 내의 좌표를  $coord_{local}$ 이라고 하고, 모델뷰 행렬은 ModelViewMatrix, 투영행렬을 ProjMatrix라고 하면, 화면 좌표  $coord_{screen}$ 은 다음과 같이 구한다.
  - $coord_{screen} = ProjMatrix \times ModelViewMatrix \times coord_{local}$

### OpenGL에서 변환은 어떻게 이루어지나

- OpenGL의 변환: ModelViewMatrix, ProjMatrix 행렬을 변경하는 것
- 모델 뷰 행렬, 투영 행렬 중 어는 것을 바꿀 것인지는 행렬 모드로 결정
- 행렬모드: GL\_MODELVIEW와 GL\_PROJECTION
  - 당분간 GL\_TEXTURE는 고려하지 않음
- 투영 행렬을 변경 = 카메라의 속성을 변경: glOrtho나 gluPerspective
- 모델뷰 행렬을 변경하는 함수
  - 카메라 위치 변경: gluLookAt
  - 객체의 위치, 방향, 크기 변경 표 참고

glTranslate3f(dx, dy, dz)	(dx,dy,dz) 만큼 좌표 이동
glRotatef(angle, axisX, axisY, axisZ)	축(axisX, axisY, axisZ)를 기준으로 angle만큼 회전
glScalef(scaleX, scaleY, scaleZ)	(scaleX, scaleY, scaleZ)를 성분별로 좌표에 곱함

- 이상의 변환들은 좌표를 변경하지 않고 행렬을 변경하는 역할을 수행
- 현재의 행렬이 M이라고 하고, glTranslate의 이동을 표현하는 행렬이 T
- glTranslate 함수가 불렸을 때, M을 MT로 변경

## 현재 변환 행렬

- 현재 변환 행렬(current transform matrix)은 줄여서 CTM이라 부름
- 모든 정점은 CTM에 곱해진다
- 따라서 변환 함수는 이 CTM을 변경하는 것
- CTM을 변경하는 함수로 다음과 같은 것들이 있다

함수	CTM의 변경
LoadIdentity	CTM := I
LoadMatrix(M)	CTM := M
T: Translate*	CTM := CTM * T
R: Rotate*	CTM := CTM * R
S: Scale*	CTM := CTM * S

## 변환의 적용에 따른 CTM 변화 과정

- 다음 코드와 같이 변환이 적용될 경우
- CTM은 이 코드에 주석 처리된 부분에 나타난 것과 같이 변경

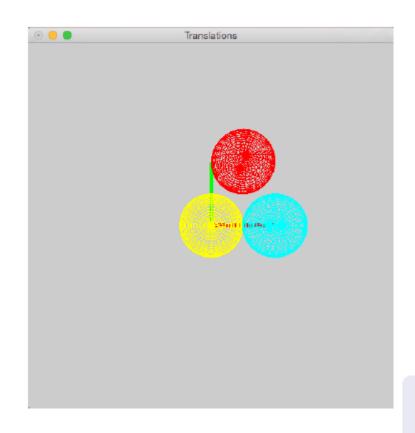
```
glMatrixMode(GLMODELVIEW)
glLoadIdentity() // CTM:=I
glTranslatef(1,2,1) // CTM:=IT T는 glTranslate가 표현하는 행렬
glRotatef(45, 1,0,0) // CTM:=ITR R은 glRotate가 표현하는 행렬
glScalef(2.0, 1.0, 1.0) // CTM:=ITRS S는 glScale이 표현하는행렬
drawObjects()
```

#### 코드 구현 내용

drawObjects 내에서 그려지는 모든 기하 객체의 좌표에 대해 크기변환  $(\mathbf{S})$ 을 적용한 뒤, 이 값을 x 축 기준으로 45도 회전하게 되며, 이후 (1,2,1)만큼의 이동을 한다. 다시말해 우리가 호출한 변환의 역순으로 변환이 객체에 적용된다.

### 구 그리기에 변환 적용 예제

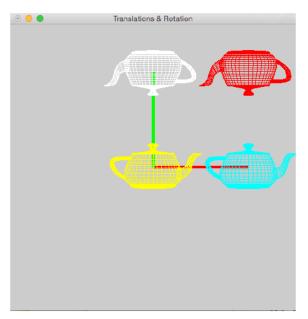
## 구 그리기에 변환 적용 예제



- 노란 색, 하늘 색, 붉은 색 공이 차례로 그려진다.
- 노란 색 공에는 변환이 적용되지 않았으므로 원점에
- 하늘 색 공에는 (1,1,0) 만큼의 이동
- 붉은 색 공에 (-0.5, 1, 0) 적용 + 하늘 색에 적용된 (1,1,0) 이동이 추가

## 복합 변환의 이해

- 실제 객체에 적용되는 변환은 호출 순서의 역으로 적용
- CTM을 활용한 변환 적용 기법을 사용하기 때문
- 이러한 방식으로 이해하면 적용된 변환을 상상하기가 어려움
- 다음 그림과 같이 네 개의 주전자를 배치하고 싶을 때에 OpenGL로 구현하려면 어떻게 해야할 지를 고민해 보자.



### CTM 모델로 원하는 변환 구현하기

• 노란색 주전자는 아무런 변환도 적용되지 않은 상태. 바로 그림

```
glLoadIdentity()
draw(yellow) // CTM = I
```

• 하늘색 주전자는 x 축으로 1만큼 이동하여 그려야 하므로 glTranslate\* 함수를 부른 뒤 주전자를 그린다. 이 이동 변환을 T1이라고 하자.

```
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) // T1
draw(cyan)
```

- 붉은 주전자는 z 축을 기준으로 180도 회전한 뒤에 (1,1,0)만큼 이동
- 현재의 CTM이  $\mathbf{T}_1$ 이므로 (0,1,0)만큼의 이동  $\mathbf{T}_2$ 를 추가 적용하면 (1,1,0)이동이 되며, 여기에 회전  $\mathbf{R}$ 을 적용

```
glTranslate(0.0, 1.0, 0.0) // T2
glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0) // R
draw(red)
```

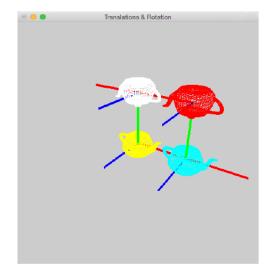
## CTM 모델로 원하는 변환 구현하기

- 붉은 색 주전자는  $T_1T_2R$ 의 변환
- 흰색 주전자를 그리는 방법은 까다롭다
- 이 주전자는 180도 회전 시킨 주전자를 (0,1,0) 만큼 이동한 것
- ullet 현재의 변환  ${f T}_1{f T}_2{f R}$ 에 어떤 변환을 추가적으로 호출하면 이것이 가능할지 생각해야 함
- 회전이 호출된 상태라 까다롭다.
- 새롭게 적용할 변환이 **X**라고 하고, (0,1,0) 만큼 이동하는 변환을 **T**라고 하면 다음과 같은 관계 성립
  - $T_1T_2RX = TR$
  - $\bullet \mathbf{X} = \mathbf{R}^T \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T} \mathbf{R}$
- 위의 계산을 수행하면 X는 (1,0,0) 만큼의 이동으로 나타나게 된다. 따라서 다음과 같이 적용하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

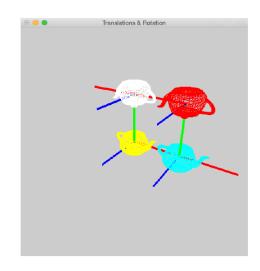
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) // X
draw(white)

#### 지역좌표계 변환을 중심으로 생각하기

- 앞 슬라이드의 방식은 너무 번거롭다.
- 쉬운 방법: 물체의 변환이 아니라 좌표계의 변환으로 이해
- 각각의 주전자가 가진 지역 좌표계를 함께 그리기
- 노란색 주전자는 변환 적용 없어 전역 좌표계와 일치



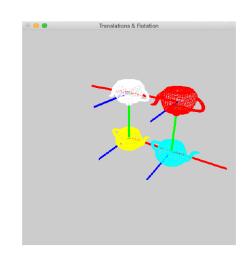
glLoadIdentity()
draw(yellow)



하늘색 주전자는 노란색 주전자의 좌표계에서 보았을 때 x 축으로 1만큼 이동하여 있다. 따라서 다음과 같이 적용한다.

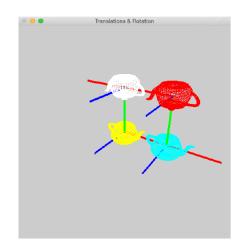
glTranslatef(1.0,0.0,0.0)
draw(cyan)

#### 지역좌표계 변환을 중심으로 생각하기



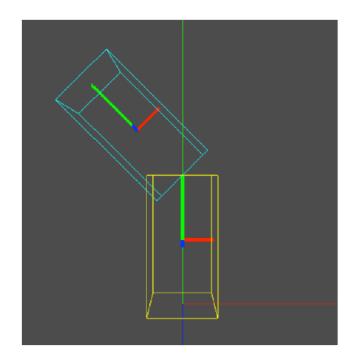
붉은 색 주전자는 하늘색 주전자에서 y 축으로 1만큼 올라간 뒤에, **이동된 좌표계**에서 z축을 기준으로 180도 회전

glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0) glRotatef(180, 0.0, 0.0, 1.0) draw(red)



마지막으로 흰색 주전자는 붉은 색 주전자에서 x 축으로 1만큼 이동한 것 glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0) draw(white)

- 크기 변경이 포함될 경우에는 문제가 발생
  - 지역좌표계 변환을 통한이해는 강체(rigid) 변환에 대해서만 적용
- 다음의 그림과 같은 장면을 그린다고 가정
  - 각 변 길이 1인 정육면체를 높이 2, 너비 1, 깊이 1로 만들 경우
  - glScalef(1.0, 2.0, 1.0)

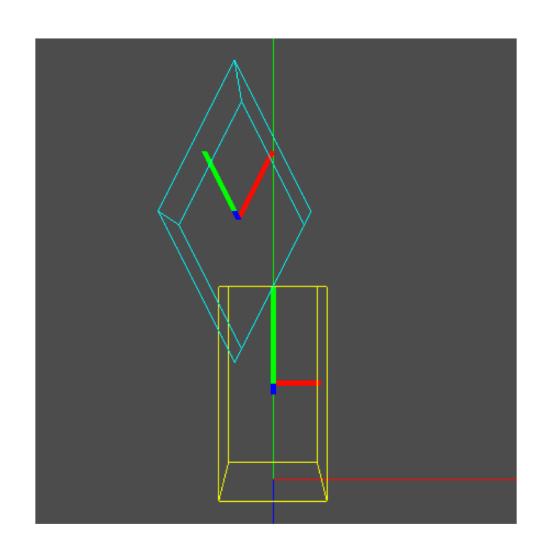


- 육면체가 xz 평면위에 놓이려면 y축 방향으로 0.5 이동
  - 이미 지역좌표계가 glScale에 의해 변환되었기 때문에 0.5만 들어올려도 전역좌표계에서는 1만큼 올라가게 된다.
- 노란색 육면체는 다음과 같이 그림

```
glScalef (1.0, 2.0, 1.0) // S
glTranslatef (0.0, 0.5, 0.0) // T1
draw (yellow)
```

- 문제는 하늘색 육면체
- 이 육면체는 노란색 육면체를 0.5만큼 들어올린 뒤에 z축 기준으로 회전을 시키고, 이렇게 변환된 공간에서 다시 y축 기준으로 0.5만큼 이동시키면 됨
- 코드로는 다음과 같은 변환 적용으로 구현이 가능할 것처럼 보임

```
glTranslatef(0.0, 0.5, 0.0) // T2
glRotatef(45, 0.0, 0.0, 1.0) // R
glTranslatef(0.0, 0.5, 0.0) // T3
draw(cyan)
```



- 실제로 하늘색 육면체에 적용된 변환
- $\bullet$  ST<sub>1</sub>T<sub>2</sub>RT<sub>3</sub>
- 가장 마지막에 적용되는 S는 전역 좌표계를 기준으로 크기변경
- 하늘색 육면체의 방향(orientation)을 고려하지 않고 크기 변경
- 해결하는 방법은 행렬 스택 연산인 glPushMatrix()와 glPopMatrix()를 활용하여 크기변경 변환은 적용된 객체 이외에서 영향을 미치지 않도록 제한

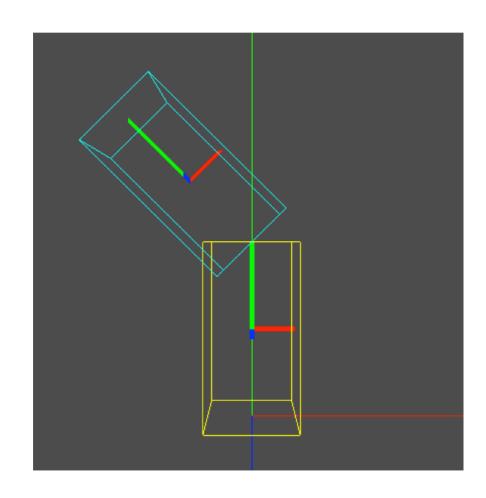
함수명	역할
glPushMatrix	현재의 CTM을 스택에 저장한다.
glPopMatrix	행렬 스택을 pop하여 CTM을 갱신한다.

 glPushMatrix를 수행한 뒤에 glPopMatrix를 수행하면 직전의 glPushMatrix 수행 당시의 CTM으로 복원

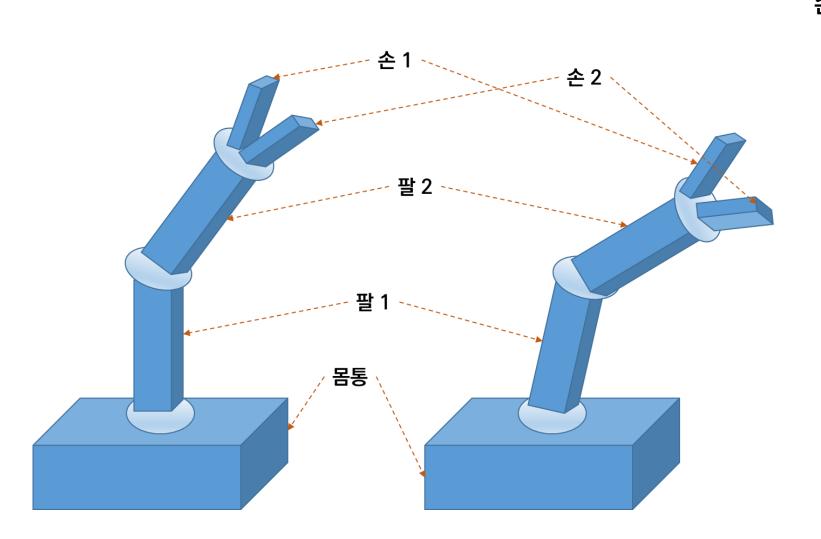
## 제대로 된 크기변경 적용 코드

```
glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glPushMatrix()
glScalef(1.0, 2.0, 1.0)
draw(yellow)
glPopMatrix()

glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glRotatef(45, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
glTranslatef(0.0, 1.0, 0.0)
glPushMatrix()
glScalef(1.0, 2.0, 1.0)
draw(cyan)
glPopMatrix()
```



## 연결 구조가 있는 객체



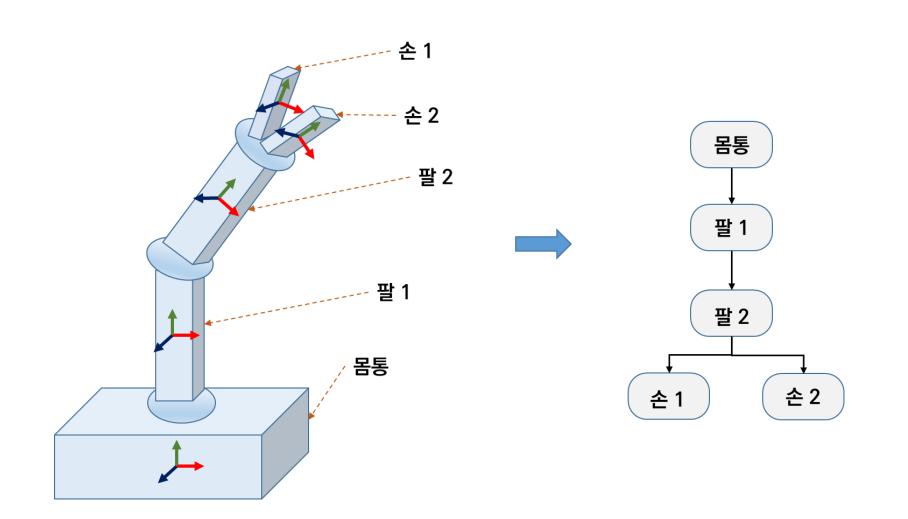
몸통은 손에 영향을 미치지만, 손의 움직임은 몸통에 영향을 미지치 않는다



팔은 몸통의 영향을 받지만, 손의 영향은 받지 않고, 팔은 손에 영향을 미친다.



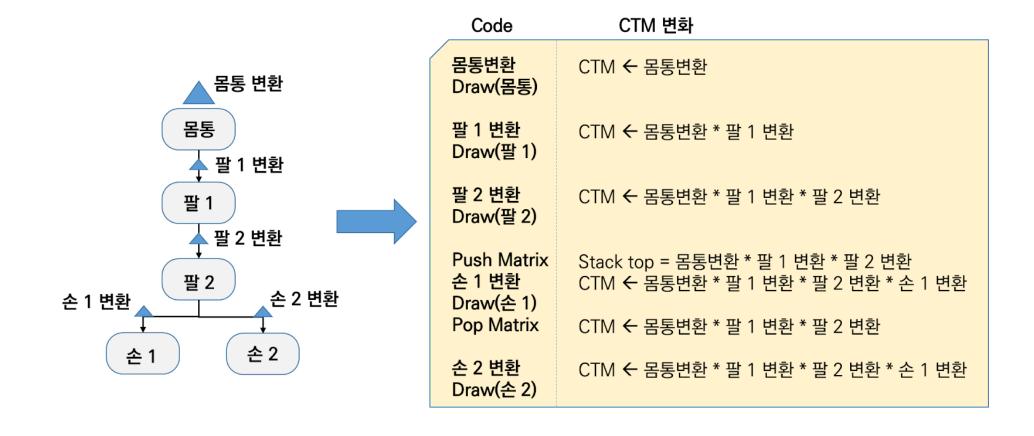
## 연결 구조가 있는 객체 각 요소의 관계



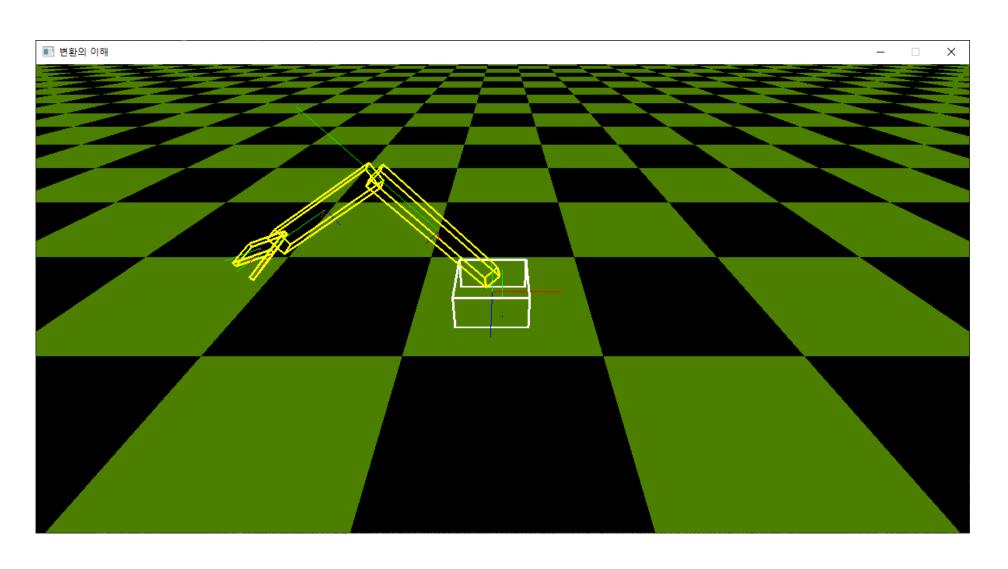
트리tree 구조 = 계층구조

## 계층적 모델의 그리기

• glPushMatrix / glPopMatrix 활용



# 계층적 모델링 프로젝트



#### 사용할 패키지들

```
from OpenGL.GLU import *
from OpenGL.GLU import *
import sys
from PyQt6.QtWidgets import *
from PyQt6.QtOpenGLWidgets import QOpenGLWidget
from PyQt6.QtCore import *

import math
import numpy as np
```

### 평면 그리기

```
def drawPlane():
   n, w = 100, 500
   # n: 체스판 한면의 정점수, w: 체스판 한면의 길이
   d = w / (n-1) # 인접한 두 정점 사이의 간격
   # 체스판 그리기
   glColor3f(0.3,0.5,0)
   glBegin(GL_QUADS)
   for i in range(n):
       for j in range(n):
           if (i+j)\%2 == 0:
               startX = -w/2 + i*d
               startZ = -w/2 + j*d
               glVertex3f(startX, 0, startZ)
               glVertex3f(startX, 0, startZ+d)
               glVertex3f(startX+d, 0, startZ+d)
               glVertex3f(startX+d, 0, startZ)
   glEnd()
```

#### 축 그리기

```
def drawAxes():
    glBegin(GL_LINES)
    glColor3f(1,0,0)
    glVertex3f(0,0,0)
    glVertex3f(1,0,0)
    glColor3f(0,1,0)
    glVertex3f(0,0,0)
    glVertex3f(0,1,0)
    glColor3f(0,0,1)
    glVertex3f(0,0,0)
    glVertex3f(0,0,1)
    glEnd()
```

#### 규브 그리기 (폭, 높이, 깊이 모두 1인 표준 큐브)

```
def drawCube():
   v0 = [-0.5, 0.5, 0.5]
   v1 = [0.5, 0.5, 0.5]
   v2 = [0.5, 0.5, -0.5]
   v3 = [-0.5, 0.5, -0.5]
   v4 = [-0.5, -0.5, 0.5]
   v5 = [0.5, -0.5, 0.5]
   v6 = [0.5, -0.5, -0.5]
   v7 = [-0.5, -0.5, -0.5]
   glBegin(GL LINES)
   glVertex3fv(v0); glVertex3fv(v1)
   glVertex3fv(v1); glVertex3fv(v2)
   glVertex3fv(v2); glVertex3fv(v3)
   glVertex3fv(v3); glVertex3fv(v0)
   glVertex3fv(v4); glVertex3fv(v5)
   glVertex3fv(v5); glVertex3fv(v6)
   glVertex3fv(v6); glVertex3fv(v7)
   glVertex3fv(v7); glVertex3fv(v4)
   glVertex3fv(v0); glVertex3fv(v4)
   glVertex3fv(v1); glVertex3fv(v5)
   glVertex3fv(v2); glVertex3fv(v6)
   glVertex3fv(v3); glVertex3fv(v7)
   glEnd()
   drawAxes()
```

#### GL Widget – initialize & resize

```
class MyGLWidget(QOpenGLWidget):
   def __init__(self, parent=None):
        super(). init (parent)
        self.base position = [0.0,0.0]
   def initializeGL(self):
        glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 1.0)
        self.planeList = glGenLists(1)
        glNewList(self.planeList, GL COMPILE)
       # 그리기 코드
       drawPlane()
        glEndList()
        glEnable(GL DEPTH TEST)
    def resizeGL(self, width, height):
        glMatrixMode(GL PROJECTION)
       glLoadIdentity()
        gluPerspective(60, width/height, 0.01, 100)
```

## GL Widget – paint

```
def paintGL(self):
   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT)
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW)
   glLoadIdentity()
   gluLookAt(0,7,10, 0,0,0, 0,1,0)
   glCallList(self.planeList)
   drawAxes()
   ### Base: 전후 좌우로 이동 가능
   # 제어를 통해 옮겨간 위치
   glTranslatef(self.base_position[0], 0, self.base_position[1])
   glTranslatef(0, 0.5, 0) # 몸통을 평면으로 들어올리는 변환
                                                          ■ 변환의 이해
   glPushMatrix()
   glScalef(2, 1, 2) # 몸통의 크기 변경
   drawAxes()
   glColor3f(1,1,1)
   drawCube()
   glPopMatrix()
```

#### QT Main Window

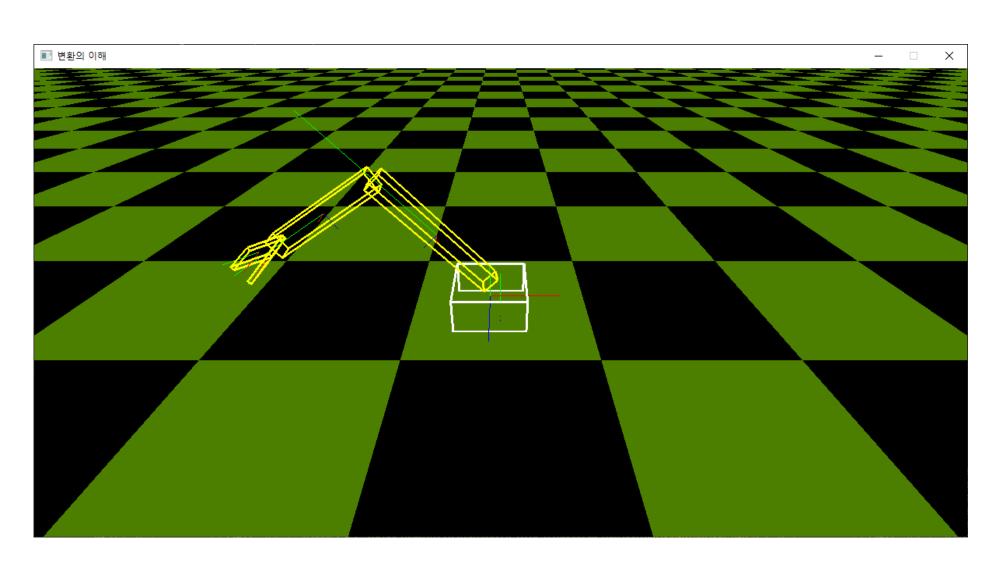
```
class MyWindow(QMainWindow):
   def __init__(self, title=''):
       QMainWindow.__init__(self)
       self.setWindowTitle(title)
       self.glWidget = MyGLWidget()
        self.setCentralWidget(self.glWidget)
   def keyPressEvent(self, e):
       step = 0.1
       if e.key() == Qt.Key.Key W:
            self.glWidget.base_position[1] -= step
       elif e.key() == Qt.Key.Key S:
            self.glWidget.base position[1] += step
        elif e.key() == Qt.Key.Key_A:
            self.glWidget.base position[0] -= step
        elif e.key() == Qt.Key.Key D:
            self.glWidget.base_position[0] += step
       self.glWidget.update()
```

## Application 실행

```
def main(argv = []):
    app = QApplication(argv)
    window = MyWindow('변환의 이해')
    window.setFixedSize(1200, 600)
    window.show()
    app.exec()

if __name__ == '__main__':
    main(sys.argv)
```

## 구조에 따라 다른 큐브도 추가하고 제어



#### 추가 객체를 다룰 변수

```
def __init__(self, parent=None):
    super().__init__(parent)
    self.base_position = [0.0,0.0]
    ### 팔 1: y축 기준 회전과, x 축 기준 회전이 가능
    self.arm1Y = 35
    self.arm1X = 15
    self.arm2X = 80
    self.handAngle = 45
```

#### 추가 객체를 다룰 그리기

```
def paintGL(self):
   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT)
   glMatrixMode(GL MODELVIEW)
   glLoadIdentity()
   gluLookAt(0,7,10, 0,0,0, 0,1,0)
   glCallList(self.planeList)
   drawAxes()
   ### Base: 전후 좌우로 이동 가능
   # 제어를 통해 옮겨간 위치
   glTranslatef(self.base position[0], 0, self.base position[1])
   glTranslatef(0, 0.5, 0) # 몸통을 평면으로 들어올리는 변환
   glPushMatrix()
   glScalef(2, 1, 2) # 몸통의 크기 변경
   drawAxes()
   glColor3f(1,1,1)
   drawCube()
   glPopMatrix()
   ### 팔 1: y축 기준 회전과, x 축 기준 회전이 가능
   glTranslatef(0, 0.5, 0) # 몸통 높이의 반 이동
   glRotatef(self.arm1Y, 0, 1, 0)
   glRotatef(self.arm1X, 1, 0, 0)
   glTranslatef(0, 2, 0) # 팔 1의 높이 반 이동
   glPushMatrix()
   glScalef(0.5, 4, 0.5) # 팔 1의 크기 변경
   drawAxes()
   glColor3f(1,1,0)
   drawCube()
   glPopMatrix()
```

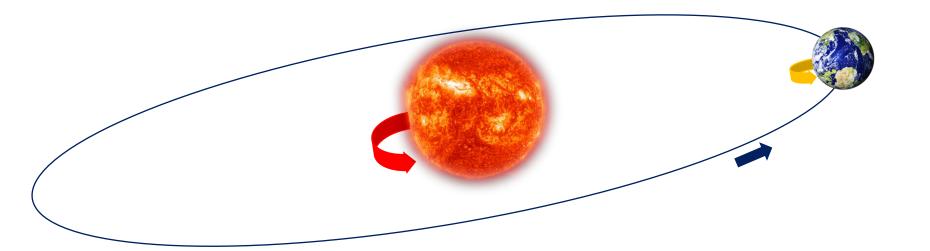
```
### 팔 2: x 축 기준 회전이 가능
glTranslatef(0, 2, 0) # 팔 1 높이의 반 이동
glRotatef(self.arm2X, 1, 0, 0)
glTranslatef(0, 1.5, 0) # 팔 2의 높이 반 이동
glPushMatrix()
glScalef(0.5, 3, 0.5) # 팔 2의 크기 변경
drawAxes()
glColor3f(1,1,0)
drawCube()
glPopMatrix()
### 손 1: x 축 기준 회전이 가능
glPushMatrix() ########## 손 1 변환 이전 상태 기록
glTranslatef(0, 1.5, 0) # 팔 2 높이의 반 이동
glRotatef(self.handAngle, 1, 0, 0)
glTranslatef(0, 0.5, 0) # 손 1 높이의 반 이동
glPushMatrix()
glScalef(1, 1, 0.1) # 손 1의 크기 변경
drawAxes()
glColor3f(1,1,0)
drawCube()
glPopMatrix()
glPopMatrix() ############# 손 1 변환 무효화
### 손 2: x 축 기준 회전이 가능
glPushMatrix() ########### 손 2 변환 이전 상태 기록
glTranslatef(0, 1.5, 0) # 팔 2 높이의 반 이동
glRotatef(-self.handAngle, 1, 0, 0)
glTranslatef(0, 0.5, 0) # 손 1 높이의 반 이동
glPushMatrix()
glScalef(1, 1, 0.1) # 손 1의 크기 변경
drawAxes()
glColor3f(1,1,0)
drawCube()
glPopMatrix()
glPopMatrix() ############################## 손 2 변환 무효화
```

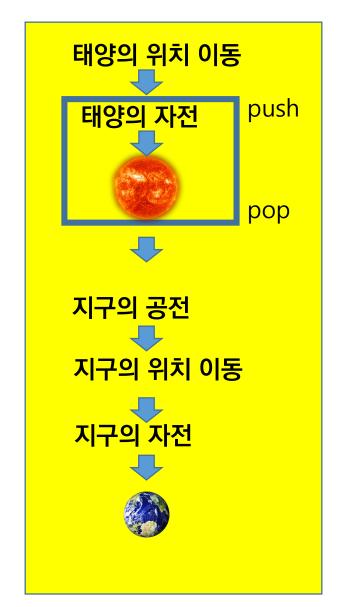
#### 키보드 제어 추가

```
def keyPressEvent(self, e):
   step = 0.1
   angle_step = 1
   if e.key() == Qt.Key.Key_W:
       self.glWidget.base_position[1] -= step
   elif e.key() == Qt.Key.Key_S:
       self.glWidget.base_position[1] += step
   elif e.key() == Qt.Key.Key_A:
       self.glWidget.base position[0] -= step
   elif e.key() == Ot.Key.Key D:
       self.glWidget.base_position[0] += step
   elif e.key() == Qt.Key.Key Q:
       self.glWidget.arm1Y -= angle step
   elif e.key() == Qt.Key.Key E:
       self.glWidget.arm1Y += angle step
   elif e.key() == Qt.Key.Key 1:
       self.glWidget.arm1X -= angle_step
   elif e.key() == Qt.Key.Key 2:
       self.glWidget.arm1X += angle_step
   elif e.key() == Qt.Key.Key_3:
       self.glWidget.arm2X -= angle_step
   elif e.key() == Qt.Key.Key 4:
       self.glWidget.arm2X += angle_step
   elif e.key() == Qt.Key.Key Z:
       self.glWidget.handAngle -= angle_step
    elif e.key() == Qt.Key.Key.X:
        self.glWidget.handAngle += angle_step
    self.glWidget.update()
```

## 태양계 프로젝트

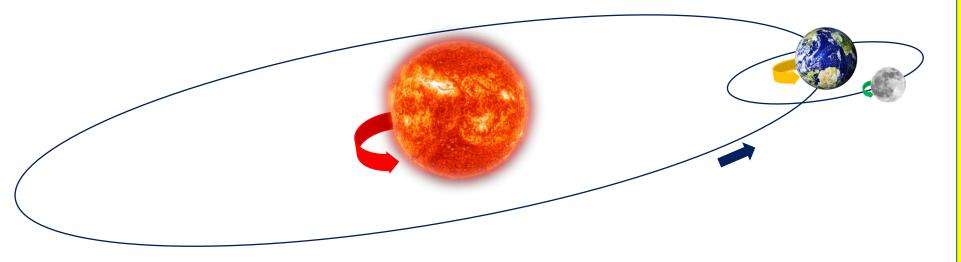
- 태양과 지구
  - 태양은 자전하게 한다
  - 지구는 태양의 자전에 영향을 받지 않는다
  - 지구는 태양을 공전하며 자전한다

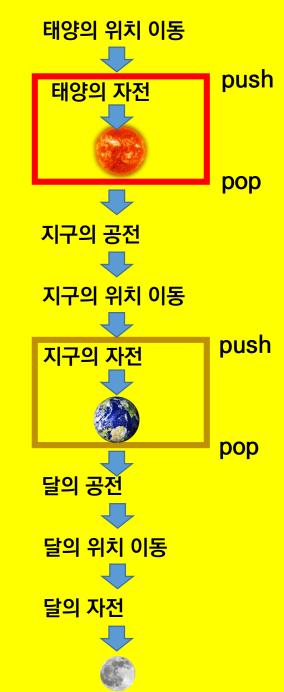




## 태양계 프로젝트

- 태양과 지구 + 달
  - 달은 지구에 딸린 위성
    - 지구의 변환을 그대로 물려 받아서 위치를 잡는다
    - 다만 지구의 자전은 물려받지 않는다





# 화성 프로젝트 – 계층적 모델링

- 태양과 지구, 달, 그리고 화성
  - 화성은 달 따위는 신경 쓰지 않아, 지구조차…

