Chapter 3. 집합론

개요

- 집합과 관련된 기본적인 정의로부터 분할에 이르는 다양한 논제들을 고찰함
- 집합의 기본 정의와 표현 방법들을 소개하고, 유한 집합, 무한 집합, 부분 집합, 진부분 집합, 카디날리티 등의 개념을 살펴봄
- 집합의 연산에 있어서 합집합, 교집합, 차집합, 대칭 차집합, 여집합, 카티시안 곱이라고도 불리는 곱집합 등의 연산과 벤 다이어그램을 통한 집합의 연산을 학습함
- 집합류와 멱집합을 살펴보며 동치류로 만들어지는 집합의 분할 등을 다룸

CONTENTS

집합(Set)

- 집합은 원소(element)라 불리는 서로 다른 객체들의 모임으로 현대 수학에서 가장 기초가 되는 개념임
- 집합의 개념은 수학이나 컴퓨터 분야뿐만 아니라 과학이나 공학 분야 등에서 폭넓게 사용됨
- 집합의 개념은 19세기 말 독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)에 의해 처음으로 제안됨
- 저명한 수학자들은 그의 집합론에 관한 연구의 정당성을 인정하지 않았으나, 오늘날 집합론은 수학적 사고의 중요한 기초임
- 수학적 객체들은 집합에 관하여 정의될 수 있으므로 수학의 기본 개념임

3.1 집합의 표현

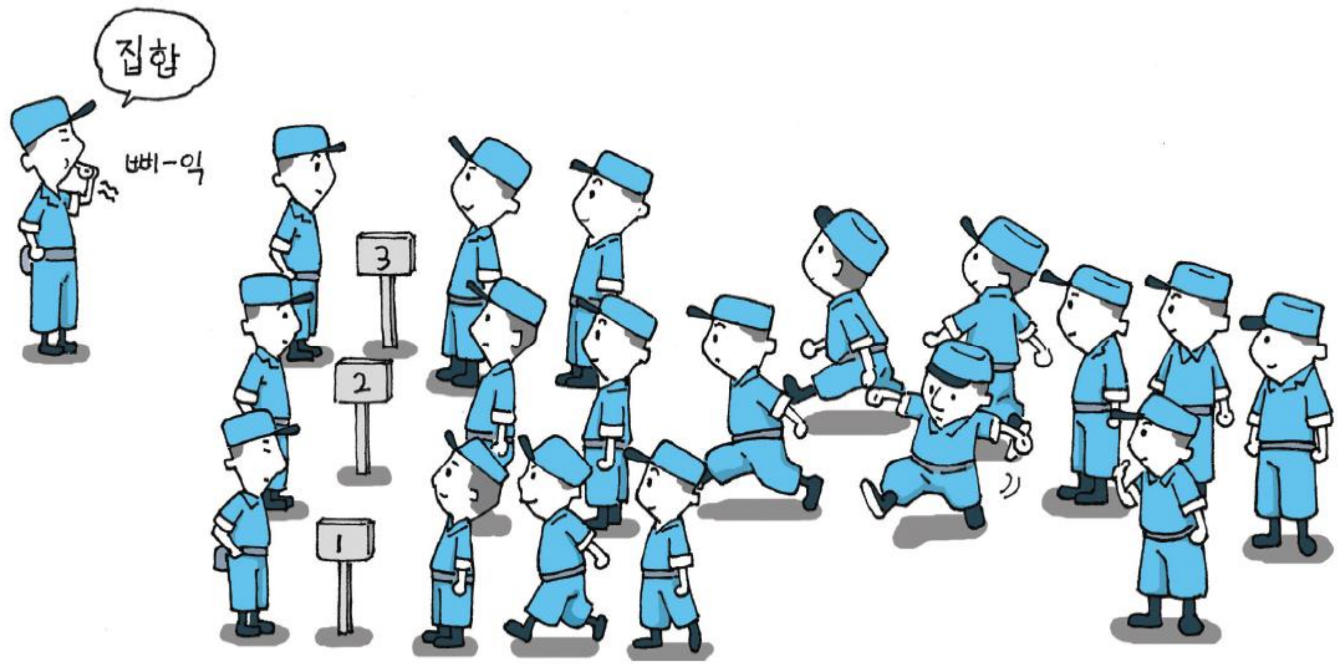
정의 3-1 집합(Set)이란 수학적 성질을 가지는 객체들(objects)의 모임이다. 집합은 정확하게 정의되어야 하며, 어떤 객체가 그 집합에 속하는지 아닌지를 분명히 구분할 수 있어야 한다.

- 집합을 표시할 때는 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$, Z 등으로 표시함
- 집합을 구성하는 원소(element 또는 member)는 소문자 a, b, c, $\cdots$, z 등으로 표시함
- 집합에 속한 원소들로 구성되어 있는데, 집합을 S라하고 하나의 원소를 a라 하면, $a \in S$는 a가 집합 S의 원소임을 나타냄
- $a \notin S$는 a가 집합 S의 원소가 아님을 나타냄

3.1 집합의 표현

여기서 잠깐!!

집합은 대상이 명확한 객체(object)들의 모임이다. 따라서 집합에는 중복되는 원소가 없어야 한다. 예를 들어, $A = \{1, 2, 2, 3, 3\}$은 $A = \{1, 2, 3\}$으로 표현되어야 한다.



집합을 표현하는 방법

1) 원소 나열법

집합의 원소들을 { } 사이에 하나씩 나열하는 방법

예를 들어, 1부터 5까지의 자연수의 집합을 원소 나열법으로 나타내면 다음과 같다.

S = {1, 2, 3, 4, 5}

여기서 의미가 명확한 경우 모든 원소를 나열하는 대신에 …을 이용

{a, b, …, z}는 소문자 알파벳의 집합을 의미함

2) 조건 제시법

- 집합의 원소들이 가지고 있는 특정한 성질을 기술하여 나타내는 방법임
- 조건 제시법의 표현은 S ={x | p(x)}임
- x는 원소를 대표하는 변수이고, p(x)는 원소들이 가지고 있는 성질임

예를 들어, 1부터 5까지의 자연수의 집합을 조건 제시법으로 나타내면 다음과 같다.

S = {x | x는 자연수이고 $1 \le x \le 5$}

예제 3-1

다음과 같이 조건 제시법으로 나타내어진 집합을 원소 나열법으로 표현해보자. 공집합일 경우에는 ϕ로 나타내어보자.

(1) $\{x \mid x \in N,\ x^2 = 9\}$

(2) $\{y \mid y \in Z,\ 3 < y < 7\}$

(3) $\{n \mid n \in Z,\ 3 < |n| < 7\}$

풀이 (1) $\{3\}$ (2) $\{4, 5, 6\}$ (3) $\{-4, -5, -6, 4, 5, 6\}$

예제 3-2 다음 집합을 조건 제시법으로 표현해보자.

(1) 0에서 1 사이에 있는 실수의 집합

(2) 20보다 작은 홀수의 집합

(3) $x^2 = x$를 만족시키는 정수의 집합

풀이 (1) $S = \{x \mid x$는 실수이고, $0 \le x \le 1\}$

(2) $A = \{x \mid n$은 정수이고, $x = 2n + 1$이고 $n < 10\}$

(3) $B = \{x \mid x$는 정수이고, $x^2 = x\}$

카디날리티(Cardinality)

- 집합 S 내에 있는 서로 다른 원소들의 개수임
- 집합의 원소 수라 하고 |S| 로 표기함

예를 들어, 집합 A={1, 3, 5, 7, 9}의 원소의 개수는 5개, 집합 B={1}의 원소의 개수는 1개, 집합 N={1, 2, 3, …}의 원소의 개수는 무한이므로 |A| = 5, |B| = 1, |C| = ∞

정의 ③-2 집합 S의 원소의 개수가 유한인 경우, 집합 S를 **유한 집합(finite set)**이라 하며, 집합 S가 유한 집합이 아니면, 집합 S를 **무한 집합(infinite set)**이라고 한다.

예제 ③-3

다음 집합들이 유한 집합인지 무한 집합인지를 구별해보자.

(1) 대한민국에 사는 모든 공대 학생들의 집합

(2) 5의 배수인 자연수의 집합

풀이 (1) 유한 집합　　(2) 무한 집합

예제 ③-4

다음의 집합에 대하여 각 집합의 원소의 개수는 몇 개인가? 무한 집합인 경우에는 ∞로 표시해보자.

(1) $\{x \mid x \in Z,\ 2 < x < 5\}$

(2) $\{x \mid -1 \le x \le 1,\ x$는 유리수$\}$

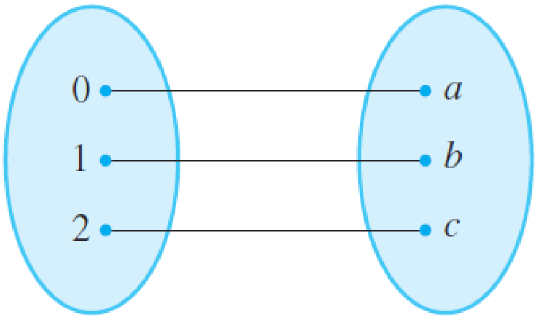
(3) $\{n \mid n \in N,\ n$은 짝수$\}$

풀이 (1) 2　　(2) ∞　　(3) ∞

- 집합 $S1$에서 집합 $S2$로의 일대일 대응인 함수가 존재할 때 $S1$과 $S2$가 같은 카디날리티를 가짐
- 유한 집합인 경우 만약 $S1$이 $S2$의 진부분 집합일 때에는 $S1$과 $S2$는 서로 다른 카디날리티를 가짐

예제 3-5 집합 $\{0, 1, 2\}$와 $\{a, b, c\}$는 같은 카디날리티를 가지고 있는지를 살펴보자.

풀이 다음 〈그림 3.2〉에서 일대일 대응인 함수가 존재하므로 같은 카디날리티를 가진다.



〈그림 3.2〉 일대일 대응 함수

여기서 잠깐!!

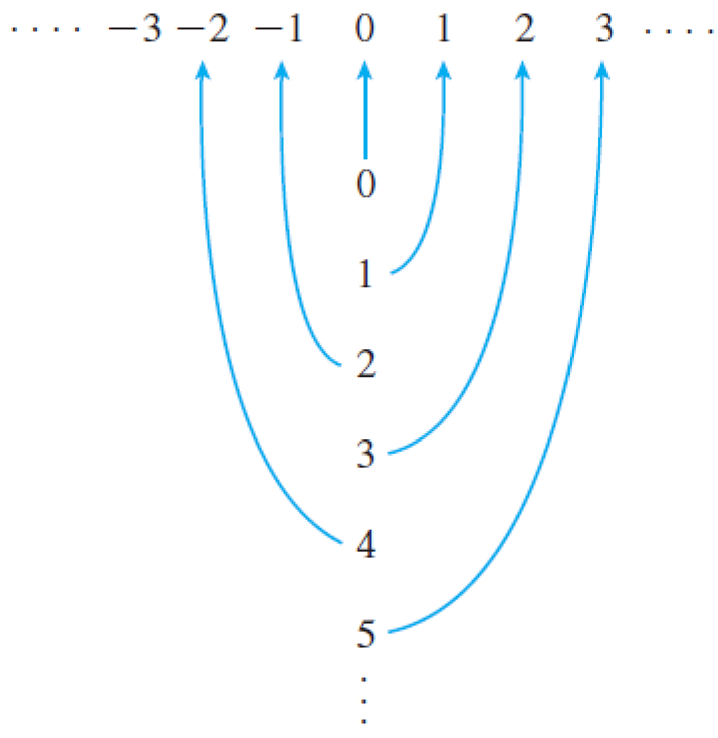
무한 집합들이라고 해서 모두 같은 카디날리티를 가지는 것은 아니다. 모든 정수들의 집합과 모든 실수들의 집합은 일대일로 대응될 수 없다. 이와 같은 구성을 '대각선화'(diagonalization)라고 하며, 수학뿐만 아니라 컴퓨터 관련 이론에서도 상당히 중요한 역할을 담당한다. 특히 튜링머신에서 주어진 입력을 인식하는가의 여부를 판단하는 데 있어서 매우 중요하다.

'가산적 집합(countable set)' 또는 '가산적으로 무한한 집합(countably infinite set)

- 정수의 집합과 일대일의 대응 관계에 있는 집합들임
- 유리수들과 알파벳 Σ로부터 만들어지는 유한한 길이의 스트링들의 집합 Σ^* 로 표현함

예제 ③-6 자연수의 집합이 가산적으로 무한함을 보이자.

풀이 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에는 일대일 대응인 함수 f가 존재한다. 만약 n이 홀수인 경우에는 $f(n) = \text{div}(n, 2) + 1$인 함수가 적용되고 n이 짝수인 경우에는 $f(n) = -\text{div}(n, 2)$의 식이 적용된다. 따라서 정수와 자연수는 〈그림 3.3〉과 같이 일대일의 대응 관계에 있으므로 자연수의 집합은 가산적이다.



〈그림 3.3〉 자연수와 정수의 일대일 대응 관계

여기서 잠깐!!

div(n, 2)는 n을 2로 나누어서 정수 부분만을 취하는 값이다. 예를 들어, div(1, 2) = 0이고, div(2, 2) = 1이며, div(3, 2) = 1이 된다.

정의 ③−3

집합론에서 관심을 두는 모든 원소의 집합을 **전체 집합(universal set)**이라 하고 U로 표기한다. 한편 어떠한 원소도 가지지 않는 집합을 **공집합(empty set)**이라 하며, ϕ 또는 { }로 표시한다.

예제 ③−7

$\{x \mid x^2 - 5 = 0,\ x$는 정수$\}$인 경우의 집합을 구해보자.

풀이 $x^2 - 5 = 0$을 만족하는 정수 x가 존재하지 않으므로 그 결과는 ϕ이다.

3.1 집합의 표현

다음은 집합들을 설명할 때 자주 쓰이는 전체 집합의 표기와 기호에 대하여 정의한 것으로 국제적으로 공인되어 쓰이는 기호들이다.

Z : 정수의 집합

$$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

N : 자연수의 집합

$$N = \{x \mid x \in Z,\ x > 0\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

R : 실수의 집합

Q : 유리수의 집합

$$Q = \{\frac{x}{y} \mid x,\ y \in Z,\ y \neq 0\}$$

S_n : 1부터 n까지의 자연수의 집합

$$S_n = \{x \mid x \in N,\ x \leq n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

예제 3-8 위의 주어진 집합들을 유한 집합과 무한 집합으로 구분해보자.

풀이 Z, N, R, Q는 무한 집합이고, S_n은 유한 집합이다.

예제 3-9 다음에 주어진 집합들의 의미를 살펴보자.

(1) $S = \{x \mid x^2 = -2,\ x \in Z\}$

(2) $R = \{x \mid x \in N,\ x\text{는 짝수 또는 } x\text{는 홀수}\}$

풀이 (1) 정수 중에서 $x^2 = -2$를 만족시키는 원소 x가 존재하지 않으므로 S는 공집합이다.

(2) 모든 자연수는 홀수 아니면 짝수이다. 집합 R의 원소 x는 자연수이고 짝수 또는 홀수이므로, 모든 자연수를 원소로 갖는다. 그러므로 R은 자연수 전체 집합 N과 같다. $R = N$.

정의 3-4 두 집합 A, B에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소에 속하면 '집합 A는 집합 B에 포함된다' 라고 하고 $A \subseteq B$로 표기한다. 이때 집합 A는 집합 B의 **부분 집합(subset)**이라고 한다. 한편, 집합 A가 집합 B의 부분 집합이 아니면 $A \nsubseteq B$로 표기한다. 특히 $A \subseteq B$이고, $A \neq B$인 경우에는 A를 B의 **진부분 집합(proper subset)**이라 하고 $A \subset B$로 표시한다. 만약 A가 B의 진부분 집합이 아닐 경우에는 $A \not\subset B$로 표기한다.

예제 3-10 집합 $S=\{1, 2, 3\}$의 부분 집합과 진부분 집합을 구해보자.

풀이 집합 S의 부분 집합은 ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$이고, 진부분 집합은 집합 S 자기 자신인 $\{1, 2, 3\}$을 제외한 집합들이다.

집합 S의 원소의 개수가 n개라면 그 집합 S의 부분 집합의 개수는 2^n개이며, 진부분 집합의 개수는 (2^n-1)개이다. 위의 예제에서 집합 S의 부분 집합의 개수는 S의 원소의 개수가 3개이므로 $2^3=8$개이고, 진부분 집합의 개수는 $2^3-1=7$개이다.

예제 3-11 앞에서 설명한 수학적 집합들의 포함 관계를 나타내어보자.

풀이 $S_n \subseteq N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

정의 3-5 전체 집합 U와 그것의 부분 집합 A에서 집합 U에 속하나 A에 속하지 않는 원소들의 집합을 A의 여집합(complement)이라고 하며 $\overline{A}$ 또는 A^c로 표시한다.

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$$

예제 3-12 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$가 전체 집합으로 주어지고 그의 부분 집합 A, B, C가 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 5\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로 주어졌을 때 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$를 구해 보자.

풀이 $\overline{A}=\{4, 5\}$, $\overline{B}=\{1, 2, 4\}$, $\overline{C}=\phi$

정리 3-1

임의의 집합 A, B, C와 전체 집합 U에 대하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) $\phi \subseteq A \subseteq U$

(2) $A \subseteq A$

(3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

(4) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

(5) $\phi \subseteq \{\phi\}$, $\phi \in \{\phi\}$

벤 다이어그램(Venn Diagram)

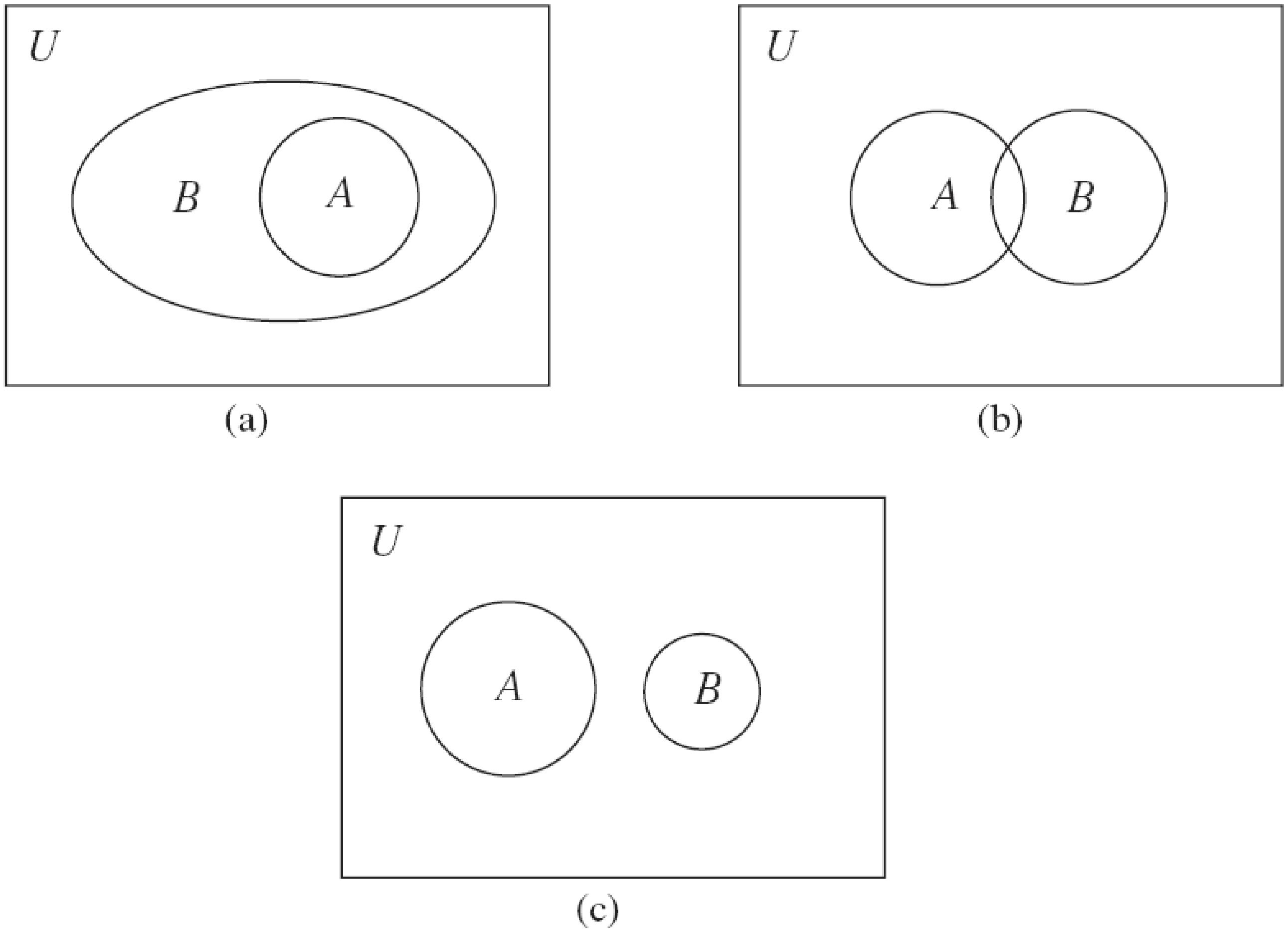
- 주어진 집합들 사이의 관계와 집합의 연산에 대하여 이해하기 쉽도록 이용함
- 전체 집합 U는 사각형으로 표현함
- 주어진 집합들은 U의 부분 집합들이므로 사각형 안에 원으로 표현함

◆ 기본적인 집합의 관계

(a) $A \subseteq B$

(b) 집합 A와 집합 B에 공통된 원소가 있을 때

(c) 집합 A와 집합 B에 공통된 원소가 없을 때

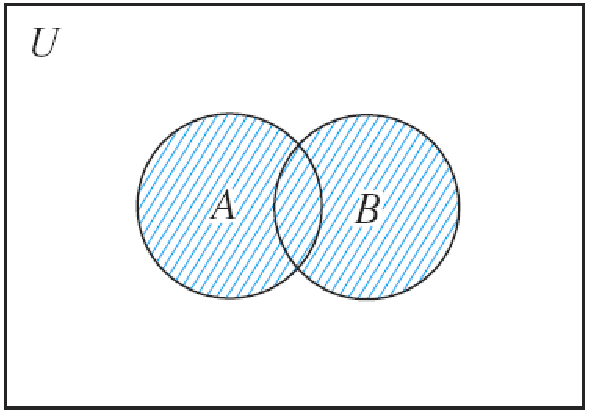


〈그림 3.4〉 벤 다이어그램의 표현

합집합(Union) : $A \cup B$

집합 A 또는 집합 B에 속하는 모든 원소의 집합, $A \cup B$로 표기함

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



〈그림 3.5〉 합집합 $A \cup B$

예제 3-13 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 $B=\{1, 3, 5, 7\}$일 때 합집합 $A \cup B$를 구해보자.

풀이 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$이다.

3.2 집합의 연산

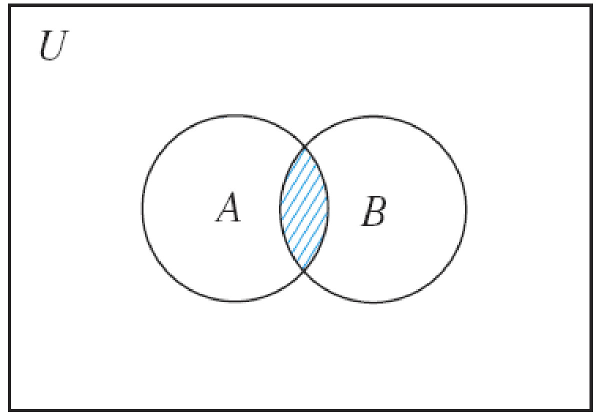
교집합(Intersection) : $A \cap B$

두 집합 A, B에 대하여 이들의 교집합은 집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 모든 원소의 집합을 말하며, $A \cap B$로 표기함

$A \cap B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

서로 소(Disjoint)

집합 A와 집합 B가 공통된 원소를 하나도 가지지 않은 경우를 말함



〈그림 3.6〉 교집합 A ∩ B

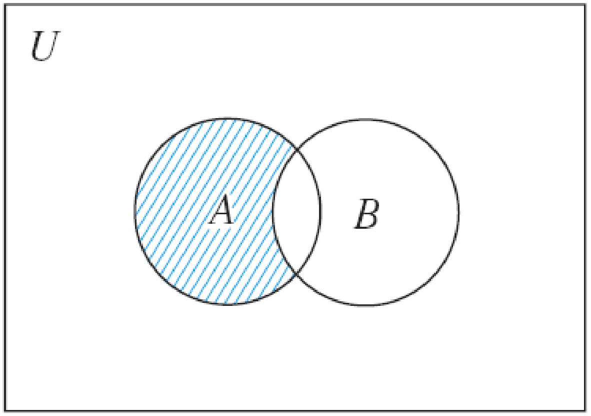
예제 3–14 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, $C=\{3, 4, 5, 6\}$일 때 $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$를 구해보자.

풀이 $A\cap B=\{1, 2\}$, $B\cap C=\{3, 4\}$, $A\cap C=\phi$

차집합(Difference) : $A-B$

두 집합 A, B에 대하여 이들의 차집합은 집합 A에 속하고 집합 B에는 속하지 않는 모든 원소들의 집합임

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$



〈그림 3.7〉 차집합 $A-B$

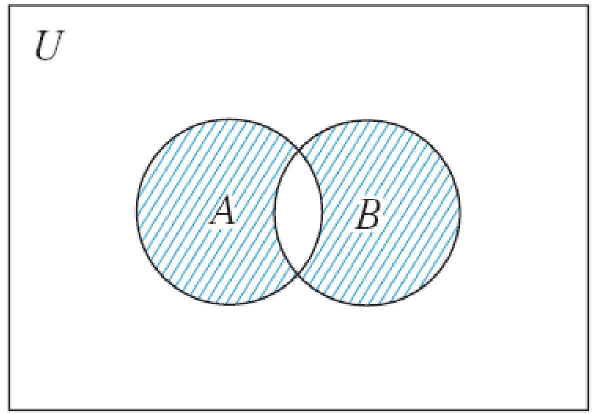
예제 ③-15 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B=\{1, 3, 5\}$라고 하면 $A-B$와 $B-A$를 각각 구해 보자.

풀이 $A-B=\{2, 4\}$이고, $B-A=\phi$이다.

대칭 차집합(Symmetric Difference) : $A \oplus B$

집합 A, B에 대하여 이들의 대칭 차집합은 $A \cup B$의 원소 중에서 $A \cap B$에 속하지 않는 모든 원소들의 집합임

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid x \in A - B \vee x \in B - A\} \\
&= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \in ((A \cup B) - (A \cap B))\}
\end{aligned}
$$



〈그림 3.8〉 대칭 차집합 $A \oplus B$

예제 3-16 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$일 때 $A \oplus B$를 구해보자.

풀이 $A-B=\{2, 4\}$이고 $B-A=\{7, 9\}$이므로
$A \oplus B=\{2, 4, 7, 9\}$가 된다.

곱집합(Cartesian Product) : $A \times B$

- 순서쌍은 순서로 구분되는 원소들의 쌍으로서 (a, b)와 같이 나타냄
- 순서쌍 (a, b)는 쌍의 원소들 간의 순서에 의해 구분이 되므로 $a \neq b$이면 $(a, b) \neq (b, a)$표현함
- 두 순서쌍이 $(a, b) = (c, d)$이면, $a = c$이고 $b = d$임

정의 3-6 임의의 두 집합 A, B의 곱집합 또는 카티시안 곱(Cartesian product)은 $x \in A$이고 $y \in B$인 모든 순서쌍 (x, y)의 집합을 말하며 $A \times B$로 표기한다.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, \ y \in B\}$$

이것을 일반적으로 확장하면 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in S_i\}$가 된다.

예제 3-17 $A=\{1, 2, 3\}$이고 $B=\{a, b, c\}$라 할 때 $A\times B$를 구해보자.

풀이 $A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$이다.

예제 3-18 $S=\{1, 2, 3, 4\}$이고, $T=\{2, 4\}$일 때 다음의 물음에 답해보자.

(1) $S\times T$에서 순서쌍의 개수는 몇 개인가?

(2) $\{(x, y)\,|\,(x, y)\in S\times T,\ x<y\}$의 원소를 나열하여라.

풀이 (1) $4\times 2=8$개

(2) $\{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

집합 연산의 카디날리티

집합 S의 카디날리티(cardinality)란 그 집합의 원소의 개수를 나타내며 $|S|$ 로 표기함

집합의 연산에 의해 새로 만들어진 집합들에 대한 카디날리티를 다음과 같이 표현함

a. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

b. $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$

c. $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

d. $|A-B|=|A\cap B|=|A|-|A\cap B|$

e. $|A\times B|=|A|\cdot|B$

예제 3-19

어느 공대에서 이산수학과 C언어 프로그래밍 중 적어도 한 과목을 수강하는 학생이 80명이다. 만약 이산수학을 수강하는 학생이 55명이고, C언어 프로그래밍을 수강하는 학생이 48명이라면, 이 경우 이산수학만 수강하는 학생 수는 몇 명인지를 알아보자.

풀이 이산수학을 수강하는 학생의 집합을 A, C언어 프로그래밍을 수강한 학생의 집합을 B라고 하면

$|A \cup B| = 80$, $|A| = 55$, $|B| = 48$이다.

따라서

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 55 + 48 - 80 = 23$이다. 그런데

우리가 구하려는 것은 $|A - B|$이므로

$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 55 - 23 = 32$가 된다.

그러므로 이산수학만 수강한 학생 수는 32명이다.

집합의 대수 법칙

〈표 3.1〉 집합의 대수 법칙

관계	법칙의 이름
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	멱등 법칙 (idempotent law)
$A \cup \phi = A,\ A \cap \phi = \phi$ $A \cup U = U,\ A \cap U = A$	항등 법칙 (identity law)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	교환 법칙 (commutative law)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$	결합 법칙 (associative law)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	분배 법칙 (distributive law)
$(A \cap B) \cup A = A$ $(A \cup B) \cap A = A$	흡수 법칙 (absorption law)
$\overline{\overline{A}} = A$	보 법칙 (complement law)
$A \cup \overline{A} = U,\ \ A \cap \overline{A} = \phi$ $\overline{U} = \phi,\ \ \overline{\phi} = U$	역 법칙 (inverse law)
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	드 모르간의 법칙 (De Morgan's law)
$A - B = A \cap \overline{B}$ $A - A = \phi$ $A - \phi = A$	기타 법칙

예제 3-20 집합의 대수 법칙을 이용하여 다음 식이 성립함을 보이자.

(1) $A \cap (A \cup B) = A$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \phi) = A$

풀이 (1) $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B)$

$$= A \cup (A \cap B)$$

$$= A$$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \phi) = (A \cup B) \cap A$

$$= A$$

여기서 잠깐!!

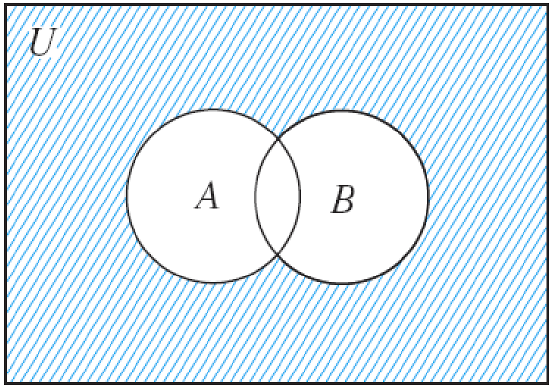
집합에서의 연산을 보다 편리하게 하기 위해서는 다음과 같은 드 모르간의 법칙(De Morgan's laws)이 많이 이용된다.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

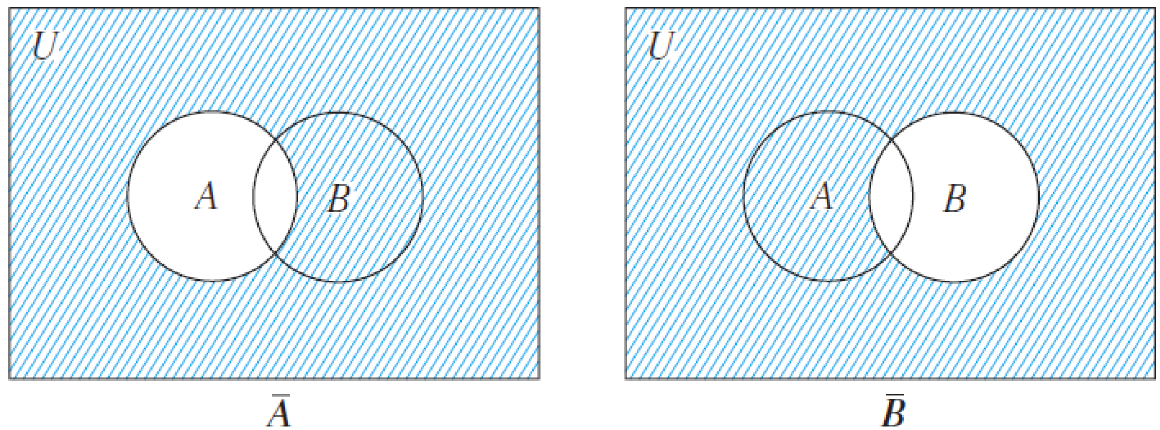
예제 3-21 드 모르간의 법칙 중 $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$를 벤 다이어그램을 사용하여 식이 성립함을 보이자.

풀이 $\overline{(A \cup B)}$에 대한 벤 다이어그램을 그리면 〈그림 3.9〉와 같다.



〈그림 3.9〉 $\overline{(A \cup B)}$에 대한 벤 다이어그램

A와 B의 벤 다이어그램



〈그림 3.10〉 $\bar{A}$와 $\bar{B}$의 벤 다이어그램

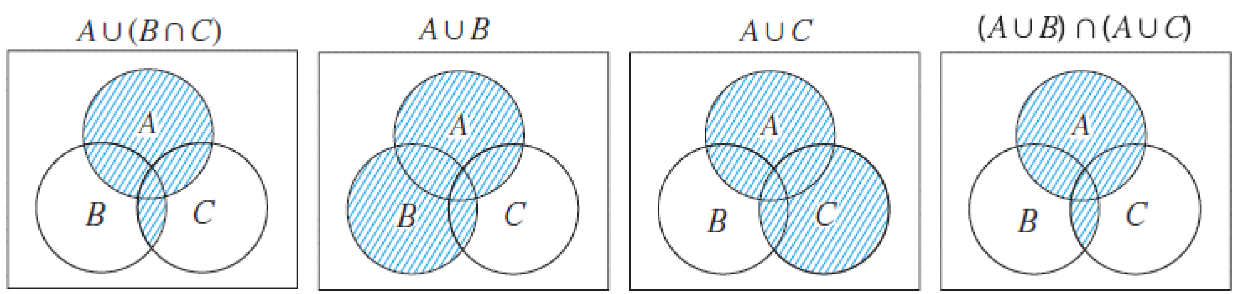
$\bar{A} \cap \bar{B}$의 벤 다이어그램은 $\overline{(A \cup B)}$의 벤 다이어그램과 같으므로

$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$인 식이 성립

예제 3-22 다음과 같은 집합 관계가 성립함을 벤 다이어그램을 차례로 그려서 보이자.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

풀이 〈그림 3.11〉과 같이 단계별로 벤 다이어그램을 그려서 같은 집합인 것을 확인할 수 있다.



〈그림 3.11〉 단계별 벤 다이어그램

정의 3-7 집합에 관한 명제에서 그 명제 안에 있는 교집합과 합집합을 전체 집합에 대한 여집합으로 바꾸어서 만든 새로운 명제를 원래 명제의 **쌍대(duality)**라고 한다.

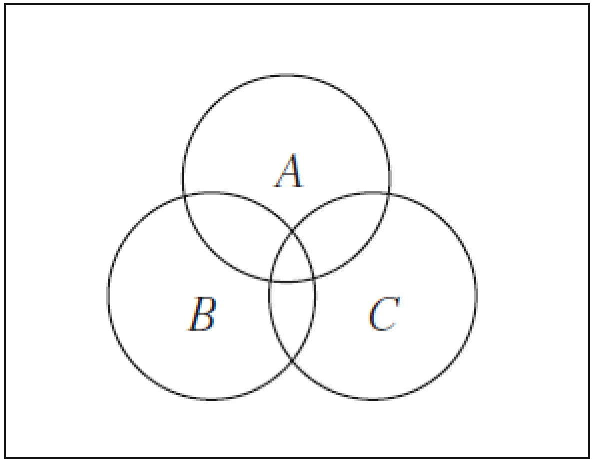
쌍대의 원리를 이용하여 드 모르간의 법칙 중 첫 번째 식을 사용하면

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

쌍대로 바꾸면

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

예제 ③-23 집합 A, B, C에 대한 벤 다이어그램이 〈그림 3.12〉와 같을 때 다음의 연산을 각각의 벤 다이어그램으로 나타내어보자.



〈그림 3.12〉 집합 A, B, C의 벤 다이어그램

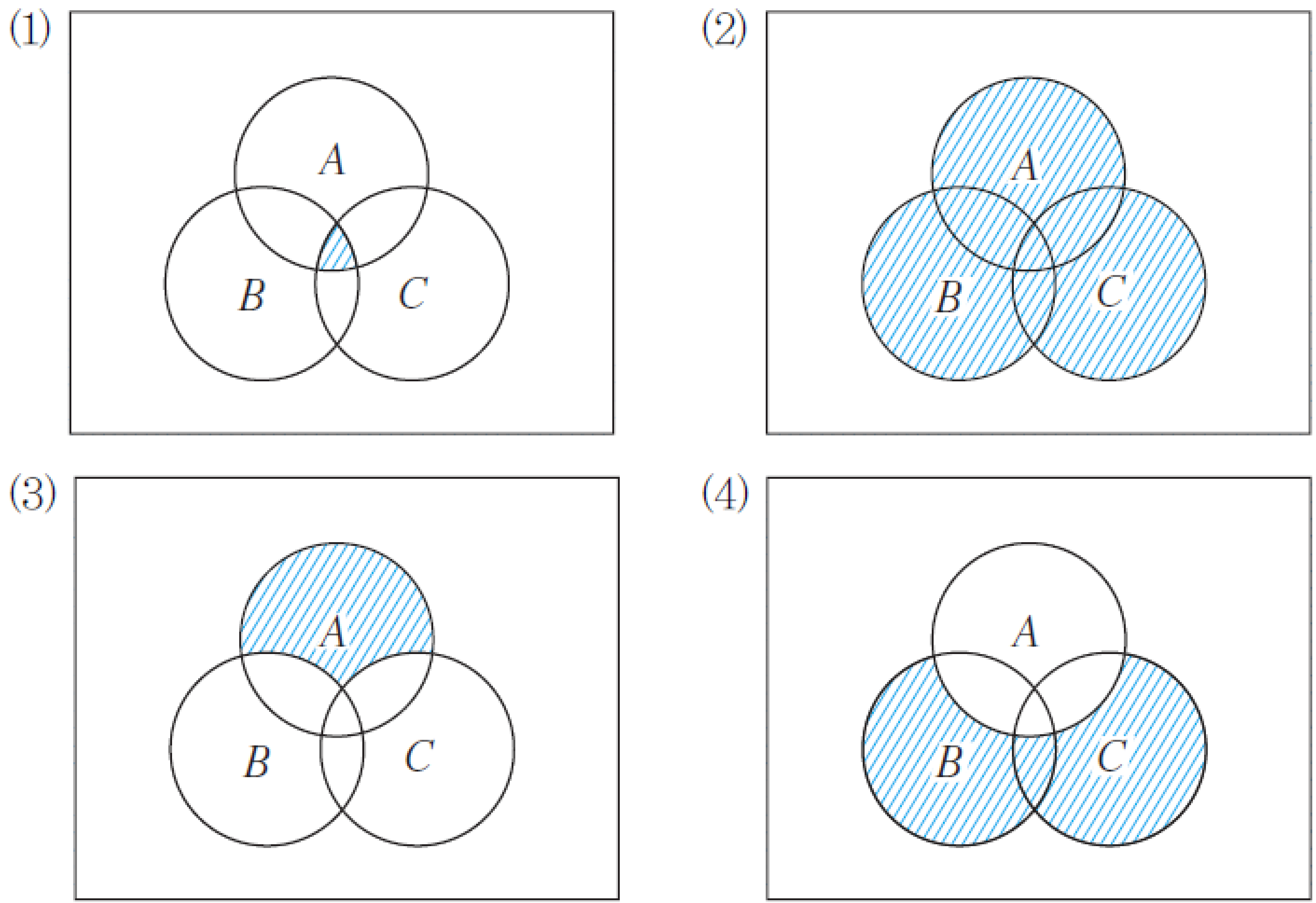
(1) $A \cap B \cap C$

(2) $A \cup B \cup C$

(3) $A - (B \cup C)$

(4) $\overline{A} \cap (B \cup C)$

풀이 주어진 식들에 대한 벤 다이어그램은 〈그림 3.13〉과 같다.



〈그림 3.13〉 주어진 식들에 대한 벤 다이어그램

집합류(Class)

- 집합의 집합임
- 집합 A에 대하여 A의 원소의 개수가 n개일 때 A의 부분 집합의 개수는 2^n개로 표현함
- 집합 A의 카디날리티로 표현하면 $2^{|A|}$ 개로 나타냄

정의 3−8 임의의 집합 S에 대하여, S의 모든 부분 집합을 원소로 가지는 집합을 집합 S의 **멱집합(power set)**이라 한다. 이것을 통상 $P(S)$로 표시하는데 2^S로 표기하기도 한다.

$$P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

예제 ③-24 $S=\{a, b, c\}$라고 할 때 S의 멱집합을 구해보자.

풀이 $2^S=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$이다. 여기서 집합 S의 원소의 개수인 $|S|=3$이고 $|2^S|=8$이 된다.

예제 ③-25 집합 $A=\{a, b, \{a\}\}$라고 할 때 집합 A의 멱집합 $P(A)$를 구해보자.

풀이 집합 A의 원소는 a, b 그리고 $\{a\}$의 3개이다. 그러므로 $P(A)$의 개수는 $2^3=8$개가 되어야 한다. 먼저 ϕ은 모든 멱집합의 원소가 되고, 부분 집합들을 원소로 하는 집합을 구하면

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{b, \{a\}\}, \{a, b\}, \{a, b, \{a\}\}\}$$

가 된다.

여기서 잠깐!!

멱집합을 구하는 데 있어서 주의해야 할 점은 다음과 같다.
첫째, 멱집합을 구한 다음에는 멱집합의 원소의 개수가 $2^{|A|}$가 되는지를 확인한다.
둘째, 멱집합의 원소는 모두 집합이라는 점에 유의해야 한다. 그러므로 ϕ을 제외한 모든 원소는 집합을 표시하는 중괄호 { } 안에 쓰여진다.
셋째, 원래 집합 A의 원소 중 집합인 원소가 있을 때에는 그 집합 자체가 하나의 원소이므로, 멱집합에서는 추가적인 집합 표기가 필요하다. 가령 집합 A에서 a와 $\{a\}$는 서로 다른 원소이기 때문이다.

- 집합 A에 대하여 $P(A)$의 원소들을 나타내기 위하여 흔히 A_1, A_2 , …, A_n과 같이 A 밑에 첨자(index)를 붙여서 표기함
- 첨자가 붙은 집합류에서 그들의 합집합과 교집합의 연산은 다음과 같이 표기함

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

예제 ③-26

집합 $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_3=\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $A_4=\{1, 2, 4, 6, 8\}$이라고 할 때 $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$와 $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$를 구해보자.

풀이

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

이고

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$
$$= \{1, 2\}$$

이다.

정의 3−9 S를 공집합이 아닌 임의의 집합이라고 할 때 집합 S의 분할(partition) π는 다음과 같은 3가지 조건을 만족시켜야 한다.

$$\pi = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i, \cdots, A_k\}$$

(1) $i = 1, \cdots, k$에 대하여 A_i는 공집합이 아닌 집합 S의 부분 집합이다.
(2) $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$
(3) A_i들 사이에서는 서로소이다. 즉, $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \phi$이다.

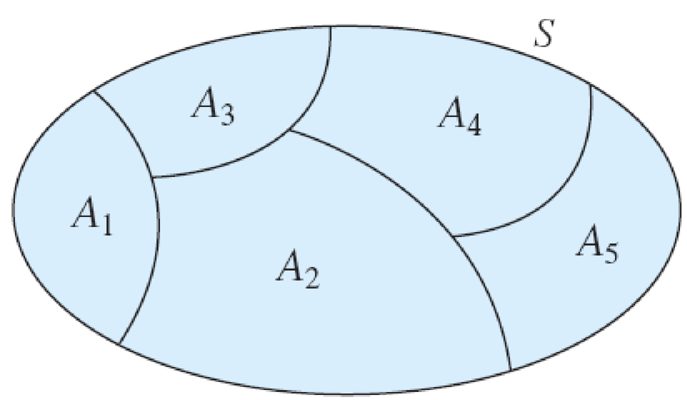
블록(Block)

- 분할의 원소인 A_i를 분할 함

✓ 분할에 대한 예로 대한민국의 여러 개의 도를 들 수 있음

✓ 각 도들은 공유하는 면적이 없고, 각 도를 합한 것은 대한민국 전체가 되므로 대한민국의 분할이라고 함

✓ 분할은 집합을 구성하는 원소가 서로 소이고 각 원소들의 합집합이 원래의 전체 집합이 되어야 함



〈그림 3.14〉 집합 S의 분할

예제 3-27 자연수의 집합 N을 짝수와 홀수의 블록으로 분할하여라.

풀이 짝수의 집합을 A_1, 홀수의 집합을 A_2라고 하면

$$\pi = \{A_1, A_2\}$$

이고

$$A_1 = \{x \mid n \in N, x = 2n\}$$

$$A_2 = \{x \mid n \in N, x = 2n - 1\}$$

이다.

예제 3-28 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$이고 $A_1=\{1,\ 3\}$, $A_2=\{2,\ 6,\ 7\}$, $A_3=\{4\}$, $A_4=\{5,\ 8\}$일 때, $\pi=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$가 A의 분할임을 보이자.

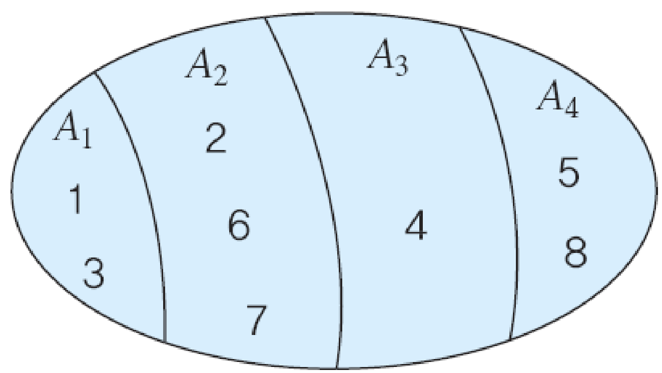
풀이 분할의 3가지 조건을 만족하는지를 점검한다.

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$

(2) $A_i \cap A_j = \phi,\ 1 \le i,\ j \le 4,\ i \ne j$

(3) $A_i \ne \phi,\ 1 \le i \le 4$

그 결과 분할의 3가지 조건을 모두 만족함을 알 수 있으며 〈그림 3.15〉와 같이 나타낼 수 있다. 그러므로 π는 A의 분할이다.



〈그림 3.15〉 집합 A의 분할

요약

- 집합은 원소라고 하는 서로 다른 객체들의 모임으로 현대 수학의 가장 기초가 되는 여러 공학 분야에서 널리 응용하여 사용되고 있다. 집합의 개념은 19세기 말 칸토어에 의해 처음으로 제안되었다.

- 집합을 표현하는 방법에는 원소 나열법과 조건 제시법이 있는데, 원소 나열법은 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 같이 나타내고, 조건 제시법은 $S=\{x \mid x$는 자연수이고 $1 \le x \le 5\}$와 같이 나타낸다.

- 집합 S에서 집합 내에 있는 서로 다른 원소들의 개수를 그 집합의 카디날리티 또는 원소 수라 하고 $|S|$로 표기한다.

- 집합 A가 집합 B의 부분 집합일 때 $A \subseteq B$로 표기한다. 특히 $A \subseteq B$이고, $A \neq B$인 경우에는 A를 B의 진부분 집합이라고 하고, $A \subset B$로 표시한다. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$일 때 동일 집합이라 하고, $A=B$로 표시한다.

요약

- 전체 집합 U와 그의 부분 집합 A에서 집합 A의 여집합은 U에 속하나 A에 속하지 않는 원소들의 집합을 나타내며 $\overline{A}$로 표시한다. $\overline{A}=\{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$

- 합집합 : $A \cup B$, 교집합 : $A \cap B$, 차집합 : $A-B$, 대칭 차집합 : $A \oplus B$, 곱집합(카티시안 곱) : $A \times B$ 등이 있으며 벤 다이어그램을 이용하면 보다 편리하다.

- 카티시안 곱은 다음과 같이 정의된다.
  $A \times B=\{(x,\ y) \mid x \in A$ 그리고 $y \in B\}$
  이것을 일반적으로 확장하면 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \mid x_i \in S_i\}$가 된다.

- 집합에 많이 이용되는 드 모르간의 법칙은 다음과 같다.
  $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

요약

- 집합에 관한 명제에서 그 명제 안에 있는 교집합과 합집합을 전체 집합에 대한 여집합으로 바꾸어서 만든 새로운 명제를 원래 명제의 쌍대라고 한다.

- 임의의 집합 S에 대하여, S의 모든 부분 집합을 원소로 가지는 집합을 집합 S의 멱집합이라 하고 $P(S)$로 표시한다.

- 집합 S의 분할은 $\pi = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i, \cdots, A_k\}$와 같은 집합이다. 여기서 S의 분할 π는 다음의 3가지 조건을 만족시켜야 한다.

  (1) $i = 1, \cdots, k$에 대하여, A_i는 공집합이 아닌 집합 S의 부분 집합이다.

  (2) $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$

  (3) A_i들 사이에서는 서로소이다. 즉, $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \phi$이다.