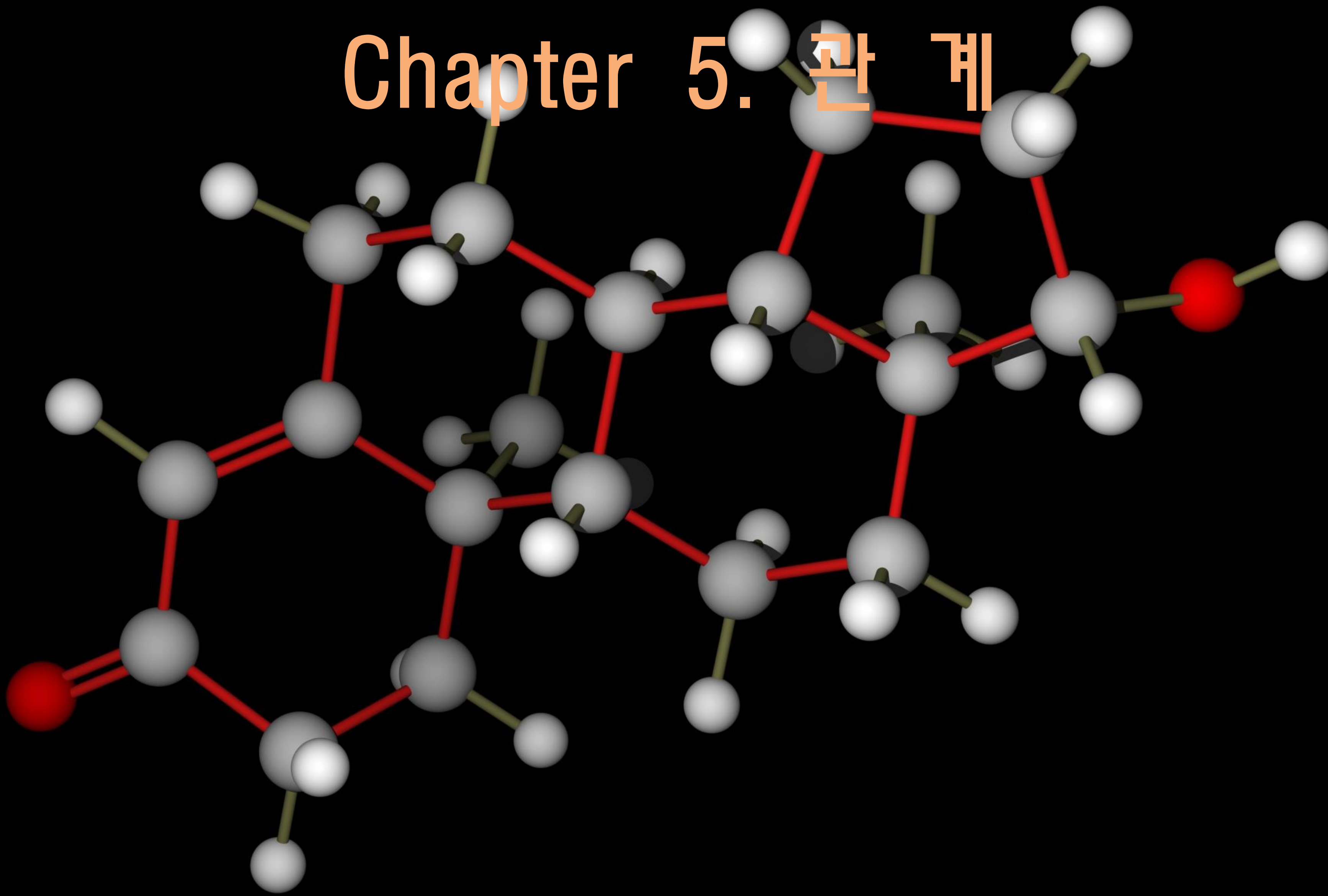
Chapter 5. 관계



개요

- 관계와 이항 관계의 기본 개념과 더불어 카티시안 곱과 역관계를 정의함
- 관계를 표현하는 4가지 주요 방법들인 화살표 도표, 좌표 도표, 방향 그래프, 관계 행렬의 표현법과 관계의 합성을 다룸
- 관계의 성질에 있어서 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계, 추이 관계 등을 알아보고, 동치 관계와 분할을 고찰함
- 부분 순서 관계의 정의와 응용 및 하세 도표에 대해서도 학습함

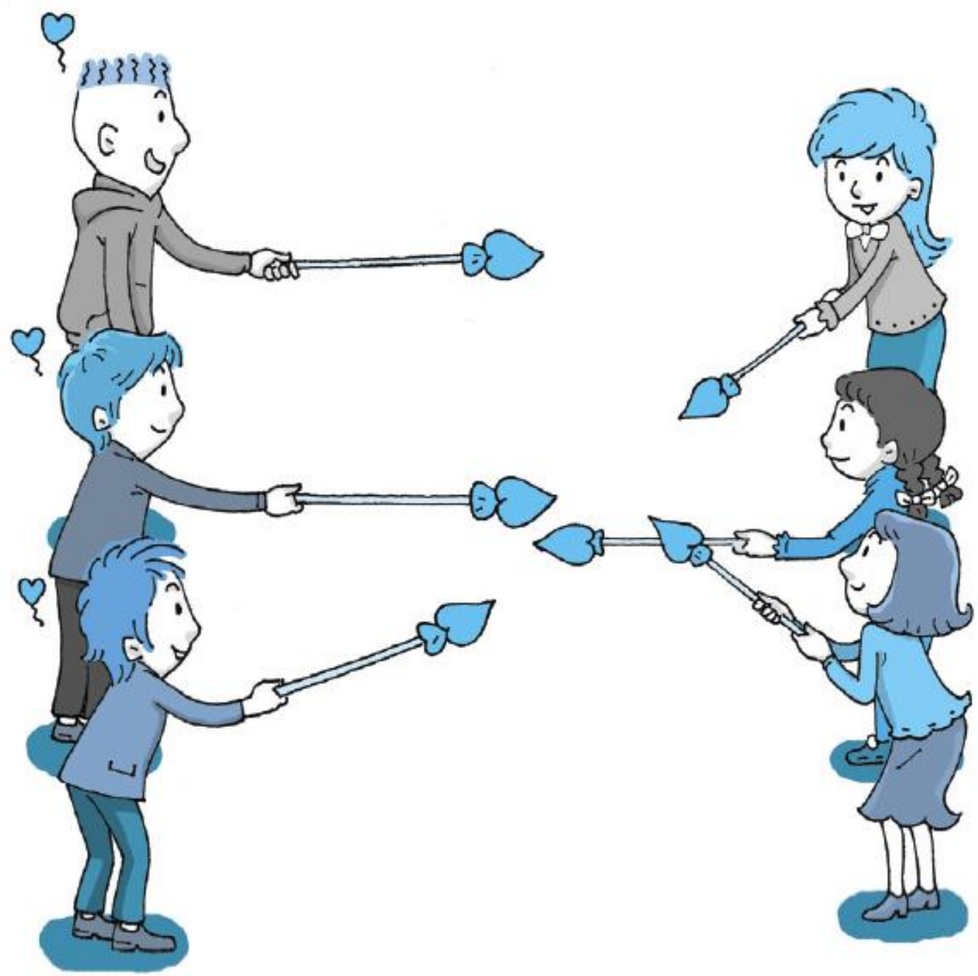
CONTENTS

관계

- **관계(Relation)**란 객체들 간의 연관성을 표현하는 구조로서, 수학이나 공학 분야뿐만 아니라 여러 다른 분야에서도 기본적이고 중요한 개념임
- 수학, 컴퓨터, 여러 가지 공학 분야에서의 객체들도 이와 같이 여러 가지 관계를 가짐

관계의 예

- 집합 A와 집합 B가 있을 때 A가 B의 부분 집합인 경우 관계가 있음
- 두 개의 디지털 논리 회로가 같은 입출력 도표를 가졌을 때 두 회로는 관계가 있음
- 컴퓨터 프로그램에서 두 변수가 같은 이름과 프로그램 실행 시 같은 저장 장소를 사용하면 관계가 있다고 함



5.1 관계와 이항 관계

- 공학과 수학에 있어서의 관계는 집합에서의 원소들 간의 순서(order)를 고려한 것임
- 원소들간에 ‘$<$’, ‘$\leq$’, ‘$\equiv$’, ‘$\subset$’,… 등의 관계 연산자를 사용함
- 관계의 집합에 대한 연산, 즉 교집합, 합집합, 여집합, 차집합 등도 관계를 가짐
- 두 개의 숫자 x, y에 대해서도 $x < y$이거나, x가 y를 나눌 수 있거나, $x^2+y^2=1$ 일 때 등 여러 경우에 대해 서로 관계가 있음

정의 5-1 두 집합 A, B에 대하여, A로부터 B로의 **이항 관계(binary relation)** R은 두 집합의 곱집합 $A \times B$의 부분 집합이다. $A \times B$의 원소인 순서쌍 (a, b)가 주어졌을 때 $(a, b) \in R$과 aRb는 동치이다.

관계에 대한 표기를 기호로 나타내면

$$aRb \Leftrightarrow (a,\ b) \in R : a\text{와 } b\text{가 관계가 있는 경우}$$

$$a\not{R}b \Leftrightarrow (a,\ b) \notin R : a\text{와 } b\text{가 관계가 없는 경우}$$

- 정의에서 사용된 이항(binary)이라는 용어는 2개 집합 사이의 관계를 의미함
- 두 개 이상인 원소에 대한 관계는 n-ary 관계라고 함
- 세 원소 간의 관계는 3-ary 관계임

관계 R의 원소인 순서쌍

- 첫 번째 원소의 집합을 정의역(domain)이라 하고 Dom(R)로 표시함
- 두 번째 원소의 집합을 치역(range)이라 하며 Ran(R)로 표시함

$\mathrm{Dom}(R) = \{a \mid (a,\ b) \in R\} \subseteq A$

$\mathrm{Dom}(R) = \{b \mid (a,\ b) \in R\} \subseteq B$

예제 5-1 두 집합 A, B에서 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이라고 하자. 집합 A에 있는 원소 x와 집합 B에 있는 원소 y에 대하여, x가 y보다 작을 때 서로 관계가 있다고 가정하고 관계의 집합을 구해보자.

풀이 총 9가지 순서 집합에 대해 살펴본다.

$0<1$이므로 $0R1$,

$0<2$이므로 $0R2$,

$0<3$이므로 $0R3$,

$1<2$이므로 $1R2$,

$1<3$이므로 $1R3$,

$2<3$이므로 $2R3$

또한

$1 \not< 1$이므로 $1 \not R 1$,

$2 \not< 1$이므로 $2 \not R 1$,

$2 \not< 2$이므로 $2 \not R 2$

따라서 집합 A와 집합 B 사이의 곱집합의 집합

$A \times B=\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

중에서 주어진 관계를 만족하는 집합은

$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

이 된다.

예제 5-2

$A=\{1, 2, 3\}$이고, A에 대한 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$일 때 R은 $A\times A$의 부분 집합이기 때문에 A에 관한 관계이다. 이때의 관계를 기호로 나타내고, 관계의 정의역과 치역을 구해보자.

풀이 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$이므로

관계 표기는 $1R1$, $1R3$, $3R2$이고

R의 정의역은 $\{1, 3\}$이고, 치역은 $\{1, 2, 3\}$이다.

여기서 잠깐!!

관계에서는 특히 $xRy \neq yRx$임을 유의해야 한다.

정의역은 순서쌍의 첫 번째 원소들로 이루어진 집합이고, 치역은 두 번째 원소들로 이루어진 집합이다.

예제 5-3 집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대한 이항 관계 R을 다음과 같이 정의해보자.

$(a, b) \in A\times B$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a-b$는 짝수

(1) $A\times B$의 순서쌍들과 R의 순서쌍들을 모두 구해보자.

(2) $1R3$, $2R3$, $2R2$들이 성립하는가?

(3) $\mathrm{Dom}(R)$과 $\mathrm{Ran}(R)$을 구해보자.

풀이 (1) $A\times B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

R의 순서쌍을 구하기 위해서는 $A\times B$ 원소들인 6개의 순서쌍을 R에서 정의된 조건에 적합한지를 살펴보아야 한다.

$1-1=0$은 짝수이므로 $(1, 1)\in R$

$1-2=-1$은 짝수가 아니므로 $(1, 2)\notin R$

$1-3=-2$는 짝수이므로 $(1, 3)\in R$

$2-1=1$은 짝수가 아니므로 $(2, 1)\notin R$

$2-2=0$은 짝수이므로 $(2, 2)\in R$

$2-3=-1$은 짝수가 아니므로 $(2, 3)\notin R$

그러므로 $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$이다.

(2) $(1, 3)\in R$이므로 $1R3$은 성립한다.

$(2, 3)\notin R$이므로 $2R3$은 성립하지 않는다.

$(2, 2)\in R$이므로 $2R2$는 성립한다.

(3) $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2\}$

$\mathrm{Ran}(R) = \{1, 2, 3\}$

정의 5−2 A와 B가 집합일 때, 순서쌍(ordered pair)의 첫 번째 요소는 집합 A의 원소이고 두 번째 요소는 B의 원소로 구성된 모든 순서쌍의 집합을 A와 B의 카티시안 곱(cartesian product) 또는 곱집합이라고 하며 $A \times B$로 나타낸다.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

카티시안 곱은 두 개 이상의 집합에 대해서도 확장할 수 있다. 즉,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \text{모든 } i,\ 1 \le i \le n\text{에 대해 } x_i \in A_i\}$$

이다.

예제 5-4 $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2, 3\}$인 경우 $A\times A$, $A\times B$, $B\times A$, $B\times B$를 각각 구해보자.

풀이

$A\times A=\{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

$A\times B=\{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$

$B\times A=\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

$B\times B=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

이 된다.

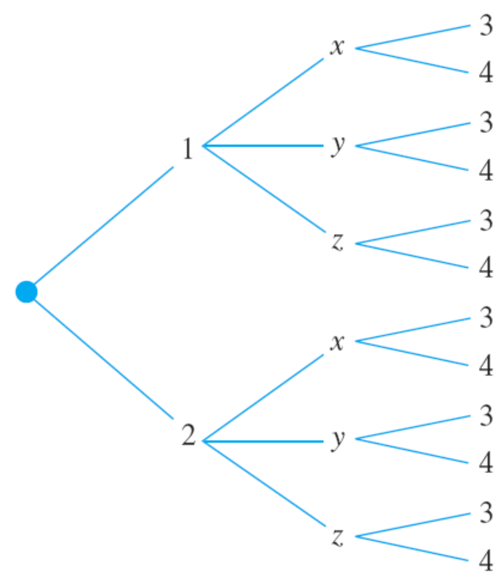
예제 5-5 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대한 이항 관계 R이 A의 원소 a, b에 대하여 $a\geq b$일 때 순서쌍 (a, b)로 구성된다. 이때 이항 관계 R의 원소들을 구해보자.

풀이 9개의 순서쌍 중에서 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면 다음과 같다.

$R=\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

예제 5-6 $A=\{1, 2\}$, $B=\{x, y, z\}$, $C=\{3, 4\}$에 대하여 $A\times B\times C$를 구해보자.

풀이 $A\times B\times C$는 $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$인 모든 순서쌍 (a, b, c)로 구성되어 있고 $A\times B\times C$의 순서쌍들은 다음과 같은 트리(tree) 도표를 활용하면 보다 체계적으로 구할 수 있다.



$(1, x, 3)$
$(1, x, 4)$
$(1, y, 3)$
$(1, y, 4)$
$(1, z, 3)$
$(1, z, 4)$
$(2, x, 3)$
$(2, x, 4)$
$(2, y, 3)$
$(2, y, 4)$
$(2, z, 3)$
$(2, z, 4)$

$A\times B\times C$의 순서쌍들은 앞의 트리 도표에 나타난 바와 같이 모두 12개이다. 즉, A, B, C 각 원소의 개수를 모두 곱한 것이 된다.

정의 5-3 집합 A에서 집합 B로의 관계 R에 대한 역관계(inverse relations) R^{-1}는 집합 B에서 집합 A로의 관계를 나타내며, 순서쌍 내의 순서를 다시 바꾸면 그 순서쌍은 관계 R에 속하게 된다.

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

다시 말하면, aRb의 관계가 있어야만 $bR^{-1}a$가 존재하게 된다.

예제 5-7 두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4\}$일 때 관계 R이 다음과 같다고 하자.

$$R=\{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

이때 관계 R의 역관계 R^{-1}을 구해보자.

풀이 역관계는 관계에서 순서쌍의 순서를 모두 바꾸면 되므로 $R^{-1}=\{(3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$이다.

집합 사이의 관계를 표현하는 방법

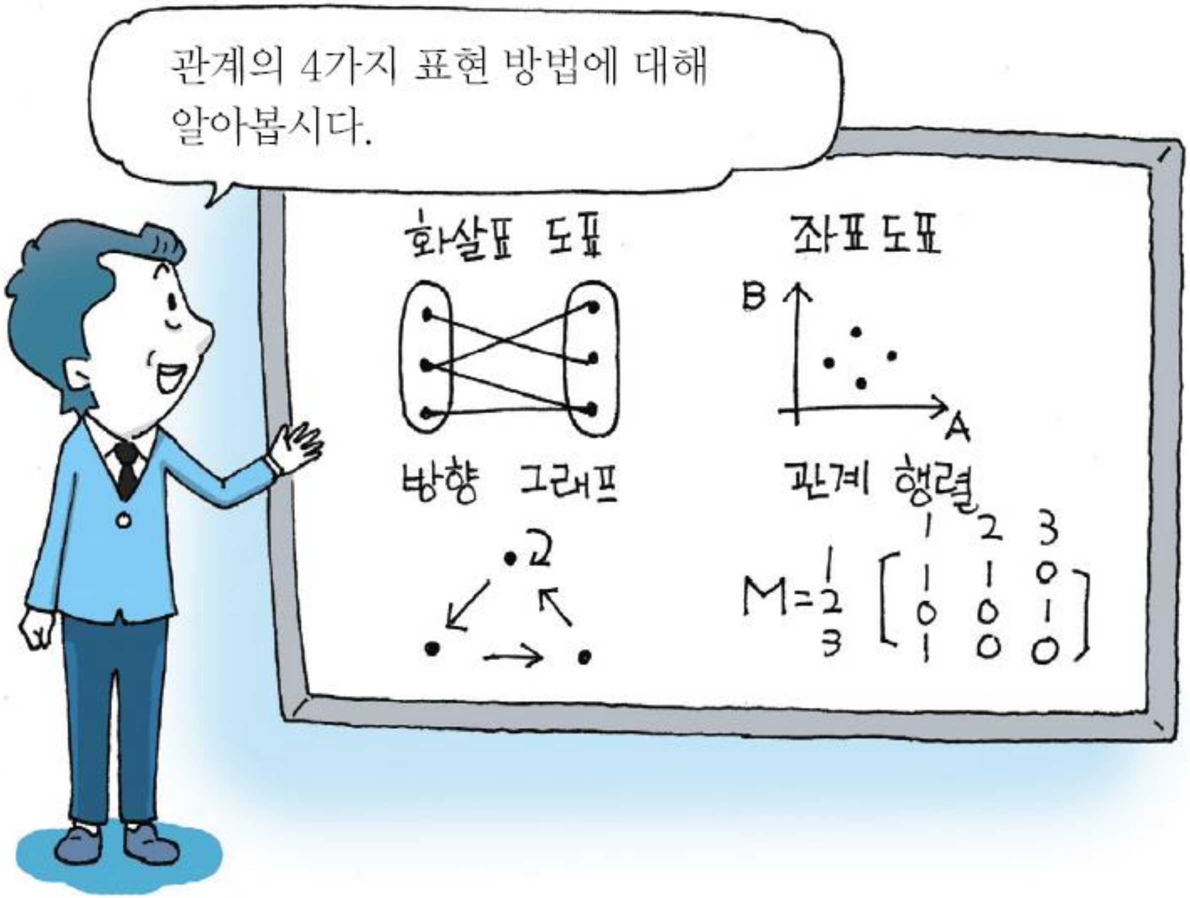
(1) 서술식 방법

'집합 A={1, 2, 3}에서 원소 a, b가 a ≥ b인 관계 R' 과 같이 직접 서술식으로 표현함

(2) 나열식 방법

- 서술식에 따라 관계를 순서쌍들의 집합으로 표현함
- 순서쌍의 원소들 간의 관계를 표현하는 편리한 방법들로는 화살표 도표(arrow diagram), 좌표 도표(coordinate diagram), 방향 그래프(directed graph), 관계 행렬(relation matrix) 등이 있음

5.2 관계의 표현



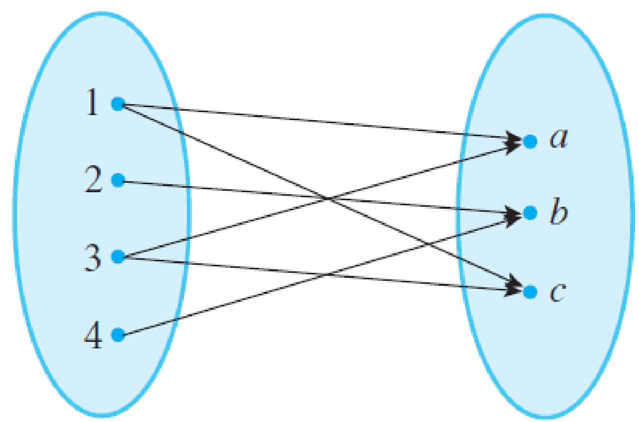
(1) 화살표 도표(Arrow Diagram)

- 화살표 도표를 이용한 관계의 표현은 a가 집합 A의 원소이고, b가 집합 B의 원소라 가정할 때
- (a, b) ∈ R일 경우 집합 A에있는 원소 a에서 집합 B에 있는 원소 b로 화살표를 그려서 관계를 표현함

예제 5-8

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B=\{a, b, c\}$라 하고 그들 사이의 관계 $R=\{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, c), (4, b)\}$일 경우, 관계 R을 화살표 도표를 이용하여 나타내어보자.

풀이 순서쌍의 값에 따라 집합 A에서 집합 B의 방향으로 화살표를 연결한다.



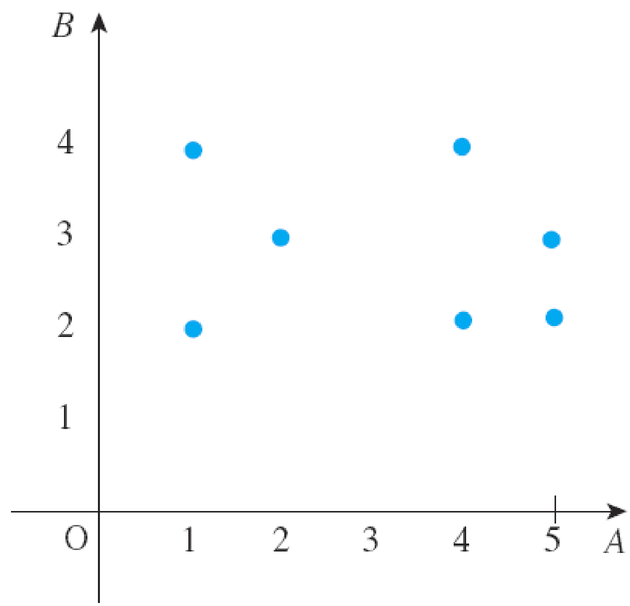
(2) 좌표 도표(Coordinate Diagram)

- 관계를 표현하는 방법은 집합 A의 원소를 x축 위의 점으로 표시함
- 집합 B의 원소를 y축 위의 점으로 생각함
- a ∈ A와 b ∈ B가 관계가 있으면 a를 가리키는 x 좌표축과 b를 가리키는 y 좌표축이 만나는 곳에 점으로 표시함

예제 5-9

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이고 집합 A에서 집합 B로의 관계 $R=\{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 2), (5, 3)\}$일 때 관계 R을 좌표 도표를 이용하여 표시해보자.

풀이 관계 R에 해당하는 좌표에 점으로 표시한다.



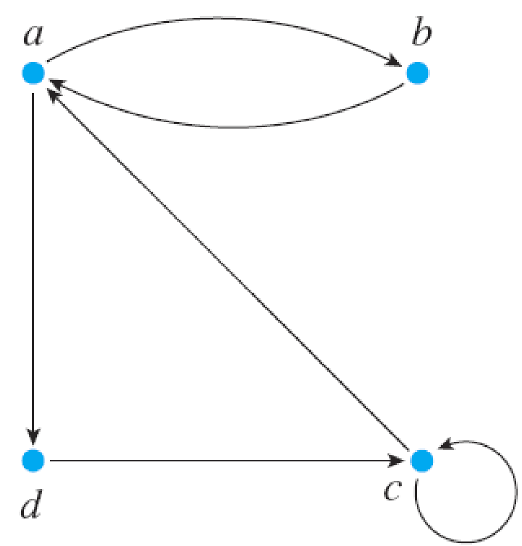
(3) 방향 그래프(Directed Graph)

- 관계 R이 두 집합 A와 B 사이의 관계가 아니고 하나의 집합 A에 대한 관계라고 할 때
  - 집합 A의 각 원소를 그래프의 정점(vertex)으로 표시함
  - (a, b) ∊ R일 경우 a에서 b로의 화살표가 있는 연결선(edge)인 방향 그래프로 표현함

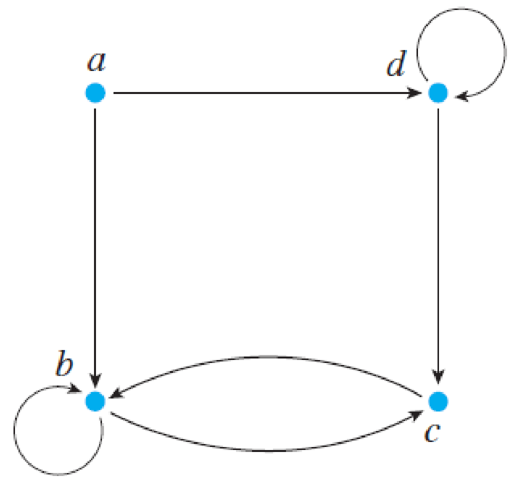
예제 5-10 다음과 같은 관계 R이 주어졌을 때, 관계를 방향 그래프로 그려보자.

$$R=\{(a, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)\}$$

풀이 관계의 첫 번째 원소로부터 두 번째 원소로 방향 그래프를 그리면 된다.



예제 5-11 관계 R에 대한 방향 그래프가 다음과 같을 때 관계 R의 순서쌍을 구해보자.



풀이 방향 그래프에서 각 정점들 사이의 연결선에 따라 관계를 적으면 된다.

$R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (d, c), (d, d)\}$

(4) 관계 행렬(Relation Matrix)

- 관계를 표현하는 또 다른 방법으로서 부울 행렬(Boolean Matrix)을 이용하는 관계 행렬(Relation Matrix) 방법이 있음
- 부울 행렬은 행렬 안에 있는 모든 원소들이 0 또는 1로 표시되는 행렬을 의미함
- 관계 행렬의 행에는 집합 A의 원소, 열에는 집합 B의 원소를 표시함
- 행렬의 각 요소의 값은 a ∈ A와 b ∈ B의 관계가 있으면 1, 관계가 없으면 0으로 표현하는 방법임

예를 들어, $R=\{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$일 때 행렬에 의한 관계 표현

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

다음과 같이 집합 A는 n개의 원소를 가지고 있고 집합 B는 m개의 원소를 가지고 있다고 가정하면

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

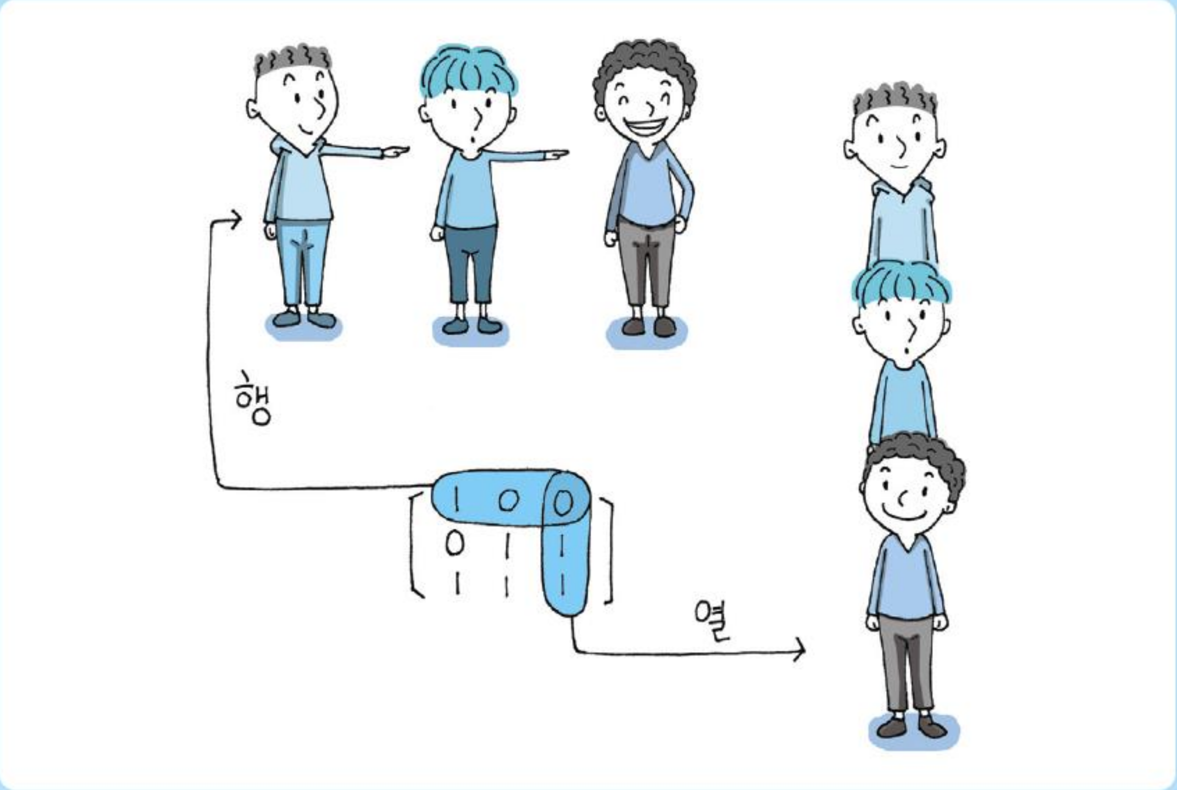
$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$$

R이 집합 A와 집합 B 사이의 관계라고 하면 R의 관계 행렬은 n개의 **행(row)**과 m개의 **열(column)**을 가지는 n×m 행렬 M이고 M의 각 원소들은 아래와 같이 정의됨

$$M[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

여기서 잠깐!!

어떤 행렬에서 가로로 나타내는 것이 행(row)이고, 세로로 나타내는 것이 열(column)이며, 행과 열이 만나는 곳을 항(entry)이라고 한다.



예제 5-12

집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 6\}$에 대한 관계 R의 순서쌍들의 집합이 다음과 같을 때 관계 R을 관계 행렬로 표현해보자.

$$R=\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 6)\}$$

풀이 $|A|=3$, $|B|=3$이므로 우리가 구하고자 하는 행렬 M은 3×3 행렬이 되며, 관계가 있는 행과 열이 만나는 항에는 1, 나머지 항들에는 0이 들어가게 된다.

$$M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

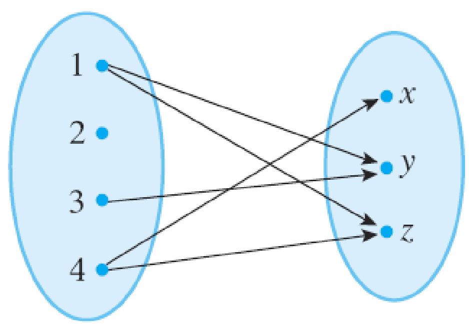
예제 5-13 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 $B=\{x, y, z\}$일 때, 다음과 같이 A에서 B로 가는 관계가 있다.

$$R=\{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

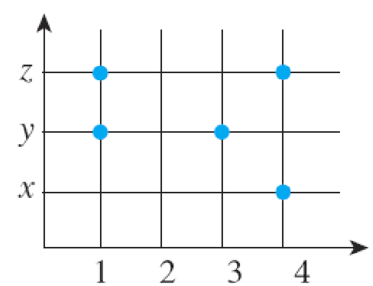
(1) 관계 R을 화살표 도표, 좌표 도표, 관계 행렬로 각각 표현해보자.

(2) R의 정의역과 치역을 구해보자.

풀이 (1) 주어진 관계를 화살표 도표, 좌표 도표, 관계 행렬로 표현하면 다음과 같다.



① 화살표 도표



② 좌표 도표

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

③ 관계 행렬

(2) 정의역 $=\{1, 3, 4\}$이고, 치역 $=\{x, y, z\}$이다.

5.3 합성 관계

정의 5-4 세 집합 A, B, C에서 R_1을 집합 A에서 집합 B로의 관계라 하고, R_2를 집합 B에서 집합 C로의 관계라 하면, 집합 A에서 집합 C로의 **합성 관계(composite relation)** $R_1 \cdot R_2$ 또는 R_1R_2는 다음과 같이 정의된다.

$$R_1 \cdot R_2 = \{(a,\ c) \mid a \in A,\ c \in C,\ (a,\ b) \in R_1 \text{이고 } (b,\ c) \in R_2\}$$

- 합성 관계는 주어진 두 관계로부터 새로운 관계를 이끌어내는 것임
- 이미 존재하고 있는 관계 R_1과 R_2로부터 새로운 관계 $R_1 \cdot R_2$를 만들어 냄
- 합성 관계에서 관계 R_1과 R_2는 연관성이 있어야 하는데, R_1의 치역이 R_2의 정의역이 될 경우에만 합성 명제 $R_1 \cdot R_2$를 만들 수 있음

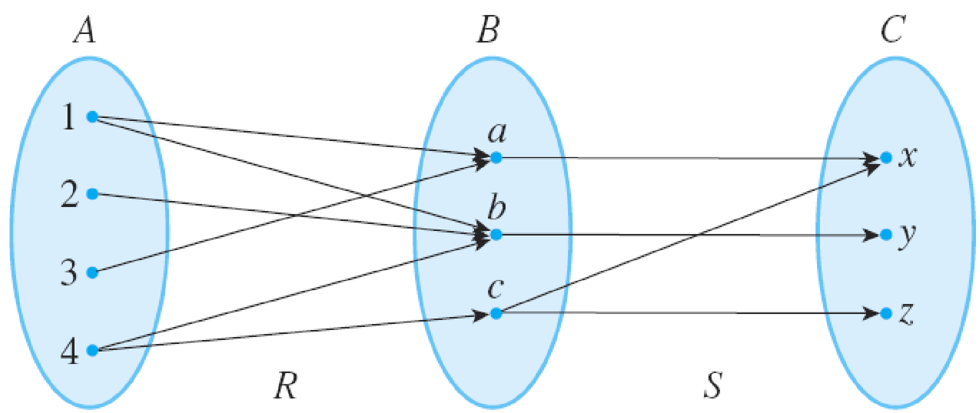
예제 5-14

집합 A, B, C가 각각 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{x, y, z\}$이고, 집합 A에서 집합 B로의 관계를 R, 집합 B에서 집합 C로의 관계를 S라 한다. R과 S가 다음과 같을 때 합성 관계 $R \cdot S$를 화살표 도표를 사용하여 나타내어보자.

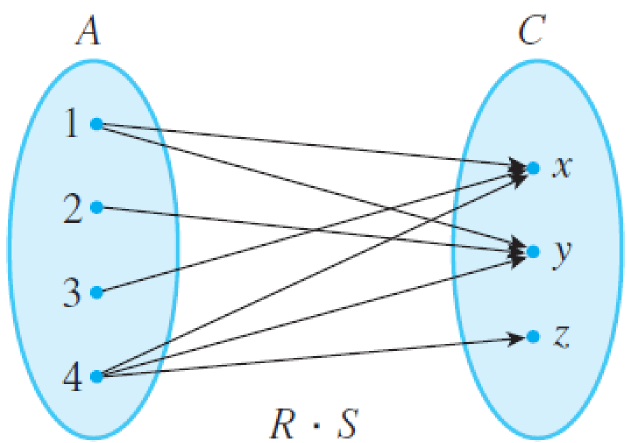
$R=\{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (4, b), (4, c)\}$

$S=\{(a, x), (b, y), (c, x), (c, z)\}$

풀이 관계 R과 S를 화살표 도표로 나타내면 다음과 같다.



- 1에서 a, b로 가고, a와 b는 다시 x와 y감
- 결과적으로 1에서 x와 y로 가는 셈임
- 따라서 1에서 x와 y로의 화살표를 직접 만들어줌



예제 ⑤-15

예제 ❺-14에서의 합성 관계를 관계 행렬로 나타내어보자.

풀이 관계 R에 대한 관계 행렬을 M_R, 관계 S에 대한 관계 행렬을 M_S라 하면 M_R과 M_S는 다음과 같이 표시된다.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

합성 관계 $R \cdot S$를 순서쌍의 집합으로 나타내면

$$R \cdot S = \{(1, x), (1, y), (2, y), (3, x), (4, x), (4, y), (4, z)\}$$

이므로 합성 관계 행렬 $M_{R \cdot S}$는 다음과 같은 행렬이 된다.

$$M_{R \cdot S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

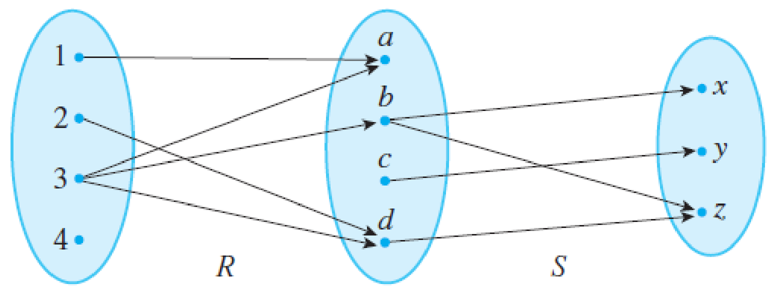
예제 5-16 다음과 같이 3개의 집합과 두 개의 관계가 주어졌을 경우, 합성 관계를 화살표 도표를 통해 나타내어보자.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$

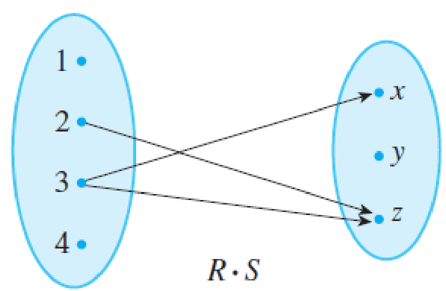
$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$

$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$

풀이 먼저 R과 S의 관계를 화살표 도표로 나타내면 다음과 같다.



따라서 합성 관계 $R \cdot S$는 다음과 같은 화살표 도표로 나타낼 수 있다.



정의 5-5 집합 A에 대한 항등 관계(Identity relation) I_A는 다음과 같이 정의된다.

$$I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

항등 관계를 이용한 합성 관계는 원래의 관계와 같음

$$I_A R = R I_B = R$$

예제 5-17 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$이고, 집합 A에서 집합 B로의 관계가 다음과 같이 R로 나타내어질 경우 다음 관계를 각각 구해보자.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$$

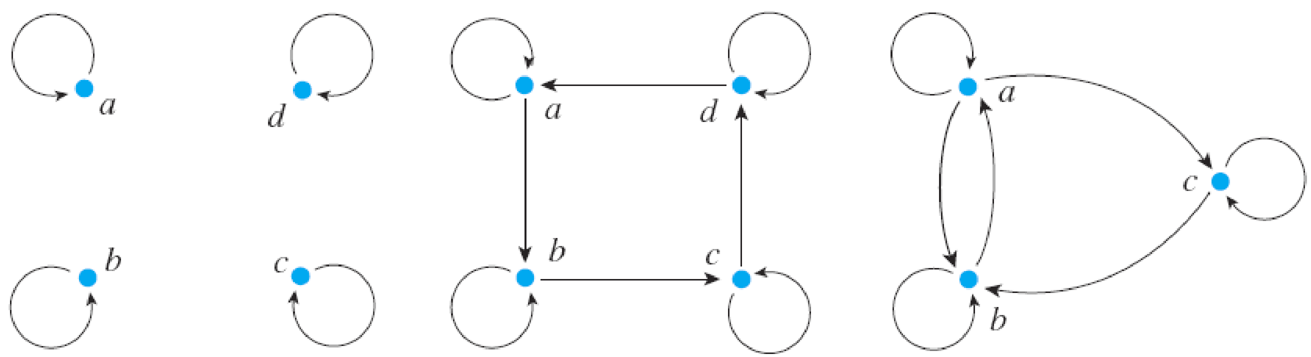
(1) $I_A R$ (2) I_B

풀이 (1) $I_A R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$

(2) $I_B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(1) 반사 관계(Reflexive Relation)

관계 R에 대한 방향 그래프를 그렸을 때 그래프의 모든 정점에서 자기 자신을 가리키는 화살표가 있어야 반사 관계가 성립함



(a) (b) (c)

〈그림 5.1〉 반사 관계를 가진 방향 그래프

정의 5-6 집합 A에 있는 모든 원소 x에 대하여 xRx이면, 즉 $(x, x) \in R$이면 관계 R을 반사 관계(reflexive relation)라고 한다.

비반사 관계(irreflexive relation)

- 반사 관계와는 반대로 집합 A의 모든 원소에 대하여 $a \in A$, $(a, a) \notin R$
- R이 비반사 관계이면 R의 원소 중에는 (a, a), $a \in A$인 원소가 하나도 존재하지 않음

예제 5-18

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계들이 다음과 같을 때 반사 관계인 것을 찾아 보자.

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 1), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

$R_4 = \phi$

풀이 (1) R_1은 자기 자신에 대한 순서쌍 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$를 포함하므로 반사 관계이다.

(2) R_2는 $(2, 2), (3, 3), (4, 4)$의 원소는 포함하나 $(1, 1)$을 포함하지 않으므로 반사 관계가 아니다.

(3) R_3는 자기 자신에 대한 순서쌍 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$를 포함하므로 반사 관계이다.

(4) R_4는 어떤 원소도 포함하지 않으므로 반사 관계가 아니다.

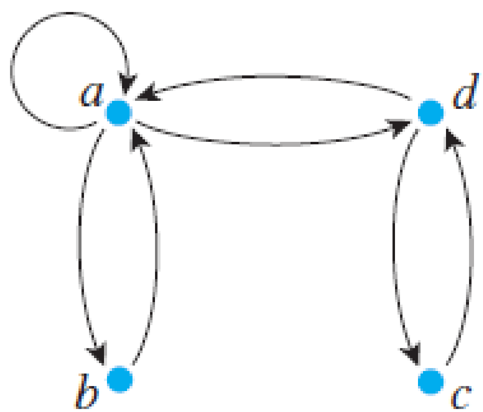
예제 5-19 $R = \{(a, b) | a \in N,\ b \in N,\ a \le b\}$일 때 R이 반사 관계인지를 판단해보자.

풀이 a, b가 자연수 집합의 원소이고 $a \le b$이므로, $(1,\ 1) \in R$이고 $(2,\ 2) \in R$이다. 임의의 자연수 n에 대해서도 $n \le n$이므로, $(n, n) \in R$이다. 따라서 모든 자연수에 대해 관계 R은 반사 관계이다.

정의 5-7 집합 A에 있는 원소 x, y에 대해 $(x, y) \in R$일 때 $(y, x) \in R$이면 관계 R을 대칭 관계(symmetric relations)라고 한다.

(2) 대칭 관계(Symmetric Relation)

- R이 대칭 관계일 때 R의 원소 중 (a, b)가 존재하면 (b, a) 또한 반드시 존재함
- 대칭 관계인 R을 방향 그래프로 나타내면, 하나의 정점에서 다른 정점으로 화살표가 나가면 반대로 다른 정점에서 그 정점으로의 화살표도 반드시 있어야 함



(a)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(b)

〈그림 5.2〉 대칭 관계의 두 가지 예

예제 5-20

x, y가 자연수의 집합 N의 원소일 때 다음의 관계들이 대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

(1) $R_1 = \{(x, y) | x \in N, y \in N, x + y = 20\}$

(2) $R_2 = \{(x, y) | x \in N, y \in N, x \leq y\}$

풀이 (1) $x + y = 20$일 때 $(x, y) \in R_1$이면 $(y, x) \in R_1$이므로, R_1은 대칭 관계이다. 예를 들어, $(1, 19) \in R_1$일 때 $(19, 1) \in R_1$과 같은 경우이다.

(2) $x = 1$이고 $y = 2$이면 $1 \leq 2$이므로 $(1, 2) \in R_2$이지만, $(2, 1) \notin R_2$이므로 R_2는 대칭 관계가 아니다.

(3) 반대칭 관계(Anti-symmetric Relations)

- R이 반대칭 관계일 때, $x \neq y$이고 $(x, y) \in R$이면 $(y, x) \notin R$
- 대칭 관계와 반대칭 관계는 서로 반대의 개념을 가짐

정의 5-8 집합 A에 있는 모든 원소 x, y에 대하여 $(x, y) \in R$이고 $(y, x) \in R$일 때 $x = y$인 관계를 만족하면 관계 R을 반대칭 관계(anti-symmetric relations)라고 한다.

여기서 잠깐!! 어떤 경우에는 대칭 관계와 반대칭 관계가 같이 존재할 수도 있다. 예를 들어, $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$과 같이 각 원소들이 자기 자신에 대한 반사 관계를 가지면서 다른 원소들과는 대칭의 관계가 없을 경우, 이 관계는 대칭 관계도 되고 반대칭 관계도 성립된다.

예제 5-21 다음의 관계들이 반대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

(1) $R_1 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$

(2) $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

풀이 (1) R_1의 경우는 $a \neq b$일 때 $(a, b) \in R_1$이면 $(b, a) \notin R_1$이므로 반대칭 관계이다.

(2) R_2의 경우는 $(1, 3) \in R_2$이고 $(3, 1) \in R_2$이나 $1 \neq 3$이므로 반대칭 관계가 아니다.

정의 5−9 집합 A에 있는 원소 x, y, z에 대하여 관계 R이 $(x, y) \in R$이고 $(y, z) \in R$이면 $(x, z) \in R$인 관계를 만족할 때 관계 R을 **추이 관계(transitive relation)**라고 한다.

(4) 추이 관계(Transitive Relation)

- 집합 A = {1, 2, 3}이고 R = {(1, 2)}일 경우 관계 R의 순서쌍은 (1, 2)뿐이고 2로 시작하는 순서쌍이 존재하지 않음
- S = {(1, 3), (2, 2), (3, 2)}일 경우 관계 S의 순서쌍에 (1, 3)과 (3, 2)가 존재하나 (1, 2)가 존재하지 않으므로 관계 S는 추이 관계가 아님

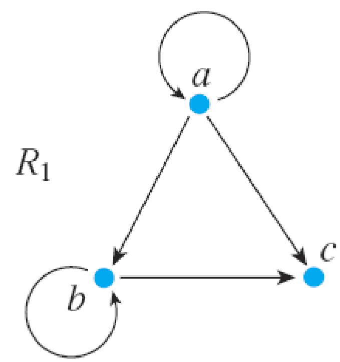
5.4 관계의 성질

예제 5-22 정수들의 집합에서 크기를 나타내는 관계 $<$에서 추이 관계가 성립함을 보이자.

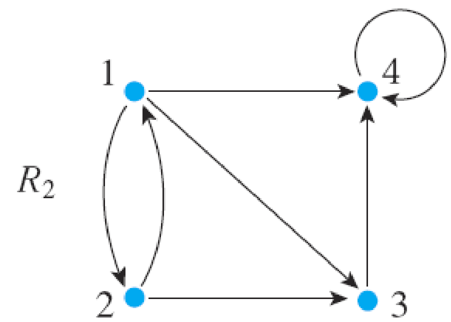
풀이 정수들의 관계에서 $a<b$이고 $b<c$이면 반드시 $a<c$이기 때문에 추이 관계가 성립한다. 참고로 이 관계는 $a<b$일 때 $b<a$가 성립하지 않기 때문에 비대칭적이고 또한 $a<a$가 성립하지 않으므로 비반사적임을 알 수 있다.

예제 ⑤-23 다음의 방향 그래프로 표현된 관계들이 추이 관계인지를 판별해보자.

(1)



(2)



풀이 (1) $(a, b) \in R_1$이고 $(b, c) \in R_1$일 때 $(a, c) \in R_1$이므로 추이 관계이다.

(2) $(1, 2) \in R_2$이고 $(2, 3) \in R_2$일 때 $(1, 3) \in R_2$이나, $(2, 1) \in R_2$이고 $(1, 4) \in R_2$일 때 $(2, 4) \notin R_2$이므로 R_2는 추이 관계가 아니다.

예제 5-24

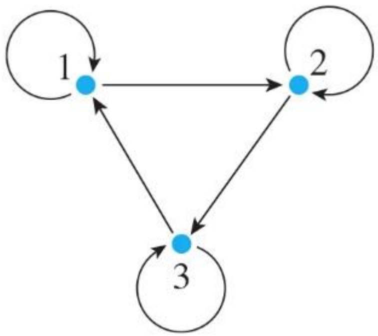
$A=\{1, 2, 3, 4\}$라 하고 A상에 어떤 관계가 다음 관계 행렬과 같이 주어졌다면 그 관계가 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계, 추이 관계가 성립하는지를 살펴보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이 행렬의 주대각선의 값이 모두 1이므로 반사 관계이다. 또한 대칭이므로 대칭 관계가 성립하고, 추이 관계도 역시 성립한다. 그러나 반대칭 관계는 성립하지 않는다.

예제 5-25

어떤 집합상에 관계가 주어졌을 때, 그 관계에 따른 방향 그래프가 다음과 같다. 이때 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계 및 추이 관계가 성립하는지를 판별해보자.



풀이 자기 자신에게로의 화살표가 모두 있으므로 반사 관계가 성립하고, 정의에 따라 반대칭 관계가 성립한다. 그러나 대칭, 추이 관계는 성립하지 않는다.

정의 5-10

R의 추이 클로우저 $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$는 다음과 같이 정의된다.

(1) 만약 $(a, b) \in R$이면 $(a, b) \in R^+$이다.

(2) 만약 $(a, b) \in R^+$이고 $(b, c) \in R$이면 $(a, c) \in R^+$이다.

(3) 앞의 (1), (2)의 경우를 제외하고는 어떤 것도 R^+에 속하지 않는다.

R^+에서는 추이 관계가 성립한다. R^*로 표현되는 R의 반사 및 추이 클로우저 (reflexive and transitive closure)는 $R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in S\}$가 된다.

정리 5-1

집합 A에서의 관계 $R \subseteq A \times A$는 다음과 같은 성질을 가질 수 있다.

(1) 반사 관계 : 모든 $x \in A$에 대해 xRx이다.

(2) 대칭 관계 : 모든 $x,\ y \in A$에 대해 xRy이면 yRx이다.

(3) 추이 관계 : 모든 $x,\ y,\ z \in A$에 대해 xRy이고 yRz이면 xRz이다.

예제 5-26 $R = \{(1, 2), (2, 2), (2,3)\}$을 집합 $\{1, 2, 3\}$상에서의 관계라고 할 때 R^+와 R^*를 구해보자.

풀이 위의 정의에 따라 구해보자.

(1) 만약 $(a, b) \in \mathrm{R}$이면 $(a, b) \in \mathrm{R}^+$이란 조건으로부터

$R^+ = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$이 된다.

(2) 만약 $(a, b) \in R^+$이고 $(b, c) \in R$이면 $(a, c) \in R^+$이다. 그러나 이 경우에는 다른 새로운 추이 관계가 만들어지지 않는다.

따라서 $R^+ = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3)\}$이 된다.

한편 $R^* = R^+ \cup \{(a, a) | a \in S\}$이므로

$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$이 된다.

5.5 동치 관계와 분할

정의 5-11 관계 R에서 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립할 때 이를 **동치 관계(equivalence relation)**라고 한다. 동치 관계 R의 중요한 성질로는 R이 서로 공통 부분이 없으면서 공집합이 아닌 클래스들로 S를 분할한다는 점이다.

예제 5-27 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 A에 대한 관계가 다음과 같을 때, R이 동치 관계임을 보이자.

$$R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

풀이 (1) 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $(x, x) \in R$이므로 반사 관계이다.
(2) $(1, 3)$과 $(3, 1)$이 R에 속하고 $(2, 4)$와 $(4, 2)$가 R에 속하므로 대칭 관계이다.
(3) 집합 A의 모든 원소 x, y, z에 대하여 $(x, y) \in R$이고, $(y, z) \in R$일 때 $(x, z) \in R$이므로 추이 관계이다.

그러므로 관계 R은 동치 관계이다.

5.5 동치 관계와 분할

정의 5-12 집합 A에 대한 동치 관계를 R이라고 할 때, A의 각 원소 x에 대하여 $[x]$를 R에 대한 x의 동치류(equivalence classes) 또는 동치 클래스라 하고

$$[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$$

로 정의한다. 이때 집합 A의 동치류의 모임을 A의 몫집합(quotient set)이라 하고, $\frac{A}{R}$로 나타낸다.

$$\frac{A}{R} = \{[x] \mid x \in A\}$$

정의 5-13 공집합이 아닌 집합 A의 분할(partitions)이란 다음 조건을 만족시키는 A의 부분 집합의 모임 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$을 말한다.

(1) $A_i \neq \phi,\ 1 \leq i \leq n$

(2) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

(3) $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$

예제 5-28 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 A의 부분 집합이 $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2, 3, 5\}$, $A_3=\{4\}$일 때 이들이 집합 A의 분할이 되는지를 밝혀보자.

풀이 $A_1 \neq \phi$, $A_2 \neq \phi$, $A_3 \neq \phi$이고 $A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap A_3 = \phi$, $A_2 \cap A_3 = \phi$이다. 또한 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$이다. 따라서 A_1, A_2, A_3는 A의 분할이 된다.

여기서 잠깐!!

분할의 조건을 다른 표현으로 하면 다음과 같다.

- 모든 분할 집합 $\{A_i\}$는 ϕ이 아니다.
- S 안에 있는 모든 원소는 임의의 A_i에 속한다.
- $\{A_i\}$의 집합은 서로 교차하지 않는다. 즉, $A_i \neq A_j$일 때, $A_i \cap A_j = \phi$

예제 5-29 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분 집합이 다음과 같을 때 집합 S를 분할하는지를 판단해보자.

(1) $\{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{6\}\}$

(2) $\{\{1,2\}, \{3,4,6\}, \{5\}\}$

풀이 (1) $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$이므로 분할이 아니다.

(2) 각 원소의 교집합은 ϕ이고 전체 집합은 S이므로 이것은 분할이다.

여기서 잠깐!!

$x \equiv y\,(\mathrm{mod}\ \ m)$와 같은 mod 합동이란 x와 y를 m으로 각각 나누었을 때 나머지가 같은 경우를 말한다. 예를 들어, 우리가 달력에서 요일별로 본 날짜는 m mod 7에 관해 합동이다. 가령 달력을 볼 경우 3일, 10일, 17일, 24일, 31일은 모두 7로 나누었을 때 나머지가 3인 경우들이다. 이때 이 날짜들은 같은 요일이 되므로, 요일적인 면에서 동치 관계이다.

예제 5-30 정수 i와 j에 대한 mod 합동(congruence)이 동치 관계임을 보이자.

풀이 어떤 수 i와 j가 합동인 것은 $i \equiv j$로 나타내는데 이들의 관계를 점검해 보자.

(1) 모든 x에 대해 $x \equiv x$이므로 반사 관계가 성립한다.

(2) 만약 $x \equiv y$이면 $y \equiv x$이므로 대칭 관계가 성립한다.

(3) 만약 $x \equiv y$이고 $y \equiv z$이면 $x \equiv z$이기 때문에 추이 관계가 성립한다.

따라서 이 관계는 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립하므로 동치 관계이다.

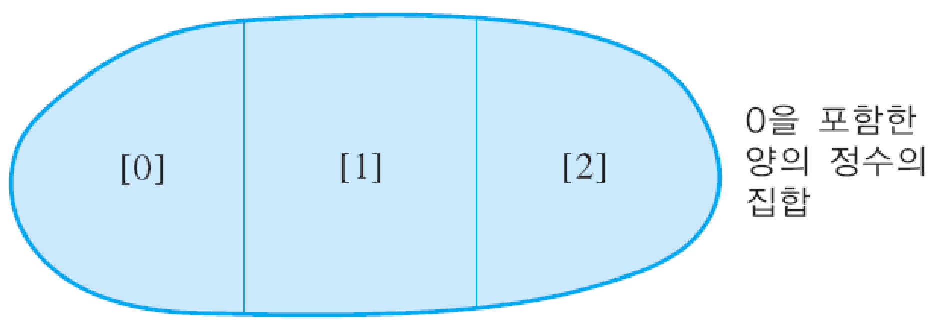
예제 5-31

양의 정수 m에 대해 mod 합동인 관계, 즉 $a \equiv b \pmod{m}$인 경우를 살펴보자. 만약 n이 3일 경우에 동치 관계가 되는지를 밝히고, 동치류를 만들어보자.

풀이 mod 합동인 경우에 위의 예제에서 동치 관계가 되는 것을 확인하였다. 이들은 나머지의 값에 따라 다음과 같은 3개의 동치류로 나눌 수 있다.

$$[0] = \{0, 3, 6, \cdots, 3n, \cdots\}$$
$$[1] = \{1, 4, 7, \cdots, 3n+1, \cdots\}$$
$$[2] = \{2, 5, 8, \cdots, 3n+2, \cdots\}$$

이들 3개의 집합은 서로소이고, 또한 이들을 모두 합집합하면 음수가 아닌 정수의 집합이 되므로, 다음과 같이 서로 겹치지 않는 동치류들로 분할하게 된다.



5.6 부분 순서 관계

정의 5-14 집합 A에 대한 관계 R이 반사 관계, 반대칭 관계, 추이 관계이면 관계 R을 **부분 순서 관계(partially ordered relation)**라고 한다. 또한 R이 A에 대한 부분 순서 관계이면 순서쌍 (A, R)을 **부분 순서 집합(partially order set, Poset)**이라고 한다.

- 부분(partial)이라는 용어를 쓰는 이유는 집합 A의 원소의 모든 쌍이 관계를 가지는 것은 아니기 때문임
- 부분 순서 집합을 나타낼 때 $(A, \precsim)$라는 기호를 사용함
- 집합 A에 대한 관계 R이 부분 순서 관계이면, A의 두 원소 x, y에 대하여 $(x, y) \in R$을 $x \precsim y$로 표기함
- $x \precsim y$의 관계인 경우 'x가 y를 선행한다(x precedes y)'라고 읽음

5.6 부분 순서 관계

정리 5-2

집합 A에서의 관계 $R \subseteq A \times A$는 다음과 같은 성질을 가질 수 있다.

(1) 반사 관계 : 모든 $x \in A$에 대해 xRx이다.

(2) 반대칭 관계 : 모든 $x, y \in A$에 대해 xRy이고 yRx이면 $x=y$이다.

(3) 추이 관계 : 모든 $x, y, z \in A$에 대해 xRy이고 yRz이면 xRz이다.

위의 세 가지 관계를 모두 만족시키는 관계를 부분 순서 관계라고 한다.

예제 ⑤-32 자연수의 집합(N)에 대한 관계 $\leq$이 부분 순서 관계임을 보이자.

풀이 임의의 자연수 x에 대하여 $x \leq x$이므로 반사 관계이다.
$x, y \in N$일 때 $x \leq y$이고 $y \leq x$이면 $x = y$이므로 반대칭 관계이다.
$x, y, z \in N$일 때 $x \leq y$이고 $y \leq z$이면 $x \leq z$이므로 추이 관계이다.
따라서 관계 $\leq$은 부분 순서 관계이다.

예제 ⑤-33 집합 S의 부분 집합 간의 포함 관계 $\subseteq$이 부분 순서 관계임을 보이자.

풀이 임의의 부분 집합 A에 대하여 $A \subseteq A$이므로 반사 관계이다.
부분 집합 A, B에 대하여 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq A$이면 $A = B$이므로 반대칭 관계이다.
부분 집합 A, B, C에 대하여 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq C$이면 $A \subseteq C$이므로 추이 관계이다.
따라서 포함 관계 $\subseteq$은 부분 순서 관계이다.

5.6 부분 순서 관계

비교 가능(comparable)

부분 순서 집합 (A, $\lesssim$)에서 집합 A의 두 원소 x, y가 x $\lesssim$ y 또는 y $\lesssim$ x이면 x 와 y는 비교 가능이라고 함

선형 순서 집합(linearly ordered set)

집합 A의 모든 두 원소가 비교 가능하면 A를 선형 순서 집합이라 함

선형 순서 관계(linearly ordered relation, linear order)

선형 순서 집합인 경우 관계 $\lesssim$ 라고 함

정의 5-15 집합 A상에서의 관계 R이 다음 조건을 만족할 경우 선형 순서(linear order)라고 한다.

(1) R이 부분 순서를 만족한다.

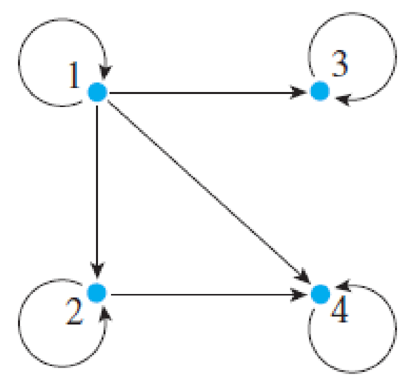
(2) 만약 $a \in A$, $b \in A$라면 aRb, bRa 또는 $a=b$ 중 하나가 성립한다.

하세 도표(Hasse Diagram)

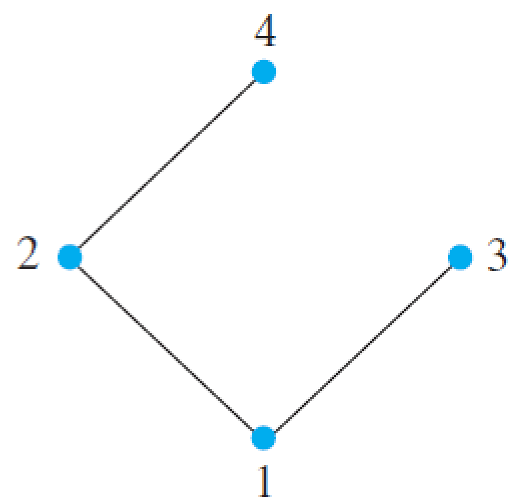
- 독일의 수학자 **하세**(Helmut Hasse, 1898~1979)가 부분 순서 집합 $(A, \precsim)$를 그래프로 나타낼 때 고안하여 사용함
- 방향 그래프의 일종으로서 화살표는 표시하지 않고 모든 연결선(edge)을 트리(tree)와 같이 모두 아래 방향을 향하도록 그림
- 모든 순환(loop)은 표시하지 않고 집합 A의 원소 x, y, z에서 $x \precsim y$이고 $y \precsim z$를 만족하는 y가 존재하지 않을 경우에만 x에서 z로의 연결을 그려줌

예제 ⑤-34

다음과 같이 주어진 방향 그래프가 부분 순서 관계임을 보이고, 그 그래프를 하세 도표로 나타내어보자.



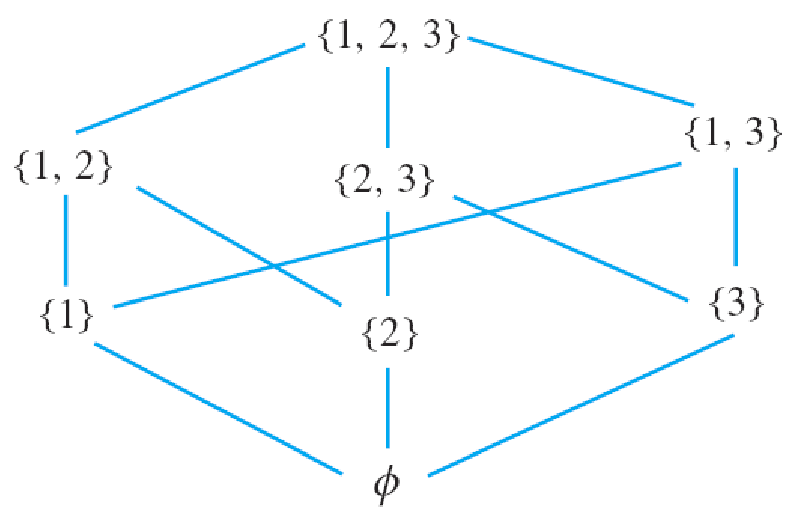
풀이 그래프에서 원소가 1, 2, 3, 4일 때, 원소들 사이의 관계가 반사 관계, 반대칭 관계, 추이 관계가 성립하므로 부분 순서 관계이다. 이것을 하세 도표로 만들 경우 먼저 반사 관계를 제거하고, 추이 관계가 있는 경우의 화살표를 제거한다. 정점 1에서 2로 가고 정점 2에서 4로 갈 때 정점 1에서 4로 가는 추이가 있으므로, 정점 1에서 4로 가는 화살표를 제거하면 다음과 같은 하세 도표가 된다.



예제 5-35

집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분 집합들에 대한 포함 관계를 하세 도표로 작성해보자.

풀이 집합 A의 부분 집합들은 ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$이고, 그들의 포함 관계를 하세 도표로 나타내면 다음과 같다.



요약

- 두 집합 A, B에 대하여, A로부터 B로의 이항 관계 R은 두 집합의 곱집합 $A \times B$의 부분 집합이다.
- 집합 A에서 B로의 관계 R에 대한 역관계 R^{-1}는 집합 B에서 A로의 관계를 나타내며, $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$이다.
- 관계를 표현하는 주요 방법들로는 화살표 도표, 좌표 도표, 방향 그래프, 관계 행렬 등이 있다.
- 세 집합 A, B, C에서의 합성 관계 $R_1 \cdot R_2$ 또는 R_1R_2는 다음과 같이 정의된다.

  $R_1 \cdot R_2 = \{(a, c) | a \in A,\ c \in C,\ (a, b) \in R_1\}$이고 $(b, c) \in R_2\}$
- 집합 A에 대한 항등 관계 I_A는 $I_A = \{(a, a) | a \in A\}$와 같이 정의된다.

요약

- 집합 A에 있는 모든 원소 x에 대하여 xRx이면, 즉 $(x, x) \in R$이면 관계 R을 반사 관계라고 한다.

- 집합 A에 있는 원소 x, y에 대해 $(x, y) \in R$일 때 $(y, x) \in R$이면 관계 R을 대칭 관계라고 하고, 집합 A에 있는 모든 원소 x, y에 대하여 $(x, y) \in R$이고 $(y, x) \in R$일 때 $x = y$인 관계를 만족하면 관계 R을 반대칭 관계라고 한다.

- 집합 A에 있는 원소 x, y, z에 대하여 관계 R이 $(x, y) \in R$이고 $(y, z) \in R$이면 $(x, z) \in R$인 관계를 만족할 때 관계 R을 추이 관계라고 한다.

- 관계 R에서 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립할 때, 이를 동치 관계라고 한다. 동치 관계 R은 동치류들로 분할할 수 있다.

- 집합 A에 대한 동치 관계를 R이라고 할 때, A의 각 원소 x에 대하여 $[x]$를 R에 대한 x의 동치류라 하고 $[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$로 정의한다.

요약

- 집합 A의 동치류의 모임을 A의 몫집합이라 하고 $\frac{A}{R}$로 나타낸다.
- 집합 A에 대한 관계 R이 반사, 반대칭, 추이 관계를 만족하면 관계 R을 부분 순서 관계라고 한다.
- 부분 순서 집합 $(A, \preceq)$에서 집합 A의 모든 두 원소가 비교 가능하면 A를 선형 순서 집합이라 하며, 이 경우 관계 $\preceq$를 선형 순서 관계라고 한다.
- 부분 순서 집합 $(A, \preceq)$를 그래프로 나타낼 경우에는 하세 도표를 이용한다.
- 순서 관계는 수학에 있어서 가장 기본적인 바탕이 되며, 특히 함수와는 직접적인 연관성을 가진다.

응용

- 순서 관계의 응용 분야
  - 그래프와 트리
  - 수학적 순서 관계
  - 디지털 논리 회로 등의 분야들에 있어서 매우 중요한 개념으로 활용