Chapter 6. 함 수

개요

- 함수의 정의와 정의역, 공변역, 치역의 개념을 살펴보고 함수와 그래프와의 관계를 살펴봄
- 중요한 의미를 가지고 있는 3가지 주요 함수인 전사 함수, 단사 함수, 전단사 함수의 개념을 다룸
- 그 이외에도 합성 함수, 역함수, 항등 함수 및 특성 함수, 올림 함수 등 개념을 정의함
- 컴퓨터 언어에서의 함수의 역할에 대해 서브프로그램을 이용하여 학습함

CONTENTS

함수(Function)

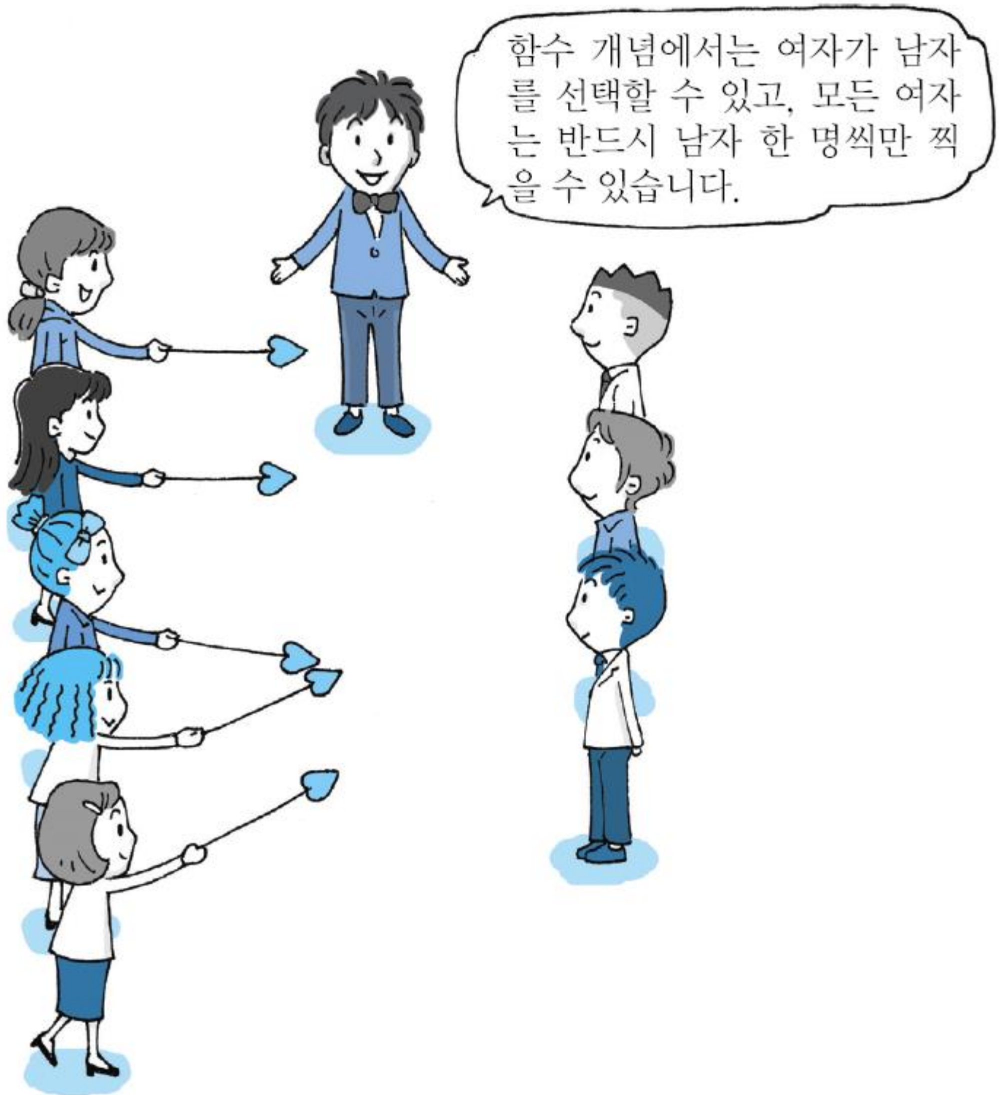
- 함수(function)는 관계(relation)의 특수한 형태로서, 첫 번째 원소가 같지 않은 순서쌍들의 집합임
- 함수란 한 집합의 원소들과 다른 집합의 원소들 간의 관계를 나타내는 순서쌍 중에서, 앞에 있는 집합의 모든 원소가 한 번씩만 순서쌍에 포함될 경우를 말함
- 함수는 여러 가지 수학적 도구(tool) 중에서 가장 중요한 개념의 하나인데, 수학과 컴퓨터공학 그리고 다양한 공학 분야들에서 폭넓게 활용됨
- 함수 개념의 이해와 컴퓨터 언어에서의 응용 능력을 배양함으로써 주어진 문제를 해결하는 데 많은 도움이 됨

함수의 실제 예

[예 1] 교수가 교과목에 대한 학점을 매길 때 시험 본 점수에 따라 어떤 법칙을 이용하여 학점을 준다고 하면, 그 법칙은 **점수와 학점 간의 대응 관계**를 정의하는 함수가 됨

[예 2] 이산수학을 수강하는 학생들의 학점이 시험 본 점수와 리포트 점수 및 출석 점수 등에 의해 계산된다고 할 때, **각 학생들의 학점을 어떤 함수적인 법칙에 따라 계산하면**, 이산수학을 수강하는 학생을 하나의 집합이라 하고 학점을 또 다른 집합이라 생각하면, 모든 학생들은 각 개인별로 하나의 학점을 가지게 되므로 이것은 함수가 됨

6.1 함수의 정의



정의 6-1 두 집합 X와 Y에서 함수(function) f는 집합 X에서 Y로의 관계의 부분 집합으로서, 집합 X에 있는 모든 원소 x가 집합 Y에 있는 원소 중 오직 하나씩만 대응되는 관계를 말한다. 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f는 다음과 같이 표기한다.

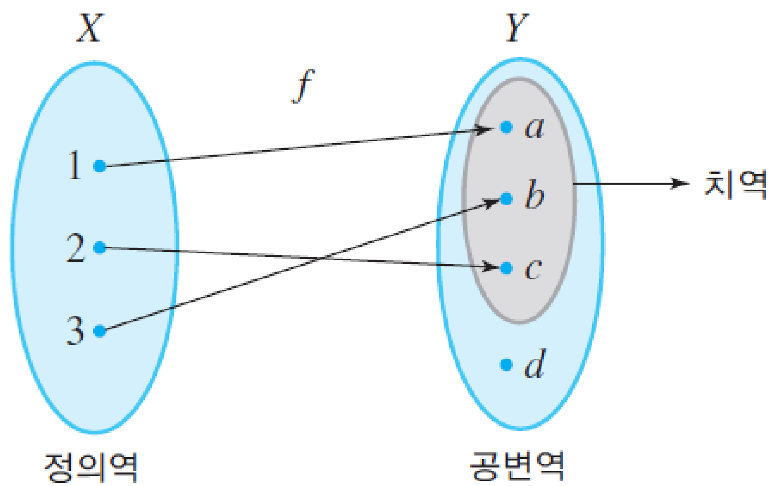
$$f : X \rightarrow Y$$

이때, X를 함수 f의 정의역(domain)이라 하며, Y를 함수 f의 공변역(codomain)이라 한다.

- 함수 f를 사상(mapping)이라고 하면 'f는 X에서 Y로 사상한다'라고 표현함
- f : X → Y를 함수라 할 때 f(x) = y라 표시하면, y를 함수 f에 의한 x의 상(image) 또는 함수값이라고 함
- 함수 f의 정의역은 Dom(f)라 표시함
- 함수 f의 치역(range)은 Ran(f)라고 표시함

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \mid (x, y) \in f,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

$$\mathrm{Ran}(f) = \{y \mid (x, y) \in f,\ x \in X,\ y \in Y\}$$



〈그림 6.1〉 함수의 정의역, 공변역, 치역

함수의 정의역, 공변역, 치역의 정의 (그림 참조)

두 함수 f와 g가 같은 정의역과 공변역을 가지는 경우, 즉 정의역에 있는 모든 원소 x에 대하여 f(x)=g(x)가 성립하면, 함수 f와 g는 서로 같다(equal)라고 하고 f =g로 표기함

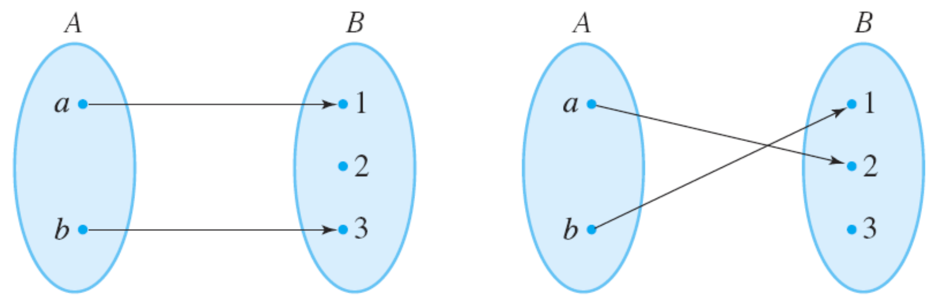
6.1 함수의 정의

여기서 잠깐!!

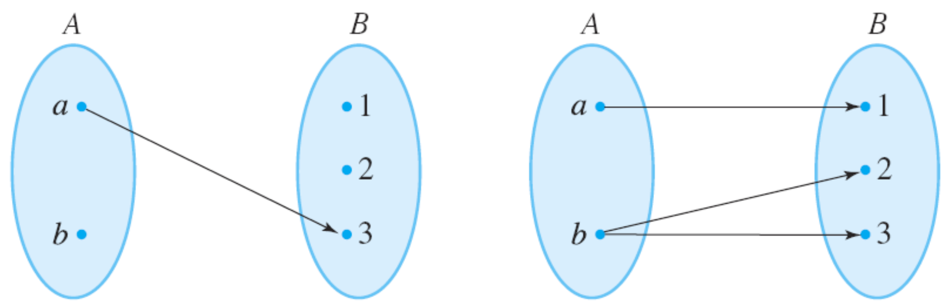
함수는 수학에서 매우 중요한 역할을 담당하는데, 함수라는 용어를 처음으로 사용한 수학자는 라이프니츠(Leibniz)이고, 현대적 개념의 함수의 기초를 구축한 사람은 코시(Cauchy)와 푸리에(Fourier)이다. 함수는 실생활에도 많이 활용되는데, 예를 들면 거리에 따라 고속도로 요금이 결정되는 것 등을 들 수 있다.

예제 ⑥-1 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$이라고 할 때, A에서 B로의 함수가 되는 경우와 함수가 될 수 없는 경우를 살펴보자.

풀이 (1) 함수가 되는 경우

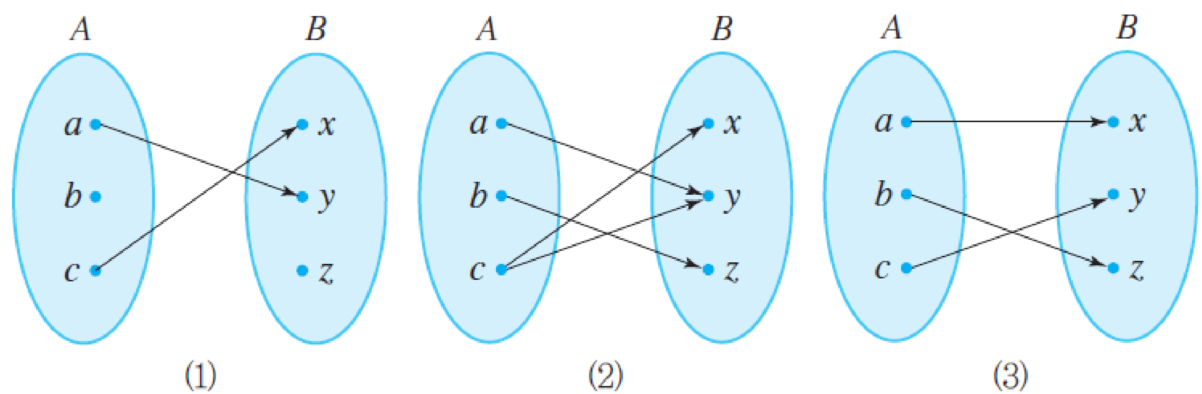


(2) 함수가 될 수 없는 경우



(b에 대응되는 원소가 없다.) (b에서 동시에 2개의 원소에 대응된다.)

예제 6-2 다음과 같이 주어진 각 화살표 도표가 $A=\{a, b, c\}$에서 $B=\{x, y, z\}$로의 함수가 되는지를 판별해보자.



풀이 (1) $b \in A$에 대응되는 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(2) $c \in A$가 x와 y에 두 군데로 대응되었으므로 함수가 아니다.

(3) 정의에 따라 함수이다.

말로 설명하면

- 함수는

  1) 던질 수 있는 상황(정의역)에 대해서는
  - 일을 할 수 있어야 한다.

  2) 특정한 상황에 결과가…
  - 일정해야 한다.

예제 6-3

A를 인터넷 온라인상의 사진 동호회 회원들의 집합이라고 할 때, 다음의 대응이 A에 관한 함수가 되는지를 알아보자.

(1) 각 회원에 그 사람의 나이를 대응시킨다.
(2) 각 회원에 그 사람의 성별을 대응시킨다.
(3) 각 회원에 그 사람의 배우자를 대응시킨다.

풀이 (1) 각 회원이 오직 하나의 나이를 가지고 있으므로 함수이다.
(2) 함수이다.
(3) 결혼하지 않은 회원이 한 명이라도 있는 경우에는 함수가 될 수 없다.

여기서 잠깐!!

관계와 함수의 차이점

함수의 개념은 관계와 매우 밀접한 관련이 있으며 기본적으로는 비슷한 개념이다. 그러나 관계에서의 화살표 도표가 함수가 되기 위해서는 집합 X에 있는 모든 원소 x가 집합 Y에 있는 원소 중 한 개와 관계가 있어야 한다. 따라서 함수는 관계의 특별한 경우로 볼 수 있다.

예제 6-4

다음의 관계가 함수인지의 여부를 밝히고, 만약 함수인 경우 정의역, 공변역, 치역을 각각 구해보자.

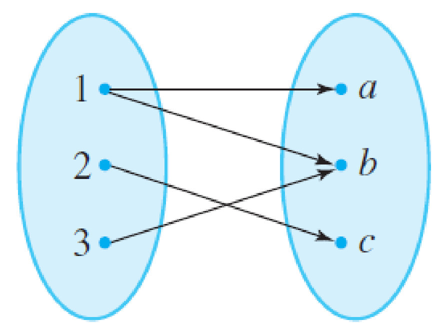
(1) $\{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b)\}$

(2) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

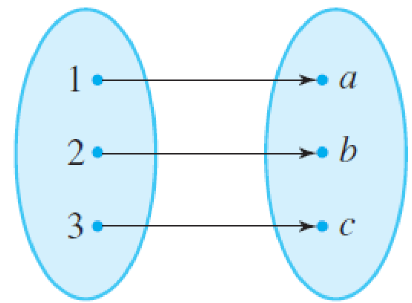
(3) $\{(x, y) \mid x, y \in Z, y - x = 1\}$

(4) $\{(x, y) \mid x, y \in N, y - x = 1\}$

풀이 (1) 하나의 정의역 값에는 반드시 하나의 값만 대응되어야 함수이다. 그러나 $(1, a)$와 $(1, b)$가 동시에 있으므로 함수가 아니다.



(2) 함수이다. 정의역, 공변역, 치역 모두 $\{a, b, c\}$이다.



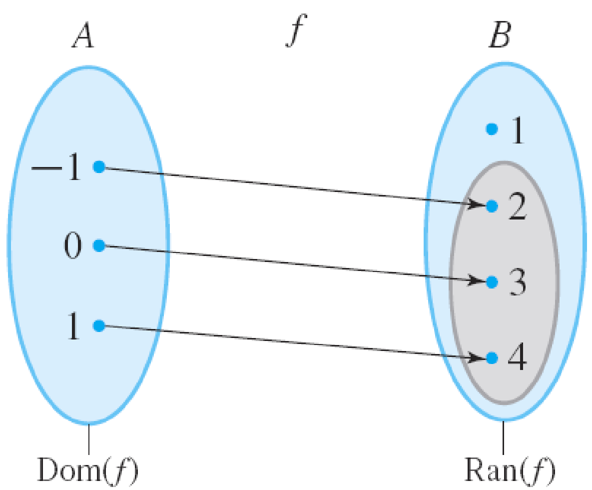
(3) $y-x=1$이므로 $y=x+1$이다. 우리는 이 식으로부터 함수가 됨을 쉽게 알 수 있다. 정의역과 공변역은 Z이고, y의 각 값에 대하여 $y=x+1$을 만족시키는 실수 x가 존재하므로 치역 역시 Z이다.

(4) 이 관계 역시 함수이다. 정의역과 공변역은 자연수의 집합 N이고, x가 자연수일 때 $y=x+1$이므로 y의 범위는 $y \geq 2$인 자연수이다.
따라서 치역은 $\{2, 3, 4, \cdots\}$이다.

예제 6-5

$A=\{-1,0,1\}$, $B=\{1,2,3,4\}$에 대한 관계가 $\{(x,y)\mid x\in A, y\in B, y=x+3\}$일 때 이 관계가 함수인지를 판별하고, A의 원소들에 대한 함수값을 구해보자.

풀이 관계를 그림으로 표시하면 다음과 같다.

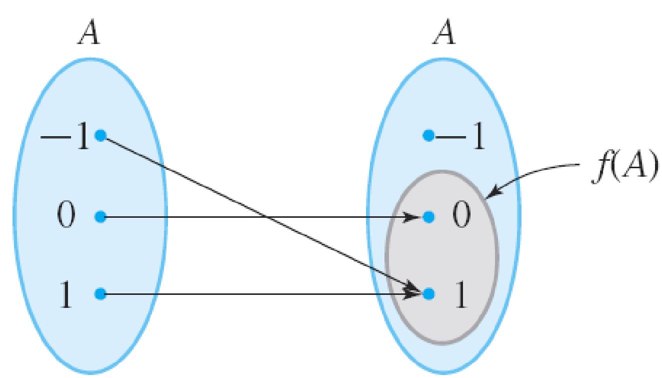


따라서 이 관계는 함수이다. A의 원소들의 함수값은 $f(-1)=2$, $f(0)=3$, $f(1)=4$이다.

예제 6-6

$A=\{-1, 0, 1\}$에서 $f: A \to A$가 $f(x)=x^2$으로 주어졌을 때 함수가 되는지를 판별하고, 정의역과 치역 그리고 공변역을 구해보자.

풀이 먼저 함수의 값을 구하면 $f(-1)=f(1)=1$, $f(0)=0$이므로 $f(A)=\{0, 1\}$이 된다. 따라서 f는 함수이다. 여기서 정의역은 $\{-1, 0, 1\}$이고, 치역은 $\{0, 1\}$이며, 공변역은 $\{-1, 0, 1\}$이다.



두 집합 A, B에 대한 모든 함수 f : A → B는 집합 A에서 집합 B로의 관계로 정의함

정의 6-2 함수 $f : A \to B$에 대한 **함수 그래프(function graph)** G는 $x \in A$이고 $y = f(x)$인 순서쌍 (x, y)의 집합을 나타낸다. 즉, G는 다음과 같이 표현된다.

$$G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

함수 f에 대한 그래프 G의 원소들을 좌표 평면상에 점으로 표시하는 것을 함수 f의 그래프에서 순서쌍들은 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 오직 하나씩만의 관계를 가짐

예제 6-7

함수 $f:R\rightarrow R$일 때 다음과 같은 함수 그래프를 순서쌍의 집합으로 표시하고, 좌표 평면상에 나타내어보자.

(1) $y=x+2$ (2) $y=x^2$

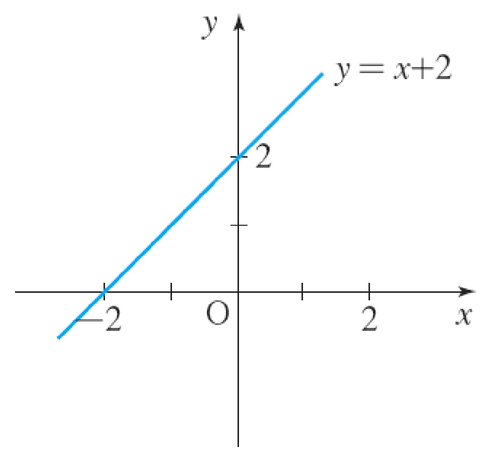
(3) $y=|x|$ (4) $y=2^x$

풀이 (1) $y=x+2$를 순서쌍의 집합으로 표시하면

$G=\{(x,y)\,|\,y=x+2,\ x\in R\}$

이 되고, 이를 좌표 평면상에 나타내면 아래와 같다.

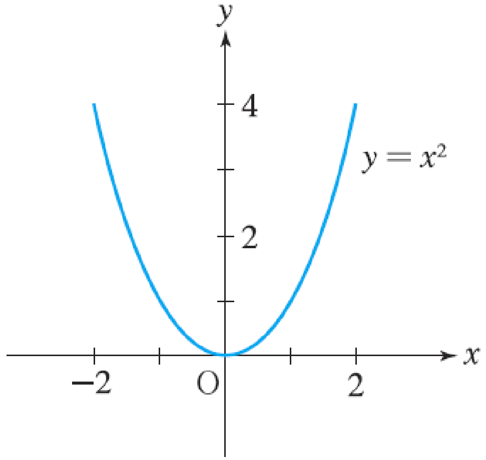
x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



(2) $y=x^2$을 순서쌍의 집합으로 표시하면

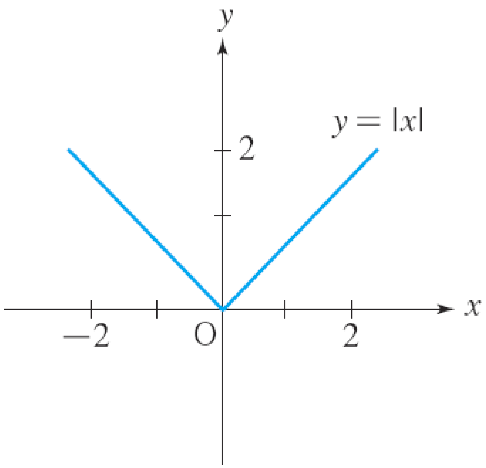
$G=\{(x,y)\mid y=x^2,\ x\in R\}$ 또는 $G=\{(x,x^2)\mid x\in R\}$가 된다.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



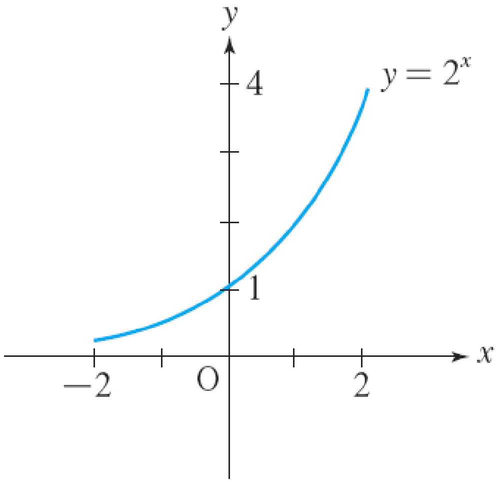
(3) $G=\{(x,y)\mid y=|x|,\ x\in R\}$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

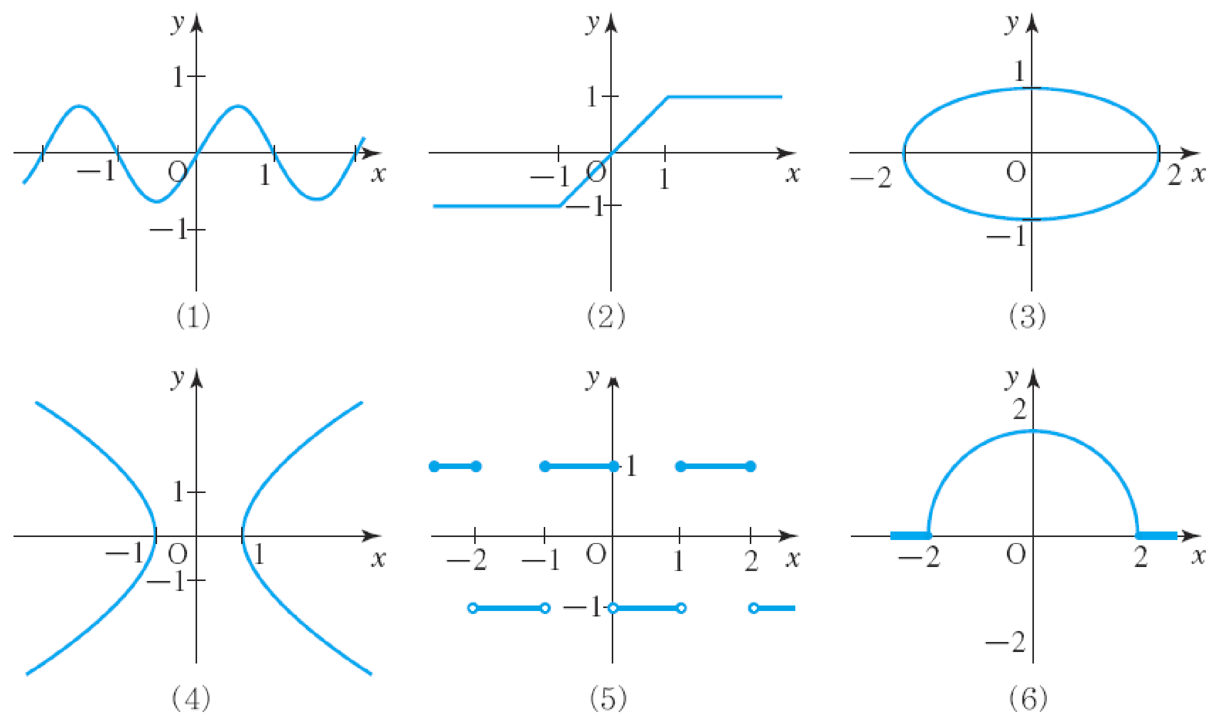


(4) $G = \{(x, y) \mid y = 2^x,\ x \in R\}$

x	y
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



예제 6-8 다음의 그래프들이 실수 R에서 R로의 함수가 되는가를 판별해보자.



풀이 (1), (2), (5), (6)은 x의 모든 실수값에 y의 실수값이 하나씩만 대응되므로 모두 함수가 된다. 그러나 (3)과 (4)는 함수가 아니다. (3)의 경우에 $x=0$일 때 y의 값이 2개 대응하고, (4)의 경우에 $x=0$일 때 대응되는 y의 값이 없기 때문이다.

6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수

정의 ⑥-3 함수 $f : A \to B$에서 $a_i, a_j \in A$에 대하여 $f(a_i) = f(a_j)$이면 $a_i = a_j$일 경우, 함수 f를 단사 함수(injective function)라고 한다. 즉,

$$\forall a_i, a_j \in A, \quad f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow a_i = a_j$$

- 정의역 A의 모든 원소들이 공변역 B의 서로 다른 원소와 대응되기 때문에 **단사 함수**를 **일대일 함수(one−to−one function)**라고 함
- a_i , $a_j \in A$에 대하여 $a_i \neq a_j$ 이면 $f(a_i) \neq f(a_j)$이 성립함
- 단사 함수에서 함수의 치역은 공변역의 부분 집합이 됨
- $f : A \to B$에서 $\mathrm{Ran}(f) \subseteq B$

6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수

정의 6-4 함수 $f : A \to B$에서 B의 모든 원소 b에 대하여 $f(a) = b$가 성립되는 $a \in A$가 적어도 하나 존재할 때 함수 f를 **전사 함수(surjective function)**라고 한다. 즉,

$$\forall b \in B, \quad \exists a \in A, \quad f(a) = b$$

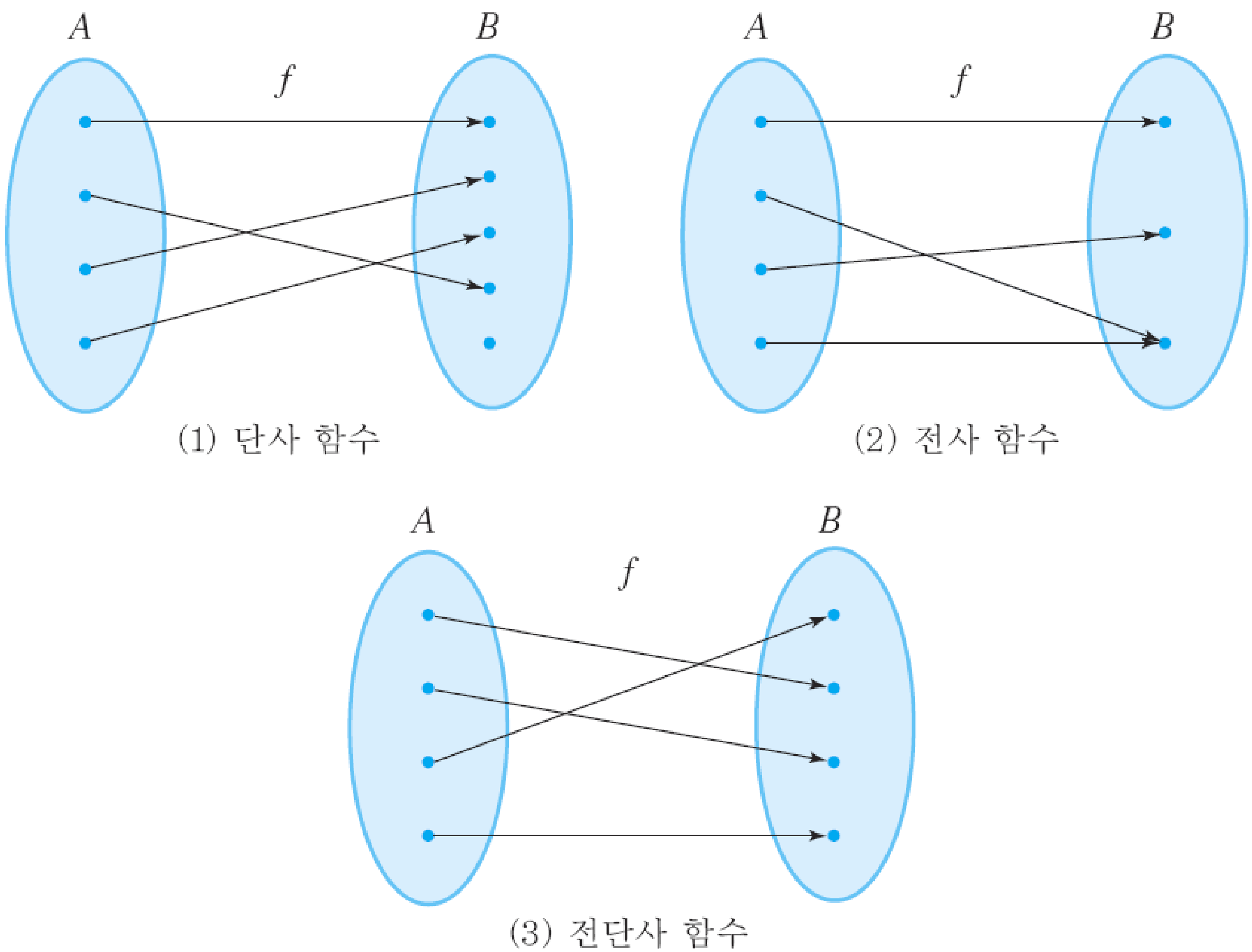
- **전사 함수**의 정의에서 알 수 있는 것은 공변역 B의 모든 원소가 정의역에 대응 되어야 하므로 그 자체가 바로 치역이 된다는 것임
- Ran(f) = B이다. 전사 함수는 모든 함수의 관계가 B의 모든 원소에 반영되므로 **반영 함수(onto function)**라고도 함

6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수

정의 6−5 함수 $f : A \to B$에서 f가 단사 함수인 동시에 전사 함수일 때, 함수 f를 **전단사 함수(bijective function)**라고 한다.

- **전단사 함수**는 집합 A의 모든 원소들이 집합 B의 모든 원소와 하나씩 대응되기 때문에 **일대일 대응 함수(one−to−one correspondence function)**라고 함
- 단사, 전사, 전단사 함수를 쉽게 알기 위해서는 각 원소들의 관계를 화살표로 표시하는 **화살표 도표(arrow diagram)**를 활용함

6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수



〈그림 6.2〉 단사, 전사, 전단사 함수

함수 f : A → B에서 함수 f의 특성

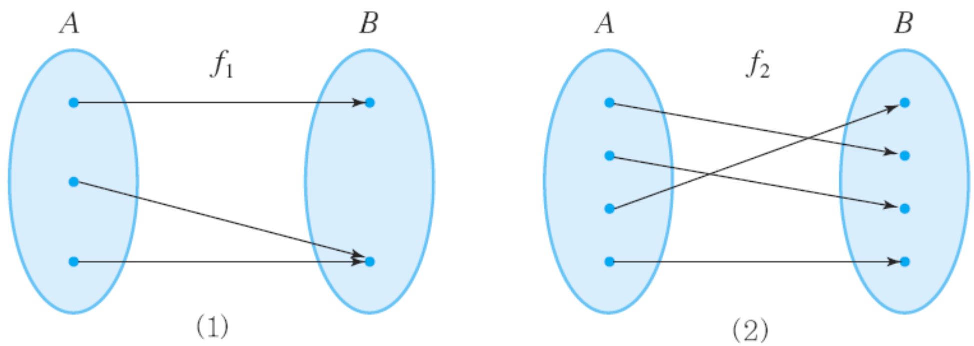
1) f가 **단사 함수**일 경우에는 B의 모든 원소가 A의 원소와 반드시 대응하는 것은 아니므로 A의 원소와 B의 원소의 개수를 비교하면 $|A| \le |B|$이 성립된다. 즉, B의 원소의 개수는 A의 원소의 개수보다 크거나 같아야 함
2) f가 **전사 함수**일 경우에는 그와 반대로 B의 모든 원소가 A의 원소와 대응되어야 하므로 A의 원소와 B의 원소의 개수를 비교하면 $|A| \ge |B|$이 성립된다. 즉, A의 원소의 개수는 B의 원소의 개수보다 크거나 같아야 함
3) f가 **전단사 함수**인 경우에는 A의 모든 원소가 B의 모든 원소와 하나씩 일대일 대응 되므로 $|A| = |B|$이다. 즉, A의 원소의 개수는B의 원소의 개수와 같음

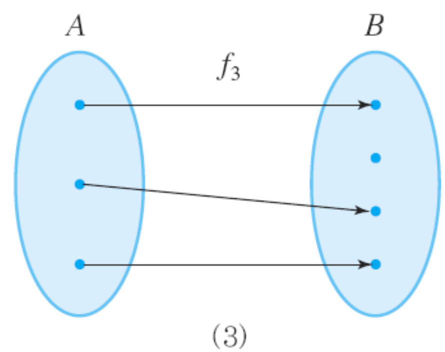
여기서 잠깐!!

앞에서 단사 함수를 일대일 함수(one-to-one function)라고 하였고, 전단사 함수를 일대일 대응 함수(one-to-one correspondence function)라고도 하였는데, 서로 다른 점에 유의해야 한다.

예제 6-9

함수 f_1, f_2, f_3가 다음과 같이 주어졌을 때, 이 함수가 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수인지를 판별해보자.





풀이 (1) f_1은 단사 함수는 아니고, 전사 함수이다.

(2) f_2는 단사 함수이며 전사 함수이므로, 전단사 함수이다.

(3) f_3은 단사 함수이고, 전사 함수는 아니다.

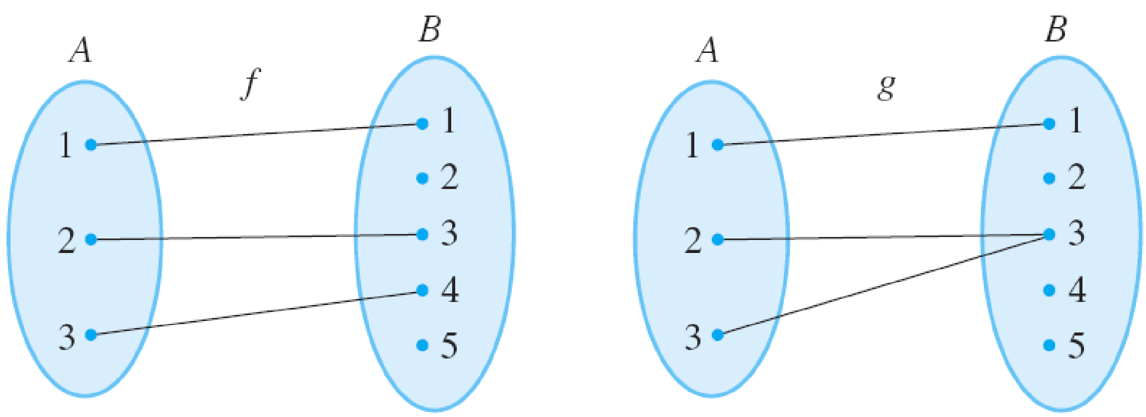
예제 6-10 대한민국 국적을 가진 사람과 자신의 주민등록번호와의 관계를 살펴보자.

풀이 X가 주민등록번호가 있는 대한민국 사람들의 집합이고, $x \in X$인 사람들을 자신의 주민등록번호 $f(x)$에 대응시킬 경우, 각 사람들이 고유의 주민등록번호를 가지고 있기 때문에 단사 함수가 된다. 또한 주민등록번호는 각 개인에게 하나씩만 대응되므로 그들의 관계는 전단사 함수라고 볼 수 있다.

예제 ⑥-11

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$, $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$라고 하면 A에서 B로의 함수 f와 g는 각각 단사 함수가 되는지 살펴보자.

풀이 f는 단사 함수이고 g는 단사 함수가 아니다.

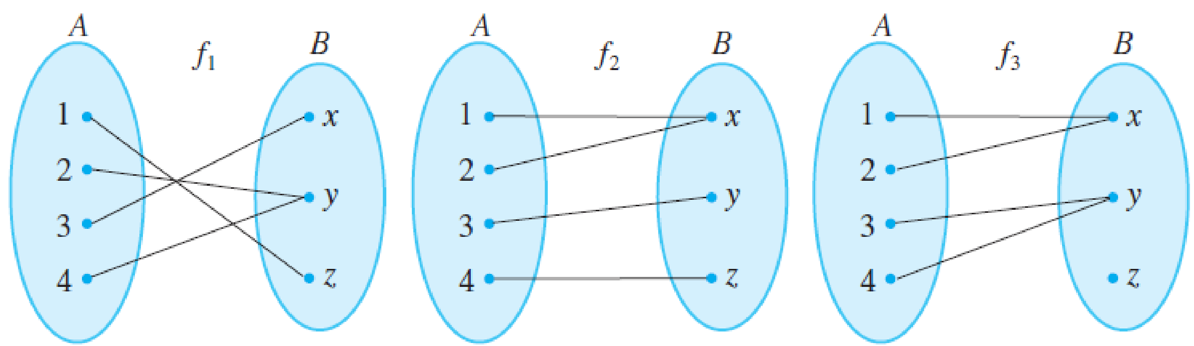


예제 6-12

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x, y, z\}$이고 f_1, f_2, f_3가 다음과 같을 때, 각 함수들이 전사 함수가 되는지 판별해보자.

$$f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$$
$$f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$$
$$f_3 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$$

풀이 f_1, f_2는 전사 함수이다. 그러나 f_3의 경우에는 z에 대응하는 것이 없으므로 전사 함수가 아니다.



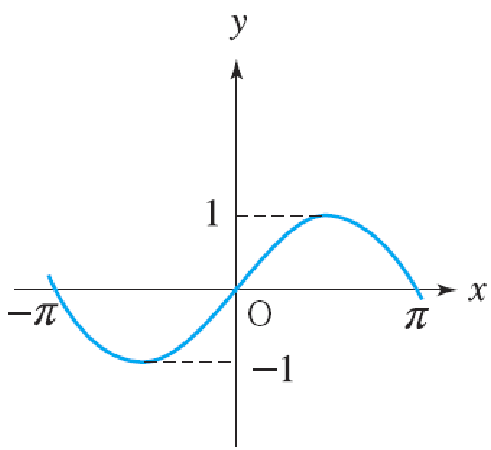
6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수

예제 ⑥-13 다음 함수식들이 실수 R에서 R로의 함수일 때, 이 함수가 단사, 전사, 전단사 함수인지를 판별해보자.

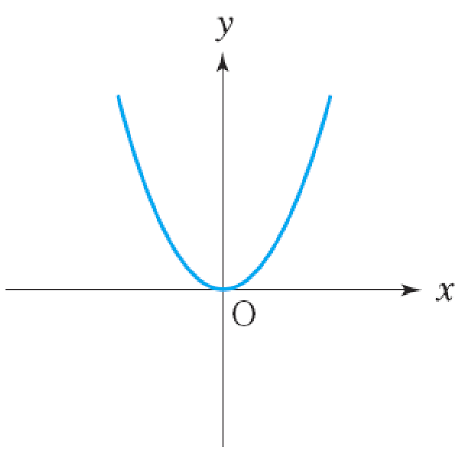
(1) $f_1(x) = \sin x$ (2) $f_2(x) = x^2$

(3) $f_3(x) = 2^x$ (4) $f_4(x) = x^3 + 2x^2$

풀이 각각의 함수식을 그래프로 그리면 다음과 같다.

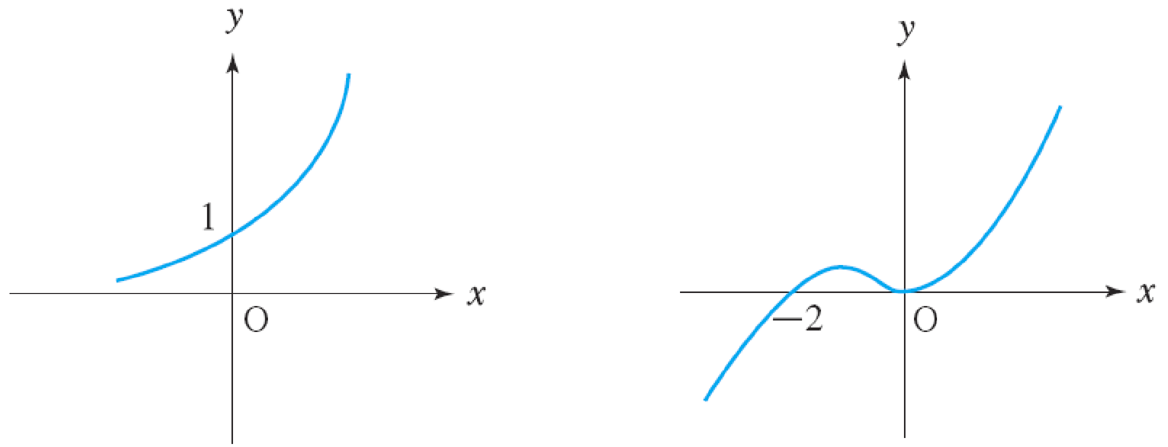


(1) $f_1(x) = \sin x$



(2) $f_2(x) = x^2$

6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수



(3) $f_3(x) = 2^x$ (4) $f_4(x) = x^3 + 2x^2$

(1) $f_1(x) = \sin x$는 $f_1(0) = f_1(\pi) = 0$일 때 $0 \neq \pi$이므로 단사 함수가 아니고, $f_1(R) \neq R$이므로 전사 함수도 아니다.

(2) $f_2(x) = x^2$ 역시 $f_2(-1) = f_2(1) = 1$일 때 $-1 \neq 1$이므로 단사 함수가 아니고, $f_2(R) \neq R$이므로 전사 함수도 아니다.

(3) $f_3(x) = 2^x$는 단사 함수이나 $f_3(R) \neq R$이므로 전사 함수는 아니다.

(4) $f_4(x) = x^3 + 2x^2$는 $f_4(-2) = f_4(0) = 0$일 때 $-2 \neq 0$이므로 단사 함수가 아니고, $f_4(R) = R$이므로 전사 함수이다.

예제 ⑥-14

다음의 각 경우에 함수 f가 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수인지를 판별해 보자.

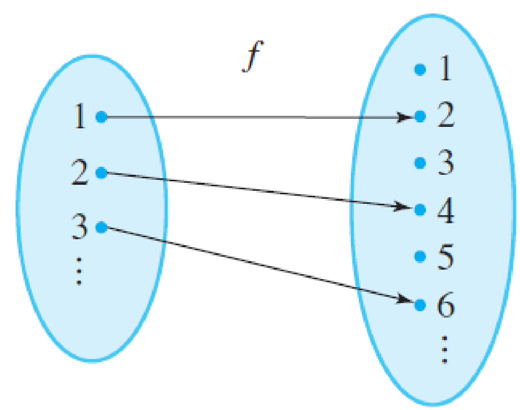
(1) $f: N \to N$이고, $f(x) = 2x$

(2) $f: \{1, 2\} \to \{0\}$

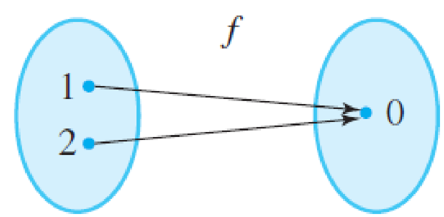
(3) $f: \{a, b\} \to \{2, 4, 6\}$이며, $f(a) = 2$, $f(b) = 6$

(4) $f: Z \to Z$ 이고, $f(x) = x+1$

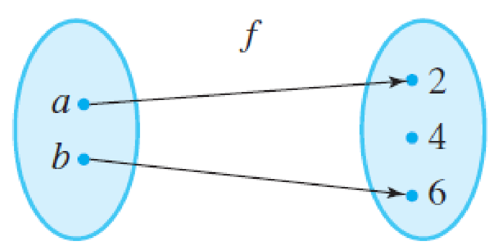
풀이 (1) 함수 f의 정의역은 자연수이고, 치역은 자연수 중 짝수의 집합이므로, 이 함수는 단사 함수이나 전사 함수는 아니다.



(2) 함수 f가 집합 $\{1, 2\}$에서 집합 $\{0\}$로의 함수이므로, $f(1) = f(2) = 0$이다. 따라서 f는 단사 함수는 아니나 전사 함수이다.

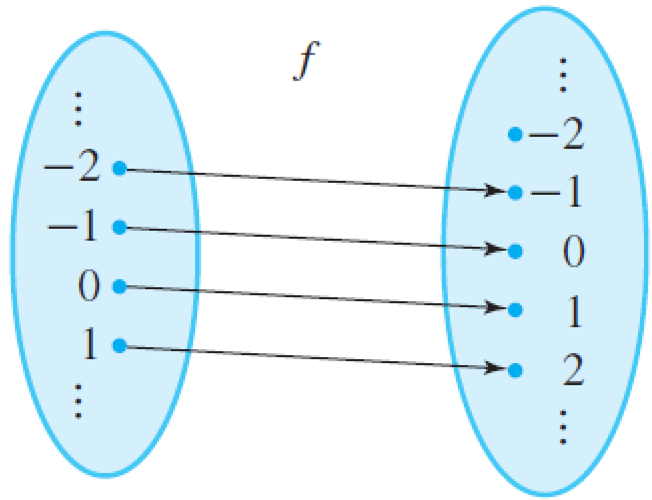


(3) 함수 f가 $f(a) = 2$이고 $f(b) = 6$이므로, 이 함수는 단사 함수이나 전사 함수는 아니다.



6.3 단사 함수, 전사 함수, 전단사 함수

(4) 이 함수는 단사 함수이고 전사 함수이므로 전단사 함수이다.



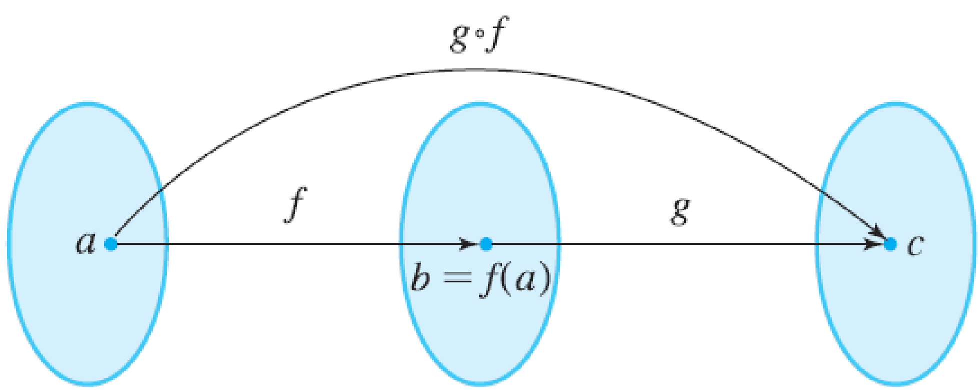
정의 6-6 두 함수 $f: A \to B$, $g: B \to C$에 대하여 두 함수 f와 g의 합성 함수(composition function)는 집합 A에서 집합 C로의 함수, $g \circ f: A \to C$를 의미하며 다음을 만족시킨다.

$$g \circ f = \{(a, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C,\ f(a) = b,\ g(b) = c\}$$

두 함수 f와 g의 **합성함수 $g \circ f$**는 A의 모든 원소 a에 대하여

$$\forall a \in A,\ (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

함수 f, g와 합성 함수 $g \circ f$에 대한 관계

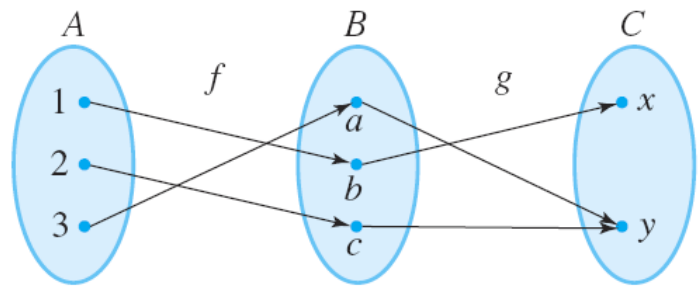


$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

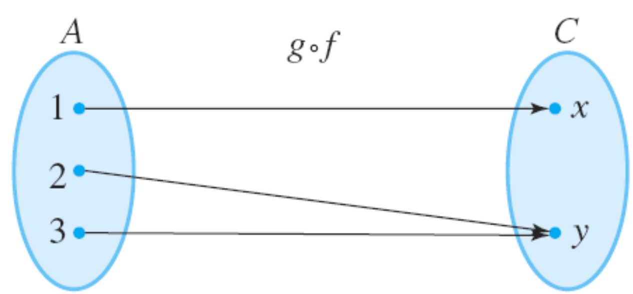
〈그림 6.3〉 합성 함수

예제 ⑥-15

$f: A \to B$와 $g: B \to C$가 다음 그림과 같을 때, 두 함수 f와 g의 합성 함수 $g \circ f$를 구해보자.



풀이 $g \circ f: A \to C$를 그림으로 나타내면 아래와 같다.



여기서 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(b) = x$

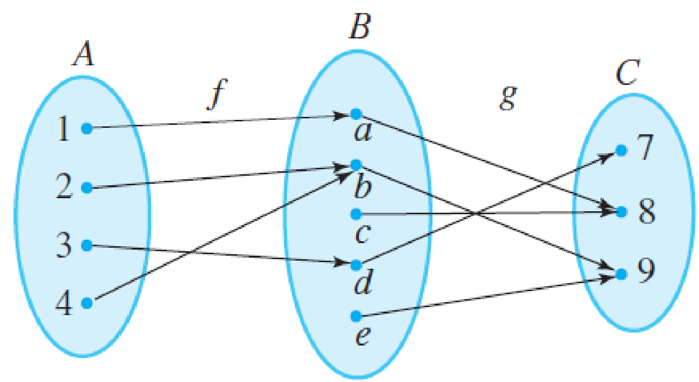
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = y$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$

이다.

예제 6-16

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{7, 8, 9\}$이고, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ 일 때 합성 함수 $h : A \rightarrow C$를 구해보자.



풀이 이 과정을 단계별로 살펴보면 다음과 같다.

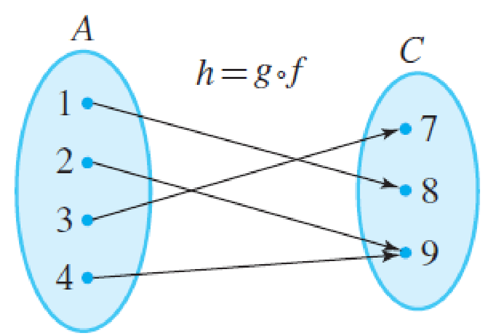
$$1 \overset{f}{\mapsto} a \overset{g}{\mapsto} 8 \Rightarrow 1 \overset{g \circ f}{\mapsto} 8$$

$$2 \mapsto b \mapsto 9 \Rightarrow 2 \mapsto 9$$

$$3 \overset{f}{\mapsto} d \overset{g}{\mapsto} 7 \Rightarrow 3 \overset{g \circ f}{\mapsto} 7$$

$$4 \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} 9 \Rightarrow 4 \overset{g \circ f}{\mapsto} 9$$

그러므로 합성 함수 h는 다음과 같이 표현된다.



예제 6-17 두 함수 f와 g가 각각 $f: R \to R$, $f(x) = x + 3$이고, $g: R \to R$, $g(x) = x^2 - 1$일 때, 합성 함수 $f \circ g$와 $g \circ f$를 구해보자.

풀이 $f \circ g: R \to R$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 3 = x^2 + 2$

$g \circ f: R \to R$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 8$

여기서 잠깐!!

합성 함수의 경우에는 그 함수의 연산 순위에 유의해야 한다.
$g \circ f(x)$의 경우에는 $f(x)$를 먼저 적용하고, 그 값을 다시 g에 적용시킨다.
즉, $f \circ g(x) = f(g(x))$임을 유념해야 한다.

정리 6-1

세 함수 f, g, h를 각각 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$라 할 때, 그들의 합성 함수는 다음과 같은 결합 법칙(associative law)이 성립한다.

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

정의 6−7 집합 A에 대한 함수 f가 $f : A \rightarrow A$, $f(a) = a$일 때 함수 f를 **항등 함수(identity function)**라 하고, I_A로 표기한다. 즉,

$\forall a \in A,\ I_A(a) = a$

이다.

여기서 잠깐!! 항등 함수는 x가 항상 자기 자신에게 대응하기 때문에 단사 함수이면서 전사 함수이므로 전단사 함수이다.

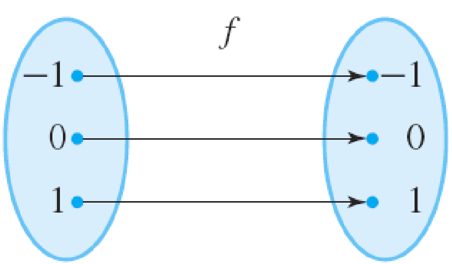
예제 6−18 집합 $A=\{-1, 0, 1\}$이고 함수 $f : A \rightarrow A$, $f(x) = x^3$일 때 함수 f는 항등 함수임을 보이자.

풀이 $f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1^3 = 1$

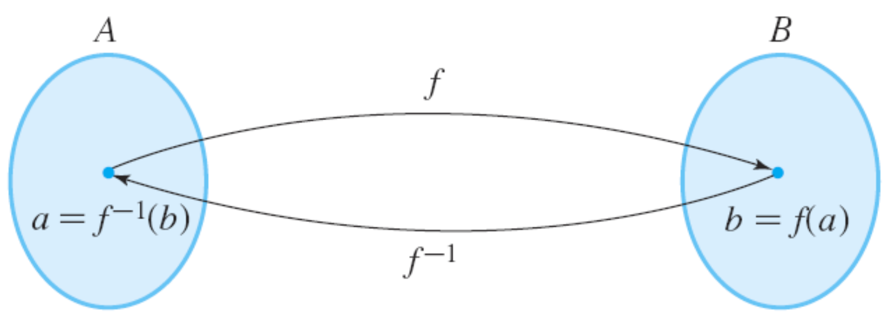
이므로 f는 항등 함수이다.



정의 6-8

함수 $f: A \rightarrow B$가 전단사 함수일 때 f의 **역함수(inverse function)**는 $f^{-1}: B \rightarrow A$로 표기하고 다음과 같이 정의한다.

$$\forall a \in A,\ \ \forall b \in B,\ \ f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$



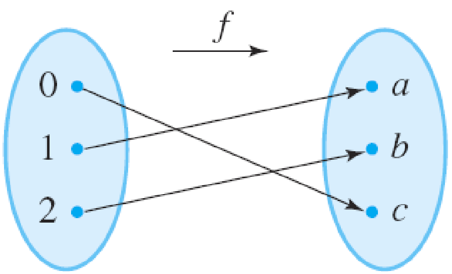
〈그림 6.4〉 함수 f의 역함수 f^{-1}

여기서 잠깐!!

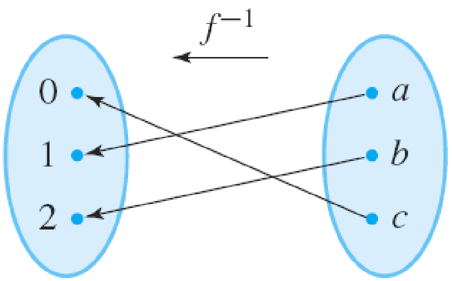
모든 함수 f에 대하여 그것의 역함수 f^{-1}이 항상 존재하는 것은 아니고, 함수 f가 전단사 함수일 경우에만 역함수 f^{-1}이 존재한다. 따라서 함수 f가 전단사 함수가 아닐 경우에는 함수 f의 역관계는 함수가 되지 않는다.

예제 6-19

$f:\{0,1,2\} \rightarrow \{a,b,c\}$가 다음과 같은 그래프로 정의될 경우 이에 대응되는 역함수를 구해보자.



풀이 함수 f의 역함수 f^{-1}은 다음과 같다.



예제 6-20 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$이고 A에서 B로의 함수 $f=\{(1, a), (2, c), (3, b)\}$일 때 $(f^{-1})^{-1}$, $f^{-1} \circ f$를 구해보자.

풀이 $f^{-1}=\{(a, 1), (c, 2), (b, 3)\}$이므로

$(f^{-1})^{-1}=\{(1, a), (2, c), (3, b)\}=f$

$f^{-1} \circ f=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}=I_A$

정의 6-9 함수 $f: A \to B$에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 오직 한 원소와 대응할 때 함수 f를 **상수 함수(constant function)**라고 한다. 즉,

$$\forall a \in A, \quad \exists b \in B, \quad f(a)=b$$

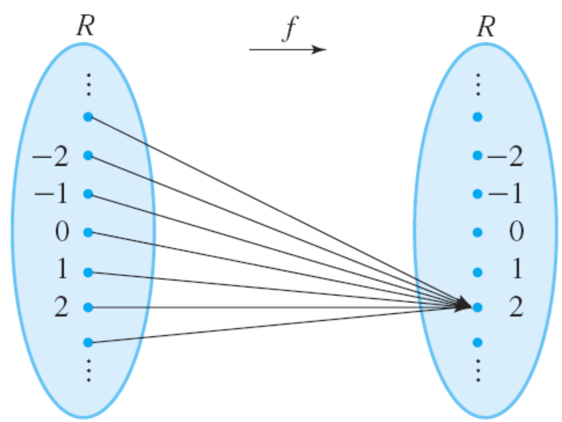
이다.

예제 6-21

상수 함수에 대한 간단한 예를 살펴보면, $f : R \rightarrow R$이고 $f(x) = 1$이라고 하면 모든 실수 x에 대한 함수값이 1이므로 f는 상수 함수이다.

$f : R \rightarrow R$이고 $f(x) = 2$로 정의될 때, f가 상수 함수임을 보이자.

풀이 정의역의 모든 x에 대한 $f(x)$의 값이 모두 2이므로 상수 함수이다.

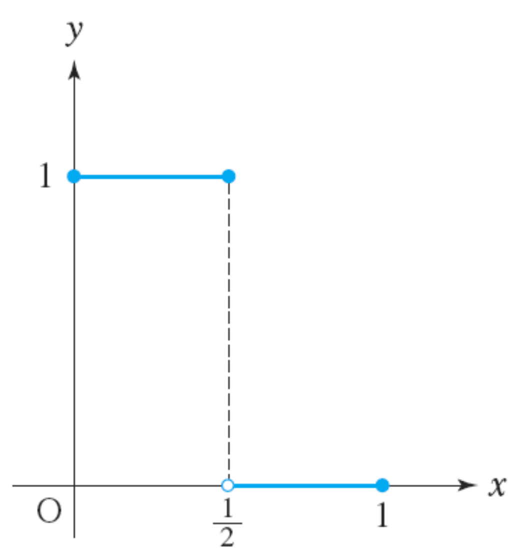


정의 6-10 전체 집합 U의 부분 집합 A의 **특성 함수(characteristic function)** $f_A : U \to \{0, 1\}$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

예제 6-22 집합$U = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 \le x \le 1\}$이고 $A = \{x \in R \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$일 때, 특성 함수 f_A를 그래프로 나타내어보자.

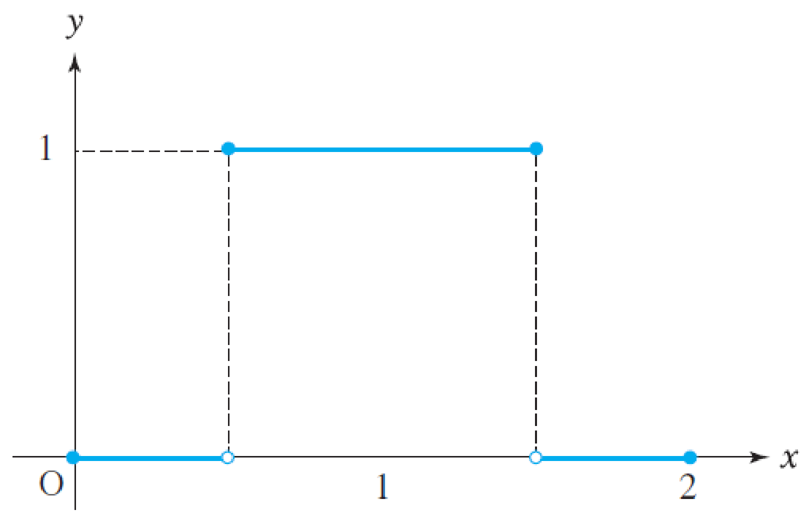
풀이



예제 ⑥-23

$U=\{x \in R \mid 0 \le x \le 2\}$이고 $A=\left\{x \in R \,\middle|\, \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right\}$일 때, 특성 함수 f_A를 그래프로 나타내어보자.

풀이



정의 6-11 $x \in R$에 대한 올림 함수(ceiling function)는 x보다 크거나 같은 정수값 중 가장 작은 값을 나타내며 $\lceil x \rceil$로 표기한다. $x \in R$에 대한 내림 함수(floor function)는 x보다 작거나 같은 정수 값 중 가장 큰 값을 나타내며, $\lfloor x \rfloor$로 표기한다.

예를 들어, $\lceil 3.5 \rceil = 4$이고 $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$이다. 또한 $\lceil 2 \rceil = \lfloor 2 \rfloor = 2$이며, $\lceil -0.5 \rceil = 0$이고 $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$이다.

6.5 컴퓨터 언어에서의 함수의 역할

- 컴퓨터 프로그램을 작성하는 데 있어서, 일반적으로 복잡한 문제를 여러 개의 독립적 기능을 가지는 **서브프로그램(subprogram)**으로 나누어서 해결함
- 서브프로그램들은 각기 논리적으로 독립된 계산을 할 때나, 동일한 수행을 여러 번 해야 할 때 많이 사용

  예를 들면, 입력되는 데이터에 대하여 같은 일을 계속 수행해야 하는 경우에는 데이터마다 수행해야 하는 부분을 서브프로그램으로 만들어서 필요한 경우 호출하여 사용

- 서브프로그램 중 함수에 속하는 서브프로그램은 정의역에 있는 매개 변수의 값을 받아서 계산을 한 뒤 하나의 값을 되돌려 줌
- **함수 호출(function call)**

  매개 변수(parameter)를 가지고 함수를 부르는 것임
- **리턴(return)**

  함수에서 계산된 값을 되돌려 주는 것임

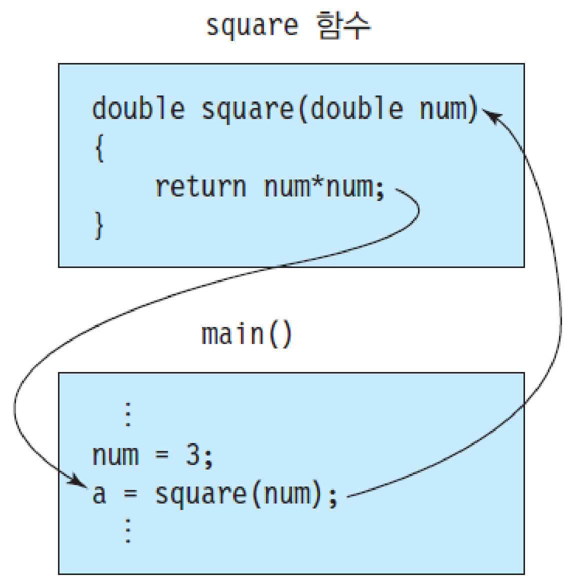
컴퓨터 언어에서의 두 가지 함수

1. 컴퓨터 언어 자체에서 미리 만들어 놓은 함수
   라이브러리(library)라는 곳에 저장되어 있으며, 자주 사용하는 작업을 위해 미리 만들어 놓은 함수들로서 수학적 계산을 하는 sin, cos, sqrt 등이 여기에 속함
2. 프로그래머(programmer)가 자기 상황에 편리하도록 직접 만든 함수로 각자의 경우에 따라 여러 가지의 함수가 만들어질 수 있음

실수의 제곱을 구하는 함수 square

```
double square(double num)
{
    return num*num;
}
```

6.5 컴퓨터 언어에서의 함수의 역할



〈그림 6.5〉 square 함수

- 함수는 매개 변수로 실수 num을 넘겨주고, 결과값으로 실수인 num의 제곱 값을 리턴 받음
- 함수의 정의역과 공변역은 모두 실수 R임
- 함수 이름 앞의 자료형(type)은 공변역을 나타내며, 매개 변수 앞의 자료형은 정의역을 나타냄

6.5 컴퓨터 언어에서의 함수의 역할

프로그래머가 작성한 함수

```
int is_positive(int num)
{
        if (num >= 0) return 1;
        else return 0;
}
```

함수를 이용하기 위하여 주 프로그램(main program)에서 다음과 같이 작성

```
   ⋮
sum = 0;
for (i = – 5; i < 6; i++)
        sum += is_positive(i);
   ⋮
```

6.5 컴퓨터 언어에서의 함수의 역할

- 주 프로그램에서 반복문을 통하여 함수 is_positive를 호출함
- is_positive 함수는 매개 변수가 양수이거나 0이면 1을 리턴하고, 음수이면 0을 리턴함
- 함수에서 정의역과 공변역은 모두 정수 Z임
- 치역은 리턴되는 값이 0 또는 1이므로 {0, 1}임
- 주 프로그램에서는 i 값이 −5부터 5까지 1씩 증가하면서 계속 함수 is_positive를 호출하기 때문에 모두 11번을 호출하게 됨

- 컴퓨터 언어에서의 함수들도 일반적인 함수의 기능과 같은 역할을 프로그램 내에서 수행함
- 컴퓨터 프로그램을 작성할 때 알맞은 함수를 사용하면 좀 더 명확하고 간단하게 문제를 해결할 수 있음

요약

- 두 집합 X와 Y에서 함수 f는 집합 X에서 Y로의 관계의 부분 집합으로서, 집합 X에 있는 모든 원소 x는 집합 Y에 있는 원소 중 한 개와 관계가 있을 때를 말한다.

- 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f는 $f: X \to Y$로 표기하고, X를 함수 f의 정의역이라 하며, Y를 함수 f의 공변역이라고 한다.

- 함수 f의 정의역을 Dom(f)라 표시하고, 함수 f의 치역은 Ran(f)라고 표시하며, 다음과 같이 정의한다.

  $\mathrm{Dom}(f) = \{x \mid (x, y) \in f, x \in X, y \in Y\}$

  $\mathrm{Ram}(f) = \{y \mid (x, y) \in f, x \in X, y \in Y\}$

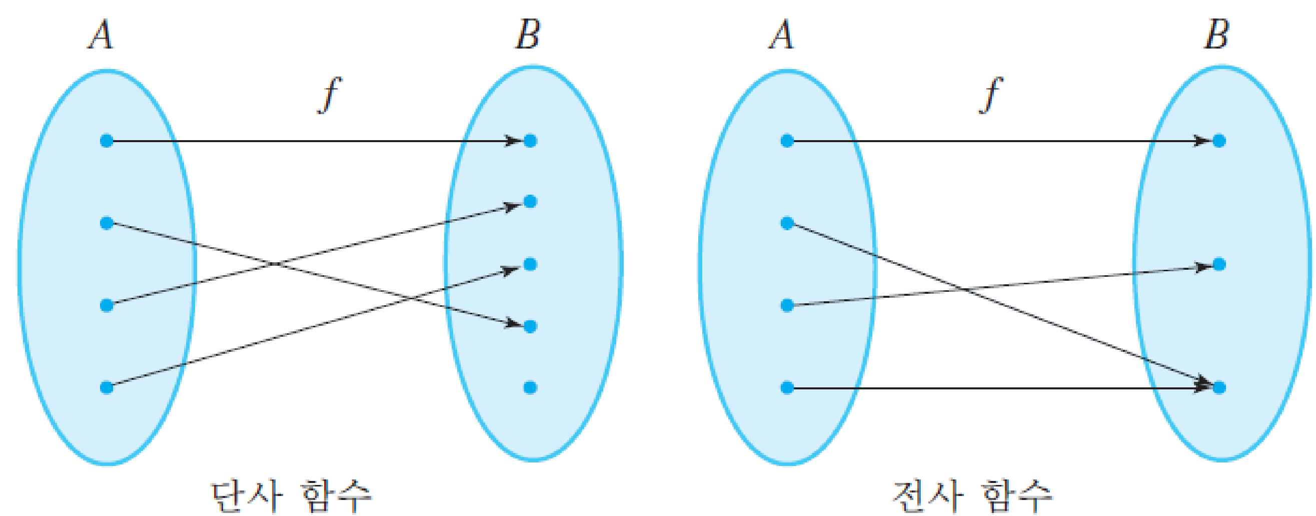
- 함수 $f: A \to B$에 대한 함수 그래프 G는 $x \in A$이고 $y = f(x)$인 순서쌍 (x, y)의 집합을 나타낸다. 즉, G는 다음과 같이 표현한다.

  $G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}$

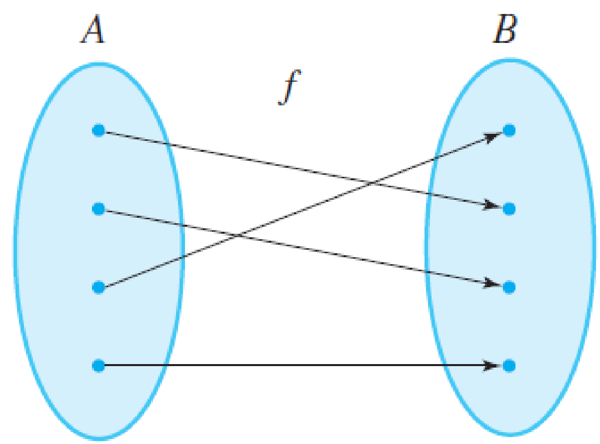
- 단사 함수는 함수 $f: A \to B$에서 $a_i, a_j \in A$에 대하여 $f(a_i) = f(a_j)$이면 $a_i = a_j$일 경우를 말한다. 즉, $\forall a_i, a_j \in A, f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow a_i = a_j$이다.

요약

- 전사 함수는 함수 $f: A \rightarrow B$에서 B의 모든 원소 b에 대하여 $f(a) = b$가 성립되는 $a \in A$가 적어도 하나 존재할 때를 말한다. 즉, $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$이다.
- 전단사 함수는 함수 $f: A \rightarrow B$에서 f가 단사 함수인 동시에 전사 함수일 때를 말한다.
- 주어진 함수가 단사, 전사, 전단사 함수인지를 알 수 있는 예는 다음과 같다.



요약



전단사 함수

- 두 함수 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$에 대하여 두 함수 f와 g의 합성 함수는 집합 A에서 집합 C로의 함수 $g \circ f: A \rightarrow C$를 의미하며 다음을 만족시킨다.
  $g \circ f = \{(a, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C,\ f(a) = b,\ g(b) = c\}$
- 집합 A에 대한 함수 f가 $f: A \rightarrow A$, $f(a) = a$일 때, 함수 f를 항등 함수라 하고 I_A로 표기한다. 즉, $\forall a \in A$, $I_A(a) = a$이다.

요약

- f의 역함수는 함수 $f:A \to B$가 전단사 함수일 때 $f^{-1}:B \to A$로 표기한다. 즉, $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$이다.

- 함수 $f:A \to B$에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 오직 한 원소와 대응할 때 함수 f를 상수 함수라고 한다. 즉, $\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ f(a)=b$이다.

- 전체 집합 U의 부분 집합 A의 특성 함수 $f_A:U \to \{0, 1\}$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_A(x)=\begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

응용

- 컴퓨터 언어에서 함수
  - 컴퓨터 언어 자체에서 미리 만들어 놓은 함수와 프로그래머가 자기 상황에 편리하게 직접 만든 함수
  - 컴퓨터 언어에서의 함수들도 일반적인 함수의 기능과 같은 역할을 프로그램 내에서 수행

- 함수의 응용
  - 수학과 공학 등에서 가장 기본적으로 쓰이고, 다양한 이론과 생활에 응용
  - 학점의 계산
  - 거리에 따라 고속도로 요금이 결정되는 것 등 응용 예가 무수히 많음