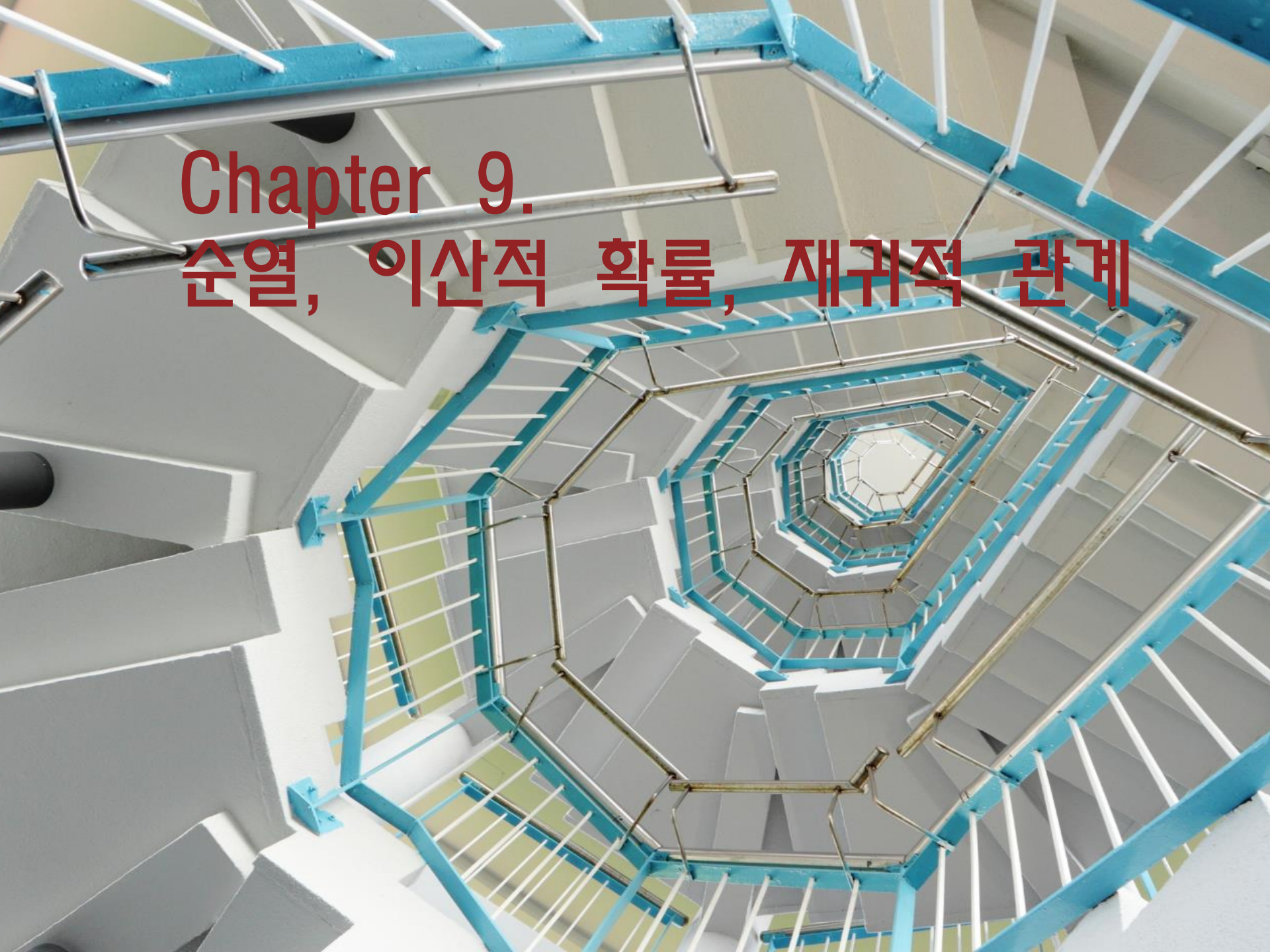


Chapter 9.

순열, 이산적 확률, 재귀적 관계



개요

- 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계와 연관된 전반적인 논제들을 고찰함
- 경우의 수, 순열 및 조합과 관련된 기본적인 정의와 특징들을 다양한 예제들을 통하여 알아봄
- 이산적 확률에 대한 기본 개념과 평균, 분산, 표준 편차와 같은 통계적인 사항들을 살펴봄
- 원리는 간단하지만 이산수학에서 중요하게 쓰이는 비둘기 집 원리와 재귀적 정의에 의한 재귀적 관계식을 알아봄
- 재귀적 관계의 대표적인 예인 피보나치 수와 하노이 탑 문제를 학습함



CONTENTS

9.1 경우의 수

9.2 순 열

9.3 조 합

9.4 이산적 확률과 통계

9.5 비둘기 집 원리

9.6 재귀적 정의

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

9.1 경우의 수

- 어떤 사건이 일어나는 **경우의 수**를 구할 때는 모든 경우를 일정한 기준에 따라 빠짐없이, 중복되지 않게 해야 함
- 경우의 수를 구하는 방법에는 트리를 이용하는 방법과 표를 이용하는 방법이 있음

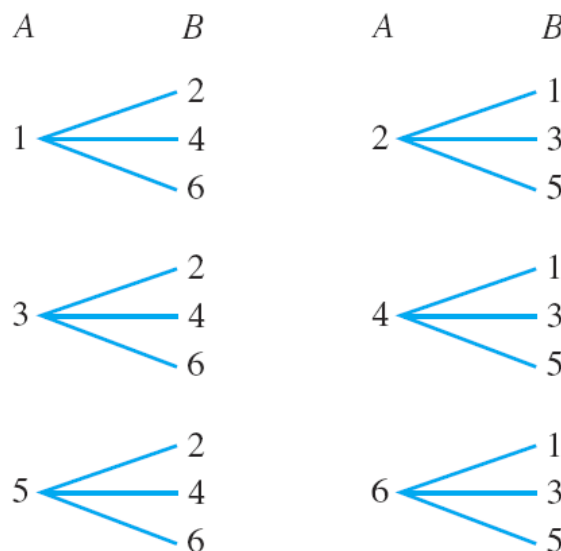


예제 9-1

두 개의 주사위 A, B 를 동시에 던졌을 때 두 수의 합이 홀수가 나오는 경우의 수를 구해보자.

풀이 주사위의 두 수의 합이 홀수가 되려면 주사위 A 는 홀수, 주사위 B 는 짝수이거나, 주사위 A 는 짝수, 주사위 B 는 홀수인 경우이다. 이것을 트리로 그리면 다음의 그림과 같이 나타낼 수 있으므로 주사위 A, B 의 두 눈의 합이 홀수가 되는 모든 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$ 가지이다.

9.1 경우의 수



두 사건은 독립



정의 9-1

사건이 일어나는 경우의 수에서의 법칙은 다음과 같다.

(1) **합의 법칙(rule of sum)**은 두 사건 $A, B (A \cap B = \phi)$ 가 일어날 경우의 수를 $n(A) = m$, $n(B) = n$ 이라 하면, A 또는 B 가 일어날 경우의 수는 $m + n$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m + n$$

(2) **곱의 법칙(rule of product)**은 두 사건 A, B 에서 $n(A) = m$, $n(B) = n$ 이라 하면, A, B 가 동시에 일어날 경우의 수는 $m \cdot n$ 이다.

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = m \cdot n$$

9.1 경우의 수



예제 9-2

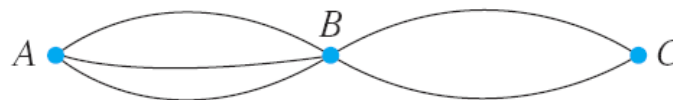
A 와 B 사이에 3개의 길이 있고 B 와 C 사이에 2개의 길이 있다고 하자. 어떤 사람이 다음과 같이 길을 갈 수 있는 방법의 경우의 수는 몇 가지인지 알아보자.

(1) A 에서 B 를 거쳐서 C 로 가는 경우

(2) A 에서 B 를 거쳐서 C 로 갔다가, 다시 B 를 거쳐 A 로 돌아오는 경우

풀이 (1) A 에서 B 로 가는 데 3가지, B 에서 C 로 가는 데 2가지 방법이 있으므로 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ 가지 방법이 있다.

(2) A 에서 C 로 갔다가 다시 C 에서 A 로 돌아오므로, 두 사건에는 곱의 법칙이 성립하여 $6 \times 6 = 36$ 가지 방법이 있다.



9.2 순열



정의 9-2

서로 다른 원소들을 순서를 고려하여 일렬로 배열하는 것을 **순열(permutation)**이라고 한다.
이때, 서로 다른 n 개의 원소를 한 줄로 배열하는 순열의 수는

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

이고, 간단히 $n!$ 로 나타낸다.



여기서 잠깐!!

1부터 n 까지의 모든 자연수의 곱을 n 의 계승 또는 n factorial이라고 읽으며 $n!$ 로 나타낸다.
 $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n(n-1)!$ 이다.



정의 9-3 서로 다른 n 개의 원소 중에서 r 개를 택하는 순열의 수는

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \quad (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

이고, 이를 ${}_nP_r$ 로 나타낸다.

${}_nP_r$ 을 $n!$ 을 써서 나타내면

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \text{이 된다.} \end{aligned}$$



정의 9-4 같은 것을 포함하는 순열의 경우에는, 즉 n 개 중에서 같은 것이 각각 p 개, q 개, \dots , r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p + q + \cdots + r = n)$$

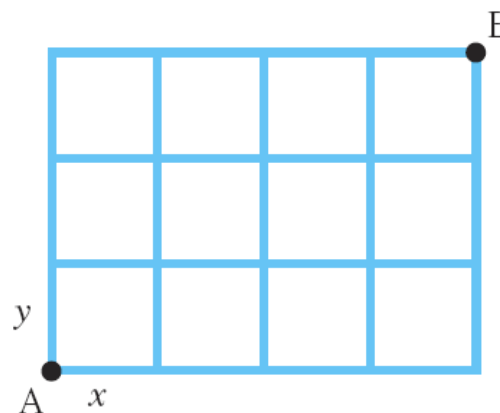
이다.

예를 들어, a, a, a, b, b 를 일렬로 배열하는 순열의 경우에는 서로 같은 것이 각각 a 는 3개, b 는 2개 있으므로 순열의 수는 $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ 가지이다.



예제 9-3

다음과 같은 도로망이 있을 때, A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 몇 가지 인지를 살펴보자.



풀이 오른쪽으로 한 구간 이동하는 것을 x , 위로 한 구간 이동하는 것을 y 라고 하면, A에서 B로의 최단 거리의 길은 4개의 x 와 3개의 y 를 사용하게 된다. 이 경우에 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 x 가 4개, y 가 3개이므로 $\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$ 가지이다.



여기서 잠깐!!

n 개 대상 중에서 r 개를 선택하는 순열 표시는 ${}_nP_r$ 또는 $P(n, r)$ 로 표현한다.

9.2 순열



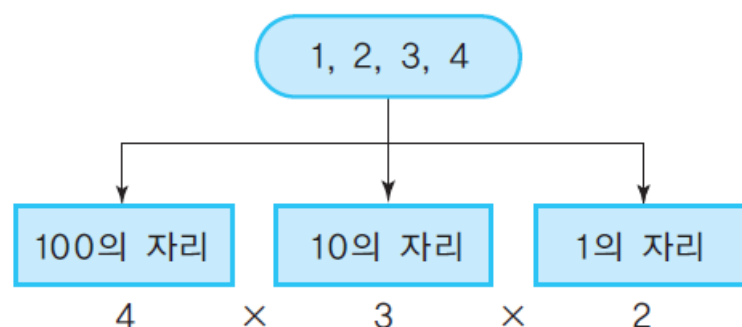
예제 9-4

네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 세 개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 알아보자.

풀이 100의 자리에 올 수 있는 것이 4개, 10의 자리에 올 수 있는 것이 3개, 1의 자리에 올 수 있는 것이 2개이므로, 세 자리의 정수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지이다.

이것을 순열로 나타내면 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$ 가 된다.

즉, ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$ 는 4부터 시작하여 하나씩 작은 수를 3개 곱한 것임을 알 수 있다.





예제 9-5

a, b, c, d, e라는 5개의 문자 중에서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수를 계산해보자.

풀이 3개의 문자를 다음과 같이 3개의 상자로 나타낸다고 하자.



첫 번째 문자는 5가지 방법으로 선택될 수 있고, 두 번째 문자는 4가지, 세 번째 문자는 3가지 방법으로 선택될 수 있다.



따라서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 가지가 된다. 이것은 ${}_5P_3 = 60$ 과 같다.

9.2 순열



여기서 잠깐!!

nP_r 의 변형과 기호의 정의

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad nP_n = n!, \quad nP_0 = 1$$



예제 9-6

15개의 역이 있는 철도 회사에서 출발역과 도착역을 적은 기차표를 몇 가지 마련해야 하는지 살펴보자.

풀이 주어진 문제는 15개에서 두 개를 택한 순열의 수와 같다. 그러므로 ${}_{15}P_2 = 210$ 가지이다.

9.3 조합



정의 9-5

서로 다른 n 개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r 개를 택할 때, 이것을 n 개의 원소에서 r 개를 택하는 **조합(combination)**이라 하고, 그 조합의 수를 ${}_nC_r$ 과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times (r-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \leq n) \end{aligned}$$

예를 들면, a, b, c, d로부터 3개의 문자를 순서에 관계없이 선택한다면 다음과 같은 4개의 경우가 있다. 이것을 순열 기호로 나타내면 ${}_4C_3 = 4$ 가 된다.

abc, abd, acd, bcd



여기서 잠깐!!

한 번에 r 개를 취하는 n 개 대상의 조합의 수는 ${}_nC_r$ 로 표시되며, 같은 기호로서 $C(n, r)$, $C_{n, r}$ 등이 사용되고 있다.

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$



예제 9-7

남자 5명과 여자 4명이 있을 때, 이 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는 몇 가지가 있는지 살펴보자.

풀이 남자 5명 중 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3$ 가지이고, 여자 4명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$ 이므로 ${}_5C_3 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60$ 가지이다.



예제 9-8

주머니에 크기가 서로 다른 3개의 빨간 공과 4개의 흰 공이 들어 있을 때, 다음을 구해보자.

- (1) 이 주머니에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수
- (2) 빨간 공 2개와 흰 공 3개를 뽑는 경우의 수

풀이 (1) 전체 7개의 공에서 3개의 공을 뽑는 경우이므로 ${}_7C_3 = 35$ 가지이다.

(2) 3개의 빨간 공 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$ 가지이고, 4개의 흰 공 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$ 가지이므로, 구하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_3 = 3 \times 4 = 12$ 가지이다.



정의 9-6

$(a + b)^n$ 을 전개하면 다음과 같은 식이 나오는데, 이것을 **이항 정리(binomial theorem)**라고 하고, 이때 ${}_nC_r$ 을 **이항 계수(binomial coefficient)**라고 한다.

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}nC_r a^{n-r} b^r$$



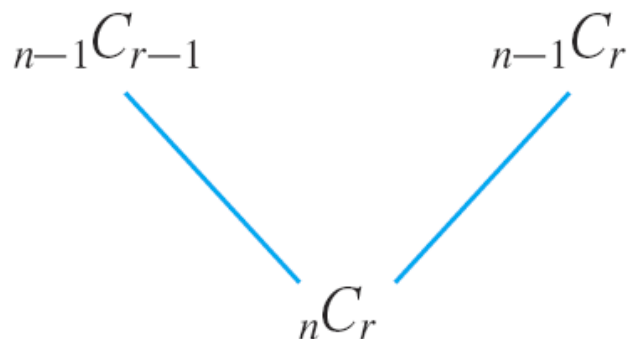
정리 9-1

파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)에서는 이항 계수가 다음과 같이 만들어진다.

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

파스칼의 삼각형은 다음과 같이 설명될 수 있는데, 이를 통하여 이항 계수를 쉽게 계산할 수 있음

- 1) 각 행에 있는 첫 번째 숫자와 마지막 숫자는 1임
- 2) 삼각형 안의 다른 숫자들은 파스칼의 삼각형과 같이 모두 그 숫자 위로부터 연결된 두 수들을 더함으로써 구해질 수 있음



〈그림 9.1〉 파스칼의 삼각형

파스칼의 삼각형으로부터 이항 계수를 구하는 예

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= a + b \\
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 (a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{aligned}$$

〈그림 9.2〉 파스칼의 삼각형 예

9.4 이산적 확률과 통계

- **확률**이란 어떤 사건 A 가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것임
- 사건 A 가 일어날 경우의 수를 전체의 경우의 수로 나눈 값임



정의 9-7

확률에 있어서 기본적인 법칙은 다음과 같다.

- (1) 어떤 사건 A 에 대하여 $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) 전사건 S 의 확률 $P(S) = 1$
- (3) 공사건 ϕ 의 확률 $P(\phi) = 0$
- (4) 사건 A 가 일어날 확률과 사건 A 의 여사건 A^c 가 일어날 확률 사이의 관계는 다음과 같다.

$$P(A) + P(A^c) = 1, \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$



예제 9-9

주사위 2개를 동시에 던져서 나온 수의 합이 3 또는 4가 될 확률을 구해보자.

풀이 수의 합이 3이 될 경우의 수는 (1, 2), (2, 1)이므로 확률은 $\frac{2}{36}$ 이고,
수의 합이 4가 될 경우의 수는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이므로 확률은 $\frac{3}{36}$ 이다.

따라서 확률은 $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$ 가 된다.

9.4 이산적 확률과 통계



정의 9-8

변수 X 가 취할 수 있는 모든 값이 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ 이고 X 가 이들 값을 취할 확률 $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$ 이 정해져 있을 때, 변수 X 를 **확률 변수**라고 한다. 또한 확률 변수 X 가 이산적인 값을 취할 때 이러한 확률을 **이산적 확률(discrete probability)**이라고 한다. 예를 들어, 한 개의 주사위를 던져서 나타나는 수를 X 라 하면 X 가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 $P(x \leq 2)$ 는 X 가 1 또는 2의 값을 취하는 확률을 뜻한다.



정의 9-9

확률 변수 X 가 취하는 값 x_i 와 X 가 x_i 를 취할 확률 p_i 와의 대응 관계를 확률 변수 X 의 **확률 분포**라고 한다.



정의 9-10

확률 변수 X 의 확률 분포가 다음과 같을 때,

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n \text{을 } X \text{의 기대값 또는 평균이라 하고,}$$

$E(X)$ 또는 m 으로 나타낸다.

9.4 이산적 확률과 통계



정의 9-11

확률 변수 X 의 평균이 m 일 때 $E((X - m)^2)$ 을 X 의 **분산(variance)**이라 하고, $V(X)$ 또는 $\sigma^2(X)$ 로 나타낸다. 또한 분산의 양의 제곱근을 **표준 편차(standard deviation)**라 하고, $\sigma(X)$ 로 나타낸다. 즉,

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i \\ &= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$



예제 9-11

주사위를 하나 던질 때 나오는 숫자를 확률 변수 X 라고 할 때 X 의 평균, 분산, 표준 편차를 각각 구해보자.

풀이 주사위 하나를 던질 때 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 인데, 확률 변수를 X 라 하면 X 는 1부터 6 사이의 값을 가지게 된다. 이에 대응하는 확률 분포는 모든 경우에 $\frac{1}{6}$ 이 된다. 따라서 평균 m 은

9.4 이산적 확률과 통계

$$m = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ = \frac{7}{2}$$

그리고 분산은

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = \left\{ \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \right. \\ \left. + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{6} \\ = \frac{35}{12}$$

표준 편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

이 된다.

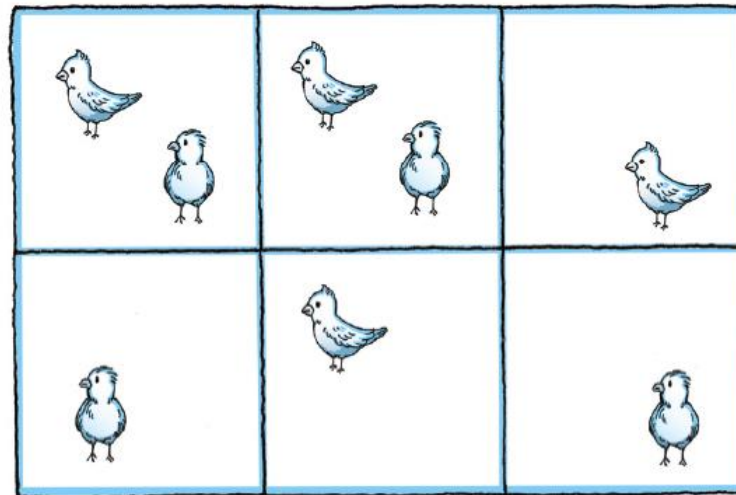
9.5 비둘기 집 원리



정의 9-12

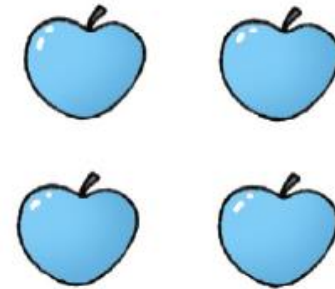
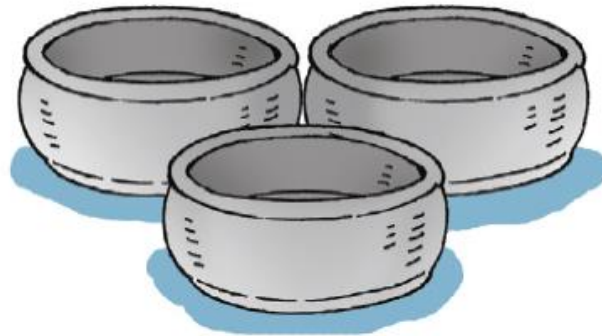
비둘기 집 원리(pigeonhole principle)란 n 개의 비둘기 집에 $(n + 1)$ 마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다는 원리이다.

비둘기 집 원리는 19세기 말 프랑스의 수학자인 디리클레(Dirichlet)에 의해 시작됨



〈그림 9.3〉 비둘기 집 원리

9.5 비둘기 집 원리



〈그림 9.4〉 바구니와 사과를 통한 비둘기 집 원리



여기서 잠깐!!

비둘기 집 원리는 다음과 같은 응용 문제에 적용될 수 있다.

- (1) 18개의 터미널을 가지고 있는 컴퓨터 시스템에서 24개의 작업을 수행하고자 할 때 적어도 6개의 작업은 다른 작업이 끝날 때까지 기다려야 한다.
- (2) 만약 n 개의 공이 m 개 상자에 있을 때 n 이 m 보다 크면, 이 상자들 중의 하나에는 적어도 두 개의 공을 담아야 된다.

여기서 진짜 잠깐!

- 고작 이것이야 원리라고?
 - 쓸모가 있는 원리인가?
- 물론이다. 당연한 것이 바로 진리
 - 유리수를 소수로 표현하면
 - 숫자가 끝이 나거나 무한히 나타날 수 있다.
 - 그런데, 무한히 나타나도 동일한 패턴이 반복될 수밖에 없다.
 - 왜? 비둘기 집의 원리로 증명해 보라.

(1) 재귀적 관계식



정의 9-13

재귀적 정의(recursive definition)란 수학적 귀납법에서와 같이 첫 번째 요소가 정의되고, $n + 1$ 번째의 요소는 바로 앞의 n 번째와 그 이하의 요소와의 관계로서 정의될 경우를 말하며, 재귀적 관계(recurrence relation)로 표현된다.

재귀적 정의의 가장 간단한 예로는 정수의 계승(factorial)을 들 수 있음

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, 1 \\ n * (n - 1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

재귀적 정의를 적용하면

$$\begin{aligned} 3! &= 3 * 2! \\ &= 3 * 2 * 1! \\ &= 3 * 2 * 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

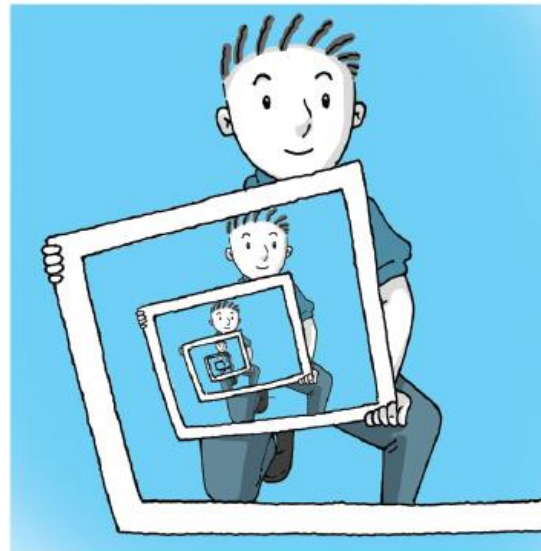


여기서 잠깐!!

재귀(recursion)는 순환 또는 되부름이라고도 불리는데, 재귀적 관계는 이산수학과 컴퓨터 프로그램의 응용에 많이 쓰인다.

재귀적 관계를 이용하는 문제를 해결하기 위해 2단계 적용

- 주어진 문제를 원래의 문제와 같은 형태의 더 작은 문제들로 분할함
- 가장 작은 문제로 분할된 문제들의 해를 구한 후, 최종적으로 이들을 결합하여 주어진 문제의 해를 구함



9.6 재귀적 정의



예제 9-12

f 가 다음과 같이 재귀적으로 정의되었다고 할 때, $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 를 구해보자.

$$f(0) = 1$$

$$f(n+1) = 2f(n)+1$$

풀이 귀납적 정의에 따라 단계별로 그 값을 구하면 다음과 같다.

$$f(1) = 2f(0) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2f(1) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

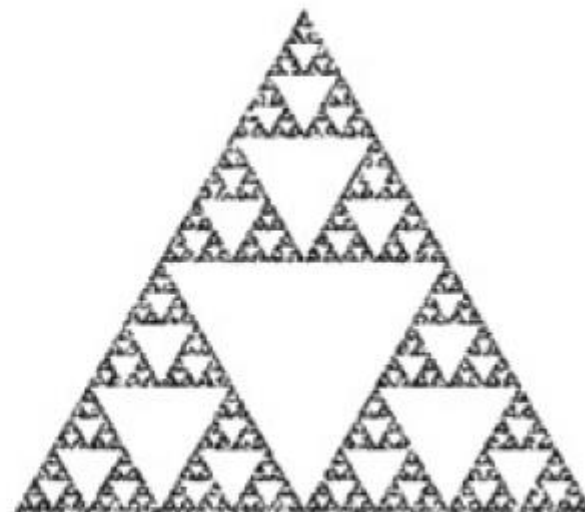
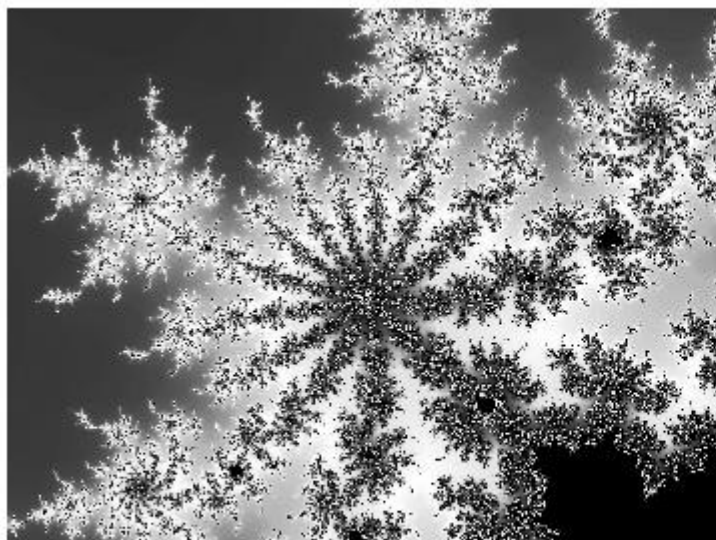
$$f(3) = 2f(2) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$f(4) = 2f(3) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

$$f(5) = 2f(4) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$$

9.6 재귀적 정의

- 재귀적 관계에 의해 나타나는 현상들의 예로 프랙탈(Fractals)을 들 수 있음
- 재귀적 관계는 물리학에서의 동역학계와 카오스(Chaos)를 비롯한 지능 시스템 분야에서 많이 활용되고 있음



〈그림 9.5〉 프랙탈의 예

(2) Factorial



예제 9-13

다음과 같은 $F(n) = n!$ 의 재귀적 정의에 따라 $n!$ 의 값을 $n = 5$ 까지 구해보자.

$$F(0) = 1$$

$$F(n+1) = (n+1)F(n)$$

풀이

$$F(1) = 1 \times F(0) = 1 \times 1 = 1$$

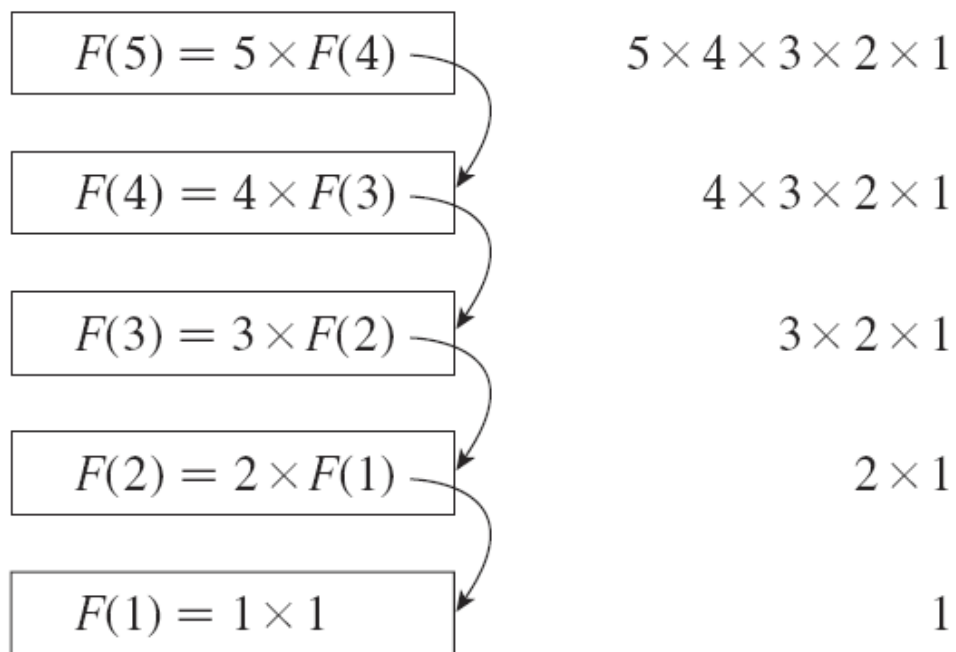
$$F(2) = 2 \times F(1) = 2 \times 1 = 2$$

$$F(3) = 3 \times F(2) = 3 \times 2 = 6$$

$$F(4) = 4 \times F(3) = 4 \times 6 = 24$$

$$F(5) = 5 \times F(4) = 5 \times 24 = 120 \text{ 이다.}$$

9.6 재귀적 정의



9.7 피보나치 수와 하노이 탑

(1) 피보나치 수(Fibonacci numbers)



정의 9-14 피보나치 수(Fibonacci numbers)는 다음과 같이 재귀적 관계식으로 정의된다.

$$(1) \text{ Fib}(0) = 0, \text{ Fib}(1) = 1$$

$$(2) \text{ Fib}(n) = \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2), n = 2, 3, 4, \dots$$

피보나치 수를 트리를 이용하여 구하면 보다 명확하게 이해됨

$$\text{Fib}(2) = \text{Fib}(1) + \text{Fib}(0) = 1 + 0 = 1$$

$$\text{Fib}(3) = \text{Fib}(2) + \text{Fib}(1) = 1 + 1 = 2$$

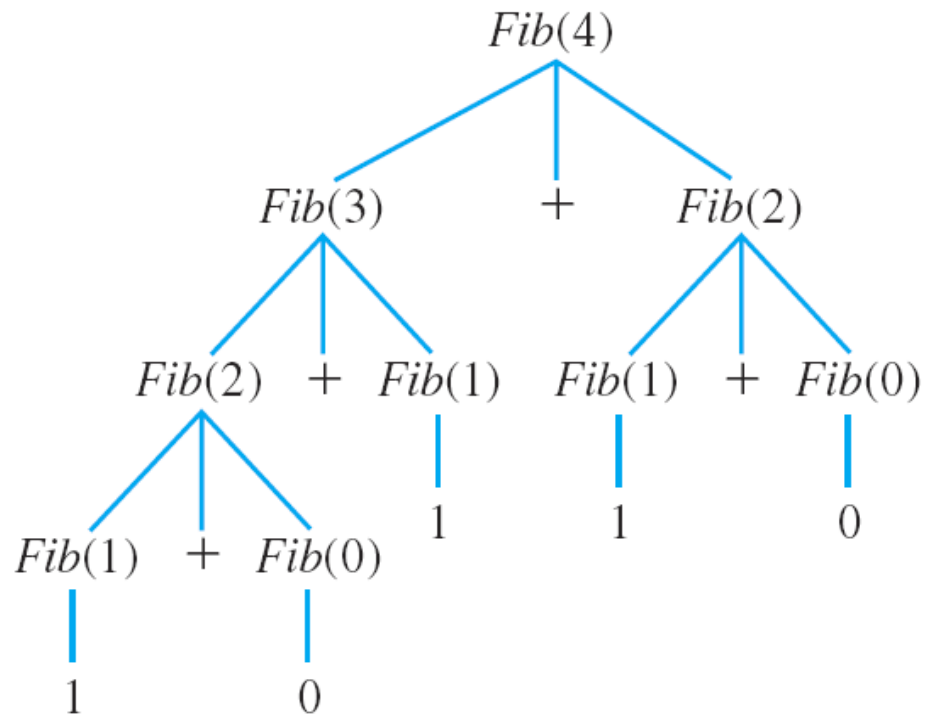
$$\text{Fib}(4) = \text{Fib}(3) + \text{Fib}(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\text{Fib}(5) = \text{Fib}(4) + \text{Fib}(3) = 3 + 2 = 5$$

$$\text{Fib}(6) = \text{Fib}(5) + \text{Fib}(4) = 5 + 3 = 8$$

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

따라서 $Fib(0)$, $Fib(1)$, $Fib(2)$, $Fib(3)$, $Fib(4)$, $Fib(5)$, $Fib(6)$, ...은
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

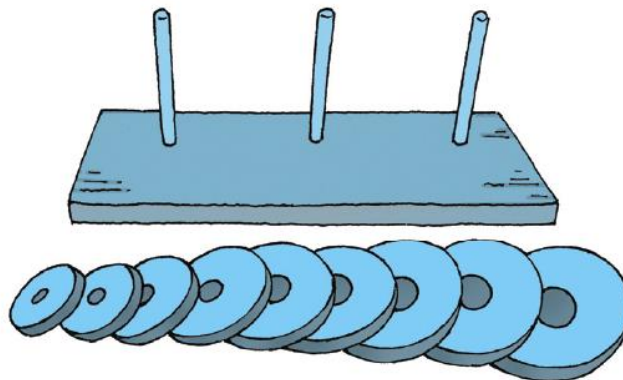


〈그림 9.7〉 $Fib(4)$ 의 재귀적 계산

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

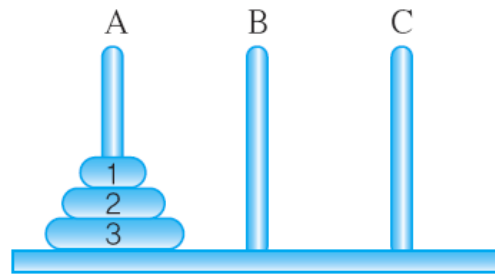
(2) 하노이 탑(Tower of Hanoi)

- 하노이 탑 문제는 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성됨
- 이 원반들은 처음에 바닥에 가장 큰 원반이 있는 크기 순으로 놓임
- 하노이 탑 문제의 규칙은 원반들이 한 막대에서 다른 막대로 한 번에 하나씩 이동할 수 있으며 작은 원반 위에 큰 것이 놓일 수 없도록 하는 것임
- 중간의 막대를 임시적으로 이용할 수 있으나 위의 규칙들을 지켜야 함

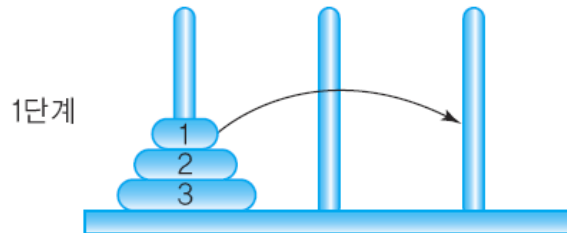


9.7 피보나치 수와 하노이 탑

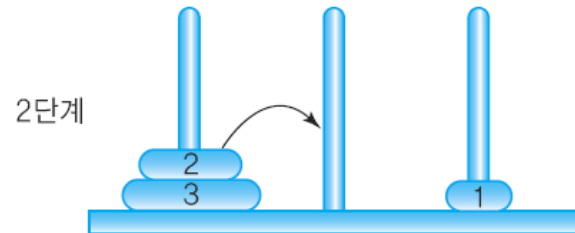
하노이 탑의 문제 해결은 가장 큰 원반이 바닥에 있는 순서로 첫 번째 막대 A에 쌓여 있는 세 개의 원반을 세 번째 막대 C로 옮기는 것과 같은 과정을 거침



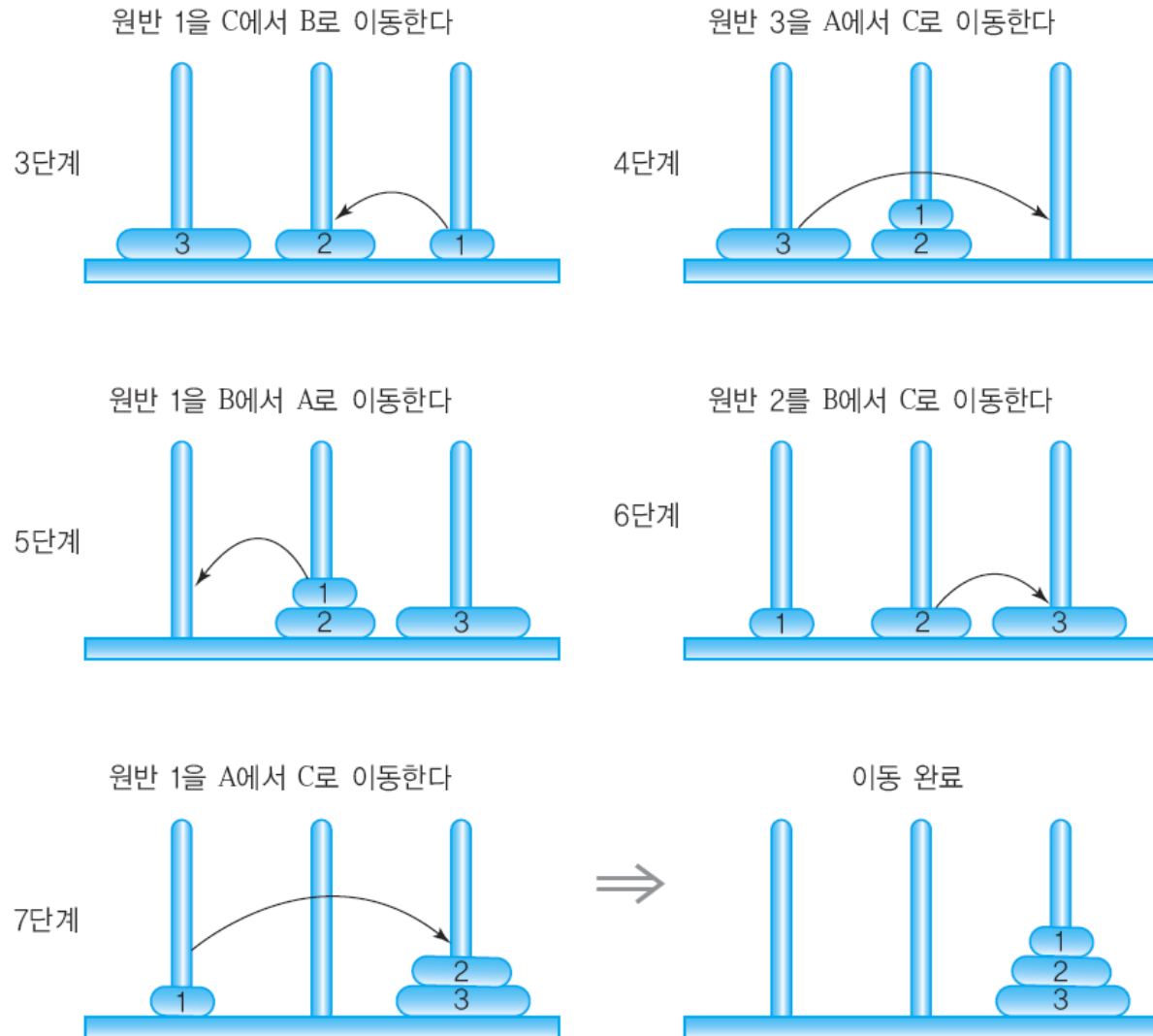
원반 1을 A에서 C로 이동한다



원반 2를 A에서 B로 이동한다



9.7 피보나치 수와 하노이 탑



〈그림 9.9〉 3개의 원반을 가진 하노이 탑의 이동

요약

- 서로 다른 원소들을 순서를 고려하여 일렬로 배열하는 것을 순열이라고 한다. 이때 n 개의 원소 중에서 r 개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r$ 로 나타내는데,

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, {}_nP_n = n!, {}_nP_0 = 1 \text{이다.}$$

- 1부터 n 까지의 모든 자연수의 곱을 n 의 계승 또는 n factorial이라고 읽으며 $n!$ 로 나타낸다. $0! = 1, 1! = 1, n! = n(n-1)!$ 이다.

- 같은 것을 포함하는 순열의 경우에는, 즉 n 개 중에서 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p + q + \cdots + r = n$)이다.

- 서로 다른 n 개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r 개를 택할 때, 이것을 n 개의 원소에서 r 개를 택하는 조합이라 하고, 그 조합의 수를 ${}_nC_r$ 과 같이 나타낸다.

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

요약

- $(a+b)^n$ 을 전개하면 다음과 같은 식이 나오는데, 이것을 이항 정리라 하고, 이때 ${}_nC_r$ 을 이항 계수라고 한다.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

- 파스칼의 삼각형에서 이항 계수는 다음과 같이 만들어지는데, 삼각형 안의 다른 숫자들은 모두 그 숫자 위로부터 연결된 두 수들을 더함으로써 얻어질 수 있다.

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

- 확률에 있어서 기본적인 법칙은 다음과 같다.

(1) 어떤 사건 A 에 대하여 $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) 전사건 S 의 확률 $P(S) = 1$

(3) 공사건 ϕ 의 확률 $P(\phi) = 0$

(4) $P(A) + P(A^c) = 1, P(A^c) = 1 - P(A)$

- 변수 X 가 취할 수 있는 모든 값이 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 이고 X 가 이들 값을 취할 확률 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 이 정해져 있을 때, 변수 X 를 확률 변수라고 한다. 또한 확률 변수 X 가 서로 이산된 값을 취할 때 이러한 확률을 이산적 확률이라고 한다.

요약

- 확률 변수 X 가 취하는 값 x_i 와 X 가 x_i 를 취할 확률 p_i 와의 대응 관계를 확률 변수 X 의 확률 분포라고 한다.

- 확률 변수 X 의 확률 분포가 다음과 같을 때,

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$$

을 X 의 기대값 또는 평균이라 하고, $E(X)$ 또는 m 으로 나타낸다.

- 확률 변수 X 의 평균이 m 일 때 $E((X-m)^2)$ 을 X 의 분산이라 하고, $V(X)$ 또는 $\sigma^2(X)$ 로 나타낸다. 또한 분산의 양의 제곱근을 표준 편차라 하고, $\sigma(X)$ 로 나타낸다. 즉,

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i \text{이고, } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{이다.}$$

- 베이즈의 정리는 다음과 같다. 표본 공간 n 개에서 서로 다른 배반적인 사건 B_1, B_2, \dots, B_n 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 A 에 대해,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) \cdot P(A|B_j)} \text{이다.}$$

요약

- 비둘기 집 원리란 n 개의 비둘기 집에 $(n+1)$ 마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다는 원리이다.
- 재귀적 정의란 수학적 귀납법에서와 같이 첫 번째 요소가 정의되고, $n+1$ 번째의 요소는 바로 앞의 n 번째와 그 이하의 요소와의 관계로서 정의될 경우를 말하며, 재귀적 관계로 표현된다.
- 피보나치 수는 다음과 같이 재귀적 관계식으로 정의된다.
 - (1) $Fib(0) = 0, Fib(1) = 1$
 - (2) $Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2), n = 2, 3, 4, \dots$
- 하노이 탑은 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성되는데, 이 원반들을 다른 막대기에 옮기는 문제이다. 하노이 탑 문제는 재귀적 관계로서 그 해를 구할 수 있다.

응용

순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용

- 순열과 조합을 통하여 가능한 경우의 수를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 우리의 일상생활과 관련된 다양한 확률을 계산할 수 있다.
- 비둘기 집 원리 응용
 - 컴퓨터 시스템을 비롯한 여러 가지 분야
- 베이즈의 정리 응용
 - 여론 조사
 - 게임의 분석 등