게임 수학 – 강의 8
행렬과 변환

동명대학교 게임공학과
강영민

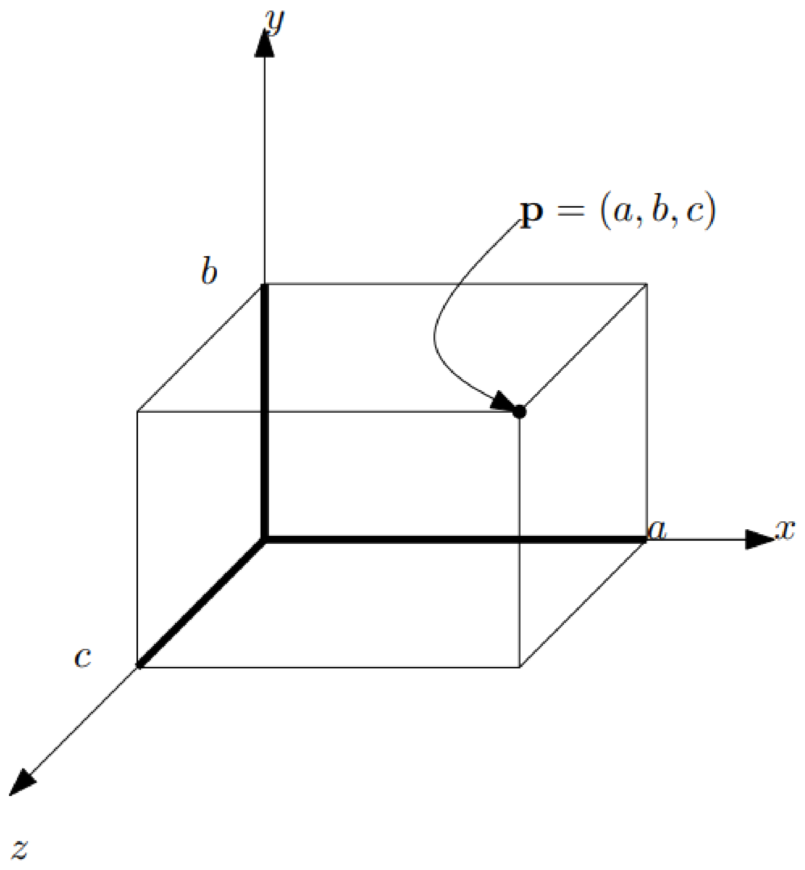
변환

수학적 의미에서 변환(transformation)

- 어떤 집합 S를 다른 어떤 집합 S로 대응시키는 함수
- 공간과 점, 그리고 벡터의 문제로 이해할 때, 변환이란 공간 상의 벡터나 점을 다른 벡터나 점으로 바꾸는 연산
- 변환 행렬
  - 어떤 벡터 $\mathbf{a}$가 $\mathbb{R}^n$에 속한다고 할 때, 이 벡터에 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$을 곱하면 $\mathbf{a}$와 같은 차원의 벡터 $\mathbf{b}$를 얻는다.
  - $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n})$.
  - 어떤 벡터를 동일한 차원의 다른 벡터로 옮기는 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$을 변환행렬(transform matrix)라고 한다.

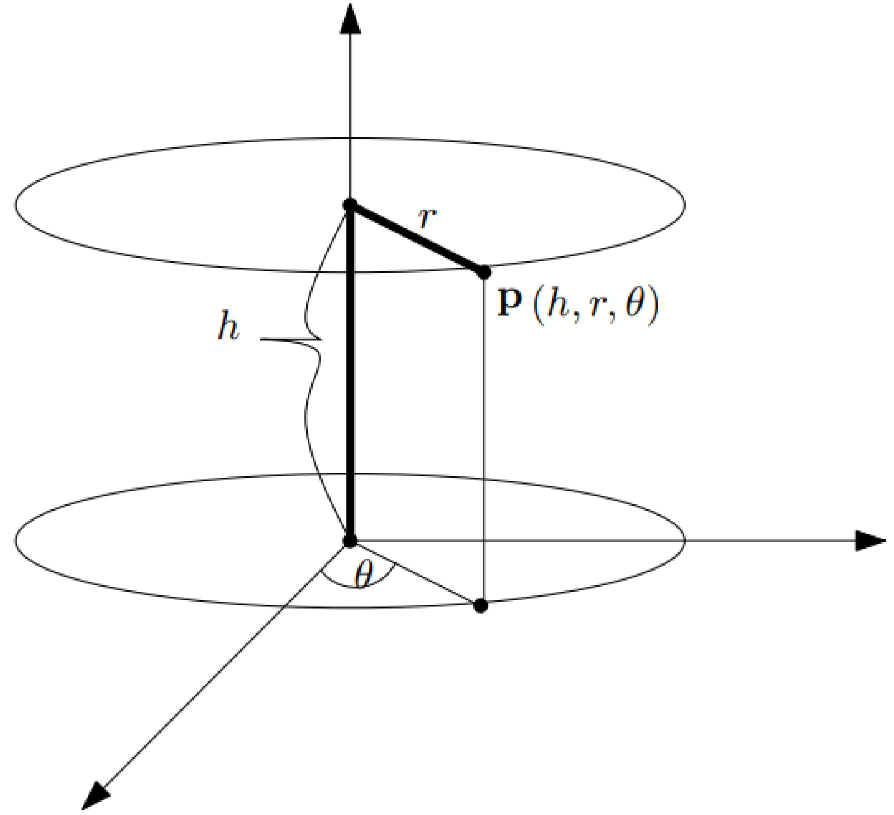
좌표계 – 직교 좌표계

- 일반적으로 가장 익숙한 좌표계
- 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)



좌표계 – 원기둥 좌표계

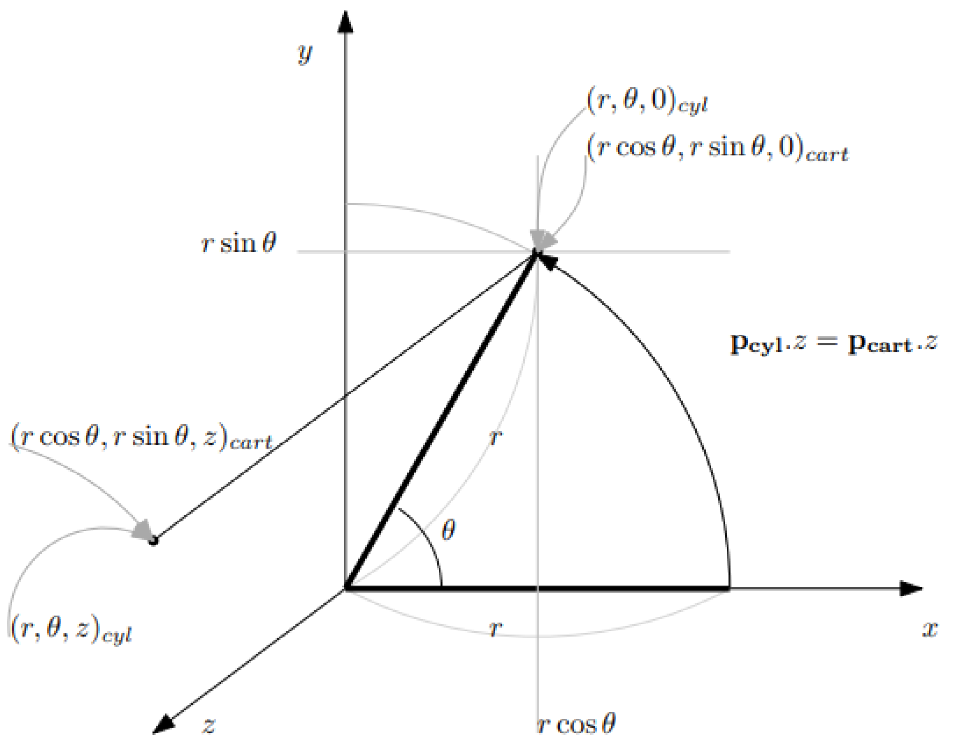
- $\mathbf{p}$는 이러한 높이 h와 반지름 r을 가진 원기둥의 윗쪽 원주에 놓임
- 원주에서 특정한 위치는 각도 θ로 표현
- 원기둥 좌표: (r, θ, h)



좌표계 변환 – 원기둥 좌표계 ➔ 직교좌표계

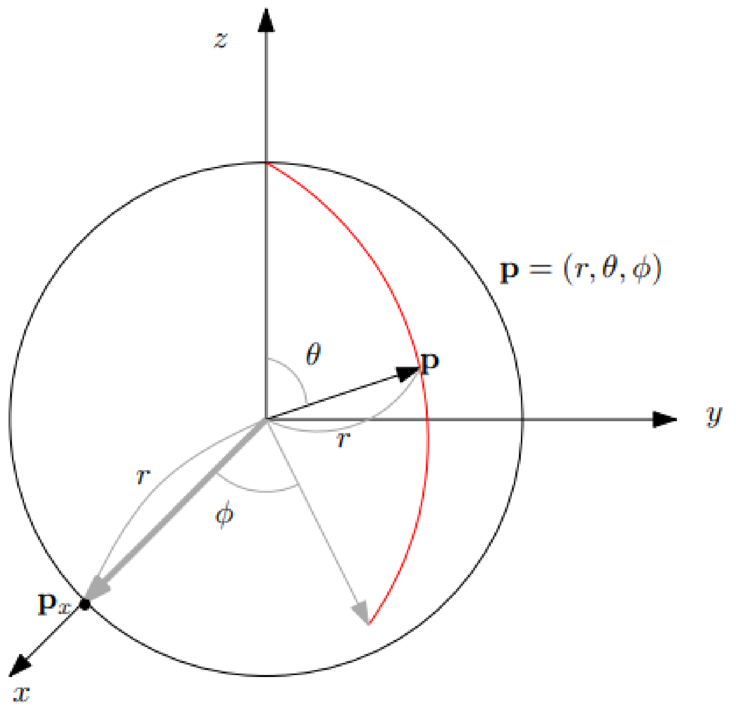
원기둥 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cyl}$, 직교 좌표계의 좌표를 $\mathbf{p}_{cart}$으로 표현하면

$$(r, \theta, h)_{cyl} = (r\cos\theta, r\sin\theta, h)_{cart}$$



좌표계 – 구면 좌표계

- $\mathbf{p}$를 지나며 중심이 원점인 구면의 반지름을 r
- 반지름 r인 점 가운데 x 축 위에 있는 점을 $\mathbf{p}_x$
- $\mathbf{p}_x$을 xy 평면 위에서 $\mathbf{p}$와 같은 경도선에 놓는 각도가 ϕ
- 이를 들어 올려 점 $\mathbf{p}$를 지나도록 하는 데에 필요한 각도를 θ
- 구면 좌표 (r, θ, ϕ)



좌표계 변환: 구면 좌표계 → 직교 좌표계

구면 좌표는 일반적으로 다음과 같은 제한을 갖는다.

$$r \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

직교 좌표계의 좌표 (x, y, z)를 구면 좌표계로 옮기기

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

구면 좌표계의 좌표를 직교 좌표로 옮기기

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

어떤 좌표계를 사용해야 하나

- 공간에 존재하는 점을 다룰 때에는 어떠한 좌표계를 사용해도 무방
- 컴퓨터 그래픽스 분야에서 가장 많이 사용되는 좌표계는 직교 좌표계
- 우리는 직교 좌표계에서 변환에 대해 다룰 예정
- 직교 좌표계를 기본적인 좌표계로 삼고 변환과 관련된 행렬 연산을 살필 것

어파인(affine) 변환

게임을 구현하기 위한 3차원 그래픽스에서 흔히 사용되는 변환

- 이동변환(translation): 주어진 변위 벡터만큼 좌표를 동일하게 옮김
- 회전변환(rotation): 2차원은 기준점, 3차원은 기준축을 중심으로 돌림
- 크기변경(scaling): 각 축 방향으로 주어진 비율에 따라 좌표 값이 커지거나 줄어든다.

이러한 변환은 어파인 변환(affine transformation)의 일종

- 서로 연결되어 있음을 의미하는 라틴어 'affinis'에서 유래
- 직선 위의 점들을 직선을 유지한 상태로 변환하는 변환
- 직선 위에서의 점들 사이의 거리 비가 변환된 직선 위에서 그대로 유지
- 직선은 직선으로, 평행선은 평행선으로 유지
- 실시간 컴퓨터 그래픽스에서는 여러 가지 효율성의 이유로 어파인 변환을 사용

동차 좌표계

- 동차 좌표(homogeneous coordinate)은 n 차원의 사영공간을 $n+1$ 차원의 좌표로 나타내는 좌표계
- 1827년 아우구스트 페르디난드 뫼비우스(August Ferdinand Möbius)가 그의 저작 "Der barycentrische Calül"에서 처음으로 소개
- 사영기하학에서 사용되는 좌표계
- 무한의 위치에 있는 점을 유한 좌표로 표현하는 데에 적합

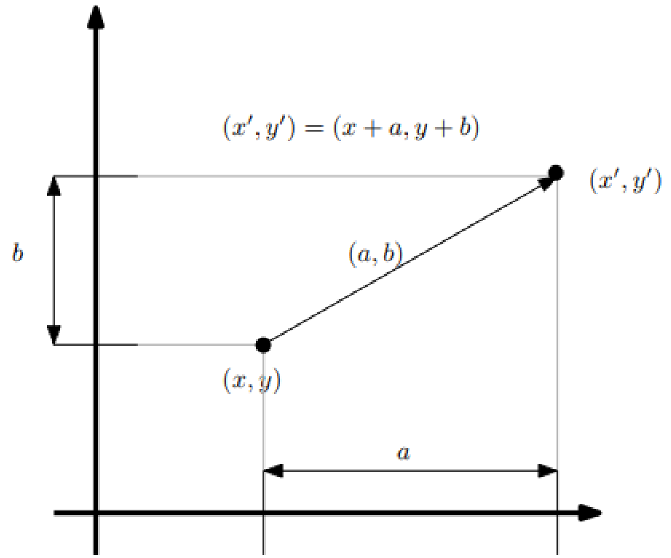
그래픽스에서 동차좌표계를 사용하는 이유

- 3차원 데카르트 좌표를 사용할 경우 이동은 벡터의 덧셈으로 표현되고, 회전은 3×3 행렬의 곱으로 표현
- 이동과 회전이 누적되면 벡터 덧셈과 행렬 곱셈이 연속적 적용됨
- 동차좌표(homogeneous coordinate)을 사용하면 이동과 회전 모두 4×4 행렬의 곱으로 표현 가능
- 누적된 이동, 회전 변환을 하나의 행렬로 표현 가능

이동 변환

- 2차원: 좌표 (x, y)를 x 축 방향으로 a, y 축 방향으로 b 만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

- 모든 차원에 대해 어떤 벡터 $\mathbf{a}$를 변위 벡터 $\mathbf{d}$를 이용하여 $\mathbf{x}'$로 옮기는 이동 변환을 다음과 같이 벡터 더하기로 정의할 수 있음
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{d} \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$



이동 변환: 동차 좌표계 표현

- 2차원: 좌표 (x, y)를 x 축 방향으로 a, y 축 방향으로 b 만큼 옮기기
- $(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + a)$

$$
\begin{aligned}
x' &= x + a \\
y' &= y + b \\
w &= 1
\end{aligned}
$$

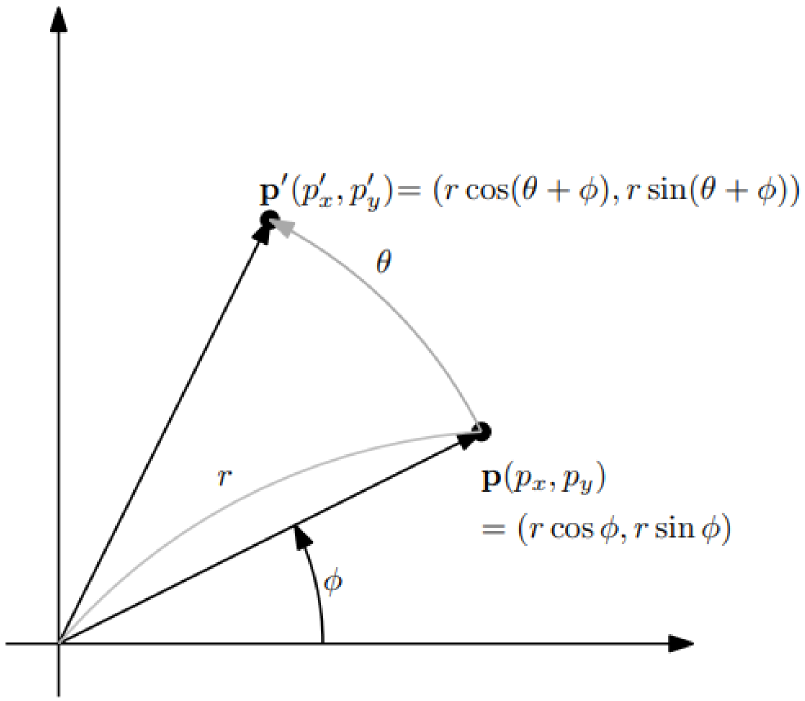
$$
\begin{aligned}
x' &= 1x + 0y + a \\
y' &= 0x + 1y + b \\
w' &= 0x + 0y + 1
\end{aligned}
$$

이동 변환 행렬

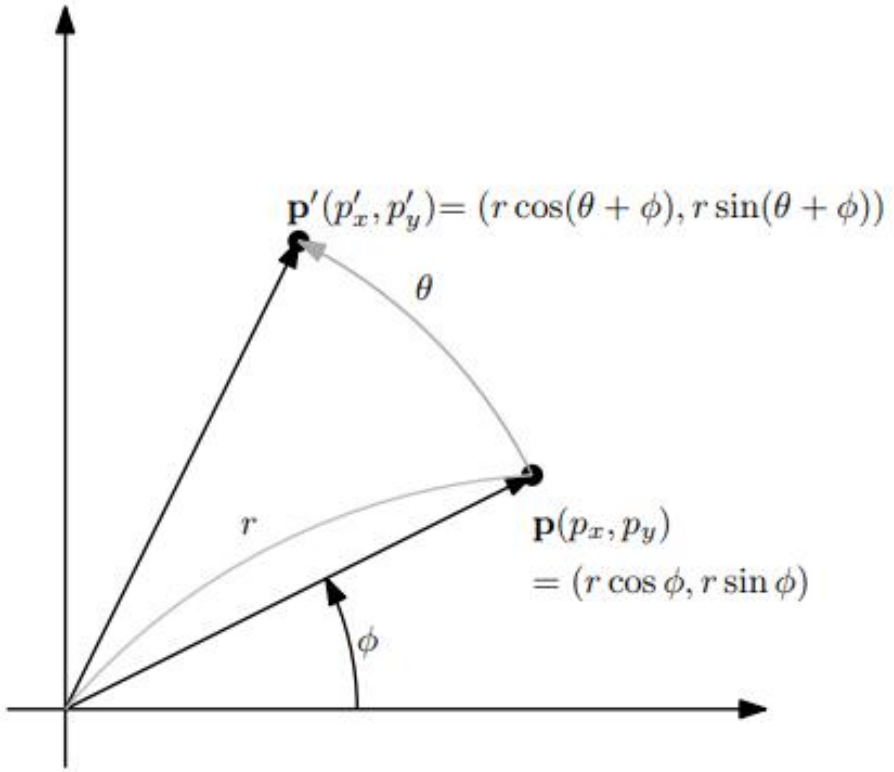
$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
$$

2차원 회전 문제

- 2차원 회전의 중심: 피벗(pivot)
- 기본적인 회전: 피벗이 원점인 경우
  - $\mathbf{p}$를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전하여 놓이는 지점 $\mathbf{p}'$를 구하는 문제
  - 원래 좌표 (p_x, p_y)를 θ 만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)를 얻는 문제



변경된 좌표의 이해



- 원점에서 (p_x, p_y)로 선분: 선분 길이 r과 x축과 이루는 각도 ϕ
- $(p_x, p_y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
- 이 좌표를 θ만큼 회전하여 얻는 (p'_x, p'_y)
  - $(p'_x, p'_y) = (r\cos(\theta+\phi), r\sin(\theta+\phi))$

변환 결과 좌표의 계산

- ϕ를 계산하지 않고 답을 얻어야 함
- 참조할 공식
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 회전하여 얻는 좌표는 다음과 같이 표현
  - $p'_x = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$
  - $p'_y = (r\cos\phi)\sin\theta + (r\sin\phi)\cos\theta$
- 원래의 좌표 (p_x, p_y)를 이용하여 표현
  - $p'_x = p_x\cos\theta - p_y\sin\theta$
  - $p'_y = p_x\sin\theta + p_y\cos\theta$

2차원 회전변환의 행렬 표현

이러한 변환은 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

2차원 공간에서 어떤 점 $\mathbf{p}$를 원점 기준으로 θ만큼 회전시켜 $\mathbf{p}'$를 얻는 변환은 회전변환 행렬 $\mathbf{R}(\theta)$을 이용하여 $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2차원 회전변환의 동차좌표계 표현

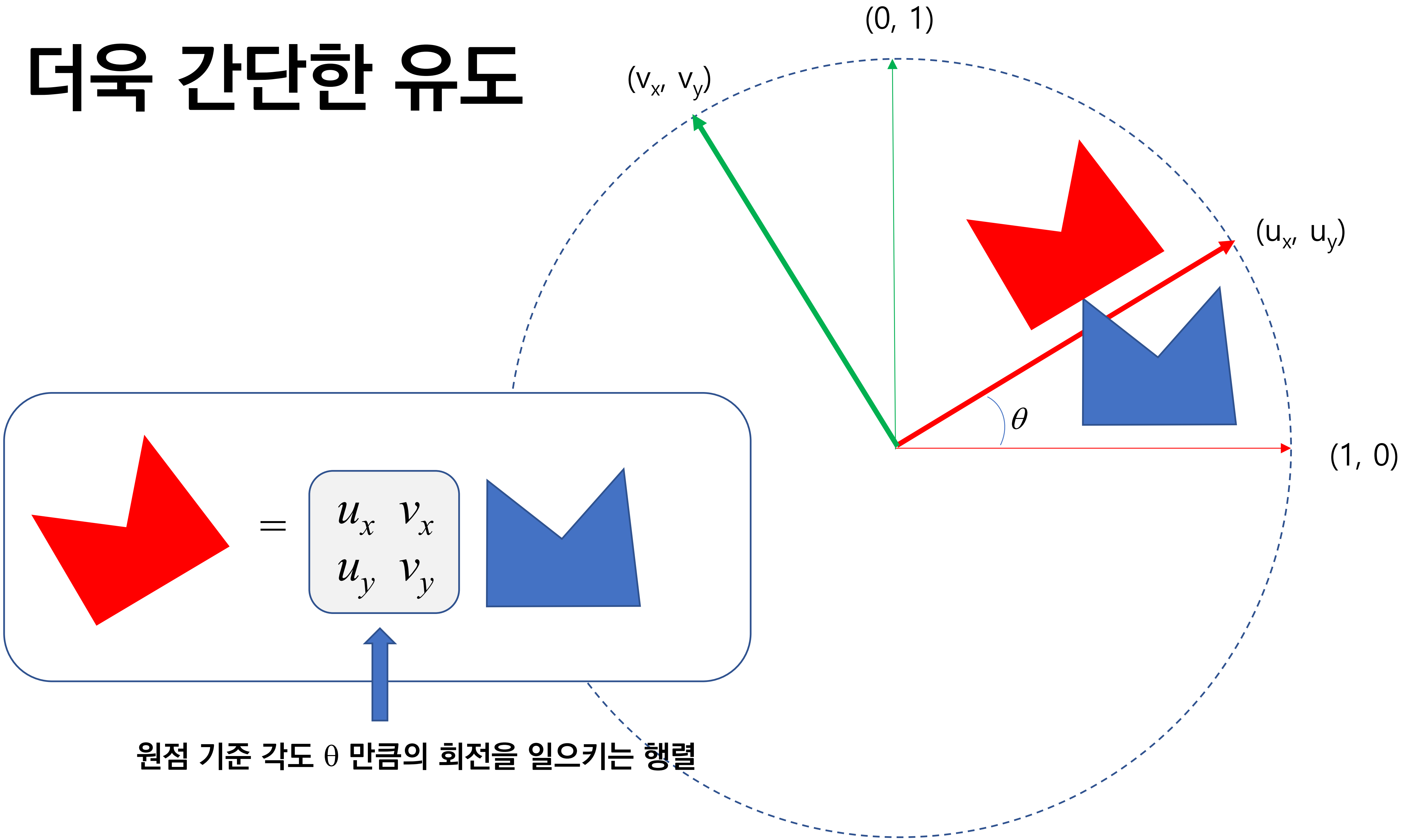
$$x' = \cos\theta x - \sin\theta y$$
$$y' = \sin\theta x + \cos\theta y$$
$$w = 1$$

$$x' = \cos\theta x - \sin\theta\ y + 0$$
$$y' = \sin\theta x + \cos\theta y + 0$$
$$w' = 0\ x + 0\ y + 1$$

회전 변환 행렬

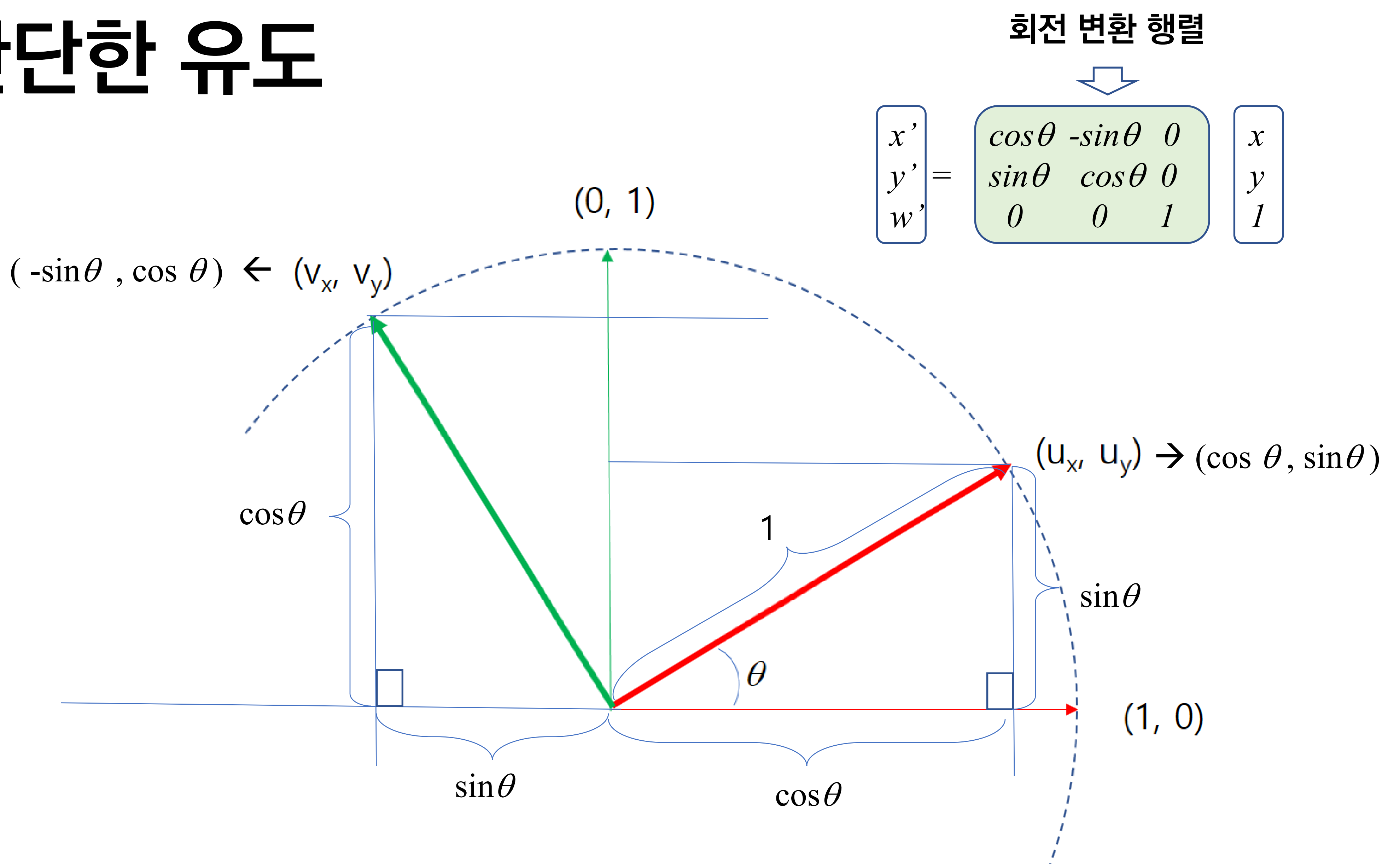
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

더욱 간단한 유도



원점 기준 각도 θ 만큼의 회전을 일으키는 행렬

더욱 간단한 유도


회전 변환 행렬
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
(0, 1)
$(-\sin\theta, \cos\theta) \leftarrow (v_x, v_y)$
$(u_x, u_y) \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$
1
θ
$\cos\theta$
$\sin\theta$
$\sin\theta$
$\cos\theta$
(1, 0)

3차원 회전 행렬 – z축 회전

- 2차원 회전을 그대로 3차원에 적용
  - 3차원 좌표 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$을 z 기준으로 회전
- 이 변환은 2차원 변환에 z 성분만 추가
  - z 축 성분은 그대로 유지된다. $(p'_z = p_z)$
  - p_x, p_y의 값은 2차원 회전과 동일하게 변환된다.

$$\begin{aligned} p'_x &= \cos\theta \cdot p_x - \sin\theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\ p'_y &= \sin\theta \cdot p_x + \cos\theta \cdot p_y + 0 \cdot p_z \\ p'_z &= 0 \cdot p_x + 0 \cdot p_y + 1 \cdot p_z \end{aligned}$$

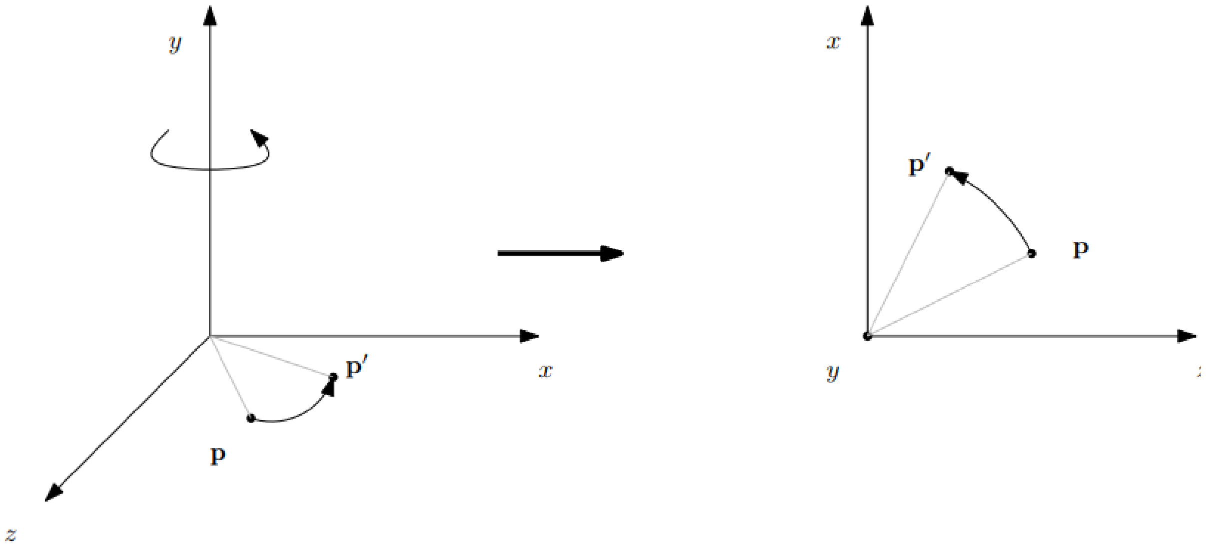
이것은 다음과 같은 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

동차좌표계 표현

3차원 회전 행렬 – y축 회전



- z 축은 2차원 회전의 x축에 대응
- x 축은 2차원 회전의 y축에 대응

$$
\begin{aligned}
p'_z &= \cos\theta \cdot p_z & -\sin\theta \cdot p_x & \quad +0 \cdot p_y \\
p'_x &= \sin\theta \cdot p_z & +\cos\theta \cdot p_x & \quad +0 \cdot p_y \\
p'_y &= 0 \cdot p_z & +0 \cdot p_x & \quad +1 \cdot p_y
\end{aligned}
$$

순서를 재배열하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
p'_x &= \cos\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & \quad +\sin\theta \cdot p_z \\
p'_y &= 0 \cdot p_x & +1 \cdot p_y & \quad 0 \cdot p_z \\
p'_z &= -\sin\theta \cdot p_x & +0 \cdot p_y & \quad +\cos\theta \cdot p_z
\end{aligned}
$$

이것도 역시 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

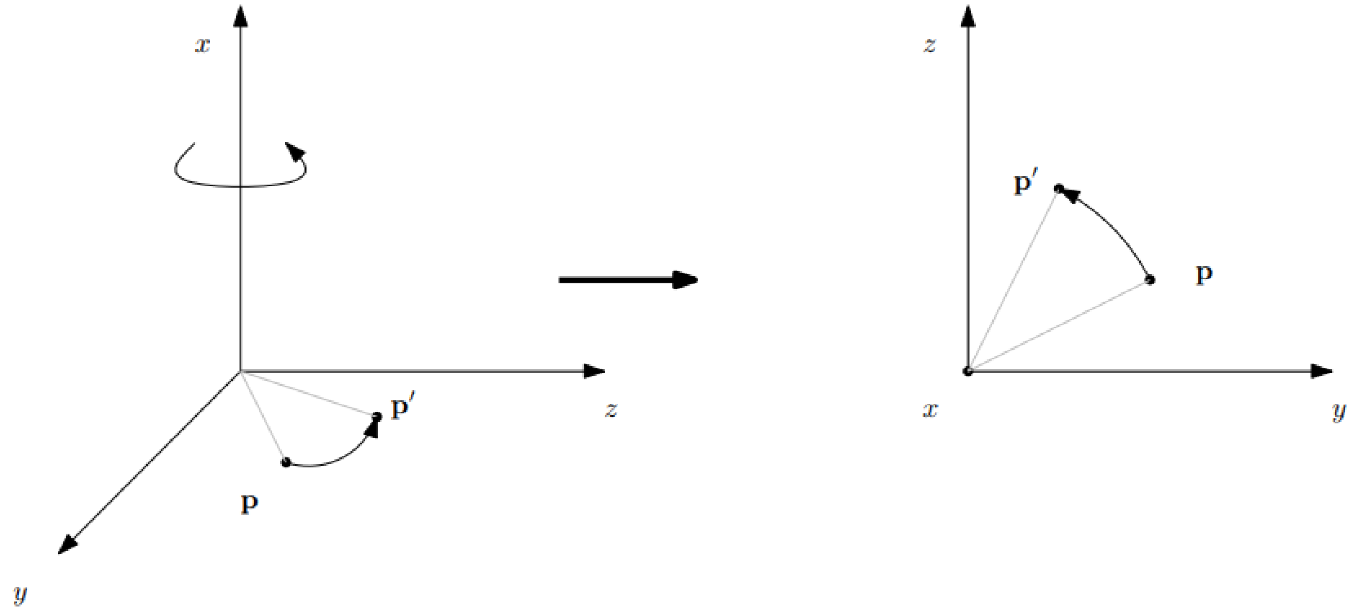
$$
\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}
$$

동차좌표계 표현

3차원 회전 행렬 – x축 회전

- 2차원 회전에서 x, y의 역할에 y와 z 축이 각각 대응



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p'_y &= \cos\theta \cdot p_y & -\sin\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\ p'_z &= \sin\theta \cdot p_y & +\cos\theta \cdot p_z & +0 \cdot p_x \\ p'_x &= 0 \cdot p_y & +0 \cdot p_z & +1 \cdot p_x \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

동차좌표계 표현

회전행렬의 역행렬

- 회전행렬은 특별한 특징을 지님 (2차원 회전행렬을 보자)
  - 첫 열 벡터는 길이는 $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$이므로 1
  - 두 번째 열의 길이 역시 $\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$로 1
  - 즉 두 벡터 모두 단위 벡터 (정규)
  - 이 두 벡터를 서로 내적하면 $\cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta$로 0
  - 두 벡터가 서로 수직 (직교)
- 모든 벡터는 단위 벡터이고 서로 직교 = 정규직교(orthonormal)
- 정규직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치(transpose)와 같음
- 3차원 회전행렬들도 정규직교임을 쉽게 확인 가능

$$\mathbf{R}_x{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

$$\mathbf{R}_y{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

$$\mathbf{R}_z{}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z{}^{\mathrm{T}}(\theta)$$

수시평가 3

- 다음 선형 방정식을 풀라

$$1.2\,x_1 + 2.1\,x_2 + 3.3\,x_3 + 2.6\,x_4 + 3.0\,x_5 + 8.9\,x_6 + 1.3\,x_7 + 1.1\,x_8 + 9.1\,x_9 + 6.2\,x_{10} = 255.9$$
$$2.1\,x_1 + 1.1\,x_2 + 4.3\,x_3 + 2.6\,x_4 + 1.2\,x_5 + 1.1\,x_6 + 1.5\,x_7 + 2.1\,x_8 + 9.4\,x_9 + 0.2\,x_{10} = 154.1$$
$$1.2\,x_1 + 2.1\,x_2 + 3.3\,x_3 + 2.6\,x_4 + 3.0\,x_5 + 1.1\,x_6 + 1.5\,x_7 + 2.1\,x_8 + 9.4\,x_9 + 0.2\,x_{10} = 161.2$$
$$1.2\,x_1 + 1.1\,x_2 + 4.3\,x_3 + 2.6\,x_4 + 1.2\,x_5 + 1.1\,x_6 + 0.3\,x_7 + 1.1\,x_8 + 9.1\,x_9 + 6.2\,x_{10} = 194.1$$
$$1.2\,x_1 + 0.1\,x_2 + 0.3\,x_3 + 0.6\,x_4 + 1.0\,x_5 + 0.9\,x_6 + 0.3\,x_7 + 0.1\,x_8 + 0.1\,x_9 + 0.2\,x_{10} = 20.9$$
$$1.2\,x_1 + 1.1\,x_2 + 1.3\,x_3 + 1.6\,x_4 + 1.0\,x_5 + 1.9\,x_6 + 1.3\,x_7 + 1.1\,x_8 + 1.1\,x_9 + 1.2\,x_{10} = 69.9$$
$$2.2\,x_1 + 2.2\,x_2 + 3.3\,x_3 + 4.4\,x_4 + 5.5\,x_5 + 6.6\,x_6 + 1.1\,x_7 + 1.2\,x_8 + 9.3\,x_9 + 6.4\,x_{10} = 266.2$$
$$1.2\,x_1 + 2.1\,x_2 + 3.3\,x_3 + 4.4\,x_4 + 5.5\,x_5 + 6.6\,x_6 + 1.1\,x_7 + 1.1\,x_8 + 9.1\,x_9 + 6.2\,x_{10} = 260.4$$
$$1.2\,x_1 + 2.1\,x_2 + 3.3\,x_3 + 2.6\,x_4 + 3.0\,x_5 + 1.9\,x_6 + 7.3\,x_7 + 1.1\,x_8 + 1.1\,x_9 + 6.2\,x_{10} = 193.9$$
$$1.2\,x_1 + 2.1\,x_2 + 3.3\,x_3 + 4.6\,x_4 + 3.0\,x_5 + 1.9\,x_6 + 9.3\,x_7 + 1.1\,x_8 + 1.1\,x_9 + 6.2\,x_{10} = 205.9$$