물리기반 모델링

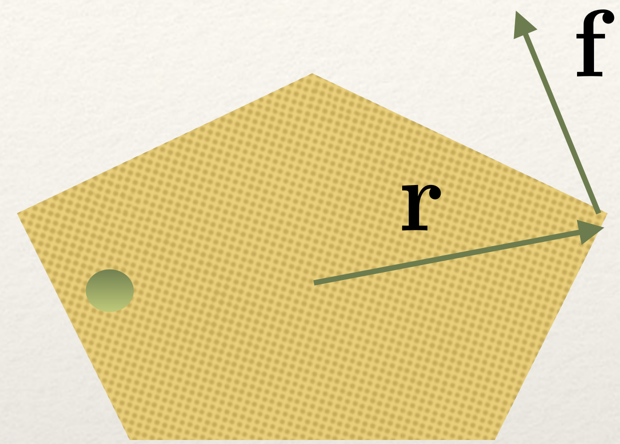
1.5 회전 운동

동명대학교
게임공학과

회전 운동

- 토크: τ
  - 회전 운동에서 힘의 역할

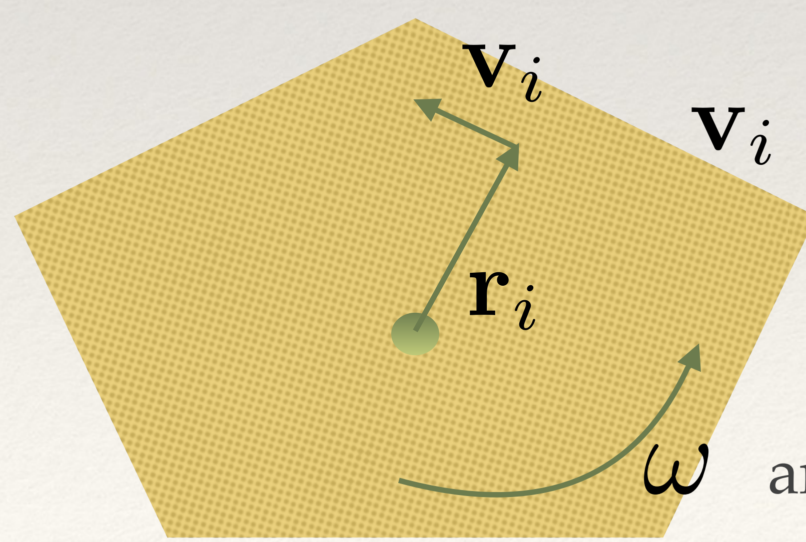
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$



- 회전 운동량
  - 모든 입자의 운동량 모멘트의 합

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

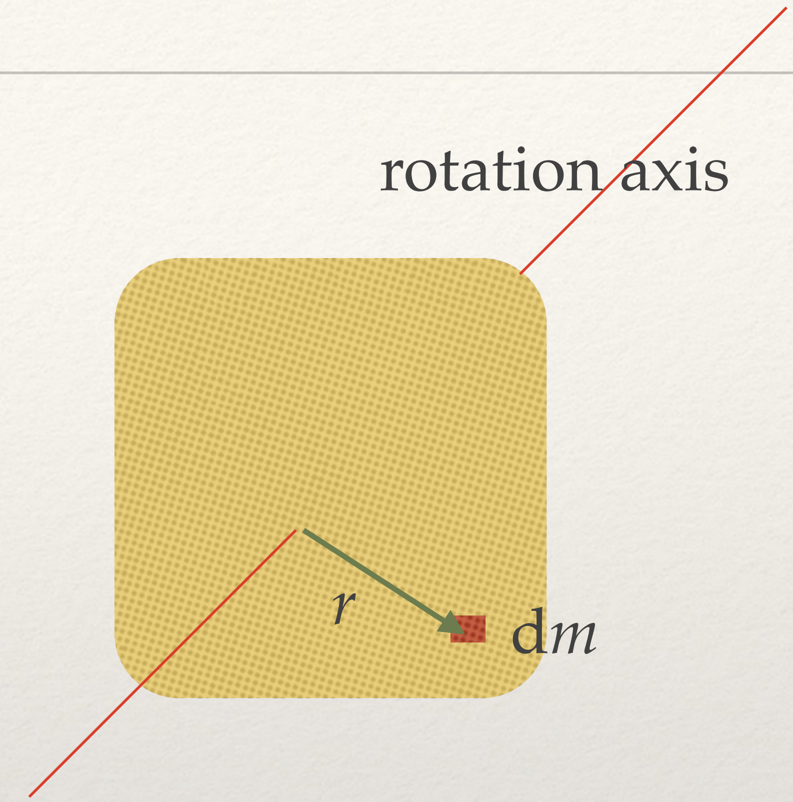
$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)$$



$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$$

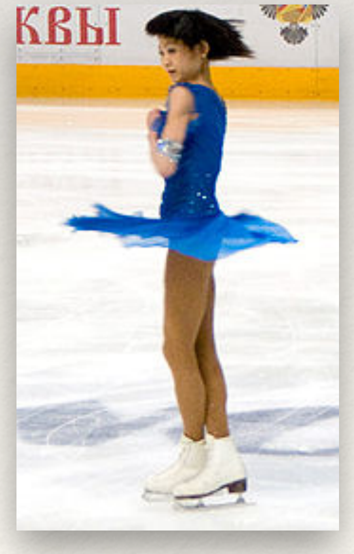
angular velocity

관성 모멘트 (회전질량)

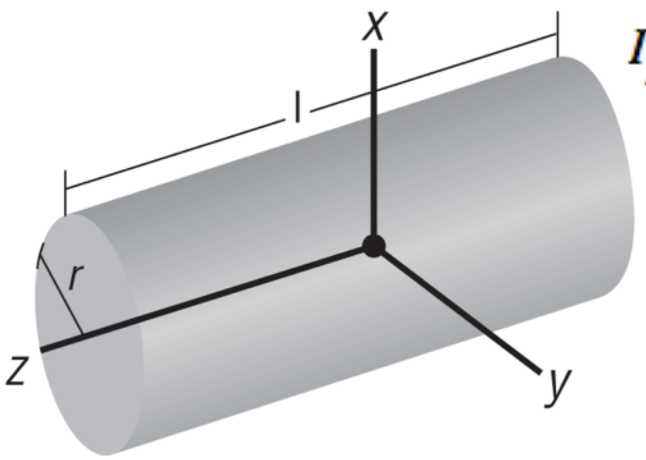


- 회전 질량
    - 회전축에 따라 달라짐
    - 축을 중심으로 하는 회전 가속에 저항하는 특성

$$I = \int_m r^2 \mathrm{d}m$$

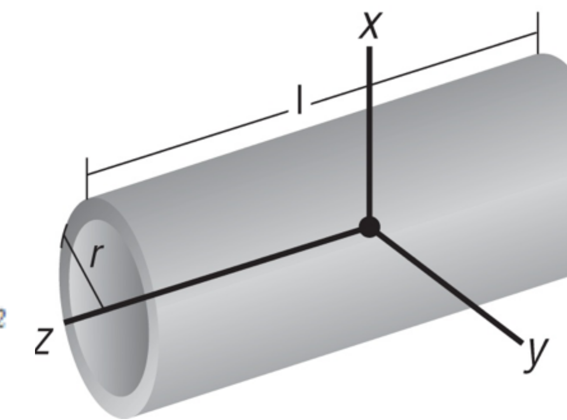


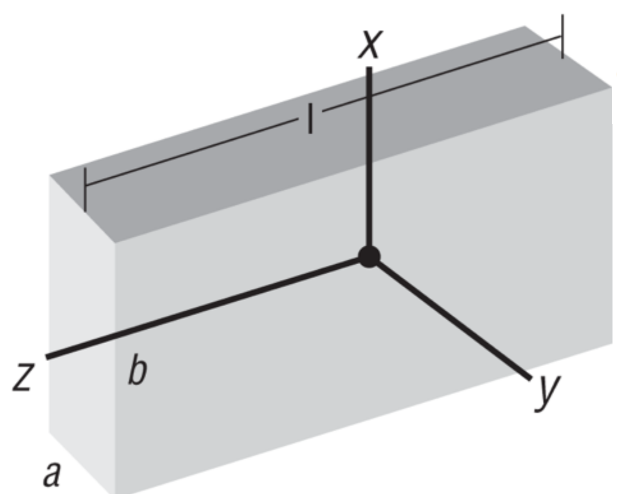
회전 질량의 예 (3개의 축에 대해)



$I_{xx} = I_{yy} = (1/4)\, mr^2 + (1/12)\, ml^2 ;\ I_{zz} = (1/2)\, mr^2$

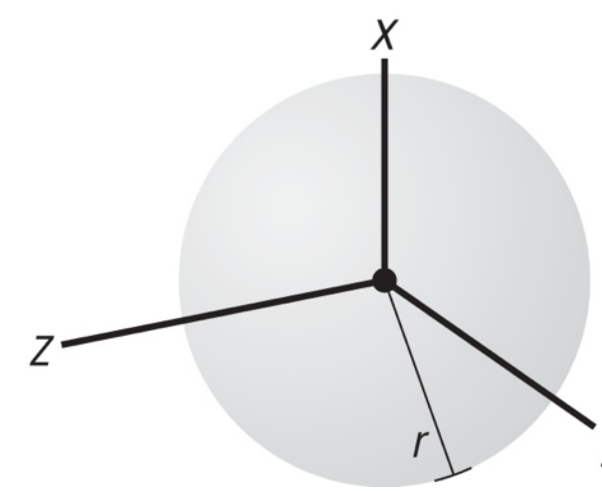
$I_{xx} = I_{yy} = (1/4)\, mr^2 + (1/12)\, ml^2 ;\ I_{zz} = (1/2)\, mr^2$





$I_{xx} = I_{yy} = (1/4)\, mr^2 + (1/12)\, ml^2 ;\ I_{zz} = (1/2)\, mr^2$

sphere $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/5)\, mr^2$



spherical shell $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/3)\, mr^2$

회전 운동량= 회전질량 x 회전속도

- 선운동량: **G**
  - $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$
- 회전운동량

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i(\omega \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{H} = \int \omega \mathbf{r}^2 dm$$
$$= \omega \int \mathbf{r}^2 dm$$
$$= \omega \mathbf{I} = \mathbf{I}\omega$$

회전 질량
(관성 모멘트)

회전 속도(각속도)

회전 운동량의 미분

- dG/dt = 힘
- dH/dt = 토크(torque)

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d\mathbf{I}\omega}{dt} = \mathbf{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{I}\alpha$$

$$\longrightarrow \quad \sum \tau = \mathbf{I}\alpha \quad \longrightarrow \quad \alpha = \mathbf{I}^{-1}\sum \tau$$

텐서(tensor)

- 텐서
  - 크기와 방향을 가진 수학적 표현
  - 방향에 따라 그 크기가 동일하지 않을 수 있음
  - 다른 방향에 대해 다른 크기를 갖는 물체의 특성을 표현할 때 사용
- 등방성(isotropic) 특성과 이방성(anisotropic) 특성
  - 등방성: 모든 방향으로 동일한 특성
  - 이방성:방향에 따라 달라지는 특성
- 관성 모멘트
  - 관성 텐서(3차원)
  - 아홉 개의 요소가 모든 방향으로의 특성을 표현할 수 있음
  - 회전 축에 따라 달라지는 강체의 특성을 표현

물리기반 모델링

1.6 강체 - 2차원

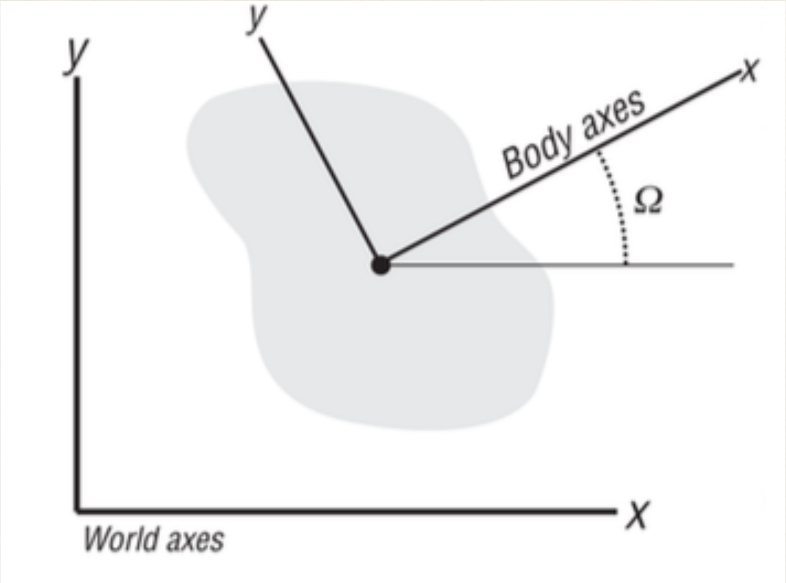
동명대학교
강영민

강체의 운동

- 입자와 강체의 차이
  - 입자: 회전이 없음
  - 강체: 회전
- 강체의 운동
  - 질량 중심의 선운동 (입자와 동일)
  - 회전 운동
    - 토크 τ (선운동에서 힘 f와 같은 작용)
      - 각 속도 ω (속도 **v**와 같은 역할)
      - 각 가속도 $\dot{\omega}$ (가속도 **a**와 같은 역할)

지역 좌표계

- 회전
  - 지역 좌표계의 원점을 중심으로 회전



- 2차원 강체의 회전
  - z 축 회전
- 회전은 원래의 상태에서 회전된 각을 표현하는 하나의 실수 Ω 로 표현 가능

각 속도와 각 가속도

- 선속도 = 시간에 대한 위치의 변화 비
- 각 속도 = 시간에 대한 회전 각의 변화 비
  - >> $$\omega = \frac{d\Omega}{dt}$$
- 각 가속도

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

회전에 의한 선 속도

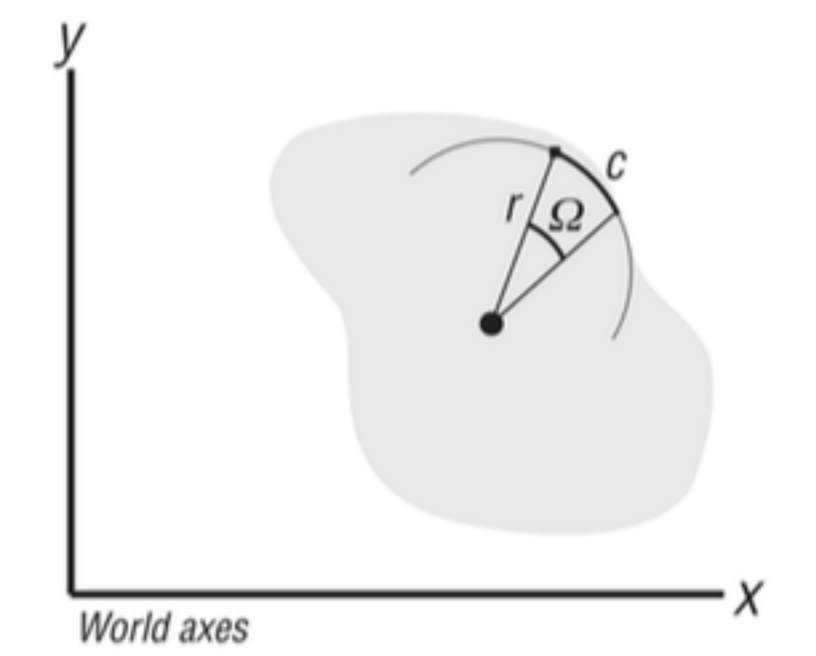
- 각도 Ω만큼의 회전
  - 지역 좌표 중심에서 r만큼 떨어진 위치는 원호 c를 따라 이동
- 간단한 관찰

$$c = r\Omega$$

- 미분하면....

$$dc/dt = rd\Omega/dt = r\omega$$

$$v = r\omega$$



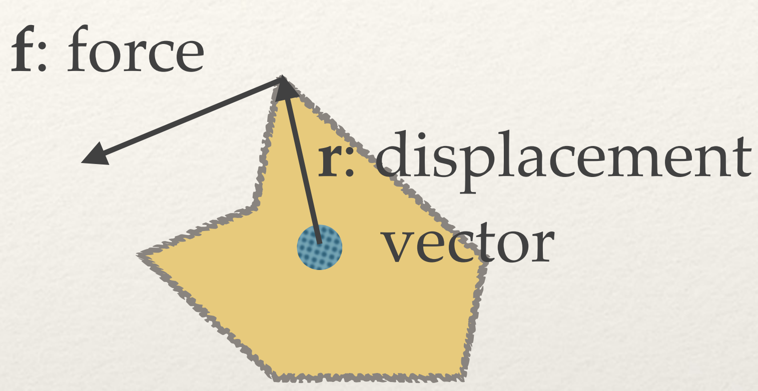
- 가속
  - a = dv/dt

$$a = r\dot{\omega}$$

2차원 강체 시뮬레이션

- 상태 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \Omega, \omega)$
- 관성
  - 질량 m : 선 운동에 대한 저항
  - 관정 모멘트 I : 회전 운동에 대한 저항
- 시뮬레이션
  - 힘과 토크를 계산 $\mathbf{f}, \tau$

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$



2차원에서는....

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, 0)$$
$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, 0)$$
$$\tau = (0, 0, \tau_z)$$

적분

- 선운동

$$\mathbf{v}(t+dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{f}}{m}dt$$

$$\mathbf{x}(t+dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t+dt)dt$$

- 회전운동

$$\omega(t+dt) = \omega(t) + I^{-1}\tau dt$$

$$\mathbf{\Omega}(t+dt) = \mathbf{\Omega}(t) + \omega(t+dt)dt$$

- 2D
  - I: 스칼라 … $I^{-1} = \frac{1}{I}$

애니메이션 결과

- https://www.youtube.com/watch?v=xbu_-VP7Ed0
- http://goo.gl/s8TTAi