

물리기반 모델링

충돌

동명대학교
강영민

충격 (impulse)

- ❖ 충격량

- ❖ 아주 짧은 시간에 작용하는 힘

- ❖ 예

- ❖ 총에서 발사되는 총알에 작용하는 힘

- ❖ 충돌하는 물체들 사이에 작용하는 힘

- ❖ 물리적 의미

- ❖ 충격량: 운동량의 변화량과 같은 벡터양

- ❖ 선형 충격량

- ❖ $= m(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$

- ❖ 회전 충격량

- ❖ $= \mathbf{I}(\omega_+ - \omega_-)$

충격량의 계산

- ❖ 총에서 발사된 총알
 - ❖ 총알의 질량: 0.15 kg
 - ❖ 총구에서의 총알 속도: 756 m/s
 - ❖ 총신의 길이: 0.610 m
 - ❖ 총알이 총신을 통과하는 데에 걸리는 시간: 0.0008 s
- ❖ 충격량 = 운동량의 변화
 - ❖ $mv = 0.15 \times 756 \text{ kg m/s} = 113.4 \text{ kgm/s}$
- ❖ 평균 충격량 힘 = 충격량 / 시간
 - ❖ $113.4 / 0.00008 \text{ N} = 141,750 \text{ N}$

운동량 보존

- ❖ 두 개의 객체 (각각의 질량은 m_1 과 m_2) 충돌
 - ❖ 충돌 이전의 속도 \mathbf{v}^-
 - ❖ 충돌 이후의 속도 \mathbf{v}^+

$$m_1 \mathbf{v}_1^+ + m_2 \mathbf{v}_2^+ = m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-$$

운동 에너지의 보존

- ❖ 선형 운동 에너지

$$K_l = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$$

- ❖ 회전 운동 에너지

$$K_a = \frac{1}{2}I|\omega|^2$$

- ❖ 운동 에너지가 보존된다면 다음이 만족됨

$$m_1\mathbf{v}_1^{+2} + m_2\mathbf{v}_2^{+2} = m_1\mathbf{v}_1^{-2} + m_2\mathbf{v}_2^{-2}$$

충돌 객체들의 속도 변화

❖ 운동량 보존

$$m_1 \mathbf{v}_1^+ + m_2 \mathbf{v}_2^+ = m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-$$

$$m_1(\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-) = -m_2(\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-)$$

❖ 에너지 보존

$$m_1 \mathbf{v}_1^{+2} + m_2 \mathbf{v}_2^{+2} = m_1 \mathbf{v}_1^{-2} + m_2 \mathbf{v}_2^{-2}$$

$$m_1(\mathbf{v}_1^{+2} - \mathbf{v}_1^{-2}) = -m_2(\mathbf{v}_2^{+2} - \mathbf{v}_2^{-2})$$

$$m_1(\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-)(\mathbf{v}_1^+ + \mathbf{v}_1^-) = -m_2(\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-)(\mathbf{v}_2^+ + \mathbf{v}_2^-)$$

$$\mathbf{v}_1^+ + \mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_2^+ + \mathbf{v}_2^-$$

충돌 이후의 속도 구하기

$$m_1(\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-) = -m_2(\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-)$$

$$\mathbf{v}_1^+ + \mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_2^+ + \mathbf{v}_2^-$$

$$m_1\mathbf{v}_1^+ + m_2\mathbf{v}_2^+ = m_1\mathbf{v}_1^- + m_2\mathbf{v}_1^-$$

$$\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-$$

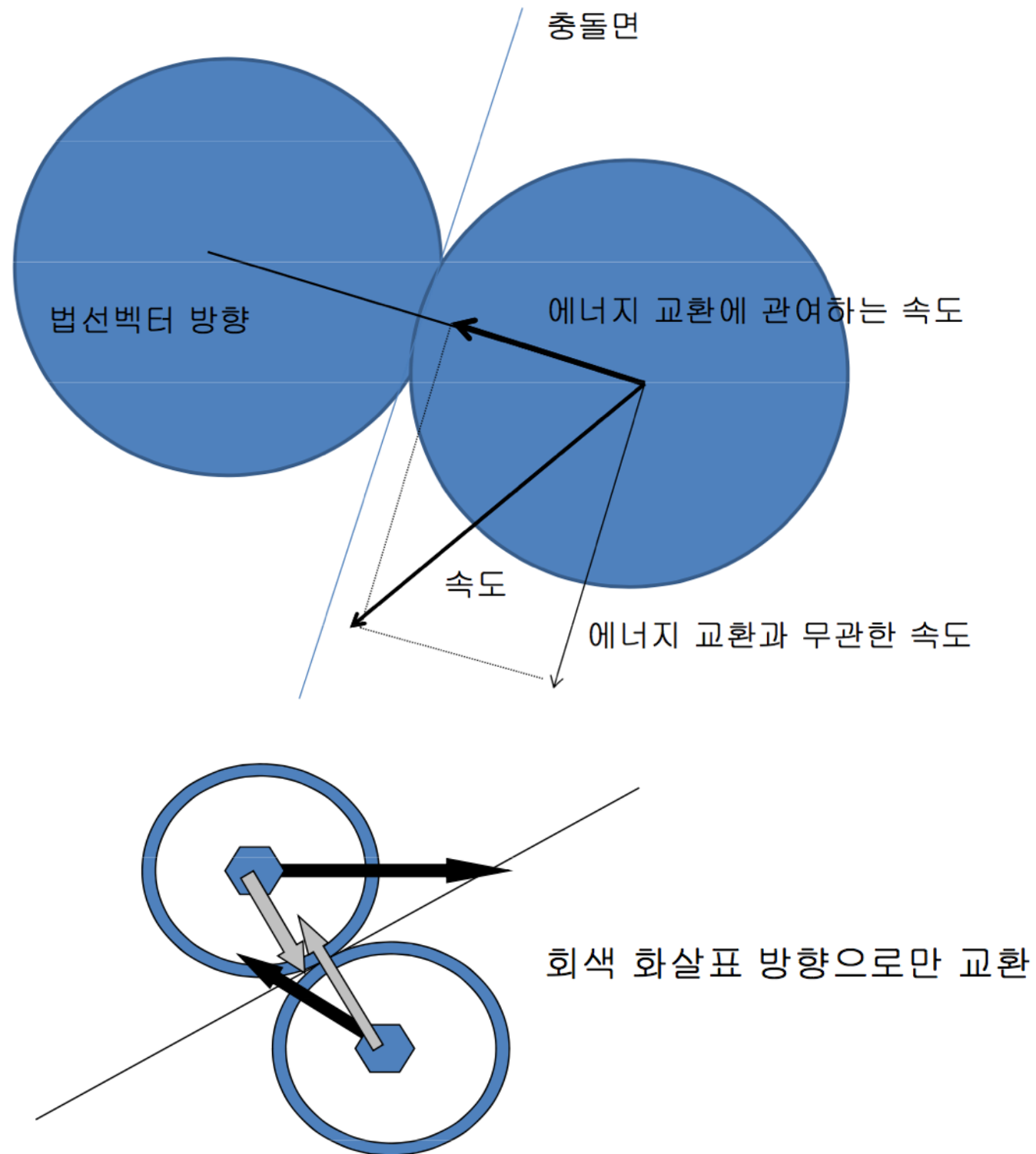
$$\mathbf{v}_1^+ = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1^- + 2m_2\mathbf{v}_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v}_2^+ = \frac{2m_1\mathbf{v}_1^- + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2^-}{m_1 + m_2}$$

속도의 변화

- ❖ 정면 충돌과 빗겨 맞는 충돌
 - ❖ 정면 충돌
 - ❖ 앞의 수식을 그대로 적용
 - ❖ 빗겨 맞는 충돌
 - ❖ 충돌 작용선을 알아야 함
 - ❖ 이 충돌 작용선으로 작용하는 속도 성분만 변경됨

속도의 변화



충돌 작용선

- ❖ 두 입자의 중심점
 - ❖ p_1, p_2
- ❖ 충돌 작용선의 방향
 - ❖ $N = (p_1 - p_2) / |p_1 - p_2|$
- ❖ 충돌의 감지
 - ❖ 입자의 반지름을 이용
 - ❖ r_1, r_2
 - ❖ $|p_1 - p_2| < r_1 + r_2$

충돌 작용선 방향의 속도

- ❖ 충돌 이전에 이 충돌 작용선 방향의 속도 크기

$$v_1^- = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N}$$

$$v_2^- = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{N}$$

- ❖ 충돌 처리

- ❖ 두 입자가 서로 접근할 때에만 처리 (감지는 거리로, 처리는 여부는 속도로)

$$v_2^- - v_1^- > 0$$

속도의 갱신

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - m_2)v_1^- + 2m_2v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - m_1)v_2^- + 2m_1v_1^-}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - v_1^- \mathbf{N} + v_1^+ \mathbf{N}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - v_2^- \mathbf{N} + v_2^+ \mathbf{N}$$

물리기반 모델링

비탄성 충돌

동명대학교
강영민

충격량과 탄성 계수

❖ 충격량(impulse)

❖ J

❖ 운동량의 변화

❖ $J = m(v_+ - v_-)$

충격량 J를 알면

❖ $v_+ = J/m + v_-$

❖ 탄성 계수

❖
$$\epsilon = \frac{-(v_{1+} - v_{2+})}{v_{1-} - v_{2-}}$$

충격량과 탄성의 관계

❖ 3개의 식이 필요

$$\begin{array}{lcl} |\mathbf{J}| = m_1(v_{1+} - v_{1-}) & \rightarrow & v_{1+} = |\mathbf{J}|/m_1 + v_{1-} \\ -|\mathbf{J}| = m_1(v_{2+} - v_{2-}) & & v_{2+} = -|\mathbf{J}|/m_1 + v_{2-} \\ \epsilon = \frac{-(v_{1+} - v_{2+})}{v_{1-} - v_{2-}} & & \epsilon = \frac{-(v_{1+} - v_{2+})}{v_{1-} - v_{2-}} \\ & & \epsilon(v_{1-} - v_{2-}) = -(v_{1+} - v_{2+}) \end{array}$$

충격량

❖ 충격량과 충돌이전 속도의 관계

$$\epsilon(v_{1-} - v_{2-}) = -(|\mathbf{J}|/m_1 + v_{1-} + |\mathbf{J}|/m_2 - v_{2-})$$

$$\epsilon(v_{1-} - v_{2-}) = -(|\mathbf{J}|(1/m_1 + 1/m_2) + v_{1-} - v_{2-})$$

❖ 충격량의 크기

$$|\mathbf{J}| = (1 + \epsilon)(v_{1-} - v_{2-})/(1/m_1 + 1/m_2)$$

속도의 갱신

❖ 충돌한 방향으로 속도의 갱신

$$v_{1+} = v_{1-} + |\mathbf{J}|/m_1$$

$$v_{2+} = v_{2-} - |\mathbf{J}|/m_2$$