물리기반모델링

1.3 역학과 수치적분

동명대학교
강영민

역학

- 역학
  - 힘에 기반하여 운동을 이해
- 중요한 공식 (뉴턴의 제2법칙)
  - f = ma
- 강체는.... 회전힘 = 회전질량*회전가속

$$\tau = \mathbf{I}\dot{\omega}$$

운동방정식의 적분

- 뉴턴의 운동 제2법칙
  - f = ma
- 다시 말하면…

$$\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

- dv = ?

$$\frac{\mathbf{f}dt}{m} = d\mathbf{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathbf{f}dt}{m} = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$

힘이 (이 시간 동안) 상수일 경우

$$\frac{\mathbf{f}}{m}(t_2 - t_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

$$\frac{\mathbf{f}}{m}\Delta t = \Delta\mathbf{v}$$

초기 조건 문제

- 초기 조건
  - x(t), v(t)
  - 시간 t에서의 위치와 속도
- 문제
  - 조금의 시간 dt가 흐른 뒤를 예측
  - 예측의 대상 위치 x(t+dt)와 속도 v(t+dt)를 구하기
- x(t+dt), v(t+dt)를 초기 조건으로 예측을 반복

속도의 갱신

- 속도의 초기 조건
  - v1 = v(t)
- 찾아야 하는 속도
  - v2 = v(t+dt)

$$\frac{\mathbf{f}}{m}(t_2 - t_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

$$\frac{\mathbf{f}}{m}\Delta t = \Delta \mathbf{v}$$

- 다음 프레임(t+dt)에서의 속도

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{f}(t)}{m}\Delta t$$

- 혹은

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t)\Delta t$$

위치의 갱신

- 속도와 위치

$$\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt \qquad\qquad \mathbf{v}dt = d\mathbf{s}$$

- 수치 적분

$$\mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t = \Delta\mathbf{s}$$

- 시간 t에서 가해지는 힘 혹은 가속도를 알 수 있다면
    - 시간 t+dt에서의 위치와 속도를 추정할 수 있다.

실시간 시뮬레이션

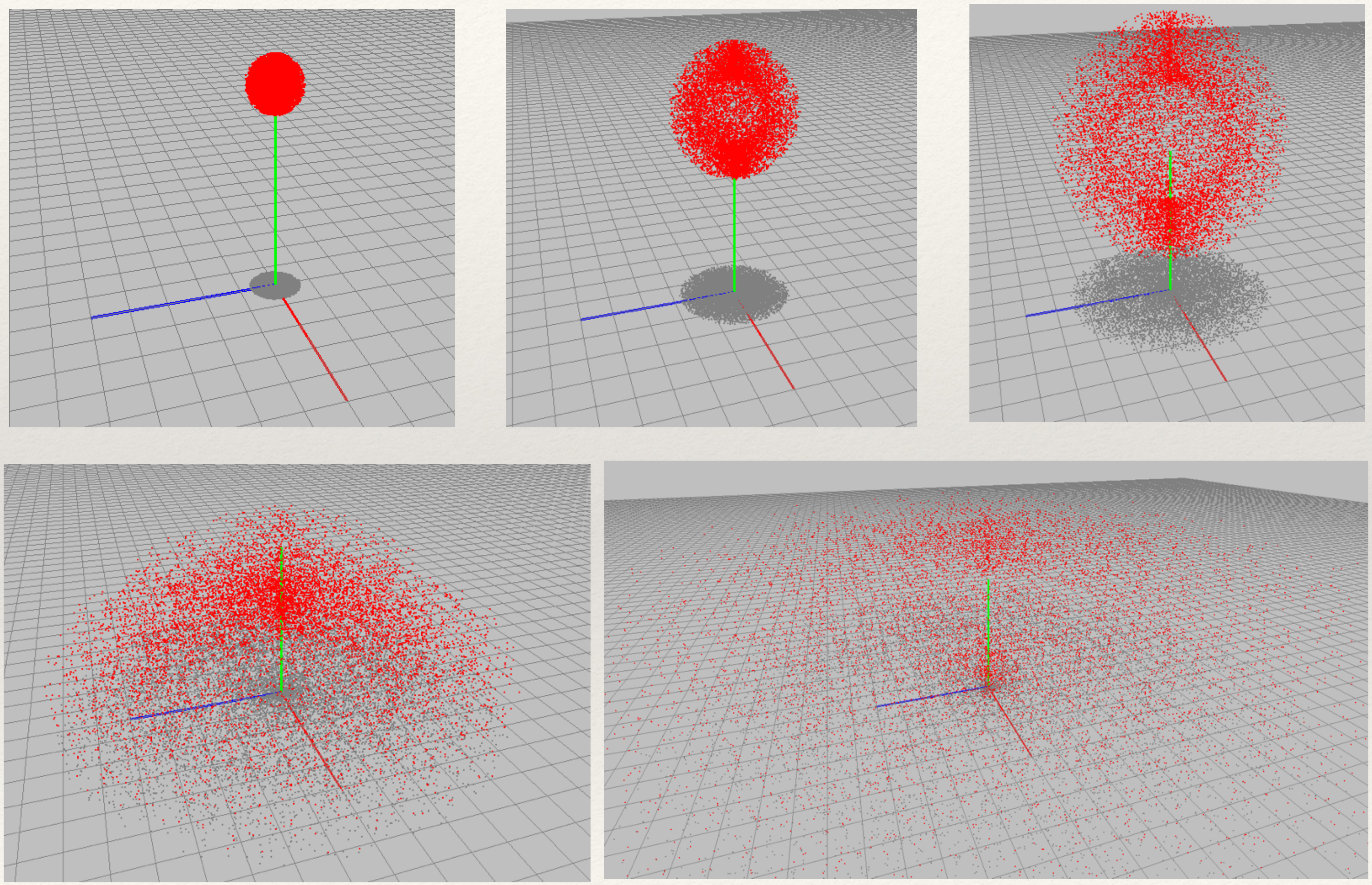
- 힘을 계산한다: f
- 가속도를 계산한다: a = f/m
- 정해진 시간 간격이 흐른 뒤의 속도를 계산한다.
    - 오일러 적분

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}\Delta t$$

- 시간 간격이 흐른 뒤의 위치도 계산한다.
    - 오일러 적분

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t$$

결과



물리기반 모델링

1.4 다양한 힘 모델

동명대학교 게임공학과
강영민

힘

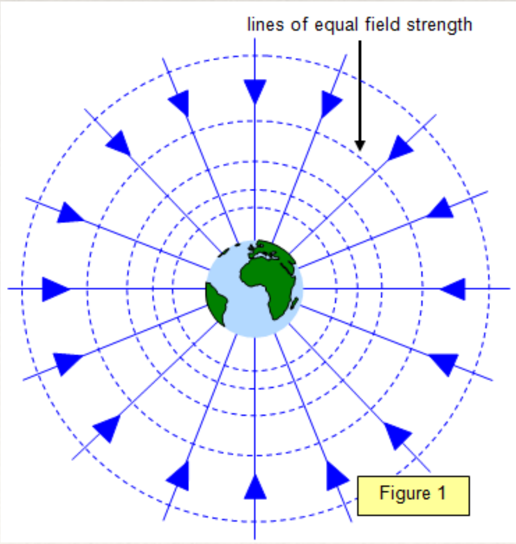
- 힘은
    - 운동을 유발한다.
- 역학에서 매우 중요하다.
- 다양한 모델이 존재한다.

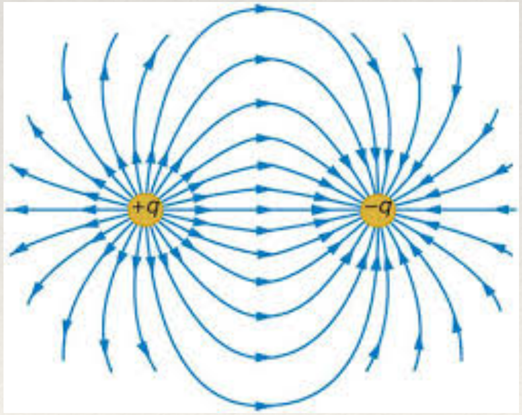
다룰 개념들

- 역장(힘의 장): 예 - 중력
- 마찰: 운동에 저항하는 접촉력
- 유체 항력: 유체 내에 움직이는 물체에 가해지는 저항력
- 압력: 단위 면적 당 가해지는 힘
- 부력: 유체에 잠긴 객체를 “위로” 밀어 올리는 힘
- 스프링-댐퍼: 객체를 탄성으로 묶어 놓는 힘
- 회전력: 물체를 회전하게 만드는 “힘의 모멘트”

힘의 장

- 힘의 장(force field)
  - 물체에 가해지는 힘을 표현하는 벡터의 장
- 좋은 예
  - 중력장
  - 전자기장





Gravitational force field

- 만유 인력

$$|\mathbf{f}_u| = Gm_1m_2/r^2$$

  - G: 중력계수 $6.673 \times 10^{-11}(N \cdot m^2)/kg^2$
  - r: 두 질량 사이의 거리
  - m_{1,2}: 각각의 질량
- 지구에서의 중력
  - 지구의 질량 : $5.98 \times 10^{24}kg$
  - 지구 반지름: $6.38 \times 10^6 m$
  - 중력 가속도

$$\frac{Gm_{earth}}{r^2} \simeq (\frac{6.673 \times 5.98}{6.38^2}) \times 10m/s^2 \simeq 9.8034m/s^2$$

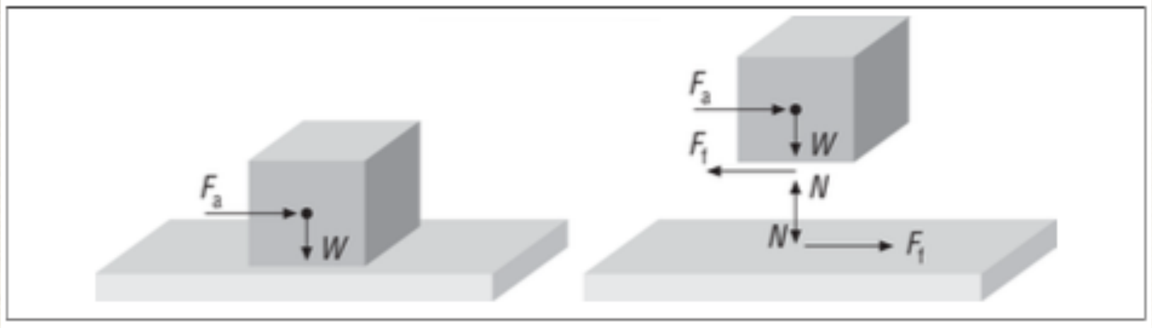
마찰력

- 접촉면에 의한 저항력
  - 접촉력
  - 법선 방향으로 가해지는 힘:N이 중요
- 두 종류의 마찰력
  - 정지 마찰력: 최대의 마찰력

    $$|\mathbf{f}_{max}| = \mu_s \mathbf{N}$$

  - 운동 마찰력

    $$|\mathbf{f}_k| = \mu_k \mathbf{N}$$



마찰계수

- 잘 알려진 표면의 마찰 계수
  - Ms: 정지마찰계수 / Mu: 운동마찰계수

Surface condition	M_s	M_u	% difference
Dry glass on glass	0.94	0.4	54%
Dry iron on iron	1.1	0.15	86%
Dry rubber on pavement	0.55	0.4	27%
Dry steel on steel	0.78	0.42	46%
Dry Teflon on Teflon	0.04	0.04	—
Dry wood on wood	0.38	0.2	47%
Ice on ice	0.1	0.03	70%
Oiled steel on steel	0.10	0.08	20%

유체 항력

- 마찰력과 유사
  - 마찰력은 항력에서 주요한 요소
  - 하지만 마찰력이 전부는 아님
- 천천히 움직이는 객체의 점성 항력: 층류(laminar) 상태
  - $f = -C\ v$
- 빠르게 움직이는 객체의 항력: 난류(turbulence) 상태
  - $f = -C\ v^2$

압력

- 압력은 힘이 아님
  - 압력 = 단위 면적 당 가해지는 힘
  - F = PA (힘 = 압력 x 면적)
  - P = F/A
- 압력이 중요한 시뮬레이션 예들
  - 보트, 호버크래프트...

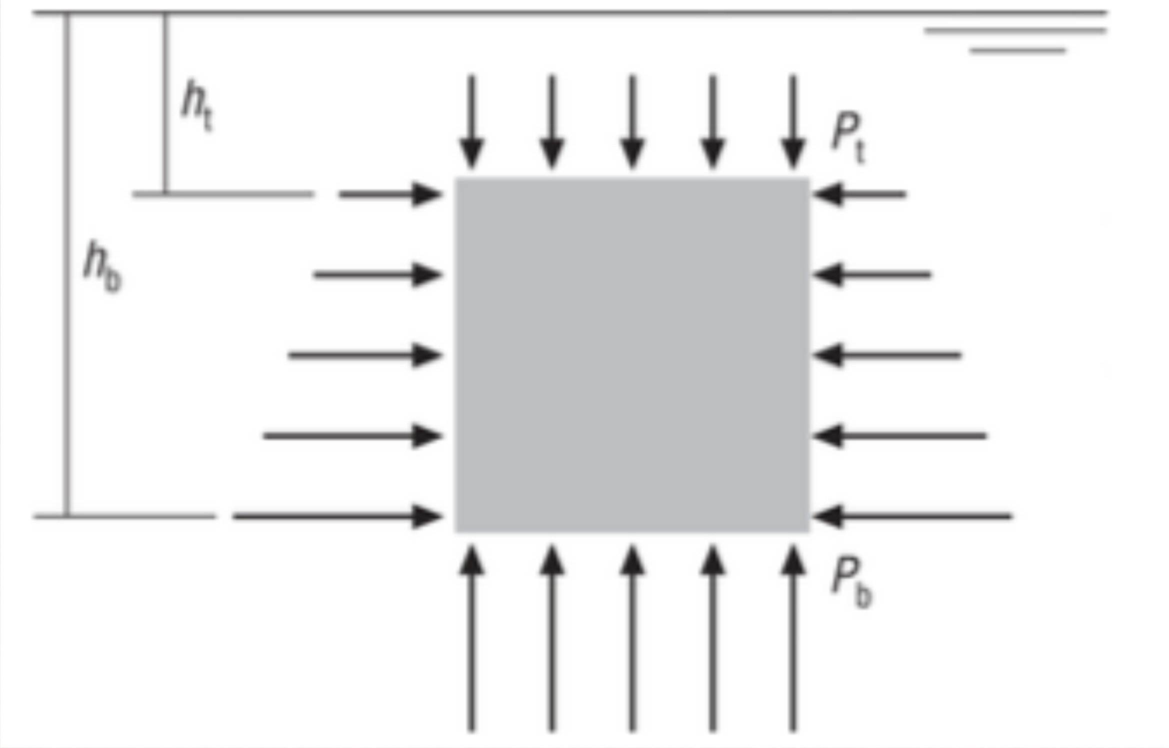
부력

- 유체 내의 서로 다른 압력에 의해 발생
- 수평으로 작용하는 힘의 총합 = 0
- 수직으로 작용하는 힘의 총합 = 아래쪽 면에 작용하는 힘 - 윗면에 작용하는 힘
- F = PA
- 압력: 밀도와 중력의 수
  - 위쪽에 작용하는 압력

$$\mathbf{P}_t = \rho \mathbf{g} h_t$$

  - 아래쪽에 작용하는 압력

$$\mathbf{P}_b = \rho \mathbf{g} h_b$$



부력

- 힘

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{P}_t A_t = \rho \mathbf{g} h_t s^2$$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{P}_b A_b = \rho \mathbf{g} h_b s^2$$

- 차이

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_b - \mathbf{f}_t &= \rho \mathbf{g} h_b s^2 - \rho \mathbf{g} h_t s^2 \\ &= \rho \mathbf{g}(h_b - h_t) s^2 \\ &= -\rho \mathbf{g} s^3 \\ &= -\rho \mathbf{g} V \quad (V : volume)\end{aligned}$$

스프링 힘

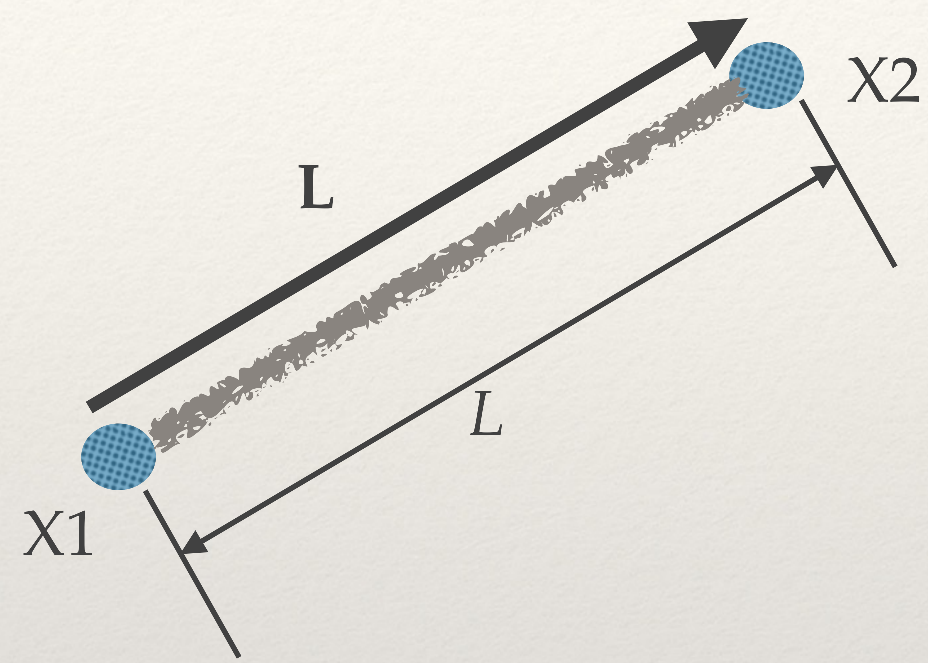
- 후크(Hookd)의 법칙
  - 스프링의 길이를 x만큼 늘이거나 줄이는 데에 필요한 힘은 이 길이에 비례한다.
    - f = -k x
    - k: 스프링 계수
- 아무런 힘이 가해지지 않은 상태에서의 스프링 길이 (휴지 상태 길이) : r
- 현재 스프링의 길이: L
  - 힘의 크기: $|\mathbf{f}| = k_s(L - r)$
  - 힘의 방향: 스프링 양쪽에 x1과 x2의 위치에 물체가 달려 있을 때
    - $\dfrac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$ $\qquad -\dfrac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$

댐퍼

- 스프링은 영원히 진동하지 않는다
  - 에너지가 사라짐
  - 간단한 모델
    - 댐핑 힘

$$\mathbf{f}_d = k_d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

스프링과 댐퍼



$$\mathbf{f}_1 = -(k_s(L - r) + k_d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \frac{\mathbf{L}}{L})\frac{\mathbf{L}}{L}$$

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$$

힘과 토크

- 힘
  - 선 가속도를 일으킨다
- 토크
  - 회전 가속을 일으킨다
- 토크: τ
  - 벡터이다
  - 크기
    - 얼마나 빠르게 회전 속도가 바뀌는지
      - |r x f |
  - 방향
    - 회전 축 = (r x f) / |r x f|

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$